

# GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHSRECHNUNG.

VON

ERHARD TORNIER

in KIEL.

## Inhaltsübersicht.

Einleitung.

### Kapitel I.

*Hilfsmittel aus der Mengenlehre.*

- § 1. Mengensysteme.
- § 2. Grundbegriffe der Punktmengenlehre.
- § 3. Stetige Abbildungen.

### Kapitel II.

*Der Nullraum.*

- § 4. Einfachste Eigenschaften dieses Raumes.
- § 5. Lebesguesche Masstheorie in diesem Raum.
- § 6. Peano-Jordansche Inhaltstheorien in diesem Raum.

### Kapitel III.

*Allgemeinste Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

- § 7. Vorbereitende Überlegungen und Formulierung der Axiome.
- § 8. Verallgemeinerung der Begriffe aus § 7 durch wahrscheinlichkeitstreue Abbildungen.
- § 9. Das Häufigkeitsmodell.
- § 10. Der Problembereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die möglichen Erweiterungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

### Kapitel IV.

*Sätze, die ohne Voraussetzung der Unabhängigkeit der Versuche gelten.*

- § 11. Additions- und Multiplikationssätze und die Bayessche Formel.
- § 12. Allgemeine Sätze über Veränderliche.

§ 13. Sätze über assoziierte<sup>1</sup> Veränderliche. (Das Gesetz der grossen Zahlen.)

§ 14. Weitere Sätze über assoziierte Veränderliche. (Der Integralsatz.)

#### Kapitel V.

*Sätze, die aus der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Versuche folgen.*

§ 15. Begriff der Unabhängigkeit.

§ 16. Folgerungen aus den Sätzen über assoziierte Veränderliche.

§ 17. Die Zahlenreihe als Modell eines Wahrscheinlichkeitsfeldes.

Tabelle der durchgehend gebrauchten Symbole.

### Einleitung.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben und die Konsequenzen dieser Grundlegung bis zum Beweis der wichtigsten Sätze lückenlos zu verfolgen. Eine solche Arbeit schien mir nicht unnötig, da bisher die Wahrscheinlichkeitsrechnung wohl das axiomatisch am schwächsten fundierte Gebiet der Mathematik ist, ein Mangel, der bei der dauernd wachsenden praktischen Bedeutung des Gebiets wohl der Abhilfe bedarf.

Da die Front der an der Wahrscheinlichkeitsrechnung Interessierten von den Philosophen über die Mathematiker bis zu Vertretern der beschreibenden Naturwissenschaften reicht, glaubte ich, der beiden Flügel wegen fast lehrbuchartige Ausführlichkeit wählen und alle Hilfsmittel in der Arbeit selbst kurz darstellen zu sollen, so dass sie ohne Heranziehung weiterer Literatur und ohne spezielle Vorkenntnisse lesbar ist. Ich glaubte aber auch den Mathematikern gegenüber diesen Weg wählen zu dürfen, da er nur die Hinzunahme der drei ersten verhältnismässig kurzen Paragraphen erforderte, die also naturgemäss dem Mathematiker nur altbekanntes wiederholen.

Wo ich bekannte Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf axiomatischer Grundlage beweise, habe ich nur selten die z. Zt. allgemeinste Formulierung dieser Sätze gewählt, da die grössere Allgemeinheit meist durch analytische aber nicht prinzipielle Überlegungen sich ergibt und den Umfang der Arbeit nur vermehrt hätte, ohne prinzipiell Neues zu bringen.

Andererseits aber habe ich die Hoffnung, auch wissenschaftlich einige neue oder wenigstens bisher nie genügend betonte Sachverhalte im Laufe der systema-

---

<sup>1</sup> Anmerk. Wenn ich das, was man gemeinhin unabhängige Veränderliche nennt, als assoziierte Veränderliche bezeichne, so beabsichtige ich keine Änderung der wissenschaftlichen Terminologie, sondern wünsche nur aus didaktischen Gründen das Wort »unabhängig« für die Unabhängigkeit von Versuchen aufzusparen.

tischen Entwicklung aufzudecken. Von ihnen seien die meiner Ansicht nach wichtigsten hier kurz angedeutet:

Es sind verschiedene Wahrscheinlichkeitsrechnungen logisch einwandfrei durchführbar, ähnlich, wie es verschiedene Geometrien gibt (§§ 10, 17). Durch einen Vergleich, der nicht hinkt, sondern genau die Situation trifft, sei dies erläutert:

Die PEANO-JORDANSche Inhaltstheorie, für lineare Punktmengen z. B., kann zu wesentlich verschiedenen Inhaltstheorien erweitert werden, d. h. zu dem Körper der Mengen mit PEANO-JORDAN-Inhalt kann man eine Menge, die keinen solchen Inhalt hat, adjungieren und ihr nach Belieben irgend eine Zahl als »Inhalt« zuordnen, die zwischen ihrem inneren und äusseren Inhalt liegt, ohne in Widersprüche zu kommen. Man erhält so grössere Körper von Mengen mit Inhalten und alle Mengen des Grundkörpers haben stets den gleichen Inhalt, während der der anderen Mengen des erweiterten Körpers sowohl von der Wahl der adjungierten Menge, als auch von der Wahl des der adjungierten Menge in den genannten Grenzen willkürlich beilegbaren »Inhalts« abhängt. Genau entsprechend ist es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hier kann man einen im Vergleich den PEANO-JORDANSchen Inhaltsmengen entsprechenden kleinsten Bereich mit Körpereigenschaft von Eigenschaften abgrenzen, die Wahrscheinlichkeiten haben und in dem das Gesetz der grossen Zahlen gilt und kann diesen kleinsten Bereich durch Adjunktion nicht in ihm liegender Eigenschaften, denen man in weiten Grenzen willkürlich Zahlenwerte als Wahrscheinlichkeiten zuordnen darf, erweitern. Die gemeinhin ohne Begründung geübte Art der Erweiterung würde im obigen Vergleich der zu dem  $\sigma$ -Körper aller LEBESGUESch messbaren Mengen entsprechen. Sie täuscht dann eine zwangläufige Eindeutigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. In dieser Richtung liegen z. B. die bekannten, schönen Sätze von A. KHINTCHINE<sup>1</sup> und A. KOLMOGOROFF<sup>2</sup> über das »Gesetz des iterierten Logarithmus«, die in dem genannten kleinsten Eigenschaftsbereich — in dem wie gesagt das Gesetz der grossen Zahlen schon gilt — nicht beweisbar sind, aber bei gewissen Adjunktionen zu diesem Bereich beweisbar werden, während sie bei anderen Adjunktionen falsch sind. Ganz krass kann man den Sachverhalt so herausstellen: Das Gesetz der grossen Zahlen ist sowohl vollverträglich mit der üblichen Annahme (Richtung  $\rightarrow$  Masstheorie im Vergleich),

<sup>1</sup> A. KHINTCHINE: »Über das Gesetz der grossen Zahlen«. Math. Ann. 99.

<sup>2</sup> A. KOLMOGOROFF: »Über das Gesetz des iterierten Logarithmus«. Math. Ann. 101.

dass für einen richtigen Würfel (jede Seite Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$ ) die Wahrscheinlichkeit dafür 0 ist, dass in einer unendlichen Wurfserie von irgend einer freibleibenden Stelle ab nur noch die 3 fällt, als auch mit der entgegengesetzten Annahme, dass diese Wahrscheinlichkeit 1 ist.

Man könnte nun denken, dass es sich hier um eine zwecklose mathematische Spitzfindigkeit handelt. Abgesehen davon, dass es in Grundlagenfragen so etwas nicht gibt, sind die Anwendungsmöglichkeiten für die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsrechnungen bereits in der Zahlentheorie vorhanden (§ 17) und es ist anzunehmen, dass dort im Laufe der Zeit einer der ausgedehntesten Anwendungsgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich auftun wird und dass die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsrechnungen auch noch physikalische Anwendungen finden werden. Die Möglichkeit, strenge Beweise zahlentheoretischer Sätze durch Wahrscheinlichkeitsrechnung zu führen, schien mir prinzipiell bedeutungsvoll, deshalb ist sie in § 17 kurz behandelt.

Als weiterer Punkt sei das hier gefundene Ergebnis in Sachen »Häufigkeitstheorie« erwähnt. Es hat zwei Seiten: Den Gegnern der Häufigkeitstheorie gegenüber ist es ein Erfolg dieser Theorie, soweit sie, wie z. B. I. M. KEYNES<sup>1</sup> bezweifeln, dass die Häufigkeitstheorie die sogenannten Umkehrsätze liefern könne. Da hier parallel zu den mengentheoretischen Theorien -- sozusagen als Anschauungsmaterial (§ 9) -- Häufigkeitstheorien restlos durchgeführt werden, ist die Irrtümlichkeit dieses Einwurfs erwiesen. Für die Anhänger der Häufigkeitsauffassung dagegen ist das Ergebnis vernichtend, sofern sie irgend ein *mathematisches* Plus dieser Auffassung vor der mengentheoretischen behaupten, denn es hat sich gezeigt, dass die Häufigkeitstheorien, die hier durchgeführt werden, eineindeutig isomorph zu mengentheoretischen Theorien sind, und es scheint mir sicher, dass falls es überhaupt noch andere einwandfreie Häufigkeitstheorien geben sollte, immer das gleiche gelten wird, nämlich eineindeutige Isomorphie mit einer mengentheoretischen Theorie.

Ferner sei erwähnt, dass § 8 die von H. BRUNS eingeführte und von R. v. MISES durch Sammlung weiterer Fälle ergänzte Vorstellung der »Operation« durch den Begriff der wahrscheinlichkeitstreuen Abbildung systematisch vollendet.

Über die Kapitel IV, V ist als vielleicht bemerkenswert nur die allgemeine Formulierung des Gesetzes der grossen Zahlen (Satz 13, 5) und des Integralsatzes

---

<sup>1</sup> I. M. KEYNES: »Treatise on probability«, London 1921.

(Satz 14, 2) als Umkehrsätze zu erwähnen, die den direkten Schluss (Poissonsches Gesetz, etc.) als Spezialfall enthalten.

Auf Fragen der Anwendungen einzugehen lag nicht in meiner Absicht und erübrigte sich umsomehr, als kürzlich ein gerade in der Behandlung dieser Dinge ungemein reichhaltiges Buch erschienen ist.<sup>1</sup> Dasselbe gilt für historische Fragen.<sup>2</sup>

An der Entstehung dieser Arbeit ist Herr W. FELLER, Kiel, insofern sehr wesentlich beteiligt, als er mit mir zusammen die Masstheorie von § 5 zu anderen Zwecken entwickelt hat, eine Arbeit, bei der wir von Herrn TH. KALUZA, Kiel, sehr durch seinen schönen Beweis des unentbehrlichen Satzes 5, 1 gefördert wurden. Viele der oben nicht erwähnten Gedanken und Ansätze finden sich, allerdings oft sehr unvollständig, in früheren Arbeiten des Verfassers, jedoch liessen sich solche Wiederholungen kaum vermeiden, ohne das Ziel dieser Arbeit zu gefährden, das eben eine lückenlose Darstellung der ganzen Theorie erforderte.

## Kapitel I.

### Hilfsmittel aus der Mengenlehre.

#### § 1.

#### Mengensysteme.

Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei Mengen, so versteht man bekanntlich unter der Summe  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  die Menge der Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen angehören, unter dem Durchschnitt  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  aber die Menge der Elemente, die jeder der beiden Mengen angehören. Die Differenz  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  wird nur für den Fall erklärt, dass die Menge  $\mathfrak{A}$  jedes Element von  $\mathfrak{B}$  enthält und sie ist dann die Menge der Elemente, die zu  $\mathfrak{A}$  aber nicht zu  $\mathfrak{B}$  gehören.

Die Erklärung von Summe und Durchschnitt lässt sich offenbar auf beliebig viele (auch überabzählbar viele) Mengen ausdehnen.

Wie man mühelos einsieht, gelten für die Summen- und Durchschnittsbildung folgende Rechenregeln:

<sup>1</sup> R. v. MISES: Wahrscheinlichkeitsrechnung. F. Deuticke, Leipzig 1931.

<sup>2</sup> F. M. URBAN: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, Leipzig 1923.

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \end{array}} \right\} \textit{kommutative Gesetze.}$$

$$\begin{array}{l}
 (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \\
 (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \end{array}} \right\} \textit{assoziative Gesetze.}$$

$$\begin{array}{l}
 (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} \\
 \mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) \end{array}} \right\} \textit{distributive Gesetze.}$$

Diese Gesetze gelten offenbar auch für unendlich viele Mengen.

**Definition 1, 1.** Eine Menge, deren Elemente Mengen sind, heisst ein Mengensystem. Ein Mengensystem  $\Sigma$  heisst ein Ring, wenn mit je zwei Mengen aus  $\Sigma$  auch ihre Summe und ihr Durchschnitt zu  $\Sigma$  gehört. Ein Ring  $\Sigma$  heisst ein Körper, wenn mit je zwei Mengen aus  $\Sigma$ , deren eine die andere enthält, auch ihre Differenz zu  $\Sigma$  gehört. Ein Ring heisst ferner  $\sigma$ -Ring, wenn mit je abzählbar vielen Mengen des Ringes auch ihre Summe, dagegen  $\delta$ -Ring, wenn mit je abzählbar vielen Mengen des Ringes auch ihr Durchschnitt ihm angehört. Entsprechend heisst ein Körper  $\sigma$ -Körper, wenn mit je abzählbar vielen Mengen des Körpers auch ihre Summe, dagegen  $\delta$ -Körper, wenn mit je abzählbar vielen Mengen des Körpers auch ihr Durchschnitt ihm angehört.

Man erkennt leicht, dass die Definition des Körpers dahin eingeschränkt werden kann, dass mit je zwei Mengen eines Mengensystems auch ihre Summe und — falls sie existiert — auch ihre Differenz dem System angehören soll. Der Durchschnitt zweier Mengen nämlich ist stets durch Summen und Differenzen ausdrückbar, wie folgende Gleichung lehrt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - \mathfrak{A}\}.$$

Er gehört also von selbst zum System, falls man dieses durch Summen- und Differenzbildung nicht verlassen kann.

Als Beispiel für diese Begriffe sei zunächst das System  $\Sigma$  aller Teilmengen einer beliebigen Menge genannt.  $\Sigma$  ist offenbar Repräsentant jeder der angeführten Systemtypen.

Es soll jedoch noch für jede der Typen ein ihr charakteristisches Beispiel angegeben werden:

1) Ring, der weder  $\sigma$ -Ring noch  $\delta$ -Ring noch Körper ist.

$\mathfrak{A}_n$  sei die Menge der durch  $n$  teilbaren natürlichen Zahlen,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 $\Sigma$  sei die Gesamtheit der Summen von je endlich vielen  $\mathfrak{A}$ , wobei jede Summe

mindestens einen Summanden enthalten soll.  $\Sigma$  enthält also nicht die leere Menge. Dass  $\Sigma$  Ring ist, ist klar. Körper ist  $\Sigma$  nicht, weil durch Subtraktion einer Menge aus  $\Sigma$  von sich selbst die leere Menge entsteht.  $\delta$ -Ring ist  $\Sigma$  nicht, weil offensichtlich  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \dots$  leer ist.  $\sigma$ -Ring ist  $\Sigma$  nicht, weil  $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 + \dots$  alle natürlichen Zahlen bis auf die 1 enthält und jede Summe von endlich vielen  $\mathfrak{A}_n$  ( $n \neq 1$ ) offenbar unendlich viele natürlichen Zahlen nicht enthält. Die eben genannte Summe lässt sich also nicht als Summe von endlich vielen  $\mathfrak{A}_n$  darstellen.

2)  $\delta$ -Ring, der weder  $\sigma$ -Ring noch Körper ist.

$\mathfrak{A}_n = (1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .  $\Sigma$  sei das System aller  $\mathfrak{A}_n$ . Wie man sofort sieht, ist  $\Sigma$  ein  $\delta$ -Ring. Körper ist  $\Sigma$  nicht, weil es nicht die leere Menge enthält.  $\sigma$ -Ring ist  $\Sigma$  nicht, da  $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \dots$  nicht zu  $\Sigma$  gehört.

3)  $\sigma$ -Ring, der weder  $\delta$ -Ring noch Körper ist.

$\mathfrak{A}_n = (n, n+1, n+2, \dots)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .  $\Sigma$  sei das System aller  $\mathfrak{A}_n$ . Wie man sofort sieht, ist  $\Sigma$  ein  $\sigma$ -Ring. Körper ist  $\Sigma$  nicht, weil es nicht die leere Menge enthält.  $\delta$ -Ring ist  $\Sigma$  nicht, weil  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \dots$  leer ist.

4) Körper, der weder  $\sigma$ - noch  $\delta$ -Körper ist.

$\mathfrak{A}$  sei eine beliebige durch 2 Rationalzahlen begrenzte Zahlenmenge inkl. der linken, exkl. der rechten Grenze.  $\Sigma$  sei das System aller Summen von je endlich vielen  $\mathfrak{A}$  und ferner enthalte  $\Sigma$  die leere Menge.

$\delta$ -Körper ist  $\Sigma$  nicht, wie die Folge  $\mathfrak{A}_n = \left(0, 1 + \frac{1}{2^n}\right)$  lehrt; dass  $\Sigma$  nicht  $\sigma$ -Körper ist, ist trivial.

5)  $\delta$ -Körper, der nicht  $\sigma$ -Körper ist.

$\Sigma$  sei das System aller endlichen Teilmengen einer unendlichen Menge. Dies Beispiel bedarf keiner Erläuterung.

Wie der Leser selbst überlegen möge, sind hiermit alle Möglichkeiten bis auf eine erschöpft. *Es fehlt nur noch ein Beispiel für einen  $\sigma$ -Körper, der nicht  $\delta$ -Körper ist.* Der folgende Satz lehrt, dass es ein solches Beispiel nicht gibt.

**Satz 1, 1.** *Jeder  $\sigma$ -Körper ist  $\delta$ -Körper.*

Beweis: Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Mengenfolge des  $\sigma$ -Körpers, so gehört ihm auch an

$$\mathfrak{A}'_n = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ferner ist

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \dots = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \dots$$

und

$$\mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \dots = \mathfrak{A}'_1 - \{(\mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A}'_2) + (\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'_3) + (\mathfrak{A}'_3 - \mathfrak{A}'_4) + \dots\}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen möge sich der Leser selbst klar machen. Da die rechte Seite der letzten Gleichung eine Menge des  $\sigma$ -Körpers darstellt, gehört ihm nach der vorhergehenden Gleichung auch  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \dots$  an und der Satz ist bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, dass jeder  $\sigma$ -Körper auch noch gewisse andere mit Hilfe seiner Mengen erklärte sehr wichtige Mengen enthält. Sie führen wir ein durch

**Definition 1, 2.** Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Mengenfolge, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n \quad \text{resp.} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$$

die Menge der Elemente, die »fast allen« (allen bis auf endlich viele) resp. unendlich vielen  $\mathfrak{A}_n$  angehören. Falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$$

heißt die Mengenfolge konvergent und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n.$$

Wir geben zunächst Beispiele für diese Begriffe.  $\mathfrak{A}$  sei die Menge der Dezimalbruchentwickelungen der Zahlen zwischen 0 und 1.  $\mathfrak{A}_n$  sei die Menge der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die bis zur  $n$ -ten Stelle nach dem Komma (diese inkl.) die Ziffer 2 eine gerade Anzahl von Malen aufweisen. (0 soll nicht als gerade Zahl gelten.) Dann ist

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$ : Menge der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die die Ziffer 2 eine gerade Anzahl von Malen enthalten.

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$ : Menge der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die die Ziffer 2 eine gerade Anzahl von Malen oder unendlich oft enthalten.

Diese Folge  $\{\mathfrak{A}_n\}$  ist somit nicht konvergent.

Wir betrachten noch ein Beispiel für eine konvergente Mengenfolge.

Wir gehen von derselben Menge  $\mathfrak{A}$  aus und setzen fest:  $\mathfrak{A}'_n$  sei die Menge der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die bis zur  $n$ -ten Stelle inkl. nach dem Komma die Ziffer 2 genau 7-mal enthalten. Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}'_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}'_n$ : Menge der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die die Ziffer 2 genau 7-mal enthalten.



Wir beweisen jetzt einen Satz, der einen Zusammenhang von grösster Wichtigkeit zwischen diesen Limesbegriffen und den  $\sigma$ -Körpern aufdeckt.

**Satz 1, 2.** *Ist  $\Sigma$  ein  $\sigma$ -Körper und  $\{\mathfrak{A}_n\}$  irgendeine Mengenfolge aus  $\Sigma$ , so gehört sowohl*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n \text{ als auch } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n$$

*ebenfalls zu  $\Sigma$ .*

Beweis. Wir setzen

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \mathfrak{A}_n + \mathfrak{A}_{n+1} + \mathfrak{A}_{n+2} + \dots \\ \mathfrak{D}_n &= \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{A}_{n+2} \dots \end{aligned}$$

Nach Satz 1, 1 sind dies Mengen aus  $\Sigma$ .

Nach Definition 1, 2 folgt sofort die Gültigkeit nachstehender Gleichungen

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n &= \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3 + \dots \end{aligned}$$

Da beidemale die rechten Seiten Elemente von  $\Sigma$  darstellen, ist unser Satz bewiesen.

Offenbar enthält dieser Satz den vorigen als Spezialfall.

Die wichtige Eigenschaft der  $\sigma$ -Körper, die wir kennen gelernt haben, ist eine gewisse Abgeschlossenheit, die darin besteht, dass man durch diese Grenzprozesse und auch die elementaren mengentheoretischen Operationen nie aus dem  $\sigma$ -Körper herauskommt, wenn man in ihm zu operieren beginnt. Die Situation ähnelt der beim Körper der komplexen Zahlen, in dem man bekanntlich auch fast uneingeschränkt rechnen kann, ohne ihn zu verlassen.

Zum Abschluss dieses Paragraphen beweisen wir noch einen auf die Definition 1, 1 bezüglichen Existenzsatz.

**Satz 1, 3.** *Zu jedem vorgegebenen Mengensystem  $\Sigma$  gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Bereich  $\Sigma'$  jeder der in Definition 1, 1 genannten Typen, der  $\Sigma$  enthält;  $\Sigma'$  ist dann also in jedem Bereich des gewählten Typs, der  $\Sigma$  enthält, auch enthalten.*

Beweis. Die Existenz z. B. eines kleinsten Ringes  $\Sigma'$  über  $\Sigma$  erkennt man so:  $S$  sei die Summe aller Mengen aus  $\Sigma$ .  $\mathfrak{S}$  sei das System aller Teilmengen von  $S$ . Offensichtlich ist dann  $\mathfrak{S}$  ein Ring, der  $\Sigma$  enthält. Wir bilden nun den

Durchschnitt  $\Sigma'$  aller in  $\mathfrak{S}$  enthaltenen Ringe, die ihrerseits  $\Sigma$  enthalten. Aus Definition 1, 1 folgt, dass  $\Sigma'$  Ring ist und  $\Sigma$  enthält.  $\Sigma'$  ist aber auch der kleinste Ring dieser Art. Ist nämlich  $\Sigma''$  ein Ring, der  $\Sigma$  enthält, so ist der Durchschnitt  $\mathfrak{S}\Sigma''$  ein Teilring aus  $\mathfrak{S}$ , der ebenfalls  $\Sigma$  enthält. Nach Erklärung von  $\Sigma'$  enthält somit  $\mathfrak{S}\Sigma''$  auch  $\Sigma'$ , a fortiori ist also  $\Sigma'$  in  $\Sigma''$  enthalten.

Dieser Beweis gilt wörtlich auch für jede andere der in Definition 1, 1 genannten Typen, da  $\mathfrak{S}$  ja Repräsentant aller Typen ist, und der Durchschnitt von Systemen eines bestimmten Typs wieder ein System dieses Typs ist.

## § 2.

### Grundbegriffe der Punktmengenlehre.

**Definition 2, 1.** Eine Menge  $\mathfrak{M}$  heisst ein metrischer Raum, wenn jedem Elementpaar  $(x, y)$  der Menge eine reelle durch  $xy$  bezeichnete Zahl als Entfernung so zugeordnet ist, dass gilt

- a)  $xx = 0$
- β)  $xy = yx > 0$  für  $x \neq y$
- γ)  $xy + yz \geq xz$ .

Die Elemente von  $\mathfrak{M}$  pflegt man dann Punkte zu nennen.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass jede Teilmenge eines metrischen Raumes auch metrischer Raum bei der ursprünglichen Entfernungsfestsetzung ist. Als Beispiel wählen wir für  $\mathfrak{M}$  etwa die Gerade und nehmen als Entfernung zweier Punkte ihren Abstand. Diese Festsetzung genügt offenbar den Bedingungen a)–γ) und macht die Gerade zu einem metrischen Raum. Als weiteres Beispiel wählen wir für  $\mathfrak{M}$  die Ebene und erklären die Entfernung zweier Punkte als ihren Abstand. Auch dies gibt einen metrischen Raum, denn γ) bedeutet hier nur, dass die Summe zweier Dreiecksseiten nie kleiner als die dritte ist. (Daher nennt man γ) auch das *Dreiecksaxiom*.) Entsprechend kann man beim dreidimensionalen Raum vorgehen u. s. w.

Kapitel II wird uns dann ein ganz anderes Beispiel eines metrischen Raumes kennen lehren, das erst so richtig die volle Allgemeinheit dieses Begriffes hervortreten lässt.

**Definition 2, 2.** Ist  $x$  ein Punkt aus  $\mathfrak{M}$  und  $\varrho > 0$ , so heisst die Menge derjenigen Punkte  $y$  von  $\mathfrak{M}$ , für die  $xy < \varrho$  ist, die Umgebung von  $x$  mit dem Radius  $\varrho$ .

Es ist selbstverständlich, dass für einen Punkt  $x$  die Umgebung vom Radius  $\varrho$  davon abhängt, als in welchem Raum liegend  $x$  angesehen wird. Betrachten wir auf der Geraden den Punkt  $x = 1$  und setzen  $\varrho = \frac{1}{2}$ , so besteht die Umgebung von 1 vom Radius  $\frac{1}{2}$  aus allen Punkten  $\xi$ , für die gilt  $\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{2}$ . Betrachten wir jedoch nur die ganzzahligen Punkte der Geraden als metrischen Raum  $\mathfrak{M}$ , so besteht jetzt die entsprechende Umgebung nur aus dem Punkte 1 selbst.

Mit Hilfe dieser Begriffe wollen wir nun die Punkte der Teilmengen eines metrischen Raumes klassifizieren. Dazu dient

**Definition 2, 3.** *Es sei  $\mathfrak{M}'$  eine Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  und  $x$  sei ein Punkt von  $\mathfrak{M}'$ . Gibt es eine Umgebung von  $x$  in bezug auf  $\mathfrak{M}$ , deren Punkte alle zu  $\mathfrak{M}'$  gehören, so heisst  $x$  ein innerer Punkt von  $\mathfrak{M}'$ , anderenfalls heisst  $x$  ein Randpunkt von  $\mathfrak{M}'$ . Die Summe der Randpunkte von  $\mathfrak{M}'$  und von  $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$  heisst die Begrenzung von  $\mathfrak{M}'$ .*

Die Begrenzung ist offenbar symmetrisch zu  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$  erklärt, so dass also stets die Begrenzung von  $\mathfrak{M}'$  auch Begrenzung von  $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$  ist. Da diese Begriffe mit Hilfe des Umgebungsbegriffs erklärt sind und dieser von der Wahl von  $\mathfrak{M}$  abhing, ist zu vermuten, dass auch sie von der Wahl von  $\mathfrak{M}$  abhängen werden. Wählen wir z. B. für  $\mathfrak{M}$  einen Kreis der Ebene samt Peripherie definieren die Entfernung als Abstand und setzen  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$ , so hat  $\mathfrak{M}'$  nur innere Punkte. Wählen wir aber für  $\mathfrak{M}$  die ganze Ebene und  $\mathfrak{M}'$  wie eben, so sind jetzt die Punkte der Peripherie Randpunkte. Bei der ersten Wahl war die Begrenzung von  $\mathfrak{M}'$  leer, bei der zweiten Wahl ist sie die Peripherie desselben Kreises.

Wir geben noch ein Beispiel für diese Begriffe: Es sei  $\mathfrak{M}$  die Gerade und  $\mathfrak{M}'$  die Menge der Rationalpunkte. Dann ist offenbar jeder Punkt von  $\mathfrak{M}'$  Randpunkt von  $\mathfrak{M}'$  aber auch jeder Punkt von  $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$  Randpunkt dieser Menge. Die Begrenzung von  $\mathfrak{M}'$  ist somit die ganze Gerade.

Die Klassifizierung der Punkte der Teilmenge  $\mathfrak{M}'$  von  $\mathfrak{M}$  in innere und Randpunkte ermöglicht natürlich auch eine Klassifizierung der Teilmengen  $\mathfrak{M}'$  von  $\mathfrak{M}$  danach, wie ihre Punkte beschaffen sind. Man erklärt

**Definition 2, 4.** *Enthält die Teilmenge  $\mathfrak{M}'$  von  $\mathfrak{M}$  keinen Randpunkt, so heisst  $\mathfrak{M}'$  eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge.*

*$\mathfrak{M}$  selbst und die leere Menge sind somit stets in  $\mathfrak{M}$  offen.*

Da die Offenheit mit Hilfe des Randpunktes definiert ist und dieser Begriff von der Wahl von  $\mathfrak{M}$  abhing, wird auch die Offenheit ein Relativbegriff sein. So ist im ersten Beispiel zur vorigen Definition der Kreis  $\mathfrak{M}'$  eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge, während derselbe Kreis bei der dann folgenden Wahl von  $\mathfrak{M}$  nicht in  $\mathfrak{M}$  offen ist, weil jetzt seine Peripherie aus Randpunkten besteht.

Für die in  $\mathfrak{M}$  offenen Mengen gilt

**Satz 2, 1.** *Ist  $\Sigma$  ein System von in  $\mathfrak{M}$  offenen Mengen, so ist auch die Summe der Mengen aus  $\Sigma$  eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge.*

Beweis. Jeder Punkt  $x$  der Summe liegt in mindestens einer der Mengen aus  $\Sigma$ . In  $\mathfrak{M}$  hat er eine Umgebung, die ganz dieser Menge aus  $\Sigma$  angehört, da er ja kein Randpunkt, somit ein innerer Punkt ist. Diese Umgebung von  $x$  liegt aber auch ganz in der Summe,  $x$  ist somit innerer Punkt der Summe.

**Satz 2, 2.** *Der Durchschnitt von zwei in  $\mathfrak{M}$  offenen Mengen ist eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge.*

Beweis. Ist der Durchschnitt leer, so ist der Satz richtig. Ist aber  $x$  ein Punkt des Durchschnitts, so gibt es eine Umgebung vom Radius  $\varrho$ , die ganz zur ersten Menge und eine andere Umgebung vom Radius  $\varrho'$ , die ganz zur zweiten Menge gehört. Ist  $\varrho' \leq \varrho$ , so gehört diese ganze Umgebung von  $x$  also auch dem Durchschnitt an, der somit nur innere Punkte enthält, also in  $\mathfrak{M}$  offen ist.

Diese beiden Sätze ergeben zusammen:

**Satz 2, 3.** *Die in  $\mathfrak{M}$  offenen Mengen bilden einen  $\sigma$ -Ring.*

Es ist jedoch zu beachten, dass dieser Satz weniger aussagt, als die beiden vorigen zusammen, da Satz 2, 1 lehrt, dass auch die Summe von überabzählbar vielen offenen Mengen offen ist, während Satz 2, 3 dies nur für abzählbar viele offene Mengen ausspricht.

Um eine weitere wichtige Mengenart zu definieren benötigen wir einen neuen grundlegenden Begriff.

**Definition 2, 5.** *Es sei  $\mathfrak{M}'$  Teilmenge von  $\mathfrak{M}$  und  $x$  ein Punkt von  $\mathfrak{M}$ . Liegen in jeder Umgebung von  $x$  noch von  $x$  verschiedene Punkte von  $\mathfrak{M}'$ , so heisst  $x$  ein Häufungspunkt von  $\mathfrak{M}'$ .*

Beispiel: Ist  $\mathfrak{M}$  die Gerade und  $\mathfrak{M}'$  die Menge der Punkte  $\xi$ , für die gilt  $0 < \xi < 1$ , so ist jeder Punkt  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  Häufungspunkt von  $\mathfrak{M}'$ .

Auch die Menge aller Häufungspunkte von  $\mathfrak{M}'$  — jedenfalls soweit sie nicht Punkte von  $\mathfrak{M}'$  selbst sind — hängt von der Wahl von  $\mathfrak{M}$  ab und kann ev. durch

Einschränkung von  $\mathfrak{M}$  verkleinert werden. Dies ist z. B. der Fall, wenn man im vorigen Beispiel für  $\mathfrak{M}$  nicht die Gerade wählt, sondern  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$  setzt. Dann sind die Punkte 0 und 1, da sie ja nicht mehr dem Raum angehören, auch nicht mehr Häufungspunkte von  $\mathfrak{M}'$ .

**Definition 2, 6.** *Gehören alle Häufungspunkte der Teilmenge  $\mathfrak{M}'$  von  $\mathfrak{M}$  zu  $\mathfrak{M}$  selbst, so heisst  $\mathfrak{M}'$  in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen.*

*$\mathfrak{M}$  selbst und die leere Menge sind also stets in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen.*

Auch dieser Begriff ist relativ zur Wahl von  $\mathfrak{M}$ , da bei Vergrößerung von  $\mathfrak{M}$  neue Häufungspunkte von  $\mathfrak{M}'$  auftreten können, die nicht zu  $\mathfrak{M}'$  gehören, also die Abgeschlossenheit von  $\mathfrak{M}'$  zerstören. So ist z. B. die Menge  $\mathfrak{M}'$  aller Irrationalpunkte der Geraden in der Menge  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$  abgeschlossen, während sie das nicht ist, wenn man für  $\mathfrak{M}$  die ganze Gerade wählt. Die Situation ist somit hier ebenso wie bei den offenen Teilmengen von  $\mathfrak{M}$ , denn auch dort konnte die Offenheit ev. durch Vergrößerung von  $\mathfrak{M}$  zerstört werden.

Wir beweisen jetzt einen Satz, der den Zusammenhang zwischen den in  $\mathfrak{M}$  offenen und den in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen Mengen aufdeckt.

**Satz 2, 4.** *Die Differenz einer in  $\mathfrak{M}$  offenen und einer in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen Menge ist eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge. Die Differenz einer in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen und einer in  $\mathfrak{M}$  offenen Menge ist eine in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossene Menge. Der Typus der grösseren Menge bleibt also erhalten.*

Beweis. 1) Ist  $x$  ein Punkt der Differenz, so gehört  $x$  der offenen aber nicht der abgeschlossenen Menge an. Deshalb gibt es eine Umgebung von  $x$  in  $\mathfrak{M}$ , die ganz in der offenen Menge liegt und von der kein Punkt der abgeschlossenen angehört. Andernfalls hätte nämlich jede Umgebung von  $x$  Punkte, die zu der abgeschlossenen Menge gehören, also müsste nach Definition der Abgeschlossenheit  $x$  selbst zur abgeschlossenen Menge gehören, wäre also kein Punkt der Differenz. Diese ganze Umgebung von  $x$ , deren Existenz eben gezeigt wurde, liegt also auch in der Differenz, die somit in  $\mathfrak{M}$  offen ist.

2) Es sei  $x$  ein Häufungspunkt der Differenzmenge, der ihr nicht angehöre. Nach Definition des Häufungspunktes ist dann  $x$  a fortiori Häufungspunkt der linken abgeschlossenen Menge, also auch selbst Punkt dieser Menge. Da nun  $x$  nach Annahme nicht zur Differenz gehören soll, muss  $x$  auch Punkt der offenen Menge sein. Es gibt daher eine Umgebung von  $x$  vom Radius  $\varrho$ , die der offenen Menge ganz angehört, von der also kein Punkt zur Differenz gehören kann. Diese Umgebung enthielte somit keinen Punkt der Differenzmenge,  $x$  wäre also

entgegen der Annahme kein Häufungspunkt der Differenzmenge. Somit hat die Differenzmenge keinen Häufungspunkt, der ihr nicht angehört, sie ist also in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes werden sich nun aus den Sätzen über offene Mengen Sätze über abgeschlossene Mengen ergeben.

**Satz 2, 5.** *Ist  $\Sigma$  ein System von in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen Mengen, so ist auch der Durchschnitt der Mengen aus  $\Sigma$  eine in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossene Menge.*

Beweis. Ist  $\mathfrak{N}$  eine Menge aus  $\Sigma$ , so sei  $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = \mathfrak{Q}$ . Da  $\mathfrak{M}$  offen ist, ist nach Satz 2, 4  $\mathfrak{Q}$  in  $\mathfrak{M}$  offen. Es ist  $\mathfrak{M} - \mathfrak{Q} = \mathfrak{N}$ . Der Durchschnitt aller dieser Differenzen ist aber offensichtlich die Menge der Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die keiner der Mengen  $\mathfrak{Q}$  angehören. Er entsteht also aus  $\mathfrak{M}$  durch Subtraktion der Summe aller  $\mathfrak{Q}$ . Diese Summe ist nach Satz 2, 1 in  $\mathfrak{M}$  offen. Nach Satz 2, 4 folgt also, da  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen ist, dass der Durchschnitt abgeschlossen ist.

**Satz 2, 6.** *Die Summe von zwei in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen Mengen ist eine in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossene Menge.*

Beweis. In der Bezeichnung des vorigen Beweises haben wir zu bilden:  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{M} - \mathfrak{Q}')$ . Dies sind aber offenbar die Punkte von  $\mathfrak{M}$ , die nicht zum Durchschnitt  $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$  gehören. Da dieser nach Satz 2, 2 eine in  $\mathfrak{M}$  offene Menge ist, während  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen ist, folgt nach Satz 2, 4 die Behauptung.

Diese beiden Sätze ergeben zusammen:

**Satz 2, 7.** *Die in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossenen Mengen bilden einen  $\delta$ -Ring.*

Es ist jedoch zu beachten, dass dieser Satz weniger aussagt, als die beiden vorigen zusammen, da Satz 2, 5 lehrt, dass auch der Durchschnitt von überabzählbar vielen abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist, während Satz 2, 7 dies nur für abzählbar viele abgeschlossene Mengen ausspricht.

Wir haben Mengen kennen gelernt, die sowohl in  $\mathfrak{M}$  offen als auch in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen sind, z. B.  $\mathfrak{M}$  selbst und die leere Menge. Mengen dieser Eigenschaft werden später für uns sehr wichtig sein, deshalb definieren wir

**Definition 2, 7.** *Eine Menge, die sowohl in  $\mathfrak{M}$  offen als auch in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen ist, heisst  $a$ - $o$ -Menge in  $\mathfrak{M}$ .*

Für die  $a$ - $o$ -Mengen gilt

**Satz 2, 8.** *Die  $a$ - $o$ -Mengen in  $\mathfrak{M}$  bilden einen Körper.*

Beweis. Satz 2, 3 und Satz 2, 7 lehren, dass die  $a$ - $o$ -Mengen einen Ring bilden. Satz 2, 4 zeigt, dass dieser Ring ein Körper ist.

Die bisherigen Sätze gelten ganz allgemein für jeden metrischen Raum. Wir wollen nun noch einen für das folgende wichtigen Satz beweisen, der nur in solchen metrischen Räumen gilt, die noch gewissen Nebenbedingungen genügen. Um diese formulieren zu können, müssen wir zunächst einige neue Begriffe einführen.

**Definition 2, 8.** Eine Folge  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  von Punkten des metrischen Raumes  $\mathfrak{M}$  heisst eine *Fundamentalfolge*, wenn es für jedes vorgegebene  $\varepsilon > 0$  ein  $m(\varepsilon)$  gibt, so dass gilt

$$x_{m(\varepsilon)}x_n < \varepsilon \text{ für jedes } n \geq m(\varepsilon).$$

Beispiel: Wir wählen für  $\mathfrak{M}$  die Punkte  $\xi$ , für die  $0 < \xi < 1$  ist und setzen  $x_n = 1 : (n + 1)$ .

**Definition 2, 9.** Eine Folge  $\{x_n\}$  von Punkten aus  $\mathfrak{M}$  heisst *konvergent*, wenn es in  $\mathfrak{M}$  selbst einen Punkt  $x$  gibt, so dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

$x$  heisst dann der *Limes* der Punktfolge.

Ehe wir zeigen, dass es höchstens einen Limes geben kann, weisen wir auf folgendes hin:

Ob eine Folge Fundamentalfolge ist oder nicht, hängt nur von den Punkten der Folge selbst (und von der Entfernungsdefinition) ab, aber nicht davon, wie der Raum, dem die Folge angehört, gewählt wird. Ob jedoch eine Folge konvergent ist oder nicht, kann von  $\mathfrak{M}$  abhängen. Die Folge des vorigen Beispiels ist in dem dort gewählten  $\mathfrak{M}$  nicht konvergent, da  $\mathfrak{M}$  den Punkt 0 nicht enthält, sie ist jedoch konvergent, wenn für  $\mathfrak{M}$  alle Punkte  $\xi$  gewählt werden, für die gilt:  $0 \leq \xi < 1$ .

Wir zeigen nun noch, dass eine in  $\mathfrak{M}$  konvergente Punktfolge genau einen Limes hat. Gäbe es nämlich zwei Limespunkte  $x$  und  $y$ , so gilt nach Definition 2, 1  $\gamma$ ):

$$xx_n + x_ny \geq xy > 0.$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} yx_n = 0$$

ist dies unmöglich.

Auf Grund dieser Begriffe können wir jetzt eine wichtige Teilklasse der metrischen Räume festlegen.

**Definition 2, 10.** Ein metrischer Raum  $\mathfrak{M}$  heisst vollständig, wenn jede Fundamentalfolge aus  $\mathfrak{M}$  konvergiert.

Beispiele. Die Menge  $\mathfrak{M}$  der Punkte  $\xi: 0 \leq \xi \leq 1$  bildet einen vollständigen Raum, dagegen ist die Menge  $\mathfrak{M}$  der Punkte  $\xi: 0 < \xi < 1$  kein vollständiger Raum, weil in ihm die Folgen  $x_n = 1/(n+1)$  und  $x_n = 1 - 1/(n+1)$  z. B. nicht konvergent sind, trotzdem sie beide Fundamentalfolgen sind.

Ehe wir den angekündigten Satz über vollständige Räume aussprechen können, müssen wir noch einen Begriff einführen.

**Definition 2, 11.** Eine Teilmenge  $\mathfrak{M}'$  des Raumes  $\mathfrak{M}$  (der nicht vollständig zu sein braucht) heisst beschränkt, wenn die Entfernungen der Punktepaare von  $\mathfrak{M}'$  eine endliche obere Grenze haben. Diese heisst dann der Durchmesser von  $\mathfrak{M}'$ .

Beispiele:  $\mathfrak{M}$  sei die Gerade,  $\mathfrak{M}'$  ihre Rationalpunkte, dann ist  $\mathfrak{M}'$  nicht beschränkt. Ist jedoch  $\mathfrak{M}'$  die Menge der Rationalpunkte  $\xi$ , für die gilt:  $0 < \xi < 1$ , so ist  $\mathfrak{M}'$  beschränkt und hat den Durchmesser 1.

Der Satz, für den diese Begriffe eingeführt wurden, ist nun folgender

**Satz 2, 9.** In einem vollständigen Raum  $\mathfrak{M}$  hat eine absteigende Folge  $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2 \supseteq \mathfrak{M}_3 \supseteq \dots$  beschränkter in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossener Mengen, deren Durchmesser nach 0 konvergieren, genau einen gemeinsamen Punkt.

Beweis.  $d_n$  sei der Durchmesser von  $\mathfrak{M}_n$ ,  $x_n$  sei ein beliebiger Punkt aus  $\mathfrak{M}_n$ . Wir betrachten die Punktfolge  $\{x_n\}$ . Sie ist eine Fundamentalfolge, denn  $x_n$  hat von jedem Punkt  $x_{n+\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , der ja wegen  $\mathfrak{M}_n \supseteq \mathfrak{M}_{n+\lambda}$  auch in  $\mathfrak{M}_n$  liegt, höchstens die Entfernung  $d_n$  und nach Voraussetzung ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ . Diese

Fundamentalfolge ist aber konvergent, da  $\mathfrak{M}$  ein vollständiger Raum sein sollte. Es gibt also in  $\mathfrak{M}$  einen Limespunkt  $x$ . Wir wollen zunächst zeigen, dass  $x$  zu jedem  $\mathfrak{M}_n$ , also auch zum Durchschnitt aller  $\mathfrak{M}_n$  gehört. Jede Umgebung von  $x$  in  $\mathfrak{M}$  nämlich enthält nach Definition des Limes noch unendlich viele Punkte der Folge, also Punkte aus unendlich vielen Mengen  $\mathfrak{M}_n$  also der Monotonie der  $\mathfrak{M}_n$  wegen Punkte aus jedem  $\mathfrak{M}_n$ . Da die  $\mathfrak{M}_n$  in  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen sind, liegt also  $x$  in jeder der Mengen  $\mathfrak{M}_n$ . Ausser  $x$  kann es aber keinen zweiten Punkt  $y$  gleicher Art geben, weil dann immer wäre:  $d_n \geq xy$ , dies widerspricht der Voraussetzung  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ .



## § 3.

**Stetige Abbildungen.**

**Definition 3, 1.** Eine Menge  $\mathfrak{B}$  heisst *eindeutiges Bild* einer Menge  $\mathfrak{A}$ , wenn jedem Element  $x$  aus  $\mathfrak{A}$  eindeutig ein Element  $y$  aus  $\mathfrak{B}$  zugeordnet ist. Ist  $\mathfrak{B}'$  Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ , so heisst die Menge  $\mathfrak{A}'$  aller der Elemente von  $\mathfrak{A}$ , die Elementen von  $\mathfrak{B}'$  zugeordnet sind, das *Urbild* von  $\mathfrak{B}'$ .

Beispiel:  $\mathfrak{A}$  sei die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche,  $\mathfrak{B}$  die Menge der Dezimalbrüche, die nicht die Ziffer 5 enthalten. Die Vorschrift, dass jedem Element  $x$  von  $\mathfrak{A}$  das Element  $y$  von  $\mathfrak{B}$  zugeordnet werden soll, das aus  $x$  entsteht, wenn jede seiner Ziffern 5 durch die Ziffer 2 ersetzt wird, gibt eine eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{B}$ . Das Urbild von  $0,222 \dots$  z. B. ist die Menge der echten Dezimalbrüche, die nur die Ziffern 2 und 5 enthalten.

Die Zusammenhänge zwischen Bild und Urbild sind gegeben durch

**Satz 3, 1.** Es sei  $\mathfrak{B}$  *eindeutiges Bild* von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots$  seien Teilmengen von  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  seien Teilmengen von  $\mathfrak{A}$ .  $\varphi(\mathfrak{A}_\nu)$  sei das Bild von  $\mathfrak{A}_\nu$  (also Teilmenge von  $\mathfrak{B}$ ) und  $\psi(\mathfrak{B}_\mu)$  sei das Urbild von  $\mathfrak{B}_\mu$  (also Teilmenge von  $\mathfrak{A}$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(\mathfrak{B}_\mu)) &= \mathfrak{B}_\mu \\ \varphi(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \dots) &= \varphi(\mathfrak{B}_1) + \varphi(\mathfrak{B}_2) + \dots \\ \psi(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots) &= \psi(\mathfrak{B}_1) \psi(\mathfrak{B}_2) \dots\end{aligned}$$

Beweis: Die Formeln folgen unmittelbar aus Definition 3, 1.

Für den Fall, dass  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  metrische Räume sind, wollen wir aus der Gesamtheit der eindeutigen Abbildungen eine besonders wichtige Teilklasse herausheben:

**Definition 3, 2.** Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei metrische Räume und  $\mathfrak{B}$  *eindeutiges Bild* von  $\mathfrak{A}$ , so heisst die Abbildungsfunktion  $\varphi$  *stetig im Punkte*  $x$  von  $\mathfrak{A}$ , wenn für jede gegen  $x$  konvergente Punktfolge aus  $\mathfrak{A}$  die Folge der Bildpunkte aus  $\mathfrak{B}$  gegen  $\varphi(x)$  konvergiert. Ist  $\varphi$  in jedem Punkte von  $\mathfrak{A}$  stetig, so heisst  $\varphi$  in  $\mathfrak{A}$  *stetig* und  $\mathfrak{B}$  heisst *stetiges Bild* von  $\mathfrak{A}$ .

Beispiel. Bei dem zu Definition 3, 1 genannten Beispiel ist die Abbildung stetig in  $\mathfrak{A}$  wie sich der Leser selbst überlegen möge. (Die Entfernung ist als Abstand der zugeordneten Punkte der Zahlengeraden erklärt.)

Ist  $\mathfrak{A}$  eindeutig auf  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  eindeutig auf  $\mathfrak{C}$  abgebildet, so entsteht durch beide Abbildungen eine offenbar ebenfalls eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{C}$ . Sind beide Abbildungen speziell stetig, so gilt

**Satz 3, 2.** *Ist  $\mathfrak{B}$  stetiges Bild von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  stetiges Bild von  $\mathfrak{B}$ , so ist  $\mathfrak{C}$  stetiges Bild von  $\mathfrak{A}$ .*

Beweis. Ist  $\lim x_n = x$  und  $\lim y_n = y$  und  $\lim z_n = z$ , wo die  $x$  Punkte aus  $\mathfrak{A}$ , die  $y$  deren Bildpunkte aus  $\mathfrak{B}$  und die  $z$  deren Bildpunkte aus  $\mathfrak{C}$  sind, so sind die  $z$  die Bildpunkte der  $x$  in  $\mathfrak{C}$  und somit der Satz bewiesen.

Welche Mengen Urbilder von in  $\mathfrak{B}$  offenen resp. in  $\mathfrak{B}$  abgeschlossenen Mengen sind, lehrt

**Satz 3, 3.** *Dann und nur dann ist  $\mathfrak{B}$  stetiges Bild von  $\mathfrak{A}$ , wenn jede in  $\mathfrak{B}$  offene (abgeschlossene) Menge als Urbild eine in  $\mathfrak{A}$  offene (abgeschlossene) Menge hat.*

Beweis. Wir beweisen zunächst das »nur dann« und zeigen zu diesem Zweck: Ist  $b$  aus  $\mathfrak{B}$  Bild von  $a$  aus  $\mathfrak{A}$ , so gibt es zu jeder Umgebung  $V$  von  $b$  eine Umgebung  $U$  von  $a$ , sodass das Bild von  $U$  ganz in  $V$  liegt, das Urbild von  $V$  also  $U$  enthält. Das bedeutet, dass das Urbild jeder Umgebung von  $b$  den Punkt  $a$  als inneren Punkt enthält. Ist also  $\mathfrak{B}_1$  in  $\mathfrak{B}$  offen, so ist das Urbild von  $\mathfrak{B}_1$  in  $\mathfrak{A}$  offen, da dann die Punkte von  $\mathfrak{B}_1$ , die ja Bilder von Punkten aus  $\mathfrak{A}$  sind, als Urbilder sämtlich innere Punkte des Urbilds von  $\mathfrak{B}_1$  haben, das somit nur aus inneren Punkten besteht.

Es sei also  $V$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $U_n$  die Umgebung von  $a$  vom Radius  $1:n$ . Wir nehmen an, dass in jedem  $U_n$  ein Punkt  $a_n$  existiert, dessen Bild nicht in  $V$  liegt. Dann konvergiert zwar die Folge der Punkte  $a_n$  gegen  $a$ , die Folge der Bildpunkte aber nicht nach dem Bilde  $b$  von  $a$ , was der Stetigkeit widerspricht. Somit gibt es ein  $U_n$ , dessen Bild ganz in  $V$  liegt und das »nur dann« ist für die offenen Mengen bewiesen.

Ist nun das Urbild jeder in  $\mathfrak{B}$  offenen Menge eine in  $\mathfrak{A}$  offene Menge, so hat speziell jede Umgebung  $V$  von  $b$  eine offene Menge als Urbild, es gibt also eine Umgebung  $U$  von  $a$ , deren Bild ganz in  $V$  liegt. Ist nun  $\{a_n\}$  eine Punktfolge aus  $\mathfrak{A}$ , die gegen  $a$  konvergiert, so liegen fast alle ihre Punkte in  $U$ , also auch die Bilder fast aller in  $V$ , wie klein auch  $V$  vorgegeben sein mag. Es konvergiert somit die Folge der Bilder der  $a_n$  gegen  $b$ , das das Bild von  $a$  ist. Die Abbildung ist daher stetig in jedem Punkt von  $\mathfrak{A}$ . Somit ist der Satz für die offenen Mengen bewiesen.

Wir zeigen jetzt die Gültigkeit des Satzes für die abgeschlossenen Mengen.

Nach Satz 3, 1 gilt

$$\psi(\mathfrak{B}) = \psi(\{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1\} + \mathfrak{B}_1) = \psi(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) + \psi(\mathfrak{B}_1)$$

also da die Summanden fremd sind

$$\psi(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) = \psi(\mathfrak{B}) - \psi(\mathfrak{B}_1).$$

Wählen wir  $\mathfrak{B}_1$  als in  $\mathfrak{B}$  offen, so ist nach Satz 2, 4  $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1$  in  $\mathfrak{B}$  und  $\psi(\mathfrak{B}) - \psi(\mathfrak{B}_1)$  in  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen. Da jede in  $\mathfrak{B}$  abgeschlossene Menge als eine solche Differenz  $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1$  geschrieben werden kann, ist also das Urbild jeder in  $\mathfrak{B}$  abgeschlossenen Menge in  $\mathfrak{A}$  abgeschlossen, falls das entsprechende für die in  $\mathfrak{B}$  offenen Mengen gilt. Indem man nun  $\mathfrak{B}$  als offen und  $\mathfrak{B}_1$  als abgeschlossen ansieht, zeigt man ebenso, dass das Urbild jeder in  $\mathfrak{B}$  offenen Menge in  $\mathfrak{A}$  offen ist, falls die Urbilder der abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind. Somit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

## Kapitel II.

### Der Nullraum.

#### § 4.

#### Einfachste Eigenschaften dieses Raumes.

Wir werden in diesem Kapitel einen speziellen metrischen Raum genau untersuchen, da wir später sehen werden, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung eng zusammenhängt mit den Eigenschaften dieses Raumes.

Gegeben sei eine Folge  $\{M_n\}$  von nicht leeren, höchstens abzählbaren Mengen, unter denen unendlich viele mehr als ein Element enthalten. Die Elemente von  $M_i$  seien

$$M_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(t_i)}), \quad 0 \leq t_i \leq \infty.$$

Wir betrachten nun die Menge  $B$ , die aus allen Elementfolgen

$$P = e_1^{(p_1)} e_2^{(p_2)} e_3^{(p_3)}, \dots, \quad 0 \leq p_i \leq t_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

besteht.

Diese Menge  $B$  wollen wir zu einem metrischen Raum machen durch folgende

**Definition 4, 1.** Sind  $P$  und  $P'$  zwei Elementfolgen, die an den  $(n-1)$  ersten Stellen übereinstimmen, sich aber an der  $n$ -ten Stelle unterscheiden, so sei

$$PP' = 1 : n$$

die Entfernung von  $P$  und  $P'$ . Ferner sei  $PP = 0$ .

**Satz 4, 1.** Die Definition 4, 1 erfüllt die Forderungen  $\alpha)$ – $\gamma)$  von Definition 2, 1.

Beweis. Für  $\alpha)$  und  $\beta)$  ist die Behauptung klar. Bewiesen werden muss also noch die Ungleichung

$$PP' + P'P'' \geq PP''.$$

Unterscheiden sich nun  $P$  und  $P'$  erstmalig an der  $n$ -ten Stelle und  $P'$  und  $P''$  erstmalig an der  $m$ -ten Stelle, so sei z. B.  $m \leq n$ . Dann stimmen aber  $P$  und  $P''$  bestimmt an den  $(m-1)$  ersten Stellen überein. Demnach ist

$$PP'' = 1 : k, \quad k \geq m.$$

Also gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \geq \frac{1}{k}.$$

Hiermit ist  $\gamma)$  bewiesen.

**Definition 4, 2.** Der metrische Raum  $B$  heisst der Bairesche Nullraum.

Für die Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigen wir einen allgemeineren Begriff, der den Baireschen Nullraum als Spezialfall enthält. Die Punkte des Raumes, den wir nun definieren wollen, sind ebenfalls Symbolfolgen nur wird jetzt erlaubt, dass die Menge der an  $n$ -ter Stelle eines Punktes zulässigen Symbole davon abhängt, welche Symbole an den  $(n-1)$  ersten Stellen des Punktes auftraten.

**Definition 4, 3.**  $B$  sei die Menge aller Folgen

$$P = e_1^{(r_1)} e_2^{(r_1)(r_2)} e_3^{(r_1)(r_2)(r_3)} e_4^{(r_1)(r_2)(r_3)(r_4)} \dots,$$

wo  $r_n$  in  $(r_1 r_2 \dots r_{n-1})(r_n)$  alle Zahlen

$$0 \leq r_n \leq t_{r_1 r_2 \dots r_{n-1}} \leq \infty$$

durchlaufen darf bei vorgegebenen  $t_{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}$ . Wird die Entfernung zweier Folgen wie in Def. 4, 2 erklärt, so heisst  $B$  ein Nullraum schlechthin.

Wie wir wissen ist jede Teilmenge eines metrischen Raumes wieder ein solcher. Es sei hinfort  $\mathfrak{R}$  irgend ein solcher Teilraum von  $B$ , den wir uns fest gegeben denken.

**Definition 4, 4.**

$$E = e_1^{(q_1)} e_2^{(q_2)} \dots e_n^{(q_1 q_2 \dots q_{n-1})} e_n$$

sei Anfangsstück irgend eines Punktes von  $\mathfrak{R}$ . Dann heisst die Gesamtheit aller Punkte von  $\mathfrak{R}$ , die  $E$  als Anfangsstück haben, eine Grundmenge in  $\mathfrak{R}$ . Diese heisst von  $n$ -ter Stufe, wenn  $E$  das längste gemeinsame Anfangsstück aller ihrer Punkte ist.  $\mathfrak{R}$  selbst soll Grundmenge kleinster Stufe in  $\mathfrak{R}$  heissen und auch die leere Menge soll als Grundmenge gelten. Ihr wird keine Stufe zugeschrieben.

**Satz 4, 2.** Die Menge der Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$  ist abzählbar.

Beweis. Ordnet man der Zahl  $q_i$  allgemein die  $(q_i + 1)$ -te Potenz der  $i$ -ten Primzahl  $p_i$  zu, so wird jedes eine Grundmenge definierende Anfangsstück einer natürlichen Zahl zugeordnet, somit werden die Grundmengen so auf die natürlichen Zahlen bezogen, dass jeder natürlichen Zahl höchstens eine Grundmenge entspricht. Da nur die leere Menge und  $\mathfrak{R}$  selbst nicht von der Zuordnung betroffen wird, ist der Satz bewiesen.

Für die Grundmengen in  $\mathfrak{R}$  gilt ferner folgender wichtiger

**Satz 4, 3.** Haben zwei Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$  einen Punkt gemeinsam, so ist eine der beiden Mengen in der anderen enthalten.

Beweis. Ist  $P$  der gemeinsame Punkt, so ist sowohl der definierende Anfangsabschnitt aller Elemente der ersten Menge als auch der grösste Anfangsabschnitt aller Elemente der zweiten Menge Anfangsabschnitt von  $P$ . Deshalb muss einer dieser Anfangsabschnitte auch Anfangsabschnitt des anderen sein, die Grundmenge also, die zu dem ersteren gehört, muss die andere Grundmenge enthalten. Ist die eine der beiden Grundmengen  $\mathfrak{R}$  selbst, so gilt zwar dieser Beweis nicht, die Behauptung ist dann aber trivial.

Ferner gilt für die Grundmengen

**Satz 4, 4.** Der Durchschnitt zweier Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$  ist Grundmenge in  $\mathfrak{R}$ .

Beweis. Der Satz ist richtig, falls der Durchschnitt leer ist; andernfalls aber ist er nach Satz 4, 3 die kleinere der beiden Grundmengen.

Zu welcher Mengengattung die Grundmengen gehören sagt

**Satz 4, 5.** Jede Grundmenge aus  $\mathfrak{R}$  ist  $a$ - $o$ -Menge in  $\mathfrak{R}$ .

Beweis. Für die leere Menge und  $\mathfrak{R}$  selbst ist der Satz richtig. Ist nun die Grundmenge von  $l$ -ter Stufe, so sei  $E$  das Anfangsstück der Länge  $l$  eines Punktes aus ihr. Liegen nun in jeder Umgebung eines Punktes  $P$  von  $\mathfrak{R}$  noch Punkte der Grundmenge, so muss das Anfangsstück der Länge  $l$  von  $P$  mit  $E$  identisch sein,  $P$  liegt also in der Grundmenge, die somit abgeschlossen ist. Ist andererseits  $P'$  ein Punkt der Grundmenge, so haben alle Punkte von  $\mathfrak{R}$ , deren Entfernung von  $P'$  höchstens  $\frac{1}{l+1}$  ist, denselben Anfangsabschnitt der Länge  $l$  wie der Punkt  $P'$ , sie liegen also alle in der Grundmenge. Diese ist somit offen.

**Satz 4, 6.** *Jede Summe von Grundmengen gleicher Stufe aus  $\mathfrak{R}$  ist  $a$ -Menge in  $\mathfrak{R}$ .*

Beweis. Dass die Summe offen ist, sagt Satz 2, 1. Sind ferner die Grundmengen alle von  $l$ -ter Stufe, und ist  $P$  ein Punkt von  $\mathfrak{R}$ , der in jeder Umgebung noch Punkte der Summe enthält, so muss der Anfangsabschnitt der Länge  $l$  von  $P$  mit dem Anfangsabschnitt der Länge  $l$  von Punkten aus mindestens einer der Grundmengen übereinstimmen,  $P$  muss also in mindestens einer der Grundmengen und daher auch in der Summe liegen. Diese ist somit abgeschlossen.

**Satz 4, 7.** *Jede Summe von Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$ , deren Stufenzahlen nach oben beschränkt sind, ist  $a$ -Menge in  $\mathfrak{R}$ .*

Beweis. Indem man die Summanden gleicher Stufe zusammenfasst erhält man nach dem vorigen Satz eine Summe von endlich vielen  $a$ -Mengen, die nach Satz 2, 8 eine  $a$ -Menge in  $\mathfrak{R}$  ist.

Wir beweisen jetzt den wichtigsten dieser Sätze, der eine Aussage über die Darstellbarkeit von in  $\mathfrak{R}$  offenen Mengen durch Grundmengen in  $\mathfrak{R}$  macht.

**Satz 4, 8.** *Ist  $\mathfrak{D}$  eine offene Menge in  $\mathfrak{R}$ , so gibt es ein und nur ein System von in  $\mathfrak{D}$  enthaltenen, paarweise verschiedenen, grössten Grundmengen in  $\mathfrak{R}$ , so dass  $\mathfrak{D}$  die Summe der Mengen dieses System ist.*

Beweis. Nach Satz 4, 3 sind zwei grösste in  $\mathfrak{D}$  enthaltene Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$  entweder gleich oder elementfremd. Die Summe der verschiedenen in  $\mathfrak{D}$  enthaltenen grössten Grundmengen ist somit  $\mathfrak{D}$  und der Satz ist bewiesen.

**Definition 4, 4.** *Die Darstellung einer in  $\mathfrak{R}$  offenen Menge als Summe von paarweise fremden grössten Grundmengen aus  $\mathfrak{R}$  heisst die Normalform der offenen Menge.*

**Satz 4, 9.** *Haben die in  $\mathfrak{R}$  offenen Mengen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  die Normalformen*

$$\mathfrak{D} = \sum_i E_i, \quad \mathfrak{D}' = \sum_k E'_k,$$

so hat der Durchschnitt  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$  die Normalform

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}' = \sum_{i,k} E_i E'_k,$$

wobei etwa leere Summanden fortzulassen sind.

Beweis. Die behauptete Gleichung gilt nach dem distributiven Gesetz von § 1 und es ist unmittelbar klar, dass die Summanden paarweise fremd sind, weil dies für die Summanden der Normalformen von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  gilt. Es bleibt zu zeigen, dass  $E_i E'_k$  entweder leer oder grösste in  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$  enthaltene Grundmenge ist. Dass  $E_i E'_k$  Grundmenge in  $\mathfrak{R}$  ist, sagt Satz 4, 4. Gäbe es aber eine grössere in  $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$  enthaltene Grundmenge, so wäre diese a fortiori auch in  $\mathfrak{D}$  und in  $\mathfrak{D}'$  enthalten. Da entweder gilt:  $E_i E'_k = E_i$  oder  $E_i E'_k = E'_k$ , wäre somit entweder  $E_i$  nicht grösste in  $\mathfrak{D}$  enthaltene oder  $E'_k$  nicht grösste in  $\mathfrak{D}'$  enthaltene Grundmenge. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Dies sind die wichtigsten Sätze über die Grundmengen von  $\mathfrak{R}$ , die wir meist für den Spezialfall  $\mathfrak{R} = B$  anwenden werden, wo also  $\mathfrak{R}$  der ganze Nullraum ist. Für diesen Fall der Anwendung benötigen wir noch

**Satz 4, 10.** *Der Nullraum  $B$  ist vollständig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Fundamentalfolge von Punkten aus  $B$  konvergiert.

$$P^{(n)} = e_1^{(e_1^{(n)})} e_2^{(e_2^{(n)})} e_3^{(e_3^{(n)})} e_4^{(e_4^{(n)})} \dots$$

sei der  $n$ -te Punkt der Fundamentalfolge. Dann ist nach Definition 2, 8 für jede natürliche Zahl  $k$

$$P^{(n)} P^{(m)} < 1 : k$$

für geeignetes  $m(k)$  und jedes  $n > m$ . Hieraus folgt nach der Entfernungserklärung

$$e_k^{(m)} = e_k^{(m+1)} = e_k^{(m+2)} = \dots$$

Wir nennen diese Zahl  $r_k$  und betrachten den Punkt

$$P = e_1^{(r_1)} e_2^{(r_2)} e_3^{(r_3)} e_4^{(r_4)} \dots$$

Dann stimmt  $P^{(n)}$  in einer mit  $n$  gleichzeitig unbeschränkt wachsenden Anzahl  $k$

von Anfangselementen mit  $P$  überein, es ist also  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P$ . Die Fundamentalfolge ist daher konvergent und der Satz ist bewiesen.

### § 5.

#### Lebesguesche Masstheorie im Nullraum.

Wir wollen jetzt nach gewissen Regeln gewissen Teilmengen von  $B$  Zahlen zuordnen und studieren, welche Zusammenhänge dadurch entstehen. Im nächsten Kapitel werden diese Zahlen mit den Wahrscheinlichkeiten in Verbindung gebracht werden und aus den hier gefundenen Ergebnissen die allgemeinsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet werden.

Der Raum ist hier immer der ganze Nullraum, also vollständig, und die Grundmengen von denen gesprochen wird, sind immer Grundmengen in  $B$ , so dass dieser Zusatz sich erübrigt.

**Postulat 1.** *Jeder Grundmenge  $E$  sei eine Zahl*

$$|E| \geq 0$$

*zugeordnet, die das Mass von  $E$  heisst. Das Mass der leeren Menge ist 0.*

**Postulat 2.** *Ist  $E$  eine Grundmenge  $n$ -ter Stufe, ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und ist  $\{E_v\}$  die Gesamtheit der verschiedenen in  $E$  enthaltenen Grundmengen  $(n+1)$ -ter Stufe, dann gelte*

$$|E| = \sum_v |E_v|.$$

Dass diese Postulate erfüllbar sind, ist klar. Dass die  $E_v$  paarweise elementfremd sind und ihre Summe  $E$  ist, folgt mühelos aus Satz 4, 3 analog zum Beweise von Satz 4, 8.

Wir beweisen nun folgenden überaus wichtigen

**Satz 5, 1.** *Ist eine  $a$ -o-Menge  $\mathfrak{A}$  auf zwei Arten als Summe von paarweise fremden Grundmengen dargestellt*

$$\mathfrak{A} = \sum_v E'_v \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \sum_v E''_v$$

*so gilt*

$$\sum_v |E'_v| = \sum_v |E''_v|.$$



Beweis. Wäre bewiesen, dass für jede Zerlegung

$$B = \sum_{\nu} E_{\nu}^*$$

des ganzen Raumes in paarweise fremde Grundmengen gilt

$$|B| = \sum_{\nu} |E_{\nu}^*|$$

so würde die Richtigkeit unseres Satzes leicht folgen.

Es sei nämlich  $\mathfrak{B} = B - \mathfrak{A}$ , also nach Satz 2, 8 auch  $\alpha$ -o-Menge und ferner sei

$$\mathfrak{B} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

die Normalform von  $\mathfrak{B}$ .

Dann gilt

$$B = \sum_{\nu} E'_{\nu} + \sum_{\nu} E_{\nu} = \sum_{\nu} E''_{\nu} + \sum_{\nu} E_{\nu},$$

wo die Summanden paarweise fremd sind.

Unsere Annahme ergäbe also

$$|B| = \sum_{\nu} |E'_{\nu}| + \sum_{\nu} |E_{\nu}| = \sum_{\nu} |E''_{\nu}| + \sum_{\nu} |E_{\nu}|.$$

Also erhält man

$$\sum_{\nu} |E'_{\nu}| = \sum_{\nu} |E''_{\nu}|$$

wie der Satz behauptet.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass stets gilt

$$|B| = \sum_{\nu} |E_{\nu}^*|.$$

Ist das gezeigt, so ist offenbar alles bewiesen.

Um diesen Beweis zu führen, wollen wir folgende Klasseneinteilung der Grundmengen benützen:

- 1) Die Grundmengen  $E_{\nu}^*$  der Zerlegung.
- 2) Die Grundmengen, die mindestens eine Menge aus 1) als echte Teilmenge enthalten.
- 3) Die Grundmengen, die in einer Menge aus 1) als echte Teilmengen enthalten sind.

Da die  $E_v^*$  paarweise fremd sind und jeder Punkt einem  $E_v^*$  angehört, liegt nach Satz 4, 3 jede Grundmenge in einer und nur einer dieser Klassen.

Es gilt ferner

- a) Jede Menge aus 2) ist eindeutig als Summe von Mengen aus 1) darstellbar.

Dies folgt nach Satz 4, 3, da die  $E_v^*$  fremd sind und jeder Punkt einem  $E_v^*$  angehört.

- b) Ist  $E_n$  Grundmenge  $n$ -ter Stufe aus 2), so ist jede in  $E_n$  enthaltene Grundmenge  $E_{n+1}$  von  $(n+1)$ -ter Stufe entweder in 1) oder in 2) enthalten.

Da  $E_n$  zu 2) gehört, gibt es ein  $E_k^*$ , so dass  $E_k^* < E_n$ . Wäre b) falsch, so gehörte  $E_{n+1}$  nach 3). Es gäbe also ein  $E_l^*$  so, dass  $E_{n+1} < E_l^*$ . Die Stufen dieser Mengen sind nun folgende:

$E_k^*$ : mindestens von  $(n+1)$ -ter Stufe, da  $E_k^*$  echte Teilmenge von  $E_n$  und diese von  $n$ -ter Stufe ist.

$E_{n+1}$ : von  $(n+1)$ -ter Stufe.

$E_l^*$ : höchstens von  $n$ -ter Stufe, da  $E_{n+1}$  echte Teilmenge von  $E_l^*$  ist.

Die  $n > 0$  ersten gemeinsamen Stellen der Punkte von  $E_k^*$  stimmen mit den entsprechenden der Punkte von  $E_n$  und diese mit den entsprechenden der Punkte von  $E_{n+1}$  überein, wegen  $E_k^* < E_n$  und  $E_{n+1} \leq E_n$ .

Alle gemeinsamen Stellen — es sind höchstens  $n$  — der Punkte von  $E_l^*$  stimmen mit den entsprechenden der Punkte von  $E_{n+1}$  überein, wegen  $E_{n+1} < E_l^*$ .

Es stimmen also alle gemeinsamen Stellen der Punkte von  $E_l^*$  mit den entsprechenden der Punkte von  $E_k^*$  überein. Somit gilt  $E_k^* \leq E_l^*$ .  $E_k^* = E_l^*$  ist wegen der dann folgenden Ungleichung  $E_n > E_k^* > E_{n+1}$  unmöglich, man hat also  $E_k^* < E_l^*$ . Dies ist ausgeschlossen und somit die Annahme falsch, dass  $E_{n+1}$  zu 3) gehört. Daher ist b) für den Fall  $n > 0$  bewiesen. Für  $n = 0$  aber ist die Behauptung klar.

Wir ordnen jeder Menge  $E$  aus 1) oder 2) eine Aichzahl  $A(E)$  zu, die die Summe der Masse der Mengen aus 1) sein soll, in die  $E$  nach a) eindeutig zerfällt. Der Grundmengen aus 2) wegen ist natürlich auch  $A(E) = +\infty$  zugelassen.

Dann gilt

- c) Für jede Menge  $E^*$  aus 1) ist  $A(E^*) = |E^*|$ .
- d) Ist eine Grundmenge Summe von paarweise fremden Grundmengen aus 1) oder 2), so ist sie selbst in 1) oder 2) und ihre Aichzahl ist die Summe der Aichzahlen der Summanden.
- e) und d) ist ohne weiteres klar.

- e) Gibt es eine Grundmenge  $E_n$   $n$ -ter Stufe in 2), für die  $A(E_n) \neq |E_n|$  ist, so gibt es in 2) auch eine Grundmenge  $E_{n+1}$  von  $(n+1)$  ter Stufe, die Teilmenge von  $E_n$  ist und für die ebenfalls gilt:  $A(E_{n+1}) \neq |E_{n+1}|$ .

Nach b) nämlich gehört jede in  $E_n$  enthaltene Grundmenge  $H^{(v)}$  von  $(n+1)$ -ter Stufe nach 1) oder 2), hat also eine Aichzahl. Würde nun für jedes  $H^{(v)}$  gelten:  $A(H^{(v)}) = |H^{(v)}|$ , so folgt, da  $E_n = \sum_v H^{(v)}$ , wo diese paarweise fremd sind, nach d)

$$\sum_v A(H^{(v)}) = A(E_n).$$

Andererseits gilt nach Postulat 2 und der Gleichung  $A(H^{(v)}) = |H^{(v)}|$  auch

$$\sum_v A(H^{(v)}) = \sum_v |H^{(v)}| = |E_n|.$$

Es wäre also entgegen der Voraussetzung  $A(E_n) = |E_n|$ . Es gibt darum ein  $H^{(v)}$  — es heisse  $E_{n+1}$  — für das gilt  $A(E_{n+1}) \neq |E_{n+1}|$ . Nach c) gehört aber  $E_{n+1}$  nicht nach 1), also nach 2). Somit ist e) bewiesen.

Der Satz, den wir beweisen wollen, lautet jetzt

$$A(B) = |B|.$$

Wir nehmen an, er sei falsch, es sei also  $A(B) \neq |B|$ . Dann muss offenbar  $B = E_0$  eine Grundmenge 0-ter Stufe aus 2) sein, da  $B$  nicht zu 3) gehören kann. Nach e) gibt es also eine Folge  $\{E_n\}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  von Grundmengen aus 2) von denen jede die folgende enthält und  $E_n$  von  $n$ -ter Stufe ist. Das ist aber eine monotone Folge von beschränkten in  $B$  abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser gegen 0 gehen, wobei  $B$  nach Satz 4, 10 ein vollständiger Raum ist. Aus Satz 2, 9 folgt, dass diese Mengen genau einen Punkt  $P$  gemeinsam haben. Da  $P$  auch einer der Mengen aus 1) angehört — sagen wir  $E_m^*$  — muss diese Menge mit einer Menge der Folge, die ja jede  $P$  enthaltende Grundmenge enthält, weil alle Stufen durchlaufen werden, übereinstimmen. Das ist aber unmöglich, weil jede dieser Mengen zu 2) gehört,  $E_m^*$  aber zu 1).

Dieses Widerspruchs wegen ist die Annahme  $A(B) \neq |B|$  unmöglich, es ist also  $A(B) = |B|$  und Satz 5, 1 somit bewiesen.<sup>1</sup>

Auf Grund dieses Satzes setzen wir fest

---

<sup>1</sup> Diesen schönen Beweis verdanke ich, wie schon im Vorwort gesagt wurde, Herrn TH. KALUZA.

**Definition 5, 1.** Jeder  $a$ - $o$ -Menge  $\mathfrak{A}$  in  $B$  soll eine Zahl

$$|\mathfrak{A}|$$

zugeordnet werden, die das Mass von  $\mathfrak{A}$  heissen soll und zwar auf folgende Art: Ist  $\mathfrak{A}$  als Summe von paarweise fremden Grundmengen dargestellt, so ist das Mass von  $\mathfrak{A}$  die Summe der Masse der Grundmengen.

Die Definition ist zulässig, da durch sie die Bedeutung des Masses einer Grundmenge, die durch Postulat 1 festgelegt war, nicht geändert wird, darauf muss man natürlich achten, da ja jede Grundmenge auch  $a$ - $o$ -Menge ist.

Für die Masse der  $a$ - $o$ -Mengen gelten folgende Rechenregeln

**Satz 5, 2.** 1) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei fremde  $a$ - $o$ -Mengen, so ist

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|.$$

2) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$   $a$ - $o$ -Mengen und  $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}'$ , so ist

$$|\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}| - |\mathfrak{A}'|.$$

3) Unter den Annahmen von 2 gilt

$$|\mathfrak{A}| \geq |\mathfrak{A}'|.$$

4) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei beliebige  $a$ - $o$ -Mengen, so gilt

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| - |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|.$$

**Beweis.** 1) folgt aus Definition 5, 1, wenn man sowohl  $\mathfrak{A}$  als auch  $\mathfrak{B}$  als Summe von paarweise fremden Grundmengen darstellt.

2) folgt aus 1), wenn man dort  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{B}$  mit  $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$  identifiziert.

3) folgt aus 2), da  $|\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'| \geq 0$ .

4) Es gilt die Mengengleichung:  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B})$ , in der die beiden Summanden rechts fremd sind. Nach 1) und 2) gilt also

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| - |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|.$$

Über die Masse der  $a$ - $o$ -Mengen benötigen wir noch

**Satz 5, 3.** Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine monotone Folge von  $a$ - $o$ -Mengen und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$  auch  $a$ - $o$ -Menge, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{A}|.$$

Beweis. 1)  $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Dann ist offenbar

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2) + \dots$$

Da die linke Seite und alle Summanden rechts  $\alpha$ -Mengen sind und die letzteren paarweise fremd, so folgt aus Satz 5, 1 durch Zerlegung der Summanden in Grundmengen

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2| + \dots$$

also nach Satz 5, 2

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| + (|\mathfrak{A}_2| - |\mathfrak{A}_1|) + (|\mathfrak{A}_3| - |\mathfrak{A}_2|) + \dots$$

Somit ist

$$|\mathfrak{A}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|,$$

da die  $n$ -te Partialsumme  $|\mathfrak{A}_n|$  ist.

2)  $\mathfrak{A}_n \supseteq \mathfrak{A}_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathfrak{A}' = B - \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'_n = B - \mathfrak{A}_n$$

sind  $\alpha$ -Mengen. Ferner konvergiert  $\{\mathfrak{A}'_n\}$  monoton wachsend gegen  $\mathfrak{A}'$ . Nach 1) gilt also

$$|\mathfrak{A}'| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}'_n|.$$

Also folgt nach Satz 5, 2

$$|B| - |\mathfrak{A}| = \lim_{n \rightarrow \infty} (|B| - |\mathfrak{A}_n|) = |B| - \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Diese Sätze werden gestatten, Aussagen über das Mass von beliebigen offenen Mengen zu machen, das zunächst definiert werden muss.

**Definition 5, 2.** Jeder in  $B$  offenen Menge  $\mathfrak{D}$  soll als Mass  $|\mathfrak{D}|$  die Summe der Masse der Grundmengen der Normalform von  $\mathfrak{D}$  zugeordnet werden.

Diese Erklärung des Masses der offenen Mengen ist zulässig, da sie sich für  $\alpha$ -Mengen mit Definition 5, 1 deckt.

Wir wollen nun zeigen, dass Satz 5, 2 auch für die Masse von offenen Mengen gilt (mit Ausnahme von 2), da die Differenz nicht offen zu sein braucht und beweisen zunächst

**Satz 5, 4.** Sind  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  zwei offene Mengen und ist  $\mathfrak{D} > \mathfrak{D}'$ , so gilt

$$|\mathfrak{D}| \geq |\mathfrak{D}'|.$$

Beweis. 
$$\mathfrak{D} = \sum_i E_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}' = \sum_k E'_k$$

seien die Normalformen von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$ .

Da eine grösste Grundmenge aus  $\mathfrak{D}'$  nie grösser sein kann als eine grösste Grundmenge aus  $\mathfrak{D}$ , so folgt nach Satz 4, 3, dass jedes  $E'_k$  ganz in einem  $E_i$  enthalten sein muss.  $\{E'_{v,i}\}$  sei die Gesamtheit der  $E'_k$ , die in  $E_i$  enthalten

sind. Nach Satz 2, 8 ist  $\sum_{v=1}^n E'_{v,i}$  eine  $a$ - $o$ -Menge. Nach Satz 5, 2 ist also

$$\left| \sum_{v=1}^n E'_{v,i} \right| = \sum_{v=1}^n |E'_{v,i}| \leq |E_i|.$$

Da dies für jedes  $n$  gilt folgt

$$\sum_{v=1}^{\infty} |E'_{v,i}| \leq |E_i|.$$

Hiermit ist der Satz offenbar bewiesen.

Wir fahren nun in der Übertragung von Satz 5, 2 fort und beweisen

**Satz 5, 5.** Sind  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  zwei offene Mengen, so gilt

$$|\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}| + |\mathfrak{D}'| - |\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|.$$

Beweis. 1) Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall, dass  $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' = H$  eine Grundmenge ist.

$$\mathfrak{D} = \sum_i E_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}' = \sum_k E'_k$$

seien die Normalformen von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$ . Wir bilden die  $a$ - $o$ -Mengen

$$\mathfrak{A}_n = \sum_{i=1}^n E_i + \sum_{k=1}^n E'_k.$$

Die Folge der  $\mathfrak{A}_n$  wächst offenbar monoton gegen die Grenzmenge  $H$ . Nach Satz 5, 3 gilt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n| = |H|.$$

Nach Satz 5, 2 ist

$$|\mathfrak{A}_n| = \left| \sum_{i=1}^n E_i \right| + \left| \sum_{k=1}^n E'_k \right| - \left| \sum_{i=1}^n E_i \sum_{k=1}^n E'_k \right|$$

also auch nach Satz 4, 9

$$|\mathfrak{A}_n| = \sum_{i=1}^n |E_i| + \sum_{k=1}^n |E'_k| - \sum_{i,k=1}^n |E_i E'_k|.$$

Somit ist nach Satz 5, 3

$$|H| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i| + \sum_{k=1}^{\infty} |E'_k| - \sum_{i,k=1}^{\infty} |E_i E'_k|.$$

Nach Satz 4, 9 ist aber

$$|\mathfrak{D}\mathfrak{D}'| = \sum_{i,k=1}^{\infty} |E_i E'_k|,$$

also wie behauptet

$$|H| = |\mathfrak{D}| + |\mathfrak{D}'| - |\mathfrak{D}\mathfrak{D}'|.$$

2) Es sei  $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'$  beliebig und habe die Normalform

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' = \sum_{\nu} E_{\nu}^*.$$

Zunächst ist klar, dass jedes  $E_i$  resp.  $E'_k$  das einen Punkt mit  $E_{\nu}^*$  gemeinsam hat, nach Satz 4, 3 ganz in  $E_{\nu}^*$  liegt

$$\mathfrak{D}_{\nu} = E_{\nu,1} + E_{\nu,2} + \dots \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}'_{\nu} = E'_{\nu,1} + E'_{\nu,2} + \dots$$

seien die Summen der  $E_i$  resp.  $E'_k$ , die in  $E_{\nu}^*$  liegen. Es gilt also

$$\mathfrak{D}_{\nu} + \mathfrak{D}'_{\nu} = E_{\nu}^*, \quad \sum_{\nu} \mathfrak{D}_{\nu} = \mathfrak{D}, \quad \sum_{\nu} \mathfrak{D}'_{\nu} = \mathfrak{D}'.$$

Die Summendarstellungen von  $\mathfrak{D}_{\nu}$  und  $\mathfrak{D}'_{\nu}$  sind ferner Normalformen, denn liegt eine grösste Grundmenge der Obermenge auch in der Teilmenge, so ist sie in ihr a fortiori grösste Grundmenge.

Nach 1) gilt somit

$$|E_{\nu}^*| = |\mathfrak{D}_{\nu}| + |\mathfrak{D}'_{\nu}| - |\mathfrak{D}_{\nu}\mathfrak{D}'_{\nu}|.$$

Durch Summation über  $\nu$  folgt

$$|\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}| + |\mathfrak{D}'| - \sum_{\nu} |\mathfrak{D}_{\nu} \mathfrak{D}'_{\nu}|.$$

Zu beweisen bleibt also die Gleichung

$$|\mathfrak{D} \mathfrak{D}'| = \sum_{\nu} |\mathfrak{D}_{\nu} \mathfrak{D}'_{\nu}|.$$

Nach Satz 4, 9 folgt mühelos die Gleichung

$$|\mathfrak{D} \mathfrak{D}'| = \sum_{\nu, \lambda} |\mathfrak{D}_{\nu} \mathfrak{D}'_{\lambda}|.$$

Man muss somit zeigen

$$|\mathfrak{D}_{\nu} \mathfrak{D}'_{\lambda}| = 0 \text{ wenn } \nu \neq \lambda.$$

Da für  $\nu \neq \lambda$   $E_{\nu}^*$  und  $E_{\lambda}^*$  fremd ist, ist wegen

$$\mathfrak{D}_{\nu} \subseteq E_{\nu}^*, \quad \mathfrak{D}'_{\lambda} \subseteq E_{\lambda}^*$$

$\mathfrak{D}_{\nu} \mathfrak{D}'_{\lambda}$  leer und der Satz somit bewiesen.

Ehe wir noch weiteren Mengenklassen ein Mass zuordnen, beweisen wir noch

**Satz 5, 6.** *Ist  $\{\mathfrak{D}_n\}$  eine Folge von offenen Mengen und  $\mathfrak{D}$  ihre Summe, so gilt*

$$|\mathfrak{D}| \leq \sum |\mathfrak{D}_n|.$$

Beweis.  $\mathfrak{D} = \sum E_k$  und  $\mathfrak{D}_n = \sum E_{\nu}^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

seien die Normalformen von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}_n$ .

Wegen  $\mathfrak{D} \supseteq \mathfrak{D}_n$  ist jedes  $E_{\nu}^{(n)}$  ganz in einem  $E_k$  enthalten, die  $E_{\nu}^{(n)}$  zerfallen also in Klassen, je nachdem sie in  $E_1$  oder  $E_2$  oder  $E_3 \dots$  enthalten sind. Wir bezeichnen die in  $E_k$  enthaltenen mit  $E_1^{(k, n)}$ ,  $E_2^{(k, n)}$ ,  $\dots$ . Dann ist

$$\mathfrak{D}_n = \sum_k \sum_{\nu} E_{\nu}^{(k, n)} \quad \text{und} \quad E_k = \sum_n \sum_{\nu} E_{\nu}^{(k, n)}.$$

Wir betrachten die Summanden von  $E_k$  und sondern alle die aus, die in keinem anderen Summanden als echte Teilmengen enthalten sind. Von den so ausgewählten nehmen wir jeden ev. mehrfach vorkommenden nur einmal. Die so erhaltenen Mengen sind fremd und ihre Summe ist offenbar  $E_k$ . Nach Satz 5, 1



ist also das Mass von  $E_k$  die Summe der Masse dieser Summanden. Da das ev. nicht alle der obigen Darstellung für  $E_k$  sind, folgt somit

$$|E_k| \leq \sum_n \sum_v |E_v^{(k,n)}|.$$

Demnach ist

$$|\mathfrak{D}| = \sum_k |E_k| \leq \sum_k \sum_n \sum_v |E_v^{(k,n)}| = \sum_n \sum_k \sum_v |E_v^{(k,n)}| = \sum_n |\mathfrak{D}_n|$$

der Satz also bewiesen.

Wir wollen nun noch weiteren Mengen ein Mass zuordnen. Dies wird mit Hilfe der beiden Begriffe »äusseres Mass« und »inneres Mass« geschehen. Wir erklären zunächst

**Definition 5, 3.** *Unter dem äusseren Mass einer beliebigen Menge  $\mathfrak{A}$  ist folgende Zahl zu verstehen:*

$$\bar{\mathfrak{A}} = \text{fin inf } |\mathfrak{D}|,$$

wo  $\mathfrak{D}$  alle offenen Mengen, die  $\mathfrak{A}$  enthalten, durchläuft und »fin inf« »untere Grenze« bedeutet.

Es kommt also jeder Menge ein äusseres Mass zu.

**Satz 5, 7.** *Ist  $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}$ , so gilt*

$$\bar{\mathfrak{A}}' \leq \bar{\mathfrak{A}}.$$

**Beweis.** Jede  $\mathfrak{A}$  überdeckende offene Menge überdeckt a fortiori  $\mathfrak{A}'$ . Hieraus folgt der Satz unmittelbar.

**Satz 5, 8.** *Ist  $\mathfrak{A}$  offen, so gilt*

$$\bar{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}|.$$

**Beweis.** Jede  $\mathfrak{A}$  überdeckende offene Menge enthält  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}$  selbst ist die kleinste  $\mathfrak{A}$  überdeckende offene Menge. Aus Satz 5, 4 und Definition 5, 3 folgt somit die Behauptung.

**Satz 5, 9.** *Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei beliebige Mengen, so gilt*

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \leq \bar{\mathfrak{A}} + \bar{\mathfrak{B}}.$$

**Beweis.** Es sei  $\mathfrak{D}_1$  eine  $\mathfrak{A}$  überdeckende und  $\mathfrak{D}_2$  eine  $\mathfrak{B}$  überdeckende

offene Menge. Dann überdeckt die offene Menge  $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$  die Menge  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  und die offene Menge  $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$  die Menge  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ . Ferner gilt nach Satz 5, 5

$$|\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2| + |\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2| = |\mathcal{D}_1| + |\mathcal{D}_2|.$$

Ist nun  $\mathcal{D}$  eine beliebige offene Menge, die  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  überdeckt und  $\mathcal{D}'$  eine ebensolche, die  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  überdeckt, so folgt also

$$\text{fin inf } |\mathcal{D}| \leq |\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2| \quad \text{und} \quad \text{fin inf } |\mathcal{D}'| \leq |\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2|$$

daher

$$\text{fin inf } |\mathcal{D}| + \text{fin inf } |\mathcal{D}'| \leq |\mathcal{D}_1| + |\mathcal{D}_2|.$$

Somit gilt

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \leq |\mathcal{D}_1| + |\mathcal{D}_2|,$$

also auch

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \leq \text{fin inf } \{|\mathcal{D}_1| + |\mathcal{D}_2|\} = \text{fin inf } |\mathcal{D}_1| + \text{fin inf } |\mathcal{D}_2|.$$

Wie der Satz behauptet.

**Satz 5, 10.** Sind  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  paarweise fremd, so gilt

$$\overline{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n} \leq \overline{\mathfrak{A}_1} + \overline{\mathfrak{A}_2} + \dots + \overline{\mathfrak{A}_n}.$$

**Beweis.** Für zwei Summanden folgt der Satz aus Satz 5, 9, weil das äussere Mass der leeren Menge nach Satz 5, 8 verschwindet. Allgemein folgt er dann durch Induktion.

Nachdem wir diese Rechenregeln für das äussere Mass bewiesen haben, wollen wir das innere Mass definieren.

**Definition 5, 4.** Unter dem inneren Mass einer beliebigen Menge  $\mathfrak{A}$  ist folgende Zahl zu verstehen

$$\underline{\mathfrak{A}} = |B| - \overline{B - \mathfrak{A}}.$$

Auch das innere Mass ist also für jede Menge definiert.

**Satz 5, 11.** Es gilt

$$\underline{\mathfrak{A}} \geq \mathfrak{A}.$$

**Beweis.** Wendet man auf die Mengen  $\mathfrak{A}$  und  $B - \mathfrak{A}$  Satz 5, 9 an, so folgt

$$\overline{\mathfrak{A}} + \overline{(B - \mathfrak{A})} + \underline{\mathfrak{A}} + \underline{(B - \mathfrak{A})} \leq \overline{\mathfrak{A}} + \overline{B - \mathfrak{A}}.$$

Da  $(B - \mathfrak{A})\mathfrak{A}$  leer ist, verschwindet der zweite Summand links. Daher ist wegen Satz 5, 8

$$\overline{\mathfrak{A}} \cong \overline{B - B - \mathfrak{A}} = |B| - \overline{B - \mathfrak{A}} = \mathfrak{A}.$$

**Satz 5, 12.** *Ist  $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}$ , so gilt*

$$\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{A}.$$

Beweis. Es ist  $B - \mathfrak{A}' > B - \mathfrak{A}$ . Somit folgt nach Satz 5, 7

$$\mathfrak{A}' = |B| - \overline{B - \mathfrak{A}'} \leq |B| - \overline{B - \mathfrak{A}} = \mathfrak{A}.$$

**Satz 5, 13.** *Ist  $\mathfrak{A}$  offen, so gilt*

$$\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|.$$

Beweis. Die paarweise fremden Grundmengen  $n$ -ter Stufe bilden den ganzen Raum  $B$ . Wir verteilen sie in zwei Klassen, nämlich in die, die ganz in  $\mathfrak{A}$  enthalten sind, und die anderen. Die der ersten Klasse sind offenbar in den Grundmengen der Normalform von  $\mathfrak{A}$  enthalten, die von höchstens  $n$ -ter Stufe sind, und jede dieser Grundmengen der Normalform ist Summe von ganz in  $\mathfrak{A}$  enthaltenen Grundmengen  $n$ -ter Stufe.

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{A}^{(n)}$  die Summe der Grundmengen höchstens  $n$ -ter Stufe der Normalform von  $\mathfrak{A}$  und mit  $(B - \mathfrak{A})_n$  die Summe der  $n$ -stufigen Grundmengen, die mindestens einen Punkt von  $B - \mathfrak{A}$  enthalten. Nach dem Gesagten gilt also

$$\mathfrak{A}^{(n)} + (B - \mathfrak{A})_n = B,$$

wo die Summanden fremd sind. Nach Satz 4, 7 ist sowohl  $\mathfrak{A}^{(n)}$  als  $(B - \mathfrak{A})_n$   $\alpha$ - $o$ -Menge und nach Satz 5, 2 gilt

$$|\mathfrak{A}^{(n)}| + |(B - \mathfrak{A})_n| = |B|.$$

Nach Erklärung von  $\mathfrak{A}^{(n)}$  gilt offenbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}^{(n)}| = |\mathfrak{A}|.$$

Daher ist

$$|\mathfrak{A}| + \lim_{n \rightarrow \infty} |(B - \mathfrak{A})_n| = |B|.$$

Andererseits hat man

$$\mathfrak{A} + \overline{B - \mathfrak{A}} = |B|.$$

$(B - \mathfrak{A})_n$  ist eine  $B - \mathfrak{A}$  überdeckende  $a$ - $o$ -Menge, gehört also einem spezielleren Mengentyp an, als der zur Definition des äusseren Masses benutzte war. Deshalb folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(B - \mathfrak{A})_n| \geq \overline{B - \mathfrak{A}}$$

und hieraus

$$\mathfrak{A} \geq |\mathfrak{A}|$$

der beiden Gleichungen wegen.

Nach Satz 5, 11 ist aber  $\mathfrak{A} \leq \overline{\mathfrak{A}}$  und nach Satz 5, 8 ist  $\overline{\mathfrak{A}} = |\mathfrak{A}|$ . Somit folgt  $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}|$ .

**Satz 5, 14.** Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  beliebige Mengen, so gilt

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

**Beweis.** Wir wenden Satz 5, 9 auf  $B - \mathfrak{A}$  und  $B - \mathfrak{B}$  an und erhalten

$$\overline{B - \mathfrak{A}} + \overline{B - \mathfrak{B}} \geq \overline{(B - \mathfrak{A}) + (B - \mathfrak{B})} + \overline{(B - \mathfrak{A})(B - \mathfrak{B})}.$$

Nun ist

$$(B - \mathfrak{A}) + (B - \mathfrak{B}) = B - \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad (B - \mathfrak{A})(B - \mathfrak{B}) = B - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).$$

Also ergibt sich

$$\overline{B - \mathfrak{A}} + \overline{B - \mathfrak{B}} \geq \overline{B - \mathfrak{A}\mathfrak{B}} + \overline{B - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})}.$$

Indem man diese Ungleichung von  $2|B| = 2|\overline{B}|$  subtrahiert, findet man

$$|B| - \overline{B - \mathfrak{A}} + |B| - \overline{B - \mathfrak{B}} \leq |B| - \overline{B - \mathfrak{A}\mathfrak{B}} + |B| - \overline{B - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})},$$

also nach Definition 5, 4

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

wie behauptet war.

**Satz 5, 15.** Sind  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$  paarweise fremd, so gilt

$$\overline{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n} \geq \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n.$$

**Beweis.** Für zwei Summanden folgt die Behauptung sofort aus Satz 5, 14, da das innere Mass der leeren Menge nach Satz 5, 13 verschwindet. Für  $n$  Summanden folgt der Satz dann durch Induktion.

Jetzt sind wir in der Lage, das Mass selbst endgültig zu erklären.

**Definition 5, 5.** Gilt für eine Menge  $\mathfrak{A}$  die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{A}},$$

so heisst die Zahl

$$|\mathfrak{A}| = \overline{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{A}}$$

das Mass von  $\mathfrak{A}$  und die Menge  $\mathfrak{A}$  heisst messbar.

Diese Begriffserweiterung ist zulässig, da sie wegen Satz 5, 8 und Satz 5, 13 für offene Mengen sich mit dem früheren Massbegriff für offene Mengen deckt.

**Satz 5, 16.** Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  messbar und ist  $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}'$ , so gilt

$$|\mathfrak{A}| \geq |\mathfrak{A}'|.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar sowohl aus Satz 5, 7 als auch aus Satz 5, 12.

**Satz 5, 17.** Die messbaren Mengen bilden einen Ring und wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  dem Ringe angehören, so gilt

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| + |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|.$$

Beweis. Nach Satz 5, 14 und Satz 5, 9 gilt wegen Definition 5, 5

$$\underline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} + \underline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \geq \underline{\mathfrak{A}} + \underline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}} \geq \overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Nach Satz 5, 11 ist aber  $\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \geq \underline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$  und  $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \geq \underline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ , somit ergibt sich

$$\underline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Daher erhält man die behauptete Gleichung.

**Satz 5, 18.** Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  messbar und fremd, so gilt

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}|.$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 5, 17.

**Satz 5, 19.** Die messbaren Mengen bilden einen Körper und wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  dem Körper angehören und  $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}'$  ist, so gilt

$$|\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}| - |\mathfrak{A}'|.$$

Beweis. Es gilt

$$\underline{\mathfrak{A}'} = |\mathfrak{B}| - \overline{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}'} = \overline{\mathfrak{A}'},$$

also

$$|B| - \mathfrak{A}' = \overline{B - \mathfrak{A}'}$$

Andererseits ist

$$\overline{B - \mathfrak{A}'} = |B| - B - (B - \mathfrak{A}') = |B| - \mathfrak{A}'$$

Somit folgt

$$B - \mathfrak{A}' = \overline{B - \mathfrak{A}'}$$

$B - \mathfrak{A}'$  ist messbar, also nach Satz 5, 17 auch

$$\mathfrak{A}(B - \mathfrak{A}') = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$$

Nach Satz 5, 18 ist also wie behauptet

$$|\mathfrak{A}| = |(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') + \mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'| + |\mathfrak{A}'|$$

**Satz 5, 20.** Die messbaren Mengen bilden einen  $\sigma$ -Körper und ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Folge von messbaren Mengen, deren Summe  $\mathfrak{A}$  ist, so gilt

$$|\mathfrak{A}| \leq \sum_n |\mathfrak{A}_n|$$

und falls die Mengen paarweise fremd sind, die Gleichheit.

Beweis. Angenommen die Mengen seien fremd dann folgt nach Satz 5, 15 und Satz 5, 12

$$|\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2| + \dots + |\mathfrak{A}_n| = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n \leq \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_n \leq \mathfrak{A}$$

Somit gilt

$$\sum_n |\mathfrak{A}_n| \leq \mathfrak{A}$$

Ist nun  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so gibt es zu jedem  $\mathfrak{A}_n$  nach Definition 5, 3 eine offene bedeckende Menge  $\mathfrak{D}_n$  so, dass gilt

$$|\mathfrak{D}_n| < \overline{\mathfrak{A}_n} + 2^{-n} \varepsilon$$

Es sei

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3 + \dots$$

Dann ist nach Satz 5, 6

$$|\mathfrak{D}| \leq \sum_n |\mathfrak{D}_n| < \varepsilon + \sum_n \overline{\mathfrak{A}_n}$$

Da  $\mathfrak{D}$  die Menge  $\mathfrak{A}$  bedeckt, hat man also

$$\bar{\mathfrak{A}} \leq |\mathfrak{D}| < \varepsilon + \sum_n \bar{\mathfrak{A}}_n.$$

Da dies für jedes  $\varepsilon$  gilt, hat man also

$$\bar{\mathfrak{A}} \leq \sum \bar{\mathfrak{A}}_n = \sum |\mathfrak{A}_n|.$$

Daher erhält man aus Satz 5, 11 der obigen Ungleichung wegen

$$\bar{\mathfrak{A}} = \underline{\mathfrak{A}} = \sum |\mathfrak{A}_n|.$$

Nun seien die Mengen  $\mathfrak{A}_n$  nicht notwendig paarweise fremd. Dann setzen wir für  $n \geq 2$

$$\mathfrak{D}_n = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_{n-1})\mathfrak{A}_n$$

und haben offenbar

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2) + (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{D}_3) + \dots$$

Jetzt sind die Summanden aber paarweise fremd und nach Satz 5, 19 auch messbar. Nach dem eben bewiesenen folgt somit unter Verwendung von Satz 5, 16

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{D}_2| + |\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{D}_3| + \dots \leq |\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2| + |\mathfrak{A}_3| + \dots$$

wie behauptet war.

Aus Satz 5, 20 folgt nach Satz 1, 1 und Satz 1, 2, dass wenn  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Folge messbarer Mengen ist, auch ihr Durchschnitt, ferner  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathfrak{A}}_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathfrak{A}}_n$  messbar sein muss. Die nächsten Sätze stellen die Grösse der Masse dieser Mengen fest.

**Satz 5, 21.** *Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Folge messbarer Mengen, deren Durchschnitt  $\mathfrak{A}$  ist, so gilt*

$$|\mathfrak{A}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n|.$$

Beweis. Wir setzen

$$\mathfrak{D}_n = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n.$$

Dann ist offenbar

$$B - \mathfrak{A} = (B - \mathfrak{D}_1) + (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) + (\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_3) + \dots$$

wo die Summanden fremd und messbar sind. Somit folgt nach dem vorigen Satz

$$|B - \mathfrak{A}| = |B - \mathfrak{D}_1| + |\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2| + |\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_3| + \dots$$

also nach Satz 5, 19

$$|B| - |\mathfrak{A}| = |B| - \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{D}_n|$$

wie behauptet war.

**Satz 5, 22.** *Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine monoton wachsende Folge messbarer Mengen, deren Summe  $\mathfrak{A}$  ist, so gilt*

$$|\mathfrak{A}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

**Beweis.** Offenbar ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2) + \dots$$

wo die Summanden fremd sind. Satz 5, 20 ergibt also

$$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1| + |\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_2| + \dots$$

Nach Satz 5, 19 folgt also die Behauptung.

**Satz 5, 23.** *Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine Folge messbarer Mengen und ist*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{C},$$

so ist

$$|\mathfrak{B}| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{C}| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

**Beweis.** Es sei

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_n + \mathfrak{A}_{n+1} + \mathfrak{A}_{n+2} + \dots$$

dann ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 \dots$$

Da die  $\mathfrak{C}_n$  monoton abnehmen, folgt aus Satz 5, 21

$$|\mathfrak{B}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{C}_n|.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{C}_n \supseteq \mathfrak{A}_{n+\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

somit folgt

$$|\mathfrak{C}_n| \geq |\mathfrak{A}_{n+\lambda}|,$$

also

$$|\mathfrak{C}_n| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|,$$



daher

$$|\mathfrak{B}| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

Jetzt setzen wir

$$\mathfrak{D}_n = \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{A}_{n+2} \dots$$

Die  $\mathfrak{D}_n$  bilden eine monoton wachsende Folge von messbaren Mengen und es ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3 + \dots$$

Nach Satz 5, 22 ist also

$$|\mathfrak{C}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{D}_n|.$$

Ferner gilt

$$\mathfrak{D}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

daher folgt

$$|\mathfrak{D}_n| \leq |\mathfrak{A}_{n+\lambda}|$$

und

$$|\mathfrak{D}_n| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|$$

somit

$$|\mathfrak{C}| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

**Satz 5, 24.** *Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine konvergente Folge messbarer Mengen und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$ , so gilt*

$$|\mathfrak{A}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|.$$

Beweis. Es ist in der Bezeichnung des vorigen Satzes

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n| \leq |\mathfrak{A}| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n|,$$

was die Behauptung ergibt.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, dass der  $\sigma$ -Körper der messbaren Mengen der Grösse nach abhängt von den Zahlenwerten der den Grundmengen zugeordneten Masse. Allgemein kann man nur behaupten, dass alle Mengen des kleinsten  $\sigma$ -Körpers über den offenen Mengen messbar sind, ob jedoch bestimmte Mengen, die diesem kleinsten  $\sigma$ -Körper nicht angehören, messbar sind, hängt allein von der Grösse der Masse der Grundmengen ab. Man kann die letzteren so wählen, dass alle Teilmengen von  $B$  messbar werden.

## § 6.

**Peano-Jordansche Inhaltstheorien im Nullraum.**

**Definition 6, 1.** Ein Mengenkörper  $\mathfrak{z}$  heisse *Bezugskörper*, wenn jede seiner Mengen messbar ist und wenn er  $B$  enthält. Es heisst ein *normaler Bezugskörper*, wenn jede Summe von Mengen aus ihm auch Summe von abzählbar vielen seiner Mengen ist.

Ein Beispiel für einen normalen Bezugskörper ist der Körper der  $a$ -Mengen.

**Definition 6, 2.** Unter dem *äusseren  $\mathfrak{z}$ -Inhalt* einer Menge  $\mathfrak{A}$  (relativ zum Bezugskörper  $\mathfrak{z}$ ) versteht man die Zahl

$$\bar{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) = \text{fin inf } |\alpha|,$$

wo  $\alpha$  alle  $\mathfrak{A}$  überdeckenden Mengen aus  $\mathfrak{z}$  durchläuft.

**Definition 6, 3.** Unter dem *inneren  $\mathfrak{z}$ -Inhalt* einer Menge  $\mathfrak{A}$  versteht man die Zahl

$$\underline{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) = \text{fin sup } |\alpha|,$$

wo  $\alpha$  alle in  $\mathfrak{A}$  enthaltenen Mengen aus  $\mathfrak{z}$  durchläuft.

**Definition 6, 4.** Ist

$$\underline{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) = \bar{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}),$$

so heisst

$$I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) = \underline{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) = \bar{I}_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}),$$

der  $\mathfrak{z}$ -Inhalt von  $\mathfrak{A}$ .

**Satz 6, 1.** Jede Menge aus  $\mathfrak{z}$  hat einen  $\mathfrak{z}$ -Inhalt und dieser ist ihrem Mass gleich.

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Definitionen.

**Satz 6, 2.** Die Mengen, die einen  $\mathfrak{z}$ -Inhalt haben, bilden einen Körper  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{z}}$ , in dem folgende Rechenregeln gelten

1) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei fremde Mengen mit  $\mathfrak{z}$ -Inhalt, so ist

$$I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) + I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{B}).$$

2) Haben  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$   $\mathfrak{z}$ -Inhalt und ist  $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ , so ist

$$I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{A}) - I_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{B}).$$

3) Unter den Annahmen von 2) gilt

$$I_x(\mathfrak{A}) \cong I_x(\mathfrak{B}).$$

4) Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei beliebige Mengen mit  $x$ -Inhalt, so gilt

$$I_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B}) - I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Beweis. a) Wir beweisen zunächst die Behauptung 1).

$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \sigma, \sigma'$  sollen alle die Mengen aus  $x$  durchlaufen, die den Bedingungen genügen

$$\alpha \cong \mathfrak{A} \cong \alpha', \quad \beta \cong \mathfrak{B} \cong \beta', \quad \sigma \cong \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cong \sigma'.$$

Offenbar bilden die  $\alpha + \beta$  eine Teilmenge der  $\sigma$  und die  $\alpha' + \beta'$  eine Teilmenge der  $\sigma'$ . Ferner sind die  $\alpha'$  fremd zu den  $\beta'$ , weil  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  fremd sind. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \bar{I}_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= \text{fin inf } |\sigma| \leq \text{fin inf } |\alpha + \beta| = \text{fin inf } \{|\alpha| + |\beta| - |\alpha\beta|\} \\ &\leq \text{fin inf } |\alpha| + \text{fin inf } |\beta| = I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= \text{fin sup } |\sigma'| \geq \text{fin sup } |\alpha' + \beta'| = \text{fin sup } |\alpha'| + \text{fin sup } |\beta'| \\ &= I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \leq I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B}) \leq \bar{I}_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).$$

Da nach Definition 6, 2 und Definition 6, 3 der äussere Inhalt nie kleiner als der innere ist, folgt somit die Existenz des  $x$ -Inhalts der Summe und die behauptete Gleichung.

b) Wir zeigen, dass wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  beide  $x$ -Inhalt haben, auch  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  einen  $x$ -Inhalt hat.

$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  sollen dieselbe Bedeutung wie unter a) haben, und  $\pi$  und  $\pi'$  sollen die Mengen aus  $x$  durchlaufen, die der Bedingung genügen

$$\pi \cong \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cong \pi'.$$

Dann sind die  $\alpha\beta$  eine Teilmenge der  $\pi$  und die  $\alpha'\beta'$  eine Teilmenge der  $\pi'$ .

Da  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$   $x$ -Inhalt haben, gibt es Folgen von (ev. gleichen) Mengen aus  $x$

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots &\cong \mathfrak{A} \cong \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \dots \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots &\cong \mathfrak{B} \cong \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \dots \end{aligned}$$

so dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = I_x(\mathfrak{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha'_n| \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n| = I_x(\mathfrak{B}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta'_n|.$$

Daher ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n \beta_n| \geq \text{fin inf } |\alpha_n \beta_n| \geq \text{fin inf } |\alpha \beta| \geq \text{fin inf } |\pi| = \bar{I}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha'_n \beta'_n| \leq \text{fin sup } |\alpha'_n \beta'_n| \leq \text{fin sup } |\alpha' \beta'| \leq \text{fin sup } |\pi'| = I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Ferner ist

$$|\alpha_n \beta_n| \geq |\alpha'_m \beta'_m| \quad \text{und} \quad |\alpha_n + \beta_n| \geq |\alpha'_m + \beta'_m| \quad \text{für alle } (n, m)$$

daher folgt aus

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| + |\beta_n| - |\alpha_n + \beta_n| \quad \text{und} \quad |\alpha'_n \beta'_n| = |\alpha'_n| + |\beta'_n| - |\alpha'_n + \beta'_n|,$$

also aus

$$|\alpha_n \beta_n| - |\alpha'_n \beta'_n| = \{|\alpha_n| - |\alpha'_n|\} + \{|\beta_n| - |\beta'_n|\} - \{|\alpha_n + \beta_n| - |\alpha'_n + \beta'_n|\},$$

dass mit wachsendem  $n$  die linke Seite der Gleichung beliebig klein wird, und dass gilt

$$0 = \lim \{|\alpha_n \beta_n| - |\alpha'_n \beta'_n|\} \geq \underline{\lim} |\alpha_n \beta_n| - \overline{\lim} |\alpha'_n \beta'_n| \geq \bar{I}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Hieraus und aus den obigen Abschätzungen für  $I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$  und  $\bar{I}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$  ergibt sich nun sofort

$$\bar{I}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

was zu beweisen war.

c) Wir wollen nun zeigen, dass mit  $\mathfrak{A}$  auch  $B - \mathfrak{A}$   $z$ -Inhalt hat und dass gilt

$$I_x(B - \mathfrak{A}) = |B| - I_x(\mathfrak{A}).$$

$\alpha$  und  $\alpha'$  sollen die Bedeutung von b) haben und  $\delta$  und  $\delta'$  durchlaufen alle Mengen aus  $z$ , die die Bedingung erfüllen

$$\delta \geq B - \mathfrak{A} \geq \delta'.$$

Dann ist wegen

$$B - \alpha' \geq B - \mathfrak{A} \geq B - \alpha$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_x(B - \mathfrak{A}) &= \text{fin inf } |\delta| \leq \text{fin inf } |B - \alpha'| = |B| - \text{fin sup } |\alpha'| = |B| - I_x(\mathfrak{A}) \\ \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}) &= \text{fin sup } |\delta'| \geq \text{fin sup } |B - \alpha| = |B| - \text{fin inf } |\alpha| = |B| - I_x(\mathfrak{A}). \end{aligned}$$

Also ist

$$|B| - I_x(\mathfrak{A}) \geq I_x(B - \mathfrak{A}) \geq \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}) \geq |B| - I_x(\mathfrak{A}).$$

Hieraus folgt aber

$$I_x(B - \mathfrak{A}) = |B| - I_x(\mathfrak{A}).$$

d) Wir zeigen, dass wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$   $x$ -Inhalt haben und  $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$  ist, auch  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$   $x$ -Inhalt hat.

Es ist nämlich

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A}(B - \mathfrak{B}).$$

Aus b) und c) folgt also die Behauptung unmittelbar.

Von den Aussagen des Satzes 6, 2 ist somit bewiesen, dass  $\mathfrak{K}_x$  ein Körper ist und ausserdem die Regel 1).

- 2) folgt aus 1), wenn man  $\mathfrak{A}$  in 1) mit  $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$  identifiziert.
- 3) folgt aus 2), da  $I_x(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$  nie negativ sein kann.
- 4) Es gilt die Mengengleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

in der die Summanden rechts fremd sind. Nach 1) gilt also wegen 4)

$$I_x(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = I_x(\mathfrak{A}) + I_x(\mathfrak{B}) - I_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Durch Verschärfung des Beweises c) ergibt sich

**Satz 6, 3.** *Es gilt für jede Menge  $\mathfrak{A}$*

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = |B| - \bar{I}_x(B - \mathfrak{A}).$$

**Beweis.** Durchläuft  $\delta$  alle Mengen aus  $x$ , die die Bedingung erfüllen

$$\delta \geq B - \mathfrak{A}$$

und  $\alpha'$  alle die, für die gilt

$$\mathfrak{A} \geq \alpha',$$

so ist offenbar die Menge der  $\alpha'$  identisch mit der Menge der  $B - \delta$ . Also gilt

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = \text{fin sup } |B - \delta| = |B| - \text{fin inf } |\delta| = |B| - \overline{I}_x(B - \mathfrak{A}),$$

was zu beweisen war.

**Satz 6, 4.** *Es gilt für jede Menge  $\mathfrak{A}$*

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) \leq \underline{\mathfrak{A}} \leq \mathfrak{A} \leq \overline{I}_x(\mathfrak{A}).$$

Beweis. Für jedes  $\alpha' \leq \underline{\mathfrak{A}}$  aus  $z$  gilt

$$|\alpha'| = \alpha' \leq \underline{\mathfrak{A}} \text{ also } \underline{I}_x(\mathfrak{A}) \leq \underline{\mathfrak{A}}.$$

Für jedes  $\alpha \geq \mathfrak{A}$  aus  $z$  gilt

$$|\alpha| = \bar{\alpha} \geq \mathfrak{A}, \text{ also } \overline{I}_x(\mathfrak{A}) \geq \mathfrak{A}.$$

**Satz 6, 5.** *Jede Menge mit  $z$ -Inhalt ist messbar (aber nicht notwendig umgekehrt) und der  $z$ -Inhalt ist stets dem Masse gleich.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz.

**Definition 6, 5.** *Es sei  $\mathfrak{A}$  eine beliebige Menge und  $\mathfrak{A}^* = \sum_v \mathcal{A}_v$  Teilmenge von  $\mathfrak{A}$ , wo die  $\mathcal{A}_v$  paarweise fremde Mengen aus  $z$  sind. Enthält dann bei beliebigem  $\varepsilon > 0$   $\mathfrak{A} - \sum_{v=1}^{N(\varepsilon)} \mathcal{A}_v$  für hinreichend grosses  $N(\varepsilon)$  nur noch Mengen aus  $x$  mit kleinerem Mass als  $\varepsilon$ , so heisst  $\mathfrak{A}^*$  ein  $z$ -Kern von  $\mathfrak{A}$ .*

Es ist zu beachten, dass hier von *einem*  $z$ -Kern nicht aber von *dem*  $z$ -Kern von  $\mathfrak{A}$  die Rede ist, weil die Definition offenbar nicht eindeutig ist. Ist jedoch der Bezugskörper  $z$  normal, so kann man mühelos einen der  $z$ -Kerne auszeichnen und von dem  $z$ -Kern reden, der die Summe *aller* in  $\mathfrak{A}$  enthaltener Mengen aus  $z$  ist. Dann nämlich ist nach Erklärung des normalen Bezugskörper diese Summe bestimmt auch als Summe von höchstens abzählbar vielen Mengen aus  $z$  darstellbar, wie es Definition 6, 5 verlangt, und zwar auch von paarweise fremden.

**Satz 6, 6.** *Zu jeder Menge  $\mathfrak{A}$  gibt es  $z$ -Kerne.*

Beweis. Es sei  $\{\varepsilon_n\}$  eine Nullfolge. Dann wählt man eine in  $\mathfrak{A}$  enthaltene Menge  $\alpha_1^{(1)}$ , die zu  $z$  gehört, so dass gilt  $|\alpha_1^{(1)}| \geq \varepsilon_1$ . Dann wählt man aus  $\mathfrak{A} - \alpha_1^{(1)}$  eine ebensolche Menge  $\alpha_1^{(2)}$ , dann aus  $\mathfrak{A} - \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}$  eine ebensolche Menge  $\alpha_1^{(3)}$  u. s. w. Dies geht nur endlich oft und die Summe dieser Mengen sei  $\mathcal{A}_1$ , das also zu  $z$  gehört. Dann wähle man aus  $\mathfrak{A} - \mathcal{A}_1$  eine zu  $z$  gehörige Menge  $\alpha_2^{(1)}$ , für die gilt:  $|\alpha_2^{(1)}| \geq \varepsilon_2$ ; dann aus  $\mathfrak{A} - \mathcal{A}_1 - \alpha_2^{(1)}$  eine ebensolche Menge  $\alpha_2^{(2)}$

u. s. w. Dies geht nur endlich oft und die Summe dieser Mengen sei  $A_2$ , das also zu  $x$  gehört. So gehe man für jedes  $\varepsilon_n$  vor. Die Menge  $\sum_n A_n$  ist dann offenbar ein  $x$ -Kern von  $\mathfrak{A}$ , da  $\mathfrak{A} - \sum_n A_n$  keine Menge aus  $x$  mit positivem Mass enthalten kann.

**Definition 6, 6.** Ist  $\mathfrak{A}^*$  ein  $x$ -Kern von  $\mathfrak{A}$  und  $(B - \mathfrak{A})^*$  ein  $x$ -Kern von  $B - \mathfrak{A}$ , so heisst

$$\{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^*\} + \{B - \mathfrak{A} - (B - \mathfrak{A})^*\}$$

eine  $x$ -Begrenzung von  $\mathfrak{A}$ .

Auch diese Definition ist nicht eindeutig, kann jedoch, wenn  $x$  ein normaler Bezugskörper ist, eindeutig gemacht werden, indem man die  $x$ -Kerne eindeutig macht.

Ist  $x$  speziell der normale Bezugskörper der  $a$ -Mengen, so fällt, wie man sofort sieht, die (eindeutig gemachte)  $x$ -Begrenzung jeder Menge zusammen mit der Menge, die Begrenzung schlechthin heisst (vergl. Definition 2, 3).

**Satz 6, 7.** Für jede Menge  $\mathfrak{A}$  gilt

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}^*|,$$

wo  $\mathfrak{A}^*$  ein beliebiger  $x$ -Kern von  $\mathfrak{A}$  ist.

Beweis. Nach Definition 6, 1 und Definition 6, 5 existiert  $|\mathfrak{A}^*|$ . Aus Definition 6, 3 folgt sofort

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) \geq |\mathfrak{A}^*|.$$

Gezeigt werden muss, dass das Gleichheitszeichen gilt. Wir nehmen also an, es sei

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}^*| + \delta, \quad \delta > 0.$$

Dann gibt es eine Menge  $\alpha \leq \mathfrak{A}$  aus  $x$ , für die gilt

$$|\alpha| \geq |\mathfrak{A}^*| + \frac{\delta}{2}.$$

$\mathfrak{A}^*$  ist nach Definition nun Summe der Mengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  aus  $x$ . Also ist  $\mathfrak{A}^*$  auch Summe von abzählbar vielen paarweise fremden Mengen aus  $x$ , z. B.

der Mengen  $\mathfrak{A}'_n = \mathfrak{A}_n \left\{ B - \sum_{v=1}^{n-1} \mathfrak{A}_v \right\}$ .

Wir denken uns diese Mengen nach fallender Grösse der Masse geordnet. Diese Folge sei  $\{A_n\}$ , deren Masse also eine Nullfolge bilden, falls es nicht nur endlich viele Mengen sind. In beiden Fällen gibt es zu  $\delta$  eine Zahl  $N(\delta)$ , so, dass die Menge

$$\mathfrak{A}''_N = \mathfrak{A} - \sum_{v=1}^N A_v$$

keine Menge  $\alpha'$  aus  $x$  enthält, für die gilt

$$|\alpha'| \geq \frac{\delta}{3}.$$

$\alpha - \alpha \sum_{v=1}^N A_v$  ist Menge aus  $x$  und in  $\mathfrak{A}''_N$  enthalten. Somit ist

$$|\alpha| - \left| \alpha \sum_{v=1}^N A_v \right| < \frac{\delta}{3},$$

also

$$|\alpha| < \left| \alpha \sum_{v=1}^N A_v \right| + \frac{\delta}{3} \leq \left| \sum_{v=1}^N A_v \right| + \frac{\delta}{3} \leq |\mathfrak{A}^*| + \frac{\delta}{3}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der obigen Ungleichung für  $|\alpha|$ . Somit ist  $\delta = 0$  und der Satz bewiesen.

**Satz 6, 8.** *Eine Menge hat dann und nur dann einen  $x$ -Inhalt, wenn der  $x$ -Inhalt jeder ihrer  $x$ -Begrenzungen verschwindet.*

Beweis.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* + (B - \mathfrak{A}) - (B - \mathfrak{A})^* = B - \mathfrak{A}^* - (B - \mathfrak{A})^*$$

sei eine  $x$ -Begrenzung von  $\mathfrak{A}$ .

Ihr Komplement

$$B - \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^* + (B - \mathfrak{A})^*$$

ist Summe zweier fremder Mengen, deren jede ihrerseits Summe von abzählbar vielen paarweise fremden Mengen aus  $x$  ist. Somit ist  $B - \mathfrak{B}$  ein  $x$ -Kern von sich selbst.

Nach Satz 6, 7 folgt also

$$\underline{I}_x(B - \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}^*| + |(B - \mathfrak{A})^*| = \underline{I}_x(\mathfrak{A}) + \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}).$$

Man hat daher



$$\bar{I}_x(\mathfrak{B}) = |B| - \underline{I}_x(B - \mathfrak{B}) = |B| - \underline{I}_x(\mathfrak{A}) - \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}).$$

Es sei zunächst

$$I_x(\mathfrak{B}) = 0.$$

Dann folgt

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = |B| - \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}).$$

Somit ist

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = \bar{I}_x(\mathfrak{A}),$$

wegen

$$\underline{I}_x(B - \mathfrak{A}) = |B| - \bar{I}_x(\mathfrak{A}).$$

$\mathfrak{A}$  hat also  $x$ -Inhalt.

Wenn aber umgekehrt  $\mathfrak{A}$   $x$ -Inhalt hat, so folgt aus der Gleichung für  $\bar{I}_x(\mathfrak{B})$  sofort

$$\bar{I}_x(\mathfrak{B}) = 0,$$

wegen

$$\underline{I}_x(B - \mathfrak{A}) = |B| - \underline{I}_x(\mathfrak{A}).$$

Der Satz ist somit bewiesen.

Eine ähnliche Aussage macht

**Satz 6,9.** *Eine Menge hat dann und nur dann einen  $x$ -Inhalt, wenn das Mass jeder ihrer  $x$ -Begrenzungen verschwindet.*

Beweis. Hat  $\mathfrak{A}$   $x$ -Inhalt, so verschwindet nach Satz 6,8 der Inhalt jeder Begrenzung von  $\mathfrak{A}$ , also nach Satz 6,4 a fortiori deren Mass; das »nur dann« ist somit bewiesen. Es sei nun das Mass der Begrenzung 0, also nach Satz 6,7

$$0 = |B - \mathfrak{A}^* - (B - \mathfrak{A})^*| = |B| - \underline{I}_x(\mathfrak{A}) - \underline{I}_x(B - \mathfrak{A}).$$

Dann folgt wegen

$$\underline{I}_x(B - \mathfrak{A}) = |B| - \bar{I}_x(\mathfrak{A})$$

sofort wie behauptet

$$\underline{I}_x(\mathfrak{A}) = \bar{I}_x(\mathfrak{A}).$$

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, dass der Körper der Mengen mit  $x$ -Inhalt dem Umfange nach von den Grössen der Masse der Grundmengen abhängt, entsprechend wie es beim  $\sigma$ -Körper der messbaren Mengen war. (Vergl. § 5, Schluss.)<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Anmerk.: Durchgeführt am Spezialfall des Baireschen Nullraums findet sich die Mass- und Inhaltstheorie in: W. FELLER und E. TORNIER »Mass- und Inhaltstheorie des Baireschen Nullraums«. Math. Ann., Bd. 107.

## Kapitel III.

## Allgemeinste Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

## § 7.

## Vorbereitende Überlegungen und Formulierung der Axiome.

Für die Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung muss zunächst streng unterschieden werden zwischen einer *Versuchsvorschrift* und ihren *logisch möglichen Realisierungen*. An drei Beispielen soll das Gefühl für den Unterschied dieser Begriffe, die erst später exakt formuliert werden, geweckt werden.

Beispiel 1. Es soll mit einem gegebenen unabnutzbaren Würfel unbeschränkt oft geworfen und die Ergebnisse sollen ihrer Reihenfolge nach notiert werden. Dies ist eine Versuchsvorschrift. Ist jedoch eine aus den Ziffern  $1, 2, \dots, 6$  bestehende Folge gegeben, so dass also für jedes  $i$  auf dem  $i$ -ten Platz eine bestimmte dieser Ziffern steht, so hat man eine spezielle der logisch möglichen Realisierungen der obigen Versuchsvorschrift vor sich. Jede solche Folge, auch  $1, 1, 1, \dots$  z. B., ist also eine logisch mögliche Realisierung.

Die Gesamtheit aller logisch möglichen Realisierungen dieser Versuchsvorschrift ist demnach, wenn die Entfernungsdefinition 4, 1 gewählt wird, ein vollständiger Nullraum.

Beispiel 2. Gegeben seien Mengen  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \dots$ , deren Elemente Kugeln sein sollen. Die Kugeln aus  $\mathfrak{M}_i$  seien mit  $0, 1, \dots, k_i$  numeriert:  $0 \leq k_i \leq \infty$ . Die Oberfläche jeder Kugel aus  $\mathfrak{M}_i$  sei in die gleiche Anzahl  $t_i + 1$  einfach zusammenhängender Bereiche zerlegt, die bezeichnet seien mit

$$e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(t_i)}, \quad 0 \leq t_i \leq \infty.$$

Endlich enthalte  $\mathfrak{M}_1$  nur eine Kugel, also:  $k_1 = 0$  und  $\mathfrak{M}_{i+1}$  enthalte soviele Kugeln als jede Kugel aus  $\mathfrak{M}_i$  Bereiche hat, demnach  $k_{i+1} = t_i$ .

Es werde nun die einzige Kugel aus  $\mathfrak{M}_1$  in die Höhe geworfen. Sie komme auf dem Bereich  $e_1^{(r_1)}$  zur Ruhe;  $e_1^{(r_1)}$  wird notiert. Darauf werde aus  $\mathfrak{M}_2$  die mit  $r_1$  numerierte Kugel herausgegriffen und in die Höhe geworfen. Sie komme auf dem Bereich  $e_2^{(r_2)}$  zur Ruhe;  $e_2^{(r_2)}$  wird notiert. Darauf wird aus  $\mathfrak{M}_3$  die mit  $r_2$  numerierte Kugel herausgegriffen und in die Höhe geworfen. Sie komme auf  $e_3^{(r_3)}$  zur Ruhe;  $e_3^{(r_3)}$  wird notiert, u. s. w. Dies ist eine Versuchsvorschrift.

Jede Folge

$$e_1^{(r_1)} e_2^{(r_2)} e_3^{(r_3)} \dots,$$

jedoch ist eine logisch mögliche Realisierung dieser Versuchsvorschrift. Die Gesamtheit aller logisch möglichen Realisierungen bildet hier einen Baireschen Nullraum, wenn man die Entfernungsdefinition 4, 1 wählt.

Beispiel 3. Gegeben sei eine (ev. abbrechende) Folge von verschiedenen (nicht notwendig homogenen) Würfeln  $W_1, W_2, W_3, \dots$  und eine Kugel, deren Oberfläche in ebensoviele einfach zusammenhängende numerierte Bereiche zerlegt ist, als es Würfel gibt.

Die Versuchsvorschrift lautet: Die Kugel wird geworfen und falls sie auf dem  $m$ -ten Bereich zur Ruhe kommt, wird mit dem  $m$ -ten Würfel unbeschränkt oft gewürfelt und die Ergebnisse  $x = 1, 2, 3, \dots, 6$  werden als Zahlenpaare  $(m, x)$  der Reihe nach notiert.

Auch hier bildet die Gesamtheit aller logisch möglichen Realisierungen einen Nullraum, der aber kein Bairescher Nullraum mehr ist, wie es in den beiden ersten Beispielen der Fall war. Er kann jedoch als Summe der den einzelnen Würfeln (Beispiel 1) zugeordneten Baireschen Nullräume dargestellt werden. Dass es sich um einen vollständigen Nullraum handelt, sieht man, wenn man in Definition 4, 4 das Symbol  $e_n^{(r_1 r_2 \dots r_{n-1}) (r_n)}$  durch  $(m, r_n)$  ersetzt, falls  $e_1^{(r_1)} = (m, r_1)$  war.

In den Beispielen und ganz allgemein ist die Situation also die, dass eine Versuchsvorschrift durch die Gesamtheit ihrer logisch möglichen Realisierungen einen vollständigen Nullraum festlegt. Dies ist aber nicht alles, was durch die Versuchsvorschrift bestimmt wird. In Beispiel 1 ist von einem bestimmten Würfel die Rede und in Beispiel 2 von bestimmt vorgegebenen Kugeln. Dem allgemeinen Gefühl nach — woher dieses stammt, ist hier ganz nebensächlich — besteht aber ein Unterschied, wenn in Beispiel 1 ein mal ein hölzerner Würfel und dann einer, der halb aus Holz und halb aus Stahl besteht, verwandt wird. Das gibt dem Gefühl nach zwei verschiedene Versuchsvorschriften und ebenso ist es, wenn in Beispiel 2 die Kugeln einmal homogen und ein zweites Mal inhomogen gedacht sind, trotzdem in allen Fällen die Nullräume vom selben Typus sind. Ebenso steht es bei Beispiel 3. Diese Sachlage muss nun mathematischer Formulierung zugänglich gemacht werden; dies geschieht im Prinzip so:

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet gewisse Eigenschaften der logisch möglichen Realisierungen einer Versuchsvorschrift und bewertet zahlenmäßig durch die Wahrscheinlichkeit die Gesamtheit aller Realisierungen, die

durch eine solche Eigenschaft charakterisiert sind, wobei eben der Zahlenwert der Grösse nach von den in der Vorschrift auftretenden Individuen abhängt und sich ändern kann, wenn sie durch andere Individuen ersetzt werden. Die genannte Gesamtheit aber bildet eine Teilmenge des Nullraumes, der durch alle logisch möglichen Realisierungen der Versuchsvorschrift festgelegt ist. Dem System der bewerteten Eigenschaften entspricht so eineindeutig ein bestimmtes Teilmengensystem dieses Nullraums.

Als einfachstes Beispiel sei die Eigenschaft einer Realisierung genannt, an den  $n$  ersten Stellen vorgegebene Ergebnisse  $e_1^{(r_1)} e_2^{(r_1)(r_2)} \dots e_n^{(r_1 r_2 \dots r_{n-1})(r_n)}$  aufzuweisen. Die Realisierungen dieser Eigenschaft bilden eine Grundmenge des Nullraums und sollen deshalb als *Grundeigenschaften* bezeichnet werden.

Das mathematisch allein greifbare an der Versuchsvorschrift ist also offensichtlich, dass sie einmal durch die Gesamtheit der logisch möglichen Realisierungen einen vollständigen Nullraum festlegt und ausserdem einem gewissen System von Teilmengen dieses Raumes Zahlenwerte (Wahrscheinlichkeiten) zuordnet. Wir nennen das System der bewerteten Mengen einschliesslich der Bewertungen ein *Wahrscheinlichkeitsfeld*.

Die Verknüpfungsregeln in diesen Wahrscheinlichkeitsfeldern sowohl in Bezug auf das Mengensystem als auch in Bezug auf die Bewertungen sind Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dabei ist es für unseren Standpunkt gleichgültig, ob die Wahrscheinlichkeiten, aus denen andere berechnet werden, a priori bestimmbar sind oder aus Analogien und Induktionen stammen oder nach gewissen praktischen Faustregeln durch Experimente ermittelt werden. Keinesfalls liegt die Aufgabe, die Ausgangswahrscheinlichkeiten auf Grund der speziellen in der Versuchsvorschrift gegebenen Individuen (Würfel, Kugeln, etc.) zu ermitteln, im Rahmen der theoretischen Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst. *Wir haben einzig und allein diejenigen Forderungen (Axiome) aufzuzeigen, die man an ein von einer Versuchsvorschrift induziertes Wahrscheinlichkeitsfeld unbedingt stellen muss, damit in ihm eine Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt möglich wird.*

Zunächst wird es unerlässlich sein, dass jede Grundeigenschaft eine Wahrscheinlichkeit hat, denn eine Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der man nicht einmal von einer Wahrscheinlichkeit dafür reden kann, dass in Beispiel 1 eine Realisierung mit 1, 3, 5 beginnt — dies wäre eine Grundeigenschaft — dürfte kaum bemerkenswerte Ergebnisse liefern.

Haben ferner zwei Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten, so wird man verlangen müssen, dass auch die Eigenschaft eine Wahrscheinlichkeit hat, die darin

besteht, dass einer Realisierung mindestens eine der beiden Eigenschaften zukommt, d. h. dass sie zur Summe der den beiden Eigenschaften zugeordneten Mengen gehört.

Haben weiter zwei Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten und kommt jeder Realisierung, die die zweite Eigenschaft besitzt, auch die erste zu, so wird man auch die Existenz der Wahrscheinlichkeit der Eigenschaft voraussetzen müssen, die darin besteht, dass eine Realisierung die erste aber nicht die zweite Eigenschaft hat, d. h. dass die Realisierung der Differenz der den beiden Eigenschaften zugeordneten Mengen angehört.

Ohne diese beiden Forderungen ist eine in sich einigermaßen abgeschlossene Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum durchführbar. Sie sagen offenbar aus, dass die Eigenschaften, die Wahrscheinlichkeiten haben, umkehrbar eindeutig den Mengen eines Mengenkörpers entsprechen sollen. Nehmen wir hierzu unsere erste Erkenntnis die Grundmengen betreffend, so ist durch diese drei Annahmen der genannte Körper also als der kleinste Körper über dem System der Grundmengen festgelegt. Es ist somit ein Unterkörper des Körpers der  $a$ - $o$ -Mengen, ja offenbar sogar des Körpers der beschränkten  $a$ - $o$ -Mengen, wobei wir im Augenblick eine  $a$ - $o$ -Menge beschränkt nennen, wenn alle Grundmengen ihrer Normalform von beschränkter Stufe sind.

Der durch die drei Annahmen festgelegte Körper enthielte somit weder einen einzelnen Punkt noch auch jede  $a$ - $o$ -Menge. Wenn wir also keine weiteren Annahmen ausser den genannten drei einführen, können wir weder von der Wahrscheinlichkeit reden, dass eine Realisierung mit einer vorgegebenen Realisierung übereinstimmt, noch auch von der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Realisierung zu einer vorgegebenen  $a$ - $o$ -Menge gehört, sofern nur die letztere nicht dem genannten Körper angehört.

Bevor wir nach Forderungen, die diese Übelstände mildern, suchen, wollen wir noch Annahmen über die Art der Verknüpfung der Zahlenwerte der Wahrscheinlichkeiten machen. Darüber nämlich können wir auf Grund der bisherigen Überlegungen gar nichts aussagen und gerade von der Art dieser Verknüpfungen wird die aufgeworfene Frage nach passender Vergrößerung des Körpers wesentlich abhängen.

Offenbar ist es plausibel anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel beim ersten Versuche 1 zu werfen gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür ist, mit demselben Würfel in zwei Würfeln 1 und 1, oder 1 und 2, oder 1 und 3, oder 1 und 4, oder 1 und 5, oder 1 und 6 zu werfen. Verallge-

meinert heisst diese Annahme offensichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit einer Grundmenge  $n$ -ter Stufe gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller in ihr enthaltenen verschiedenen Grundmengen  $(n + 1)$ -ter Stufe sein soll.

Ausser dieser speziellen Annahme, die uns ja nur Aufschluss über Zusammenhänge von Wahrscheinlichkeiten von Grundmengen gibt, benötigen wir noch eine Annahme für zwei beliebige fremde Mengen. Es liegt nahe, anzunehmen, dass für zwei fremde Mengen, die Wahrscheinlichkeiten haben, die Wahrscheinlichkeit der Summe gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Summanden ist, da diese Annahme in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der vorigen ist.

Nunmehr sind wir in der Lage, nach der zweckmässigen Art der Vergrösserung des bisher festgelegten Mengenkörpers zu suchen, um die oben genannten Mängel zu mildern. Diese Mängel bestehen anders gesagt in einer willkürlichen Unstetigkeit, die wir uns klar machen müssen. Es ist damit gemeint, dass gewisse nicht dem Körper angehörige Mengen allein auf Grund der Annahme, dass sie Wahrscheinlichkeiten besitzen, sofort *eindeutige* Zahlenwerte als Wahrscheinlichkeiten zugeordnet erhielten, dass diese Mengen also bisher sozusagen grundlos aus dem Bereich derer, die Wahrscheinlichkeiten haben ausgeschlossen sind. Dies geht so zu: Da die Wahrscheinlichkeiten nicht negative Zahlen sein sollen, folgt aus der Körpereigenschaft und der Additionsforderung für die Zahlenwerte sofort, dass die umfassendere von zwei Eigenschaften (grössere von zwei Mengen), die Wahrscheinlichkeiten haben, nie die kleinere Wahrscheinlichkeit haben kann. Ist nun eine Menge  $\mathfrak{M}$  gegeben, die nicht unserem Körper angehört, der also bisher keine Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist, so ist es trotzdem oft möglich, Körpermengen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$ , die sämtlich  $\mathfrak{M}$  enthalten, und Körpermengen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots$ , die sämtlich in  $\mathfrak{M}$  enthalten sind, so anzugeben, dass die Wahrscheinlichkeiten geeignet ausgewählter  $\mathfrak{A}_n$  und  $\mathfrak{B}_m$  sich beliebig wenig unterscheiden. Hätte also  $\mathfrak{M}$  eine Wahrscheinlichkeit, so wäre diese eindeutig festgelegt als der Finis inferior der Wahrscheinlichkeiten der  $\mathfrak{A}_n$  und auch als der wertgleiche Finis superior der Wahrscheinlichkeiten der  $\mathfrak{B}_m$ . Um dies sozusagen willkürliche Fernhalten solcher Mengen  $\mathfrak{M}$  aus dem Bereich der Mengen, die Wahrscheinlichkeiten haben, aufzuheben, werden wir also eine weitere Forderung stellen, die den bisherigen Bereich dadurch vergrössert, dass sie ihm diese Mengen adjungiert.

Auf Grund dieser Überlegungen erklären wir

**Definition 7, 1.** Ein System  $F$  von Teilmengen  $\mathfrak{A}$  des vollständigen Nullraums  $B$ , die zahlenmässig durch nicht negative Zahlen, die höchstens 1 sind, — die Wahrscheinlichkeit  $(F, \mathfrak{A})$  — bewertet sind, heisst einschliesslich dieser zahlenmässigen

Bewertung ein »Hauptwahrscheinlichkeitsfeld« ( $H-W-F$ ), wenn folgende Axiome erfüllt sind:

**I. Grundmengenaxiom.**

Jede Grundmenge aus  $B$  gehört zu  $F$  und insbesondere ist  $(F, B) = 1$ .

**II. Körperaxiom.**

Das System  $F$  ist ein Körper.

**III. Vollständigkeitsaxiom.**

Gibt es zu einer Menge  $\mathfrak{M}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei Mengen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  aus  $F$ , so dass gilt

$$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{B}$$

und ausserdem

$$|(F, \mathfrak{A}) - (F, \mathfrak{B})| < \varepsilon,$$

so gehört auch  $\mathfrak{M}$  zu  $F$ .

**IV. Additionsaxiome.**

1) Gehört  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zu  $F$  und sind beide fremd, so gilt

$$(F, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{A}) + (F, \mathfrak{B}).$$

2) Ist  $E$  eine Grundmenge  $n$ -ter Stufe ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und ist  $\{E_r\}$  die Gesamtheit der verschiedenen in  $E$  enthaltenen Grundmengen  $(n+1)$ -ter Stufe, so gilt

$$(F, E) = \sum_r (F, E_r).$$

Satz II, 1 lehrt übrigens, dass die Axiome IV mit folgendem scheinbar mehr fordernden Axiom gleichwertig sind<sup>1</sup>:

**IV\*. Zerlegungsaxiom.**

Ist eine Menge  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  Summe der höchstens abzählbar vielen paarweise fremden Mengen  $\{\mathfrak{A}_n\}$  aus  $F$ , so gilt

$$(F, \mathfrak{A}) = \sum_n (F, \mathfrak{A}_n).$$

---

<sup>1</sup> Anmerk.: Diese Behauptung braucht natürlich nicht mehr zu gelten, wenn zu den Axiomen I—V bei entsprechender Ausdehnung von V weitere Axiome hinzugefügt werden, denn dadurch kann IV\* falsch werden.

## V. Minimalaxiom.

*F* ist der kleinste Bereich der den Axiomen I—IV genügt.

Offenbar folgt IV 2) aus IV 1) wenn in jedem Versuche nur endlich viele Ergebnisse möglich sind, da dann jede Grundmenge  $n$ -ter Stufe nur in endlich viele Grundmengen  $(n + 1)$ -ter Stufe zerfällt.

Nur zu Axiom V sind noch einige Worte zu sagen. Wir waren in unseren vorbereitenden Überlegungen konstruktiv vorgegangen, indem wir uns die Grundmengen und ihre Wahrscheinlichkeiten gegeben dachten und aus diesem Material durch die sukzessive aufgefundenen Forderungen neue Mengen, die Wahrscheinlichkeiten haben sollten, aufbauten. Durch dies Vorgehen war der Bereich eindeutig festgelegt eben als die Gesamtheit der Mengen, die auf diesem Wege von diesem Ausgangspunkt aus erreichbar sind. Die Fassung der Axiome I—IV aber enthält dieses konstruktive Element nicht. Durch sie also wird der Bereich nicht eindeutig festgelegt, sondern es ist denkbar, dass es zu dem kleinsten konstruktiven Bereich echte Oberbereiche gibt, die auch den Forderungen I—IV genügen. Axiom V formuliert also gerade das konstruktive Element unserer Überlegungen mathematisch und erzwingt die Eindeutigkeit von  $F$ . In der Formulierung von V ist das Wort »kleinster Bereich« mathematisch sinnvoll, da der Durchschnitt beliebig vieler Bereiche, die den Axiomen I—IV bei gleichen Wahrscheinlichkeiten der Grundmengen genügen, wieder ein solcher Bereich ist, der kleinste Bereich also als Durchschnitt aller solcher Bereiche eindeutig definiert ist (vergl. Satz 1, 3). Dies lehrt auch der Beweis zu 7, 1.

Die Axiome I und IV 2 sagen offenbar aus, (vergl. § 5), dass die Wahrscheinlichkeiten der Grundmengen als Masse der Grundmengen angesehen werden dürfen. In dieser Richtung gibt über die Tragweite der Axiome folgender grundlegender Satz Aufschluss.

**Satz 7, 1.** *Alle und nur die Mengen gehören zu  $F$ , die einen  $\alpha_1$ -Inhalt haben, wo  $\alpha_1$  der Körper der  $a$ - $o$ -Mengen ist, und es gilt für jedes  $\mathfrak{A}$  aus  $F$*

$$(F, \mathfrak{A}) = I_{\alpha_1}(\mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}|,$$

wenn als Masse der Grundmengen die Wahrscheinlichkeiten der Grundmengen gewählt werden.

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, dass jede  $a$ - $o$ -Menge  $\mathfrak{A}$  zu  $F$  gehört und dass gilt  $(F, \mathfrak{A}) = I_{\alpha_1}(\mathfrak{A})$ .

$$\mathfrak{A} = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$



sei die Normalform von  $\mathfrak{A}$ .

$$\mathfrak{B} = E'_1 + E'_2 + E'_3 + \dots$$

sei die Normalform von  $\mathfrak{B} = B - \mathfrak{A}$ .

Wir setzen

$$\mathfrak{A}_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n,$$

$$\mathfrak{B}_n = E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n.$$

Nach I und II gehören  $\mathfrak{A}_n$  und  $\mathfrak{B}_n$  zu  $F$  und nach IV, 1 ist

$$(F, \mathfrak{A}_n) = |\mathfrak{A}_n| \quad \text{und} \quad (F, \mathfrak{B}_n) = |\mathfrak{B}_n|.$$

Nach II gehört auch  $B - \mathfrak{B}_n$  zu  $F$  und nach IV, 1 folgt

$$(F, \mathfrak{B}_n) + (F, B - \mathfrak{B}_n) = (F, B).$$

Also ist wegen  $(F, \mathfrak{B}_n) = |\mathfrak{B}_n|$  und  $(F, B) = |B|$

$$(F, B - \mathfrak{B}_n) = |B - \mathfrak{B}_n|.$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (B - \mathfrak{B}_n) = B - \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$$

folgt nach Satz 5, 24

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{A}| \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |B - \mathfrak{B}_n| = |B - \mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|.$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es also, da die erste Folge monoton wächst, die zweite monoton fällt, ein  $n_1$  und ein  $n_2$  so, dass gilt

$$|\mathfrak{A}_{n_1}| > |\mathfrak{A}| - \varepsilon \quad \text{und} \quad |B - \mathfrak{B}_{n_2}| < |\mathfrak{A}| + \varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$0 \leq |B - \mathfrak{B}_{n_2}| - |\mathfrak{A}_{n_1}| < 2\varepsilon,$$

somit

$$0 \leq (F, B - \mathfrak{B}_{n_2}) - (F, \mathfrak{A}_{n_1}) < 2\varepsilon.$$

Wegen

$$\mathfrak{A}_{n_1} \leq \mathfrak{A} \leq B - \mathfrak{B}_{n_2}$$

folgt somit nach III, dass  $\mathfrak{A}$  zu  $F$  gehört.

Da ausserdem gilt

$$|\mathfrak{A}_n| = (F, \mathfrak{A}_n) \leq (F, \mathfrak{A}) \leq (F, B - \mathfrak{B}_n) = |B - \mathfrak{B}_n|,$$

und sowohl  $|\mathfrak{A}_n|$  als auch  $|B - \mathfrak{B}_n|$  nach  $|\mathfrak{A}|$  konvergieren, folgt wie behauptet

$$(F, \mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}| = I_{\alpha_1}(\mathfrak{A}).$$

Jetzt werden wir zeigen, dass wenn eine Menge  $\mathfrak{A}$  einen  $\alpha_1$ -Inhalt hat, auch  $(F, \mathfrak{A})$  existiert und dem  $\alpha_1$ -Inhalt gleich ist.

Es war

$$\bar{I}_{\alpha_1}(\mathfrak{A}) = \text{fin inf } |\mathfrak{B}|,$$

wo  $\mathfrak{B}$  alle  $\mathfrak{A}$  überdeckenden  $\alpha$ -Mengen durchläuft und

$$I_{\alpha_1}(\mathfrak{A}) = \text{fin sup } |\mathfrak{C}|,$$

wo  $\mathfrak{C}$  alle in  $\mathfrak{A}$  enthaltenen  $\alpha$ -Mengen durchläuft.

Ist also  $\bar{I}_{\alpha_1}(\mathfrak{A}) = I_{\alpha_1}(\mathfrak{A})$ , so ist wegen  $|\mathfrak{B}| = (F, \mathfrak{B})$  und  $|\mathfrak{C}| = (F, \mathfrak{C})$  und wegen  $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{C}$  der Sachverhalt von Axiom III erfüllt,  $(F, \mathfrak{A})$  existiert also und es gilt  $(F, \mathfrak{A}) = I_{\alpha_1}(\mathfrak{A})$ .

Somit ist bewiesen, dass jede Menge, die einen  $\alpha_1$ -Inhalt hat, zu  $F$  gehört. Zu zeigen bleibt, dass jede Menge aus  $F$  einen  $\alpha_1$ -Inhalt hat.

Nun genügen aber die Mengen des Körpers  $\mathfrak{K}_{\alpha_1}$ , d. h. die Mengen, die  $\alpha_1$ -Inhalte haben, den Axiomen I—IV. Dies ist für die Axiome I, II, IV trivial. Für Axiom III sieht man aber sofort, dass auf diese Art doppelseitig durch Inhaltsmengen eingeschlossene Mengen der Inhaltsdefinition wegen ebenso zwischen  $\alpha$ -Mengen eingeschlossen werden können, also auch einen Inhalt haben. Nach Axiom V ist also  $F = \mathfrak{K}_{\alpha_1}$ .

Hiermit ist restlos klargestellt, welche Mengen des einer Versuchsvorschrift zugeordneten Raumes bei Annahme der Axiome I—V Wahrscheinlichkeiten haben und wie diese Wahrscheinlichkeiten — die der Grundmengen als gegeben vorausgesetzt — zu berechnen sind, nämlich rein formal nach den Regeln der Massentheorie.

Ob man diese Axiome, die sozusagen ein Minimum an Voraussetzungen sind, wählen kann oder weitere hinzufügen muss, können nur die kommenden Untersuchungen lehren. Wir werden sehen, dass sie völlig ausreichen, werden aber in § 10 und § 17 doch noch mögliche Erweiterungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch Hinzunahme weiterer Axiome kurz andeuten.

## § 8.

**Verallgemeinerung der Begriffe aus § 7 durch wahrscheinlichkeitstreue Abbildungen.**

Die Vorstellung »Versuchsvorschrift«, deren mathematisches Korrelat der exakte Begriff »Wahrscheinlichkeitsfeld« war, enthält nun zwei physikalisch qualitativ verschiedene Vorschriftsarten. Die erste regelt den Ablauf der Versuche selbst, die zweite bestimmt nur, auf welche Weise die Ergebnisse dieser Versuche notiert werden sollen. Man kann nun leicht die erste dieser Komponenten konstant halten, die zweite aber variieren und so aus einer Versuchsvorschrift neue erzeugen. Dieser Prozess muss natürlich einer Erzeugung von neuen Wahrscheinlichkeitsfeldern aus einem vorgegebenen entsprechen, wenn unser Begriff »Wahrscheinlichkeitsfeld« vernünftig ist. Diese Frage wollen wir zunächst durch Beispiele erläutern und dadurch zu einer Verallgemeinerung des Begriffs »Wahrscheinlichkeitsfeld« fortschreiten.

Hierzu variieren wir das Beispiel 2 aus § 7, indem wir es auf verschiedene Arten abändern und so neue abgeleitete Versuchsvorschriften erzeugen.

$\alpha$ ) Wir bilden eine abgeleitete Versuchsvorschrift durch die Festsetzung, es solle bei jedem Versuch nur notiert werden, ob der obere Index des Ergebnisses gerade oder ungerade ist.

Die Gesamtheit der so entstehenden Realisierungen bildet offenbar einen neuen Nullraum  $B'$  und  $B'$  ist, wie man sofort sieht, stetiges Bild von  $B$  und das Bild jeder Grundmenge aus  $B$  ist eine Grundmenge aus  $B'$ .

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge  $\mathfrak{A}' < B'$  also nach  $(F', \mathfrak{A}')$  würde man mit der physikalischen Begründung, dass nicht der empirische Sachverhalt sondern nur die Art des Notierens der Ergebnisse abgeändert wurde, dahin beantworten, dass  $(F', \mathfrak{A}')$  dann und nur dann existiert, wenn das Urbild  $\psi(\mathfrak{A}')$  von  $\mathfrak{A}'$  eine Wahrscheinlichkeit  $(F, \psi(\mathfrak{A}'))$  hat und dass dann  $(F', \mathfrak{A}')$  dieser Wahrscheinlichkeit gleich ist.

$\beta$ ) Wir bilden eine andere abgeleitete Versuchsvorschrift durch die Festsetzung, es solle nur jedes zweite Versuchsergebnis notiert werden.

Auch hier bilden die neuen Realisierungen einen Nullraum  $B'$ , der stetiges Bild von  $B$  ist und das Bild jeder Grundmenge aus  $B$  ist Grundmenge aus  $B'$ .

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge  $\mathfrak{A}' < B'$  würde man wie bei  $\alpha$ ) beantworten.

$\gamma$ ) Wir bilden eine andere abgeleitete Versuchsvorschrift durch die Festsetzung, es solle stets das  $2n$ -te Versuchsergebnis genau vor dem  $(2n-1)$ -ten ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) notiert werden.

Auch hier bildet die Gesamtheit der so entstehenden Realisierungen einen neuen Nullraum  $B'$  und wiederum ist  $B'$  stetiges Bild von  $B$  und das Bild jeder Grundmenge aus  $B$  ist wieder Grundmenge in  $B'$ .

Auch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge  $\mathfrak{A}' < B'$  würde man wie bei  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) beantworten.

$\delta$ ) Wir bilden eine abgeleitete Versuchsvorschrift durch die Festsetzung, es sollen nur solche Realisierungen als Realisierungen der neuen Vorschrift gelten, die einer Teilmenge  $\mathfrak{A}$  von  $B$  angehören, für die  $(F, \mathfrak{A}) \neq 0$  existiert.

Die Gesamtheit der jetzt möglichen Realisierungen bildet offenbar den Raum  $B' = \mathfrak{A}$ , der stetiges Bild einer Menge aus  $F'$  (nämlich  $\mathfrak{A}$ ) ist. Offenbar ist das Bild jeder Grundmenge in  $\mathfrak{A}$  Grundmenge in  $B'$ .

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge  $\mathfrak{A}'$  von  $B'$  würde man dahin beantworten, dass  $(F', \mathfrak{A}')$  dann und nur dann existiert, wenn das Urbild  $\psi(\mathfrak{A}')$  von  $\mathfrak{A}'$  eine Wahrscheinlichkeit  $(F, \psi(\mathfrak{A}'))$  hat und dass dann gilt

$$(F', \mathfrak{A}') = (F, \psi(\mathfrak{A}')) : (F, \psi(B')).$$

Es handelt sich nun darum, das gemeinsame dieser Beispiele herauszuschälen. Wir sehen hierbei folgendes:

1) Jedesmal ist die Gesamtheit  $B'$  der Realisierungen der abgeleiteten Versuchsvorschrift stetiges Bild einer Menge  $\mathfrak{A}$  aus dem zu  $B$  gehörigen  $F$ , für die  $(F, \mathfrak{A}) \neq 0$  gilt. In den Fällen  $\alpha$ )— $\gamma$ ) ist diese Menge  $\mathfrak{A}$   $B$  selbst.

2) Jedesmal ist das Bild jeder Grundmenge des Urbilds von  $B'$  eine Grundmenge in  $B'$ , a fortiori ist also das Bild jeder offenen Menge des Urbilds von  $B'$  eine offene Menge in  $B'$ .

3) Jedesmal scheint das System  $F'$  der Mengen aus  $B'$ , die Wahrscheinlichkeiten haben, aus allen und nur den Teilmengen  $\mathfrak{A}'$  von  $B'$  zu bestehen, deren Urbilder  $\psi(\mathfrak{A}')$  zu  $F$  gehören.

4) Die Wahrscheinlichkeiten  $(F', \mathfrak{A}')$  der Mengen aus  $F'$  sind dem Gefühl nach denen der Urbilder  $\psi(\mathfrak{A}')$  in  $F$  gleich bis auf den Normierungsfaktor  $1 : (F, \psi(B'))$ . (Im Falle  $\alpha$ )— $\gamma$ ) ist dieser Faktor 1, da dort  $\psi(B') = B$  ist.)

**Definition 8, 1.** Ist  $B'$  stetiges Bild einer Menge  $\mathfrak{A}$  des H-W-F  $F$  und ist das Bild jeder in  $\psi(B')$  offenen Menge offen in  $B'$ , so heisst das System derjenigen

Teilmengen  $\mathfrak{A}'$  von  $B'$ , deren Urbilder  $\psi(\mathfrak{A}')$  Mengen aus  $F$  sind, inkl. der Bewertungen

$$(F', \mathfrak{A}') = (F, \psi(\mathfrak{A}')) : (F, \psi(B'))$$

ein wahrscheinlichkeitstreues Bild von  $F$ . Natürlich ist  $(F, \mathfrak{A}) \neq 0$  vorausgesetzt.

Es handelt sich nun darum, zu prüfen, ob diese Überlegungen mit Definition 7, 1 verträglich sind und keinen neuen Wahrscheinlichkeitsbegriff implizieren, falls  $B'$  ein vollständiger Nullraum ist. Dann nämlich müsste ja  $F'$  ein  $H$ - $W$ - $F$  sein. Dies lehrt folgender grundlegender

**Satz 8, 1.** *Jedes wahrscheinlichkeitstreue Bild eines  $H$ - $W$ - $F$   $F$  genügt den Axiomen I—V, wenn in I) und IV) die Grundmengen aus  $B$  durch Grundmengen aus  $B'$  ersetzt werden.*

*Beweis.* Bezeichnen wir das wahrscheinlichkeitstreue Bild von  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  mit  $F'$ , so müssen wir also zeigen, dass in  $F'$  die Axiome I—V erfüllt sind.

Ist  $E'$  Grundmenge in  $B'$ , so ist  $E'$  in  $B'$   $a$ - $o$ -Menge nach Satz 4, 5. Das Urbild  $\psi(E')$  ist somit nach Satz 3, 3  $a$ - $o$ -Menge in  $\mathfrak{A} = \psi(B')$ . Nach Satz 6, 7 hat die  $\alpha_1$ -Begrenzung von  $\mathfrak{A}$  das Mass 0. Der Begriff  $\alpha_1$ -Begrenzung deckt sich mit dem der gewöhnlichen Begrenzung (Definition 2, 3). Somit ist die  $\alpha_1$ -Begrenzung der  $a$ - $o$ -Menge  $\psi(E')$  in  $\mathfrak{A}$  ein Teil der Begrenzung von  $\mathfrak{A}$ , hat also a fortiori das Mass 0. Nach Satz 6, 7 hat also  $\psi(E')$  einen  $\alpha_1$ -Inhalt und gehört somit nach Satz 7, 1 zu  $F$ . Somit gehört  $E'$  nach Definition 8, 1 zu  $F'$ .  $F'$  enthält somit jede Grundmenge aus  $B'$ , wie es Axiom I verlangt. Dass  $(F', B') = 1$  ist, folgt aus Definition 8, 1 unmittelbar. Axiom I ist also in  $F'$  erfüllt.

Ferner gilt Axiom II in  $F'$ . Nach Satz 3, 1 ist nämlich das Urbild einer Summe resp. einer Differenz die Summe resp. die Differenz der Urbilder der beiden Mengen. Gehören diese Urbilder also zu  $F$ , so auch, da  $F$  Körper ist, ihre Summe und ihre Differenz. Darum gehören deren Bilder zu  $F'$ .

Nun muss die Gültigkeit von Axiom III in  $F'$  gezeigt werden. Wir nehmen daher an, dass es zu einer Menge  $\mathfrak{M}' < B'$  für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei Mengen  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{B}'$  aus  $F'$  gibt, so dass gilt

$$\mathfrak{A}' > \mathfrak{M}' > \mathfrak{B}'$$

und ausserdem

$$|(F', \mathfrak{A}') - (F', \mathfrak{B}')| < \varepsilon$$

und müssen zeigen, dass dann  $\mathfrak{M}'$  zu  $F'$  gehört.

Aus  $\mathfrak{A}' > \mathfrak{M}' > \mathfrak{B}'$  folgt  $\psi(\mathfrak{A}') \geq \psi(\mathfrak{M}') \geq \psi(\mathfrak{B}')$ . Ferner folgt aus der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon > |(F', \mathfrak{A}') - (F', \mathfrak{B}')| &= |(F, \psi(\mathfrak{A}')) - (F, \psi(\mathfrak{B}'))| : (F, \psi(B')) \\ &\geq |(F, \psi(\mathfrak{A}')) - (F, \psi(\mathfrak{B}'))|. \end{aligned}$$

Da  $\psi(\mathfrak{A}')$  und  $\psi(\mathfrak{B}')$  zu  $F$  gehören, folgt also, dass nach Axiom III  $\psi(\mathfrak{M}')$  zu  $F$  gehört. Daher gehört  $\mathfrak{M}'$  zu  $F'$  und Axiom III gilt in  $F'$ .

Um die Gültigkeit von Axiom IV in  $F'$  zu beweisen, zeigen wir, dass wenn  $\mathfrak{A}'$  aus  $F'$  als Summe von abzählbar vielen paarweise fremden Mengen  $\mathfrak{A}'_r$  aus  $F'$  dargestellt ist, stets gilt

$$(F', \mathfrak{A}') = \sum_r (F', \mathfrak{A}'_r),$$

denn diese Formel enthält sowohl IV 1) als auch IV 2). Bei den eben gemachten Annahmen ist nämlich

$$\psi(\mathfrak{A}') = \sum_r \psi(\mathfrak{A}'_r),$$

wo auch die Summanden rechts fremd sind.

Da diese als zu  $F$  gehörig,  $z_1$ -Inhalte haben, die den Massen gleich sind, folgt nach Satz 5, 20

$$(F, \psi(\mathfrak{A}')) = \sum_r (F, \psi(\mathfrak{A}'_r)).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $1 : (F, \psi(B'))$ , so erhält man wie behauptet

$$(F', \mathfrak{A}') = \sum_r (F', \mathfrak{A}'_r).$$

Axiom IV gilt also in  $F'$ .

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass auch Axiom V für  $F'$  erfüllt ist.

Wir wollen beweisen, dass jede Menge  $\mathfrak{M} < B'$ , für die  $I_{x_1}[\psi(\mathfrak{M})]$  existiert, von oben und unten so zwischen  $\alpha$ -o-Mengen aus  $B'$  eingeschlossen werden kann, dass deren Bewertungen in  $F'$  sich beliebig wenig unterscheiden. Ist dies erfüllbar, so gehört  $\mathfrak{M}$  nach Axiom III offenbar zum kleinsten Bereich, in dem alle Axiome gelten, da ja die  $\alpha$ -o-Mengen in  $B'$  diesem angehören.

Um dies zu zeigen, ordnen wir jeder beliebigen Menge  $\mathfrak{M} \leq B'$  zwei Zahlen zu, nämlich

$$\underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) = \text{fin sup } (F', \alpha),$$

wo  $\alpha$  alle in  $\mathfrak{M}$  enthaltenen  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen aus  $B'$  durchläuft und

$$\bar{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) = \text{fin inf } (F', \beta),$$

wo  $\beta$  alle  $\mathfrak{M}$  enthaltenden  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen aus  $B'$  durchläuft.

Wir beweisen entsprechend wie Satz 6, 3 die Gleichung

$$\underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) + \bar{I}^{(B')}(B' - \mathfrak{M}) = 1.$$

Durchläuft nämlich  $\delta$  alle  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen aus  $B'$ , die die Bedingung erfüllen

$$\delta \supseteq B' - \mathfrak{M},$$

und  $\alpha'$  alle die, für die gilt

$$\mathfrak{M} \supseteq \alpha',$$

so ist offenbar die Menge der  $\alpha'$  identisch mit der Menge der  $B' - \delta$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) &= \text{fin sup } (F', B' - \delta) = \text{fin sup } (F', \psi(B' - \delta)) : (F', \psi(B')) \\ &= \text{fin sup } (F', \psi(B') - \psi(\delta)) : (F', \psi(B')) = \text{fin sup } \{(F', \psi(B')) - (F', \psi(\delta))\} : (F', \psi(B')) \\ &= 1 - \text{fin inf } (F', \psi(\delta)) : (F', \psi(B')) = 1 - \text{fin inf } (F', \delta) = 1 - \bar{I}^{(B')}(B' - \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Somit ist die behauptete Gleichung bewiesen.

Ferner machen wir die triviale Bemerkung, dass für jede in  $B'$  offene Menge  $\Omega$  der Normalform

$$\Omega = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

gilt

$$\underline{I}^{(B')}(\Omega) \supseteq \sum_v (F', E_v).$$

Nunmehr habe  $\psi(\mathfrak{M})$   $\alpha_1$ -Inhalt und  $\mathfrak{D}$  sei der offene  $\alpha_1$ -Kern von  $\psi(\mathfrak{M})$ . Das Bild von  $\mathfrak{D}$

$$\varphi(\mathfrak{D}) = \Omega = \sum_v E_v$$

ist in  $B'$  offen, da das Bild jeder Grundmenge in  $\mathfrak{A}$  in  $B'$  offen ist.

Ferner gilt offensichtlich

$$\Omega \subseteq \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} \subseteq \psi(\Omega).$$

Da die  $\psi(E_r)$  paarweise fremde  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen in  $\mathfrak{A}$  sind, folgt

$$\begin{aligned} \underline{I}^{(B')}(\Omega) &\cong \sum_r (F', E_r) = \sum_r (F, \psi(E_r)) : (F, \psi(B')) = \sum_r I_{x_1}(\psi(E_r)) : I_{x_1}(\psi(B')) \\ &= \underline{I}_{x_1}(\psi(\Omega)) : I_{x_1}(\psi(B')) \cong \underline{I}_{x_1}(\Sigma) : I_{x_1}(\psi(B')). \end{aligned}$$

Also folgt, da  $\psi(\mathfrak{M})$   $x_1$ -Inhalt hat

$$\underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) \cong \underline{I}^{(B')}(\Omega) \cong \underline{I}_{x_1}(\Sigma) : I_{x_1}(\psi(B')) = I_{x_1}(\psi(\mathfrak{M})) : I_{x_1}(\psi(B')).$$

Für  $B' - \mathfrak{M}$  gilt entsprechend

$$\underline{I}^{(B')}(B' - \mathfrak{M}) \cong I_{x_1}(\psi(B' - \mathfrak{M})) : I_{x_1}(\psi(B')).$$

Andererseits bestehen die Gleichungen

$$\bar{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) + \underline{I}^{(B')}(B' - \mathfrak{M}) = 1,$$

und da  $\psi(\mathfrak{M})$  und  $\psi(B' - \mathfrak{M})$   $x_1$ -Inhalt haben

$$I_{x_1}(\psi(\mathfrak{M})) + I_{x_1}(\psi(B' - \mathfrak{M})) = I_{x_1}(\psi(B')).$$

Dividiert man die letztere durch  $I_{x_1}(\psi(B'))$ , so folgt wegen der Ungleichungen sofort durch Subtraktion

$$\bar{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) = I_{x_1}(\psi(\mathfrak{M})) : I_{x_1}(\psi(B')),$$

somit a fortiori

$$\underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) = I_{x_1}(\psi(\mathfrak{M})) : I_{x_1}(\psi(B')).$$

Daher gilt

$$\bar{I}^{(B')}(\mathfrak{M}) = \underline{I}^{(B')}(\mathfrak{M}).$$

Dies aber bedeutet ja gerade, dass  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen der gesuchten Art in  $B'$  existieren.

Hiermit ist Satz 8, 1 bewiesen.

**Definition 8, 2.** Ein  $H$ - $W$ - $F$  oder ein wahrscheinlichkeitstreues Bild eines  $H$ - $W$ - $F$  heisst ein Wahrscheinlichkeitsfeld ( $W$ - $F$ ).

Nunmehr beweisen wir

**Satz 8, 2.** Ist  $F''$  ein wahrscheinlichkeitstreues Bild der Menge  $\mathfrak{A}'$  aus  $F'$  und ist  $F'$  ein wahrscheinlichkeitstreues Bild der Menge  $\mathfrak{A}$  aus dem  $H$ - $W$ - $F$   $F$ , so ist  $F''$  auch wahrscheinlichkeitstreues Bild einer Menge  $\mathfrak{A}_0$  des  $H$ - $W$ - $F$   $F$ .



Beweis. Ist  $\mathcal{A}$  eine Menge aus  $F''$ , so ist nach Satz 3, 2  $\mathcal{A}$  stetiges Bild einer Inhaltmenge  $\psi_0(\mathcal{A})$  aus  $F$ . Hierbei ist  $\psi_0(\mathcal{A}) = \psi(\psi'(\mathcal{A}))$ , wo  $\psi'$  die Urbilder der Mengen aus  $F''$  in  $\mathfrak{A}'$  und  $\psi$  die Urbilder der Mengen aus  $F'$  in  $\mathfrak{A}$  angibt. Bezeichnet  $B''$  resp.  $B'$  die grösste Menge aus  $F''$  resp.  $F'$ , so ist nach Definition 8, 2

$$\begin{aligned}(F'', \mathcal{A}) &= (F', \psi'(\mathcal{A})) : (F', \psi'(B'')), \\(F', \psi'(\mathcal{A})) &= (F, \psi(\psi'(\mathcal{A}))) : (F, \psi(B')), \\(F', \psi'(B'')) &= (F, \psi(\psi'(B''))) : (F, \psi(B')).\end{aligned}$$

Daher folgt

$$(F'', \mathcal{A}) = (F, \psi_0(\mathcal{A})) : (F, \psi_0(B'')).$$

Dass jede Grundmenge aus  $\mathfrak{A}_0 = \psi_0(B'')$  in eine offene Menge in  $B''$  übergeht ist klar.

## § 9.

### Das Häufigkeitsmodell.

Bisher hatten wir die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den Mengen eines  $W$ - $F$  abstrakt durch die Axiome charakterisiert. Es ist nun von grösster Bedeutung, dass man für jedes  $W$ - $F$  diese Zuordnung und dadurch alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gleichzeitig durch Grenzwerte von relativen Häufigkeiten in gewissen Modellen realisieren kann. Dadurch allein nämlich wird die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Gegenstände der Natur gesichert, denn ohne die Möglichkeit dieser Realisierung gäbe es keinen gangbaren Weg zur experimentellen Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten und zur experimentellen Nachprüfung der durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung in konkreten Fällen errechneten Resultate.

Zur Definition der Modelle eines  $W$ - $F$ , also einer Versuchsvorschrift führt eine heuristische Überlegung, die natürlich nur den Wert einer Plausibilitätsbetrachtung hat. Die mathematische Brauchbarkeit und auch die Widerspruchsfreiheit der Definition muss dann später erwiesen werden.

Wir fragen uns zunächst, wie denn die Wahrscheinlichkeit einer Grundeigenschaft (Grundmenge) für eine bestimmte Versuchsvorschrift experimentell zu bestimmen ist? Darauf wird jeder Physiker antworten, dass man eine Folge von Versuchsserien, deren jede soviel Versuche enthält, wie die Stufenzahl der Grundmenge beträgt, herstellen und den Grenzwert der relativen Häufigkeit der-

jenigen Serien der Folge, die die Grundmenge darstellen, als Wahrscheinlichkeit wählen muss. Die Existenz dieses Grenzwertes wird also vorausgesetzt. Nun ist aber die Versuchsvorschrift ja erst durch die Wahrscheinlichkeiten aller ihrer Grundmengen festgelegt. Da es unter ihnen solche beliebig grosser Stufe gibt (für die also oben die Versuchsserien beliebig lang sein müssten), werden wir zweckmässig unser Bild dahin erweitern, dass man sich eine Folge von unbeschränkten Serien (Realisierungen) angestellt denkt und voraussetzt, dass für jede Grundeigenschaft in dieser Folge der Grenzwert der relativen Häufigkeit derjenigen Realisierungen existiert, die diese Eigenschaft haben, und dass dieser Grenzwert der Wahrscheinlichkeit dieser Eigenschaft gleich ist. Ganz allgemein wird man nun verlangen müssen, dass auch für jede Menge des der Versuchsvorschrift zugeordneten  $W$ - $F$  in dieser Folge der Grenzwert der relativen Häufigkeit der zu dieser Menge gehörigen Realisierungen existiert und der Wahrscheinlichkeit der Menge gleich ist. Natürlich ist es von grösster prinzipieller Wichtigkeit, dass dies alles für eine einzige Folge von Realisierungen gilt, denn nur dann ist ja die Idee, die Wahrscheinlichkeiten einer Versuchsvorschrift durch Grenzwerte von relativen Häufigkeiten zu konkretisieren, überhaupt sinnreich, nicht aber, wenn die Realisierung gewisser Wahrscheinlichkeiten einer Versuchsvorschrift die gleichzeitige Realisierung anderer Wahrscheinlichkeiten derselben Versuchsvorschrift unmöglich macht.<sup>1</sup>

Diese Überlegungen wollen wir präzisieren:

**Definition 9, 1.** *Ist  $F$  ein  $W$ - $F$ , so heisst jede unendliche Matrix  $\bar{F}$ , deren Spalten Punkte des zu  $F$  gehörigen Raumes  $B$  sind, ein Modell von  $F$ , wenn für jede Menge  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  in  $\bar{F}$  der Grenzwert der relativen Häufigkeit derjenigen Spalten, die Punkte aus  $\mathfrak{A}$  sind, existiert und der Wahrscheinlichkeit  $(F, \mathfrak{A})$  gleich ist.*

<sup>1</sup> Anmerk. Aus diesem Grunde habe ich gegen die Identifizierung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Masstheorie, wie sie von manchen Seiten geübt wird, die stärksten Bedenken. Denn die Gesamtheit der Masse lässt sich sicher nicht mehr in einer einzigen Folge realisieren, da ja im allgemeinen jeder Punkt das Mass 0 hat, die Menge der Punkte der Folge also auch, während sie in der Folge sicher die Dichte 1 hat. Man könnte nun glauben, dass das genannte Bedenken auch auf die sogenannten stetigen Wahrscheinlichkeiten — die hier nicht behandelt werden — zuträfe und deshalb der Unentbehrlichkeit dieser Wahrscheinlichkeiten wegen zurückzuweisen wäre. Man sieht aber sofort, dass die Konstruktionsmethode vom Beweis zu Satz 9, 2 sich auf jeden Raum mit abzählbarer Basis ausdehnen lässt, in dem es Inhaltstheorien gibt. Somit gibt es auch für stetige Wahrscheinlichkeitsfelder stets Punktfolgen, in denen jede Menge des Feldes die richtige Dichte hat. Der genannte Einwand gegen das geäusserte Bedenken entfällt somit. (Die Ausdehnung der ganzen Arbeit auf stetige Wahrscheinlichkeiten, so dass diese und die diskontinuierlichen gleichzeitig erfasst werden, ist übrigens fast trivial und wird in einem in Vorbereitung befindlichen Lehrbuch durchgeführt werden.)

Ist  $\bar{F}$  Modell von  $F$ , so benutzen wir von jetzt ab durchgehend folgende **Bezeichnungen**:

- 1)  $a(\bar{F}, \mathfrak{A})_k$ : Anzahl der Spalten von  $\bar{F}$  bis zur  $k$ -ten inkl., die zu der Menge  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  gehören.
- 2)  $r(\bar{F}, \mathfrak{A})_k = \frac{1}{k} a(\bar{F}, \mathfrak{A})_k$ : Relative Häufigkeit von  $\mathfrak{A}$  in  $\bar{F}$  bis zur  $k$ -ten Spalte inkl.
- 3)  $(\bar{F}, \mathfrak{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, \mathfrak{A})_k$ , falls dieser Limes existiert.

**Satz 9, 1.** *Ist  $F$  ein  $W$ - $F$ , so ist eine Matrix  $F^*$ , deren Spalten Punkte des zu  $F$  gehörigen Raumes  $B$  sind, dann und nur dann Modell von  $F$ , wenn für jede Grundmenge  $E$  aus  $F$  gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, E)_k = (F, E).$$

Es wird also für  $F^*$  die Existenz dieses Grenzwertes und die Gleichheit gefordert.

Beweis. Das »nur dann« ist nach Def. 9, 1 trivial. Es bleibt somit zu zeigen, dass die Bedingung hinreichend ist. Man sieht zunächst, dass für jede  $a$ -Menge  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k = (F, \mathfrak{A}).$$

Es ist nämlich auch  $B - \mathfrak{A}$   $a$ -Menge und man hat die Normalformen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= E_1 + E_2 + E_3 + \dots \\ B - \mathfrak{A} &= E'_1 + E'_2 + E'_3 + \dots \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k \geq \sum_{\nu} (F^*, E_{\nu}) = \sum_{\nu} (F, E_{\nu}) = (F, \mathfrak{A})$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, B - \mathfrak{A})_k \geq \sum_{\nu} (F^*, E'_{\nu}) = \sum_{\nu} (F, E'_{\nu}) = (F, B - \mathfrak{A}).$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A} + (B - \mathfrak{A}))_k &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k + \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(F^*, B - \mathfrak{A})_k \geq (F, \mathfrak{A}) + \\ &+ (F, B - \mathfrak{A}) = 1. \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt die Existenz des Grenzwertes und die Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k = (F, \mathfrak{A}).$$

Jetzt aber zeigt sich sofort, dass für jede Menge  $\mathfrak{A}$  aus  $F$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k = (F, \mathfrak{A}).$$

Weil  $\mathfrak{A}$  zu  $F$  gehört, gibt es nach Satz 7, 1 resp. 8, 1 zu jedem  $\varepsilon > 0$  zwei  $\alpha$ -Mengen  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  und  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ , so dass  $\mathfrak{A}_\varepsilon \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}_\varepsilon$  und  $(F, \mathfrak{A}_\varepsilon) - (F, \mathfrak{B}_\varepsilon) < \varepsilon$  gilt.

Man hat aber

$$(F, \mathfrak{A}_\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A}_\varepsilon)_k \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{B}_\varepsilon)_k = (F, \mathfrak{B}_\varepsilon).$$

Somit ist

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, \mathfrak{A})_k = (F, \mathfrak{A})$$

und der Satz ist bewiesen.

Durch diesen Satz haben wir erreicht, dass an die Stelle der überabzählbar vielen Forderungen (nämlich für jede Menge aus  $F$ ), die Def. 9, 1 an das Modell  $\bar{F}$  stellt, nur noch abzählbar viele treten, nämlich nur die Forderungen für die Grundmengen. Hierauf können wir nun den Existenzbeweis für die Modelle gründen, denn ihre Existenz ist ja bisher nicht gesichert.

**Satz 9, 2.** *In jedem  $W$ - $F$   $F$  gibt es mindestens ein Modell  $\bar{F}$ .*

Beweis. Der bequemeren Bezeichnung wegen beweisen wir den Satz zunächst für  $H$ - $W$ - $F$ 's und übertragen ihn dann auf abgeleitete  $W$ - $F$ 's, trotzdem der erste Beweis bei Änderung der Terminologie schon den zweiten enthält.

a) Um  $\bar{F}$  für ein  $H$ - $W$ - $F$  zu konstruieren, belegen wir zunächst eine Folge  $\psi$  von Leerstellen mit den beiden Symbolen  $U$  und  $W$  so, dass die relative Häufigkeit von  $U$  in  $\psi$  gegen einen vorgegebenen Wert  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  strebt, die von  $W$  also gegen  $1 - \tau$ .

Wir wollen die Besetzung von  $\psi$  so regeln, dass für jedes  $k$  gilt

- 1)  $r(\psi, U)_k \leq \tau$ ,
- 2)  $r(\psi, U)_k$  ist möglichst gross.

Dies Verfahren leistet offenbar das Verlangte, ist eindeutig und erzwingt, dass wenn  $\tau = 0$  ist,  $U$  nie auftritt und wenn  $1 - \tau = 0$  ist,  $W$  nie auftritt. Endlich ist jeder Platz von  $\psi$  genau einmal besetzt. Es soll bezeichnet werden durch

$$v[\psi; U, \tau].$$

b) Es sei  $U_1, U_2, U_3, \dots$  eine Folge von messbaren Mengen, deren Mass von 0 verschieden ist und unter diesen Mengen sollen auch alle Grundmengen, deren Mass (Wahrscheinlichkeit) nicht 0 ist, vorkommen. Wir setzen ferner:  $W_n = B - U_n$ .

Nunmehr wollen wir eine Matrix  $F^*$  aufbauen, deren  $n$ -te Zeile nur aus den Symbolen  $U_n$  und  $W_n$  besteht. Bezeichnet also  $V_n$  entweder  $U_n$  oder  $W_n$ , so sind die Spalten der Matrix Folgen

$$V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$$

Diese Matrix  $F^*$  soll so gebaut werden, dass folgendes gilt:

1) Bezeichnet  ${}^a(F^*, V_1 V_2 \dots V_n)_k$  die Anzahl der Spalten aus  $F^*$  bis zur  $k$ -ten inkl., die mit  $V_1 V_2 \dots V_n$  beginnen, so soll gelten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, V_1 V_2 \dots V_n)_k = |V_1 V_2 \dots V_n|,$$

wo rechts das Mass des Durchschnitts der Mengen  $V_1, V_2, \dots, V_n$  steht.

2)  $V_1 V_2 \dots V_n$  tritt in  $F^*$  als Anfangsabschnitt von Spalten nur auf, wenn  $|V_1 V_2 \dots V_n| \neq 0$  ist, also wenn a fortiori dieser Durchschnitt nicht leer ist.

Die erste Zeile  $\psi_1$  der Matrix  $F^*$  wird nach der Vorschrift belegt

$$v[\psi_1; U_1, |U_1|].$$

Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, V_1)_k = |V_1|$$

und  $V_1$  tritt nur auf, falls  $|V_1| \neq 0$  ist.

Die zweite Zeile  $\psi_2$  der Matrix  $F^*$  zerlegen wir in  $2^1$  Teilfolgen  $\psi_{V_1}$ , je nachdem ob über einem ihrer Plätze bereits das Symbol  $U_1$  resp. das Symbol  $W_1$  steht. Nunmehr belegen wir  $\psi_{V_1}$  nach der Vorschrift

$$v[\psi_{V_1}; U_2, |V_1 U_2|; |V_1|].$$

Offenbar gilt dann nach Konstruktion

$${}^a(F^*, V_1 V_2)_k = {}^a(\psi_{V_1}, V_2)_{a(F^*, V_1)_k},$$

also

$$r(F^*, V_1 V_2)_k = r(F^*, V_1)_k \cdot r(\psi_{V_1}, V_2)_{a(F^*, V_1)_k}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, V_1 V_2)_k = |V_1| \{ |V_1 V_2| : |V_1| \} = |V_1 V_2|$$

und die Kombination  $V_1 V_2$  tritt nur auf, falls  $|V_1 V_2| \neq 0$  gilt. Dann also ist a fortiori der Durchschnitt der Mengen  $V_1 V_2$  nicht leer.

Die dritte Zeile  $\psi_3$  der Matrix  $F^*$  zerlegen wir in  $2^2$  Teilfolgen  $\psi_{V_1 V_2}$ , je nachdem welche der  $2^2$  Kombinationen über einem der Plätze von  $\psi_3$  stehen.  $\psi_{V_1 V_2}$  belegen wir nach der Vorschrift

$$v[\psi_{V_1 V_2}; U_3, |V_1 V_2 U_3| : |V_1 V_2|].$$

Offenbar ist nach Konstruktion

$${}^a(F^*, V_1 V_2 V_3)_k = {}^a(\psi_{V_1 V_2}, V_3)_{a(F^*, V_1 V_2)_k},$$

also

$$r(F^*, V_1 V_2 V_3)_k = r(F^*, V_1 V_2)_k \cdot r(\psi_{V_1 V_2}, V_3)_{a(F^*, V_1 V_2)_k}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, V_1 V_2 V_3)_k = |V_1 V_2| \{ |V_1 V_2 V_3| : |V_1 V_2| \} = |V_1 V_2 V_3|$$

und die Kombination  $V_1 V_2 V_3$  tritt nur auf, falls  $|V_1 V_2 V_3| \neq 0$  gilt. Dann ist also a fortiori der Durchschnitt der Mengen  $V_1 V_2 V_3$  nicht leer.

Nach dieser Methode fahren wir unbegrenzt fort und erhalten eine Matrix  $F^*$ , die den Anforderungen 1) und 2) genügt.

Bezeichnet nun  ${}^a(F^*, V_n)_k$  die Anzahl der Male, die das Symbol  $V_n$  in den  $k$  ersten Spalten auftritt, so gilt

$${}^a(F^*, V_n)_k = \Sigma {}^a(F^*, V_1 V_2 \dots V_{n-1} V_n)_k,$$

wo über alle  $2^{n-1}$  Möglichkeiten für  $V_1 V_2 \dots V_{n-1}$  zu summieren ist.

Somit folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(F^*, V_n)_k = \Sigma |V_1 V_2 \dots V_{n-1} V_n| = |V_n \Sigma V_1 V_2 \dots V_{n-1}| = |V_n|,$$

da ja die  $2^{n-1}$  Durchschnitte  $V_1 V_2 \dots V_{n-1}$  (unter denen natürlich leere vorkommen dürfen) eine Zerlegung von  $B$  in paarweise fremde messbare Mengen bilden.

c) Wir stellen nunmehr aus  $F^*$  ein Modell  $\bar{F}$  für  $F$  her. Wir ersetzen zu diesem Zweck die  $m$ -te Spalte von  $F^*$  durch irgend einen Punkt von  $B$ , der dem Durchschnitt  $V_1 V_2 \dots V_m$  ihres Anfangsabschnittes der Länge  $m$  angehört. Dieser

ist ja nach 2) nie leer. Die so erhaltene Folge von Punkten aus  $B$  ist unser Modell  $\bar{F}$  von  $F$ , denn mit höchstens  $n - 1$  Ausnahmen gehört ja die  $k$ -te Spalte dieses  $\bar{F}$  dann und nur dann zur Menge  $U_n$ , wenn in der Matrix  $F^*$  in der  $k$ -ten Spalte  $U_n$  auftrat. Ferner befinden sich unter den  $U$  die Grundmengen  $E$  und sie haben, wie bewiesen, in  $\bar{F}$  die Dichte  $|E| = (F, E)$ . Nach Satz 9, 1 haben wir also ein Modell vor uns für das  $H$ - $W$ - $F$   $F$ .

Um nun auch die Existenz eines Modells  $\bar{F}'$  für ein abgeleitetes  $W$ - $F$   $F'$  zu erweisen, überlegen wir nur, was die wahrscheinlichkeitstreue Abbildung eines  $H$ - $W$ - $F$   $F$  über seine Menge  $\mathfrak{A}$  bedeutet. Offenbar, dass aus dem Modell  $\bar{F}$  für  $F$  ein Modell  $\bar{F}'$  für  $F'$  entsteht, wenn man in  $\bar{F}$  alle nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörigen Spalten streicht und jeden der restlichen Punkte durch sein Bild ersetzt.<sup>1</sup>

Der bewiesene Satz berechtigt uns zu folgender

**Definition 9, 2.** Ist  $F$  ein  $W$ - $F$ , so heisst die Gesamtheit aller Modelle  $\bar{F}$  von  $F$  die Modellklasse  $\bar{\bar{F}}$  von  $F$ .

Jetzt sind wir in der Lage, einen prinzipiell wichtigen Satz zu beweisen, der lehrt, dass wir auch vom Grenzwertbegriff ausgehend, hätten die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründen können, statt die Axiome als Grundlage zu wählen, d. h. also, dass beide Ausgangspunkte mathematisch völlig gleichwertig sind.

**Satz 9, 3.** Ist  $\bar{\bar{F}}$  Modellklasse des  $H$ - $W$ - $F$ 's  $F$ , so gibt es zu jeder Teilmenge  $\mathfrak{A}$  von  $B$  zwei Modelle  $\bar{F}_1$  und  $\bar{F}_2$  aus  $\bar{\bar{F}}$ , so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_1, \mathfrak{A})_k = \underline{I}(\mathfrak{A}),$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, \mathfrak{A})_k = \bar{I}(\mathfrak{A}).$$

Ehe wir diesen Satz beweisen, wollen wir seinen Inhalt noch näher diskutieren.

<sup>1</sup> Anmerk. Nebenbei bemerken wir zu diesem Beweis, dass er lehrt, dass man sogar Modelle finden kann, in denen abzählbar viele beliebige vorgegebene messbare Mengen Dichten besitzen, die mit ihrem Mass übereinstimmen, denn man braucht diese Mengen ja nur unter die Mengen  $U$  der Konstruktion aufzunehmen. Da der kleinste Ring über abzählbar vielen Mengen wieder abzählbar viele Mengen enthält, gibt es also Modelle  $\bar{F}$ , in denen auch für alle Mengen eines beliebigen solchen Ringes Dichten existieren, die gleich dem Mass sind, also auch für den zugehörigen Körper, also auch für den zugehörigen Inhaltskörper. Übrigens lassen sich durch leichte Abänderung der Konstruktion auch Modelle herstellen, in denen alle Mengen eines grösseren Körpers, als das  $W$ - $F$  ist, Dichten besitzen, wo für nicht zum  $W$ - $F$  gehörige Mengen Dichte und Mass verschieden sind.

Nach Satz 7, 1 sagt er, dass nur für die Mengen von  $F$  in allen Matrizen der Modellklasse der Grenzwert der relativen Häufigkeit konstant sein kann. Wir können also von der Modellklasse  $\bar{F}$  ausgehend die Mengen von  $F$  und auch ihre Wahrscheinlichkeiten kennzeichnen als Gesamtheit derjenigen Teilmengen von  $B$ , für die in jedem Modell der Klasse der Grenzwert der relativen Häufigkeit konstant ist und ihn dann die Wahrscheinlichkeit der Menge nennen. Satz 9, 1 lehrt ferner, dass man die Modellklasse von  $F$  auch ohne Benutzung von  $F$  als Gesamtheit der Matrizen beschreiben kann, in denen für alle Grundmengen die entsprechend gleichen Grenzwerte existieren. Diese Kennzeichnung erfolgt also allein durch die den Grundmengen zugeordneten Zahlen. Dies zusammen besagt also, dass man tatsächlich von der Matrizenklasse ausgehend das zu  $F$  gehörige Mengensystem und seine Wahrscheinlichkeiten erhalten und somit dann unsere Axiome als Sätze beweisen kann.

*Der Standpunkt der Häufigkeitstheorie ist also mathematisch völlig gleichwertig mit dem hier gegebenen abstrakten Aufbau.*

Jetzt wollen wir Satz 9, 3 beweisen. Der Gedankengang ist folgender:

Beweis. Ist eine beliebige Menge  $\mathfrak{A} \subset B$  vorgegeben und  $\mathfrak{C}$  ihr Kern (Def. 6, 5; da  $B$  ein vollständiger Nullraum ist, ist der Kern eindeutig), so wird zunächst ein Modell  $\bar{F}_1$  aus  $\bar{F}$  angegeben, für das gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_1, \mathfrak{A})_k = \underline{I}(\mathfrak{C}).$$

Dann gilt nach Satz 6, 7 auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_1, \mathfrak{A})_k = \underline{I}(\mathfrak{A}).$$

Nach Satz 6, 3 gilt weiter

$$\underline{I}(\mathfrak{A}) = 1 - \underline{I}(B - \mathfrak{A}).$$

Analog wie eben zu  $\mathfrak{A}$  das Modell  $\bar{F}_1$  gewählt wurde, wird nun ein Modell  $\bar{F}_2$  aus  $\bar{F}$  gewählt, so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, B - \mathfrak{A})_k = \underline{I}(B - \mathfrak{A}).$$

Der Gleichung

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, \mathfrak{A})_k + \lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, B - \mathfrak{A})_k$$

wegen folgt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, \mathfrak{A})_k = 1 - \underline{I}(B - \mathfrak{A}) = \underline{I}(\mathfrak{A}).$$



Was gezeigt werden muss ist also nur, dass es zu jedem  $\mathfrak{A}$  mit dem Kern  $\mathfrak{D}$  ein Modell  $\bar{F}$  gibt, so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, \mathfrak{A})_k = \underline{I}(\mathfrak{D}).$$

Nun können wir aber wegen  $\underline{I}(\mathfrak{D}) = |\mathfrak{D}|$  die Menge  $\mathfrak{D}$  unter die  $U$  im Beweis von Satz 9, 2 aufnehmen. Es gibt also ein Modell  $\bar{F}'$ , so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}', \mathfrak{D})_k = |\mathfrak{D}| = \underline{I}(\mathfrak{D}).$$

Dies  $\bar{F}'$  wollen wir so abändern, dass das gewünschte Modell  $\bar{F}$  entsteht, für das gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, \mathfrak{A})_k = \underline{I}(\mathfrak{D}).$$

Diese Abänderung geht so vor sich, dass die zu  $\mathfrak{D}$  gehörigen Punkte von  $\bar{F}'$  ungeändert bleiben und auch kein neuer solcher Punkt hinzutritt, aber alle Punkte von  $\mathfrak{A} - \mathfrak{D} = \mathfrak{R}$  vertilgt werden.

Es seien  $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$  die Punkte von  $\bar{F}'$  ihrer Reihenfolge nach, die zu  $\mathfrak{R}$  gehören, also zu  $\mathfrak{A}$  aber nicht zu  $\mathfrak{D}$ . Nun benutzt man, dass, da  $\mathfrak{D}$  als Summe aller in  $\mathfrak{A}$  enthaltenen Grundmengen erklärt ist, es in jeder Grundmenge, die  $P'_n$  enthält, noch nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehörige Punkte gibt. Man kann also die Spalte  $P'_n$  so tief unten wie man will, noch so abändern, dass ein nicht zu  $\mathfrak{A}$  gehöriger Punkt entsteht, dessen Anfangsstück also mit  $P'_n$  übereinstimmt.

$N_1 < N_2 < N_3 < \dots$  sei eine Folge natürlicher Zahlen.  $P'_n$  sei durch Abänderung nach seiner  $N_n$ -ten Stelle in einen Punkt  $P_n$  aus  $B - \mathfrak{A}$  übergeführt für jedes  $n$ . Die Matrix  $\bar{F}$  wird nun aus  $\bar{F}'$  dadurch erzeugt, dass allgemein die Spalte  $P'_n$  durch die neue Spalte  $P_n$  ausgewechselt wird. Dann enthält die neue Matrix keinen Punkt von  $\mathfrak{A} - \mathfrak{D}$  und alle zu  $\mathfrak{D}$  gehörigen Punkte sind unverändert geblieben und auch keine neuen dazugekommen. Dass für jede Grundmenge  $E$  gilt  $(\bar{F}, E) = (\bar{F}', E)$  ist klar, da die Zahlen  $N$  monoton wachsen.  $\bar{F}$  gehört also zur Modellklasse und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, \mathfrak{A})_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}', \mathfrak{D})_k = |\mathfrak{D}| = \underline{I}(\mathfrak{A}).$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Als Ergänzung nennen wir noch

**Satz 9, 4.** *Ist*

$$I(\mathfrak{A}) \leq \alpha \leq \bar{I}(\mathfrak{A})$$

so gibt es ein Modell  $\bar{F}_\alpha$ , für das gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_\alpha, \mathfrak{A})_k = \alpha.$$

Beweis.  $\bar{F}_1$  und  $\bar{F}_2$  seien die in Satz 9, 3 genannten Modelle. Wir belegen nun eine Stellenfolge  $\psi$  so mit Symbolen  $\varepsilon$  und  $\eta$ , dass  $\varepsilon$  die Dichte

$$(\bar{I}(\mathfrak{A}) - \alpha) : (\bar{I}(\mathfrak{A}) - I(\mathfrak{A}))$$

erhält. Die Symbole  $\varepsilon$  werden dann der Reihe nach durch die Punkte von  $\bar{F}_1$ , die Symbole  $\eta$  der Reihe nach durch die Punkte von  $\bar{F}_2$  ersetzt. Dadurch ist  $\bar{F}_\alpha$  erzeugt, wie man mühelos nachrechnet.

Die Häufigkeitsbedeutung der Mittelwerte wird am Schluss von § 12 erörtert.

## § 10.

### Der Problemkreis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die möglichen Erweiterungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Es ist nunmehr leicht, einen formal vollständigen Überblick über die Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben.

1) Geht man von einer Hauptversuchsvorschrift aus, so sieht man die Wahrscheinlichkeiten der Grundmengen des durch sie induzierten  $H$ - $W$ - $F$ 's als gegeben an. Nach Satz 7, 1 kennen wir bereits die Gesamtheit der Mengen des  $H$ - $W$ - $F$  und wissen auch, wie ihre Wahrscheinlichkeiten zu berechnen sind, nämlich als Masse der Mengen. Prinzipiell sind hiermit also bereits alle Fragen beantwortet, die für ein  $H$ - $W$ - $F$  allein ohne Benutzung wahrscheinlichkeitstreuer Abbildungen gestellt werden können. Praktisch tritt natürlich noch die Frage dazu, dann, wenn die Metrik besonders einfachen zusätzlichen Bedingungen genügt, rechnerisch brauchbare Formeln für gewisse oft gefragte Wahrscheinlichkeiten aufzustellen, ev. sogar Näherungsformeln. (Die zusätzliche Forderung an die Metrik ist meist die Unabhängigkeit der Versuchsergebnisse, vergl. Kap. V.)

2) Ist ein  $W$ - $F$  durch wahrscheinlichkeitstreue Abbildungen aus einem  $H$ - $W$ - $F$  entstanden (nach Satz 8, 2 lässt sich die Erzeugung stets durch eine

einzigste Abbildung erreichen), so haben wir die Wahrscheinlichkeiten des abgeleiteten  $W-F$ 's aus denen des  $H-W-F$ 's und der als bekannt vorausgesetzten Individualstruktur der benutzten Abbildungen zu berechnen. Auch diese Frage ist bei gegebenen Abbildungen durch unsere bisherigen Betrachtungen völlig gelöst, da wir ja wissen, dass alle und nur die Mengen zum  $W-F$  gehören, deren Urbilder im  $H-W-F$  liegen und auch die Grösse der Wahrscheinlichkeiten kennen, die ja eben bis auf einen bekannten Normierungsfaktor mit den Wahrscheinlichkeiten der Urbilder übereinstimmen.

Die Metrik des von der Versuchsvorschrift induzierten  $H-W-F$ 's selbst zu finden, ist nie Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese Metrik (d. h. die Grösse der Wahrscheinlichkeiten der Grundmengen) ist als durch die in der Versuchsvorschrift vorkommenden speziellen Würfel, Kugeln, Moleküle etc., bestimmt zu denken und experimentell festzulegen. Für den Naturwissenschaftler besteht also stets noch die Frage nach Methoden nicht rein mathematischer Art, zur Ermittlung der Metrik durch Experimente.

Hierbei muss man genau so vorgehen, wie etwa beim Messen der »Länge« eines Drahtes. Man stellt mehrere Messungen an, mittelt diese nach einer festen Methode und — glaubt an den Grundsatz, dass eine Vermehrung der Messungen eine genauere Bestimmung der »Länge« ergibt, d. h. einen Grenzwert. Genau entsprechend handelt man bei der experimentellen Bestimmung der Grundwahrscheinlichkeiten. Will man eine solche bestimmen, so stellt man eine beliebige Anzahl  $k$  von Versuchsserien, deren jede eine mindestens der Grundmenge entsprechende Länge haben muss, her und bestimmt die relative Häufigkeit der zur Grundmenge gehörigen unter den  $k$  Serien. Diese Zahl ist in Analogie zu oben die erste »Messung« der Wahrscheinlichkeit. Man stellt mehrere solche »Messungen« der Wahrscheinlichkeit (nicht notwendig bei konstantem  $k$ ) an, mittelt diese nach einer festen Methode — und glaubt an den Grundsatz, dass eine Vermehrung der »Messungen« eine genauere Bestimmung der Wahrscheinlichkeit ergibt. Dies Verfahren unterscheidet sich offenbar nirgends prinzipiell von dem der Längenmessung, wenn wir von der Grenzwertdefinition der Wahrscheinlichkeit ausgehen, wozu wir ja nach unseren Untersuchungen über die Modelle der  $W-F$ 's berechtigt sind. Die einzige philosophische Frage bei diesem sogenannten Anwendungsproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint also die nach der Fundierung dieses »Glaubens« zu sein, der aber, wie wir sahen, kein spezielles Requisit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Ein Anwendungsproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint es also streng genommen über-

haupt nicht zu geben. Es sei hier bemerkt, dass die erkenntniskritische Fundierung sehr wohl wenn auch natürlich keine Vorzugsstellung der Häufigkeitstheorie, so doch aller der Theorien, die zu Häufigkeitstheorien isomorph sind — was, wie wir wissen, nicht mehr für die Masstheorie selbst gilt — liefern könnte und dadurch indirekt eine Rehabilitierung der Ansprüche der Häufigkeitstheorien. Meine Ansicht geht dahin, dass sich dies wirklich ergeben wird, sobald die Erkenntniskritik genügend fortgeschritten sein wird.

Alle unsere bisherigen Betrachtungen waren relativ zu unserer Wahrscheinlichkeitsdefinition, also zu den gewählten Axiomen.

Diese Definition schuf sozusagen einen Minimalbereich von Mengen, die Wahrscheinlichkeiten haben, eben unsere  $W-F$ 's. Natürlich ist es eine sinnreiche Frage, ob man diesen Bereich nicht vergrößern kann, in dem man ihm noch nicht angehörige Mengen inkl. willkürlicher Bewertung explizit adjungiert, resp. diese Adjunktion durch Hinzufügung neuer Axiome indirekt bewirkt. Der naheliegendste Gedanke ist natürlich, stets alle messbaren Mengen inkl. der Masse dem  $H-W-F$  zu adjungieren, oder was auf dasselbe herauskommt zu fordern, dass der Bereich  $\sigma$ -Körper ist und dass Axiom IV 1) für abzählbar viele Mengen gilt. Diesem Gedanken stellt sich ein schwerwiegendes Bedenken entgegen: Die Isomorphie mit der Häufigkeitsauffassung wird unrettbar zerstört und damit z. B. alle zahlentheoretischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unmöglich gemacht, da diese gerade auf dieser Gleichwertigkeit beruhen (verg. § 17). Dass dies z. B. für jede Metrik, in der jeder Punkt das Mass 0 hat, der Fall ist, folgt daraus, dass dann stets das Mass aller in einem Modell auftretenden Punkte 0 wäre, diese Menge somit auch die Wahrscheinlichkeit 0 hätte, während der Grenzwert der relativen Häufigkeit im Modell 1 ist.

Wollen wir also zu  $W-F$ 's Mengen adjungieren, so werden wir stets so vorgehen müssen, dass Modelle existieren, in denen auch für alle adjungierten Mengen gleichzeitig der Grenzwert der relativen Häufigkeit existiert und der für sie vorgeschriebenen Wahrscheinlichkeit gleich ist. Darum muss z. B. nach Satz 9, 4 stets bei Adjunktion nur einer Menge  $\mathfrak{M}$  deren Wahrscheinlichkeit  $w$  so vorgeschrieben werden, dass gilt

$$I_{x_1}(\mathfrak{M}) \leq w \leq \bar{I}_{x_1}(\mathfrak{M}).$$

Adjungieren wir explizit nur eine Menge  $\mathfrak{M}$ , so können wir nach dem genannten Satz deren Wahrscheinlichkeit auch sicher in diesen Grenzen willkürlich vorschreiben.

Diese Überlegungen gestatten einige Folgerungen, die gefühlsmässig paradox sind, trotz ihrer mathematischen Trivialität.

Betrachten wir die Versuchsvorschrift § 7, Beispiel 1 und fügen hinzu, dass mit einem richtigen Würfel gespielt werden soll, d. h. dass jede Grundmenge  $n$ -ter Stufe die Wahrscheinlichkeit  $\left(\frac{1}{6}\right)^n$  haben soll. Für die Menge  $\mathfrak{M}$  derjenigen Realisierungen, die von irgend einer Stelle ab nur noch die Ziffer 3 aufweisen, gilt wie man sofort sieht:

$$\underline{I}_x(\mathfrak{M}) = 0, \quad \bar{I}_x(\mathfrak{M}) = 1.$$

$\mathfrak{M}$  gehört also nicht zu  $F$ . Man kann also  $\mathfrak{M}$  adjungieren und ruhig festsetzen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür 1 sein soll, dass von irgend einer frei bleibenden Stelle ab in einer unendlichen Versuchsserie nur noch die 3 fällt. Da es solche Modelle nach Satz 9, 5 gibt, kann diese Adjunktion und Festsetzung nie zu einem Widerspruch mit irgend einem auf Grund unserer Axiome in  $F$  beweisbaren Satz (dazu gehört auch das Gesetz der grossen Zahlen, Satz 13, 5) führen. Ebenso gut hätten wir aber auch festsetzen dürfen, dass die Wahrscheinlichkeit von  $\mathfrak{M}$  0 sein soll, denn auch dann gibt es nach Satz 9, 4 Modelle.

Dies Beispiel lehrt, dass man verschiedene Wahrscheinlichkeitsrechnungen (die sämtlich isomorph zu Häufigkeitstheorien sind) als Erweiterung der von uns gegebenen aufbauen kann, die alle für die Mengen von  $F$  dieselben Wahrscheinlichkeiten ergeben, für andere Mengen aber gänzlich verschiedene Zahlenwerte liefern.

Da es sehr wohl möglich ist, dass solche verschiedenen Wahrscheinlichkeitsrechnungen für verschiedene Fragen brauchbar sind (§ 17 zeigt dies), so wollen wir bei unserem Bereich stehen bleiben, eben um nicht durch willkürliche Festlegung eines bestimmten weiteren Bereichs andere Wahrscheinlichkeitsrechnungen auszuschliessen und dann auch, weil unser Bereich, trotzdem er sozusagen nur der gemeinsame Kern aller möglichen Wahrscheinlichkeitsrechnungen ist, doch so umfangreich ist, dass in ihm alle bisherigen Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung beweisbar sind jedenfalls bis auf die, die nur rein masstheoretischen, also keinen häufigkeitstheoretischen Sinn mehr haben (wie z. B. die Sätze über das Gesetz des iterierten Logarithmus, vergl. Einleitung, Anmerk. 1, 2).

Zum Schluss wollen wir noch kurz eine mögliche Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs berühren, die in ganz anderer Richtung geht und die

manchen Philosophen, aber auch Mathematikern z. B. F. M. KEYNES, vorgeschwebt zu haben scheint.

Es handelt sich darum, Wahrscheinlichkeit nicht als eine einer Menge zugeordnete Zahl, sondern als zugeordnetes Intervall zu erklären, das im Spezialfall ein Punkt, d. h. eine Zahl sein kann. Die philosophischen Schriftsteller pflegen dann meist zu sagen, die Wahrscheinlichkeit sei unbestimmt der Grösse nach, nur Grenzen für die Grösse gäbe es. Ein solcher Gedankengang scheint mir durchaus nicht unsinnig und man kann die Situation auch mühelos in unserer Theorie präzisieren, indem man jeder Menge  $\mathfrak{M}$  als »Wahrscheinlichkeit« das Intervall  $\langle I_{x_i}(\mathfrak{M}), \bar{I}_{x_i}(\mathfrak{M}) \rangle$  zuweist, das sich für die Mengen unseres  $H$ - $W$ - $F$  auf einen Punkt eben die Wahrscheinlichkeit in unserem Sinne zusammenzieht. An den Modellen macht man sich auch leicht den Häufigkeitssinn dieser Wahrscheinlichkeitsauffassung klar. Natürlich wäre es leicht, allgemeine Regeln für so definierte »Wahrscheinlichkeiten« zu entwickeln, sie werden aber kaum mathematisch Interessantes liefern ausser für den Spezialfall, dass das Wahrscheinlichkeitsintervall ein Punkt wird. Übrigens weist diese Theorie auch nur scheinbar jeder Menge eine »Wahrscheinlichkeit« eindeutig zu, denn zusätzliche Forderungen zu unseren Axiomen verändern ja die Grössen der Wahrscheinlichkeitsintervalle, die sie im allgemeinen verkleinern und so mehr punktförmige Intervalle erzeugen.

#### Kapitel IV.

### Sätze, die ohne Voraussetzung der Unabhängigkeit der Versuche gelten.

#### § 11.

#### Additions- und Multiplikationssätze und die Bayessche Formel.

**Satz 11, 1.** *Ist eine Menge  $\mathfrak{A}$  der  $W$ - $F$   $F$  Summe der paarweise fremden Mengen der Folge  $\{\mathfrak{A}_n\}$ , die ebenfalls Mengen aus  $F$  sind, so gilt*

$$(F, \mathfrak{A}) = \sum_n (F, \mathfrak{A}_n).$$

**Beweis.** Ist  $F$  ein  $H$ - $W$ - $F$ , so ist  $(F, \mathfrak{A}_n) = |\mathfrak{A}_n|$  nach Satz 7, 1 und ebenso  $(F, \mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}|$ . Nach Satz 5, 20 gilt also die behauptete Gleichung. Ist  $F$  kein  $H$ - $W$ - $F$ , so ist es wahrscheinlichkeitstreues Bild eines  $H$ - $W$ - $F$ , die Gleichung

gilt für die Urbilder der Mengen, also wie die Multiplikation mit dem Normierungsfaktor zeigt, auch für  $F$  selbst.

**Satz 11, 2.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 11, 1 gilt für jede Teilfolge  $\{\mathfrak{A}_{n_v}\}$  der Folge  $\{\mathfrak{A}_n\}$*

$$\left(F, \sum_v \mathfrak{A}_{n_v}\right) = \sum_v (F, \mathfrak{A}_{n_v}).$$

Beweis. Wüsste man, dass  $\sum_v \mathfrak{A}_{n_v}$  Menge aus  $F$  ist, so wäre nach dem vorigen Satz die Behauptung bewiesen. Wir wollen also zeigen, dass  $\sum_v \mathfrak{A}_{n_v}$  Menge aus  $F$  ist. Zunächst nehmen wir an,  $F$  sei ein  $H$ - $W$ - $F$  und setzen  $\mathfrak{A}' = \sum_v \mathfrak{A}_{n_v}$ .  $\mathfrak{B}$  sei die Begrenzung von  $\mathfrak{A}'$ .  $\mathfrak{B}$  ist in  $B_F$  abgeschlossen. Es existiert also nach Satz 5, 20 weil  $\mathfrak{B}$  ja Komplement einer offenen Menge ist:  $|\mathfrak{B}|$ . Wäre  $|\mathfrak{B}| = 0$  so existierte nach Satz 6, 9  $I_{\kappa_1}(\mathfrak{A}')$ , also nach Satz 7, 1 auch  $(F, \mathfrak{A}')$  und die Behauptung wäre bewiesen. Wir nehmen daher an:  $|\mathfrak{B}| = \delta > 0$  und zeigen, dass diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

Diejenigen Punkte von  $\mathfrak{B}$ , die nicht in  $\mathfrak{A}$  liegen, gehören zur Begrenzung von  $\mathfrak{A}$ . Da  $(F, \mathfrak{A})$  existiert, ist das Mass der Begrenzung von  $\mathfrak{A}$  nach Satz 6, 9 null, a fortiori also ist das Mass der genannten Punkte 0. Also ist das Mass der Punkte von  $\mathfrak{B}$ , die in  $\mathfrak{A}$  liegen,  $\delta$ . Es ist somit

$$\delta = |\mathfrak{B}\mathfrak{A}| = \sum_n |\mathfrak{B}\mathfrak{A}_n|.$$

Andererseits gehört jeder Punkt, der in  $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_n$  liegt, der Begrenzung von  $\mathfrak{A}_n$  an, da  $\mathfrak{B}$  ja keine inneren Punkte von  $\mathfrak{A}_n$  enthalten kann, weil die Mengen paarweise fremd sind. Der Existenz von  $(F, \mathfrak{A}_n)$  wegen ist das Mass der Begrenzung von  $\mathfrak{A}_n$  null, a fortiori gilt also:  $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}_n| = 0$ . Hieraus folgt  $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}| = 0$ . Dies widerspricht der Annahme  $\delta \neq 0$ . Die Behauptung ist somit für  $H$ - $W$ - $F$ 's bewiesen.

Ist  $F$  aber kein  $H$ - $W$ - $F$ , so ist es wahrscheinlichkeitstreues Bild eines  $H$ - $W$ - $F$ , die Behauptung gilt für die Urbilder, also, wie die Multiplikation mit dem Normierungsfaktor lehrt, auch für  $F$  selbst.

*Es sei hervorgehoben, dass bei gewissen Vergrößerungen von  $F$  durch Adjunktion neuer Mengen diese Sätze nur noch für endlich viele Mengen gelten, § 17 gibt dafür ein Beispiel. Dieser Sachverhalt erklärt sich daraus, dass die eben geführten*

*Beweise von der zahlenmässigen Gleichheit von Wahrscheinlichkeit und Mass Gebrauch machen.*

**Satz 11, 3.** *Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Mengen aus  $F$ , so gilt*

$$(F, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{A}) + (F, \mathfrak{B}) - (F, \mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 6, 2.

Diese drei Sätze sind die allgemeinsten Additionstheoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wie man sieht, geben sie alle nur Zusammenhänge zwischen Mengen desselben  $W\text{-}F$  an. Anders steht es bei den jetzt zu nennenden Multiplikationstheoremen, die zwischen einem  $W\text{-}F$  und gewissen wahrscheinlichkeitstreuen Abbildungen dieses Feldes Beziehungen herstellen.

Wir wollen uns von jetzt ab immer folgender bequemer Bezeichnung bedienen:

**Bezeichnung.** Ist  $F$  ein  $W\text{-}F$  und  $\mathfrak{A}$  eine Menge aus  $F$ , so soll  $F\mathfrak{A}$  das  $W\text{-}F$  bedeuten, das aus  $F$  durch wahrscheinlichkeitstreue Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf sich selbst entsteht.

**Satz 11, 4.** *Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zwei Mengen aus  $F$ , so gilt*

$$(F, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{A})(F\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Beweis. Zunächst ist  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  Menge aus  $F\mathfrak{A}$  nach der Erklärung von  $F\mathfrak{A}$ . Nach Definition 8, 2 gilt aber

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) : (F, \mathfrak{A})$$

wie der Satz behauptet. (Die Formel bleibt auch richtig für den Fall  $(F, \mathfrak{A}) = 0$ .)

Durch vollständige Induktion folgt aus diesem Satz

**Satz 11, 5.** *Sind  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots, \mathfrak{A}_n$  Mengen aus  $F$  und  $(F, \mathfrak{A}_i) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , so gilt*

$$(F, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n) = (F, \mathfrak{A}_1)(F\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)(F\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) \dots (F\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_{n-1}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_n).$$

Es handelt sich nun darum, diese Sätze in der aus historischen Gründen üblichen Sprache zu interpretieren. Diese Sprache ist zwar nicht exakt und führt leicht zu Missverständnissen, andererseits aber ist sie für gewisse Fragen — nämlich die, denen sie ihren Ursprung verdankt — ausserordentlich plastisch.

Über die Additionssätze ist wenig zu sagen: Eine Eigenschaft, die eine



Wahrscheinlichkeit hat, ist zerlegt in sich paarweise ausschliessende Eigenschaften, die auch Wahrscheinlichkeiten haben und es wird behauptet, dass dann die Wahrscheinlichkeit der umfassenden Eigenschaft die Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Komponenten ist.

Denselben Sachverhalt kann man auch so darstellen: Wenn eine Wahrscheinlichkeit dafür existiert, dass von höchstens abzählbar vielen sich ausschliessenden Möglichkeiten, von denen jeder eine Wahrscheinlichkeit zukommt, entweder die erste, oder die zweite, oder die dritte, ... eintritt, so ist diese Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Möglichkeiten.

Wir wollen jetzt das Multiplikationstheorem 11,4 interpretieren und gehen hierzu von einem einfachen Beispiel aus.

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit einem gegebenen Würfel in zwei Würfeln erst 1 und dann 3 zu werfen. Wir deuten diese Frage so: Die Menge  $\mathfrak{A}$  enthält alle Wurfreihen, die mit 1 beginnen, die Menge  $\mathfrak{B}$  alle Wurfreihen, die an zweiter Stelle die 3 stehen haben. Beides sind  $\alpha$ - $\sigma$ -Mengen, haben also Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Wurfreihe sowohl die Eigenschaft  $\mathfrak{A}$  als auch die Eigenschaft  $\mathfrak{B}$  hat, ist nun nach Satz 11,4 das Produkt der Wahrscheinlichkeit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}$  mit der Wahrscheinlichkeit, dass eine Wurfreihe, die die Eigenschaft  $\mathfrak{A}$  hat, auch die Eigenschaft  $\mathfrak{B}$  hat.

Man kann dies mit Rücksicht auf die zeitliche Reihenfolge der Versuche auch anders ausdrücken: Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl die Möglichkeit  $\mathfrak{A}$  als auch die Möglichkeit  $\mathfrak{B}$  eintritt, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit von  $\mathfrak{A}$  mit der Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathfrak{B}$  eintritt, wenn die Möglichkeit  $\mathfrak{A}$  schon eingetreten ist.

In dieser Form pflegt man Satz 11,4 gewöhnlich auszusprechen und dies ist für Fragen dieser Art auch praktisch. Nur ist darauf zu achten, dass der Satz natürlich weder eine zeitliche noch sonstwie bedingte Aufeinanderfolge der Möglichkeiten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  beinhaltet, denn es gilt natürlich ebenso  $(F, \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (F, \mathfrak{B})(F\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B})$ . Bei dieser Fassung aber scheidet die eben gegebene Interpretation, die künstlich die Reihenfolge der Möglichkeiten einführt, wie man unmittelbar einsieht.

Es ist zwar praktisch, sozusagen provisorisch in der üblichen Sprache zu reden, um jedoch Irrtümer, resp. zu enge Auslegung der gefundenen Resultate zu vermeiden, empfiehlt es sich immer, nachträglich alle Überlegungen in die Sprache der Wahrscheinlichkeitsfelder zu übertragen, die natürlich allein mathematisch exakt ist.

Wir werden jetzt mehrere Sätze beweisen, die wieder Zusammenhänge zwischen einem  $W$ - $F$  und speziellen wahrscheinlichkeitstreuen Bildern dieses  $W$ - $F$ 's aufdecken. Diese Sätze geben die Bayessche Formel in verschiedener Gestalt und handeln in der üblichen Benennung von der Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

**Satz 11, 6.** *Es seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_n, n = 1, 2, 3, \dots$  Mengen aus  $F$  und es gelte*

- 1)  $(F, \mathfrak{A}) \neq 0,$
- 2)  $\mathfrak{A} \subseteq \sum_n \mathfrak{C}_n,$

wo die  $\mathfrak{C}_n$  paarweise fremd sind. Dann ist

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i) = \frac{(F, \mathfrak{B}_i)(F\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i\mathfrak{A})}{\sum_n (F, \mathfrak{C}_n)(F\mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}_n\mathfrak{A})}$$

Beweis. Nach Satz 11, 4 ist

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i)(F, \mathfrak{A}) = (F\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i\mathfrak{A})(F, \mathfrak{B}_i),$$

also wegen 1)

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i) = (F, \mathfrak{B}_i)(F\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i\mathfrak{A}) : (F, \mathfrak{A}).$$

Nun ist nach Satz 11, 1 wegen 2)

$$(F, \mathfrak{A}) = \left( F, \mathfrak{A} \sum_n \mathfrak{C}_n \right) = \sum_n (F, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_n) = \sum_n (F\mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}_n\mathfrak{A})(F, \mathfrak{C}_n).$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

**Satz 11, 7.** *(Bayessche Formel.) Wird der vorige Satz dahin spezialisiert, dass gilt*

- 3)  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{C}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

so gilt

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_i) = \frac{(F, \mathfrak{B}_i)(F\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i\mathfrak{A})}{\sum_n (F, \mathfrak{B}_n)(F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus 3) und Satz 11, 6.

Diese Formel wollen wir nun in die übliche Sprache übersetzen und uns klar machen, inwieweit hier die Bezeichnung »Wahrscheinlichkeit von Ursachen« entstehen konnte.

Es ist wegen 2) und 3) stets  $\sum_n \mathfrak{B}_n \supseteq \mathfrak{A}$ .

Jede Realisierung, die zu  $\mathfrak{A}$  gehört, muss deshalb also notwendig zu genau einer der Mengen  $\mathfrak{B}_n$  gehören, da diese fremd sind. Dieser Notwendigkeit wegen pflegt man die Möglichkeiten  $\mathfrak{B}_n$  die verschiedenen Ursachen der Möglichkeit  $\mathfrak{A}$  zu nennen. Dann aber ist  $(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda)$  konsequent als die Wahrscheinlichkeit dafür zu bezeichnen, dass das Vorliegen der Möglichkeit  $\mathfrak{A}$  die Ursache  $\mathfrak{B}_\lambda$  hat. Ferner ist dann  $(F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})$  die Wahrscheinlichkeit, die die Möglichkeit  $\mathfrak{A}$  bei Vorliegen von  $\mathfrak{B}_n$  hat.  $(F, \mathfrak{B}_n)$  pflegt man die a-priori-Wahrscheinlichkeit der Ursache  $\mathfrak{B}_n$  zu nennen.

Dies sei noch an einem ganz einfachen Beispiel verdeutlicht: Es wird gewürfelt und mitgeteilt, dass das Ergebnis des ersten Wurfs eine gerade Zahl war; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 2 war?

$\mathfrak{A}$  ist hier die Menge der Wurfreihen, die mit einer geraden Zahl beginnen.  $\mathfrak{B}_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$  ist die Menge der Wurfreihen, die mit  $2\lambda$  beginnen. Die drei Mengen  $\mathfrak{B}_\lambda$  sind hier die möglichen Ursachen der Menge  $\mathfrak{A}$ . Die Antwort auf die Frage gibt die obige Formel.

Wie man sieht, ist die Wahl des Wortes »Ursache« nicht allzu glücklich. Es gelingt natürlich ohne weiteres, die Tatsache, dass das Vorhandensein einer Realisierung von  $\mathfrak{A}$  an das Vorhandensein genau eines  $\mathfrak{B}_n$  gekoppelt ist, auch anders zu deuten und auch Beispiele zu konstruieren, in denen die gegebene Deutung dem natürlichen Gefühl widerspricht.

Will man bei der pseudokausalen Interpretierung bleiben, so kann man ebenso berechtigt sagen:

Das Vorliegen von  $\mathfrak{A}$  zieht entweder das Auftreten von  $\mathfrak{B}_1$  oder das von  $\mathfrak{B}_2$  oder das von  $\mathfrak{B}_3 \dots$  nach sich.  $\mathfrak{B}_n$  könnte somit mit gleichem Recht als eine der möglichen »Wirkungen« der Ursache  $\mathfrak{A}$  aufgefasst werden.

Dann wäre  $(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Vorhandensein von  $\mathfrak{A}$  das Auftreten von  $\mathfrak{B}_\lambda$  bewirkt und entsprechend  $(F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Vorhandensein von  $\mathfrak{B}_n$  die Ursache  $\mathfrak{A}$  hat. Man könnte daher mit derselben Berechtigung von einem Satz über die Wahrscheinlichkeit der Wirkungen sprechen. Wir geben auch für diese Deutung ein Beispiel:

Gegeben sei eine Kugel, die aus zwei Halbkugeln gleichen Gewichts aber verschiedener Elastizität besteht. Es soll über der Mitte eines Tisches immer in gleicher Höhe die Kugel in einem Becher geschüttelt und auf den Tisch geworfen werden. Dann sind in jedem Versuch folgende Ergebnisse möglich:

- 1) Fall auf den elastischen Teil, verbunden mit Herabrollen vom Tisch.
- 2) Fall auf den elastischen Teil, verbunden mit Ruhelage auf dem Tisch.

3) Fall auf den weniger elastischen Teil, verbunden mit Herabrollen vom Tisch.

4) Fall auf den weniger elastischen Teil, verbunden mit Ruhelage auf dem Tisch.

Bezeichnet man den Fall auf den elastischen Teil resp. weniger elastischen Teil mit  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_2$  und das Herabrollen vom Tisch resp. die Ruhelage auf dem Tisch mit  $\beta_1$  resp.  $\beta_2$ , so sind die Möglichkeiten des  $i$ -ten Versuchs

$$(\alpha_1, \beta_1)_i, (\alpha_1, \beta_2)_i, (\alpha_2, \beta_1)_i, (\alpha_2, \beta_2)_i.$$

$\mathfrak{A}^{(i)}$  sei die  $a$ -0-Menge der Realisierungen, die im  $i$ -ten Versuch ( $i$ -fest)  $(\alpha_1, \beta_1)_i$  oder  $(\alpha_1, \beta_2)_i$  aufweisen.

$\mathfrak{B}_1^{(i)}$  sei die  $a$ -0-Menge der Realisierungen, die im  $i$ -ten Versuch  $(\alpha_1, \beta_1)_i$  oder  $(\alpha_2, \beta_1)_i$  aufweisen.

$\mathfrak{B}_2^{(i)}$  sei die  $a$ -0-Menge der Realisierungen, die im  $i$ -ten Versuch  $(\alpha_1, \beta_2)_i$  oder  $(\alpha_2, \beta_2)_i$  aufweisen.

$\mathfrak{B}_1^{(i)}$  und  $\mathfrak{B}_2^{(i)}$  sind fremd und  $\mathfrak{B}_1^{(i)} + \mathfrak{B}_2^{(i)} \supseteq \mathfrak{A}^{(i)}$ .

Man hat also die Gleichung

$$(F\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{A}^{(i)}\mathfrak{B}^{(i)}) = \frac{(F, \mathfrak{B}_1^{(i)})(F\mathfrak{B}_1^{(i)}, \mathfrak{B}_1^{(i)}\mathfrak{A}^{(i)})}{(F, \mathfrak{B}_1^{(i)})(F\mathfrak{B}_1^{(i)}, \mathfrak{B}_1^{(i)}\mathfrak{A}^{(i)}) + (F, \mathfrak{B}_2^{(i)})(F\mathfrak{B}_2^{(i)}, \mathfrak{B}_2^{(i)}\mathfrak{A}^{(i)})}.$$

Hier geht es gegen alles Gefühl zu sagen, dass  $\mathfrak{B}_1^{(i)}$ , also das Herabrollen vom Tisch im  $i$ -ten Versuch, die »Ursache« des zeitlich doch vorangehenden Auffallens auf den elastischen Teil ist, trotzdem die übliche Deutung der Formel diesen Wortlaut verlangen würde. Dagegen widerspricht jetzt der Sachverhalt nicht unbedingt der zweiten pseudokausalen Deutung, nach der  $\mathfrak{B}_1^{(i)}$ , also das Herabrollen im  $i$ -ten Versuch, als Folge (Wirkung) des vorherigen Eintritts von  $\mathfrak{A}^{(i)}$ , also des Falls auf den elastischen Teil, anzusprechen wäre.

Die Klärung der Sachlage besteht eben darin, dass der Begriff des  $W$ - $F$  und alle daraus hergeleiteten Sätze gar nichts mit dem Begriff »Ursache« zu tun haben, und man eben in die Formeln sehr vieles nur für spezielle Fragen geeignetes hineininterpretieren kann, was für die allgemeine Gültigkeit der Formeln ganz belanglos ist.

Wir leiten nun eine weitere Formel ab, die man als *Satz über die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse* zu bezeichnen pflegt.

**Satz 11, 8.**  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}_n$  und  $\mathfrak{C}$  seien Mengen aus  $F$  und es gelte

- 1)  $(F, \mathfrak{A}) \neq 0$ ,
- 2)  $\mathfrak{A} \subseteq \sum_n \mathfrak{B}_n$ ,

wo die  $\mathfrak{B}_n$  paarweise fremd sind. Dann ist

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}) = \frac{\sum_n (F, \mathfrak{B}_n)(F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})(F\mathfrak{B}_n\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A}\mathfrak{C})}{\sum_n (F, \mathfrak{B}_n)(F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})}$$

Beweis. Es ist nach Satz 11, 1 und Satz 11, 4

$$\begin{aligned} (F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}) &= \left( F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C} \sum_n \mathfrak{B}_n \right) = \sum_n (F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}_n) \\ &= \sum_n (F\mathfrak{A}\mathfrak{B}_n, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_n\mathfrak{C})(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_n). \end{aligned}$$

Nach Satz 11, 7 ist ferner

$$(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda) = \frac{(F, \mathfrak{B}_\lambda)(F\mathfrak{B}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A})}{\sum_n (F\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A})(F, \mathfrak{B}_n)}$$

Durch Einsetzen in die vorige Gleichung ergibt sich die Behauptung.

Es handelt sich nun um die übliche Interpretierung dieser Formel.

Gewöhnlich betrachtet man  $\mathfrak{A}$  als eingetretenes und  $\mathfrak{C}$  als zukünftiges Ereignis und deutet die anderen Faktoren wie bei der Bayesschen Formel. Neu hinzu tritt nur der Faktor  $(F\mathfrak{B}_n\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_n\mathfrak{A}\mathfrak{C})$ . Dieser ist dann als die Wahrscheinlichkeit anzusehen dass, falls  $\mathfrak{A}$  durch die Ursache  $\mathfrak{B}_n$  schon eingetreten ist,  $\mathfrak{C}$  eintreten wird.  $(F\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{C})$  ist dann natürlich als Wahrscheinlichkeit dafür aufzufassen, dass wenn  $\mathfrak{A}$  eingetreten ist,  $\mathfrak{C}$  eintreten wird.

Wir wollen ein Beispiel für diese Art der Deutung angeben.

Gegeben seien zwei äusserlich gleiche Urnen  $U_1$  und  $U_2$ .  $U_1$  enthalte  $n_1$  weisse und  $m_1$  schwarze,  $U_2$  enthalte  $n_2$  weisse und  $m_2$  schwarze Kugeln.

Jeder Versuch bestehe darin, dass eine der beiden Urnen gewählt und aus ihr nacheinander ohne Zurücklegen nach dem ersten Zug, zwei Kugeln gezogen werden. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiss sein wird, wenn die erste weiss war.

In jedem Versuch gibt es 8 mögliche Ergebnisse, nämlich wenn  $w$  »weiss« und  $s$  »schwarz« bedeutet:  $U_1ww$ ,  $U_1ws$ ,  $U_1sw$ ,  $U_1ss$ ,  $U_2ww$ ,  $U_2ws$ ,  $U_2sw$ ,  $U_2ss$ . Man setze nun:

$\mathfrak{A}$ : Menge der Realisierungen, die mit  $U_1ww$  oder  $U_1ws$  oder  $U_2ww$  oder  $U_2ws$  beginnen.  $\mathfrak{A}$  ist also  $a$ - $o$ -Menge.

$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ : Menge der Realisierungen, die mit  $U_1ww$  resp.  $U_1ws$  resp.  $U_2ww$  resp.  $U_2ws$  beginnen. Auch dies sind alles  $a$ -o-Mengen.

$\mathfrak{C}$ : Menge der Realisierungen, die mit  $U_1ww$  oder  $U_1sw$  oder  $U_2ww$  oder  $U_2sw$  beginnen. Auch dies ist eine  $a$ -o-Menge.

Dann gibt Satz 11, 8 die Lösung der gestellten Frage und die einzelnen Faktoren der Formel sind im üblichen Sinne deutbar.

Natürlich ist klar, dass man hier entsprechend wie bei der Bayesschen Formel Fragen aufwerfen kann, für die man  $\mathfrak{B}_n$  besser als Wirkung von  $\mathfrak{A}$  deutet und dass kein Grund vorliegt, die Anwendung des Satzes auf Fragen zu beschränken, bei denen  $\mathfrak{C}$  später als  $\mathfrak{A}$  eintritt. Alle solche Deutungen sind eben für gewisse Fragen zweckmässig, für andere dagegen sinnstörend, da sie nur bestimmten Problemen zu liebe ersonnen wurden und künstlich in die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit Zeit, Ursache etc. gar nichts zu tun haben, hinein interpretiert sind.

Es sei noch bemerkt, dass alle Sätze dieses Paragraphen formal sehr beträchtlich abgeändert werden können. Darauf soll nicht eingegangen werden, weil diese Tatsache nicht sehr erheblich ist.

*Ferner sei hervorgehoben, dass alle diese aus den Sätzen 11, 1 und 11, 2 abgeleiteten Sätze bei gewissen Adjunktionen zu  $F$  nur noch für endlich viele Mengen gelten, da das ja schon bei Satz 11, 1 und 11, 2 der Fall war.*

## § 12.

### Allgemeine Sätze über Veränderliche.

Einer der wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der der Veränderlichen, da es mit seiner Hilfe leicht ist, viele Tatbestände gemeinsam zu behandeln und so Sätze von grösster Allgemeinheit zu erzielen, deren Formulierung ohne seine Heranziehung so kompliziert würde, dass ihre Verständlichkeit ausserordentlich leiden würde.

**Definition 12, 1.**  $\{\mathfrak{A}_v\}$  sei ein höchstens abzählbares System von paarweise fremden Mengen aus  $F$  und  $\sum_v \mathfrak{A}_v = B_F$ , also  $\{\mathfrak{A}_v\}$  eine Zerlegung von  $B_F$ . Es sei nun in  $B_F$  eine Punktfunktion definiert, die stückweise konstant ist, d. h. jedem Punkt aus  $\mathfrak{A}_v$  sei dieselbe reelle Zahl  $x_v$  eindeutig zugeordnet. Diese Punktfunktion, gegeben durch das System der Paare

$$X = [(\mathfrak{A}_\nu, x_\nu)], \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

heisst dann eine Veränderliche  $X$  in  $F$ , von der man sagt, dass sie den Wert  $x_\nu$  mit der Wahrscheinlichkeit  $(F, \mathfrak{A}_\nu)$  annimmt.

Man denkt sich also jeder Realisierung eine Zahl  $x_\nu$  zugeordnet und zwar falls die Realisierung zu  $\mathfrak{A}_\nu$  gehört die Zahl  $x_\nu$ . Es ist bei dem Wortlaut » $X$  nimmt den Wert  $x_\nu$  mit der Wahrscheinlichkeit  $(F, \mathfrak{A}_\nu)$  an« darauf zu achten, dass mit  $x_\nu$  nicht die Zahl  $x_\nu$  der Grösse nach gemeint ist, sondern rein formal der  $\nu$ -te der  $x$ -Werte. Diese Bemerkung ist deshalb wichtig, weil ja unter den  $x$ -Werten zahlenmässig gleiche vorkommen dürfen, die beiden hier unterschiedenen Deutungen des Wortlauts sich also nicht inhaltlich zu decken brauchen.

**Definition 12, 2.** Eine Reihe von reellen Summanden heisse einwertig, wenn durch keine Umordnung der Summanden die Summe geändert werden kann, gleichgültig, ob sie endlich oder  $+\infty$  oder  $-\infty$  ist.

(Bei endlicher Summe deckt sich die Einwertigkeit also mit unbedingter Konvergenz.)

**Definition 12, 3.** Ist

$$X = [(\mathfrak{A}_\nu, x_\nu)]$$

eine Veränderliche in  $F$ , so sagen wir, dass  $X$  dann und nur dann einen Mittelwert  $\bar{X}$  hat, wenn

$$\sum_{\nu} x_\nu (F, \mathfrak{A}_\nu)$$

einwertig ist. Diese Summe heisst dann der Mittelwert  $\bar{X}$  von  $X$ .

Der Mittelwert ist also entweder eine endliche reelle Zahl oder  $+\infty$  oder  $-\infty$ .

Nunmehr beweisen wir einen oft als Hilfsmittel verwendbaren Satz.

**Satz 12, 1.** (Markoffsches Lemma.) Es sei  $X$  eine Veränderliche in  $F$ , die nur nicht negative Werte  $x_\nu$  annehmen kann und  $t \neq 0$  eine beliebige Zahl. Ist

$$\mathfrak{A}_{\nu_1}, \mathfrak{A}_{\nu_2}, \mathfrak{A}_{\nu_3}, \dots$$

die Gesamtheit aller in  $X$  auftretenden  $\mathfrak{A}_{\nu_\lambda}$ , für die gilt

$$x_{\nu_\lambda} \leq \bar{X} t^2$$

so ist

$$\left(F, \sum_{\nu_\lambda} \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}\right) > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Wegen Definition 12, 1 kann man diesen Satz offenbar auch so formulieren:

*Die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung  $X \leq \bar{X}t^2$ , ist, wenn kein  $x_\nu$  negativ, stets grösser als  $1 - 1:t^2$ .*

In noch anderer Fassung lautet der Satz:

*Der  $x_1$ -Inhalt der Menge derjenigen Punkte, für die für die Punktfunktion  $X$  gilt:  $X \leq \bar{X}t^2$ , existiert und ist stets grösser als  $1 - 1:t^2$ .*

Beweis. Es sei zunächst bemerkt, dass  $\bar{X}$  stets existiert, wenn alle  $x_\nu \geq 0$  sind, und dass nach Satz 11, 2 auch  $\left(F, \sum_{\nu_\lambda} \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}\right)$  stets existiert. Ist  $\bar{X}$  unendlich, so ist der Satz trivial. Ist  $\bar{X} = 0$ , so ist  $x_\nu > 0$ , also  $(F, \mathfrak{A}_\nu) = 0$ , sicher dann, wenn  $\nu$  kein  $\nu_\lambda$  ist. Daher gilt dann  $\left(F, \sum_{\nu_\lambda} \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}\right) = \left(F, \sum_{\nu} \mathfrak{A}_\nu\right) = 1$ , also ist der Satz auch in diesem Fall richtig. Wir dürfen also jetzt annehmen, dass  $\bar{X}$  eine positive Zahl ist. Durchläuft  $\nu_x$  alle Indizes, für die gilt

$$x_{\nu_x} > \bar{X}t^2,$$

so ist

$$\bar{X} = \sum_{\nu_\lambda} x_{\nu_\lambda}(F, \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}) + \sum_{\nu_x} x_{\nu_x}(F, \mathfrak{A}_{\nu_x})$$

und

$$1 = \sum_{\nu_\lambda} (F, \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}) + \sum_{\nu_x} (F, \mathfrak{A}_{\nu_x}).$$

Nun folgt, falls nur ein  $x_{\nu_\lambda}(F, \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}) \neq 0$

$$\bar{X} > \sum_{\nu_x} x_{\nu_x}(F, \mathfrak{A}_{\nu_x}),$$

also wegen

$$x_{\nu_x} > \bar{X}t^2$$

$$\bar{X} > \bar{X}t^2 \sum_{\nu_x} (F, \mathfrak{A}_{\nu_x}).$$

Ist aber  $x_{\nu_\lambda}(F, \mathfrak{A}_{\nu_\lambda}) = 0$  für jedes  $\nu_\lambda$ , so hat man



$$\bar{X} = \sum_{v_x} x_{v_x}(F, \mathfrak{A}_{v_x}).$$

Dann aber können wegen  $\bar{X} \neq 0$  nicht alle  $x_{v_x}(F, \mathfrak{A}_{v_x}) = 0$  sein.

Deshalb folgt wieder

$$\bar{X} > \bar{X} t^2 \sum_{v_x} (F, \mathfrak{A}_{v_x}).$$

Somit hat man

$$\frac{1}{t^2} > \sum_{v_x} (F, \mathfrak{A}_{v_x}).$$

Hieraus aber folgt

$$1 - \sum_{v_x} (F, \mathfrak{A}_{v_x}) = \sum_{v_\lambda} (F, \mathfrak{A}_{v_\lambda}) = \left( F, \sum_{v_\lambda} \mathfrak{A}_{v_\lambda} \right) > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Da zum Beweise dieses Satzes Satz 11, 1 unentbehrlich ist, dieser aber bei gewissen Erweiterungen von  $F$  durch Adjunktion neuer Mengen nur für endlich viele Mengen richtig bleibt, gilt dann auch das Markoffsche Lemma nur für Veränderliche, die einer Zerlegung des Raumes in endlich viele Teilmengen entspringen.

Jetzt wollen wir zur Definition von Funktionen von Veränderlichen in  $F$  übergehen, um den Begriff des Mittelwertes fruchtbar zu machen.

**Definition 12, 4.**

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$$

seien  $n$  Veränderliche in  $F$  und zwar

$$X^{(i)} = [(\mathfrak{A}_v^{(i)}, x_v^{(i)})].$$

Ferner sei

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

eine reelle Funktion von  $n$  Variablen, die für jedes  $n$ -Tupel

$$(x_{v_1}^{(1)}, x_{v_2}^{(2)}, \dots, x_{v_n}^{(n)})$$

definiert sei.

Unter der Funktion

$$X^* = f(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)})$$

der  $n$  Veränderlichen verstehen wir dann die Punktfunktion (das System aller Paare)

$$[(\mathfrak{A}_{r_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{r_2}^{(2)} \dots \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}, f(x_{r_1}^{(1)}, x_{r_2}^{(2)}, \dots, x_{r_n}^{(n)}))].$$

Diese Erklärung ist offenbar gleichwertig damit, dass die Punktfunktion  $X^*$  für jeden Punkt  $P$  von  $B$  erklärt wird durch

$$X^*(P) = f(X^{(1)}(P), X^{(2)}(P), \dots, X^{(n)}(P)).$$

**Satz 12, 2.** Jede Funktion von endlich vielen Veränderlichen in  $F$  ist eine Veränderliche in  $F$ .

Beweis. Nach Definition 12, 1 haben wir nur zu zeigen, dass die auftretenden Mengen zu  $F$  gehören, paarweise fremd sind, und dass ihre Summe  $B_F$  ist. Diese drei Dinge sind aber unmittelbar klar.

Wir werden nun einige im folgenden als Hilfssätze verwendete Tatsachen beweisen, die sich mit dem Zusammenhang zwischen den Mittelwerten bestimmter Funktionen und den Mittelwerten der in diesen Funktionen auftretenden Veränderlichen befassen. Wollten wir diese Sätze für unseren ganz allgemeinen Begriff der Veränderlichen beweisen, so müssten wir sie in sehr verklausulierter Form aussprechen, da wir ja immer die Existenz der Mittelwerte voraussetzen müssten. Der Einfachheit wegen und weil diese Einschränkung die Anwendbarkeit der Sätze später nicht beeinträchtigen wird, fassen wir den Begriff der Veränderlichen so, dass jede Veränderliche der eingeschränkten Fassung einen Mittelwert hat.

**Definition 12, 5.** Eine Veränderliche in  $F$  heiße beschränkt, wenn ihre  $x$ -Werte beiderseits beschränkt sind.

**Satz 12, 3.** Jede ganze rationale Funktion von  $n$  beschränkten Veränderlichen in  $F$  ist eine beschränkte Veränderliche in  $F$ .

Beweis. Folgt aus Definition 12, 4 und Definition 12, 5.

**Satz 12, 4.** Für jede beschränkte Veränderliche in  $F$  existiert der Mittelwert.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 12, 3.

**Satz 12, 5.** Ist die beschränkte Veränderliche  $X$  in  $F$  konstant, d. h.  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = c$ , so gilt

$$\bar{X} = c.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Gleichung  $\sum_{r=1}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_r) = 1$ .

**Satz 12, 6.** *Ist  $X$  eine beschränkte Veränderliche in  $F$  und  $c$  eine Konstante, so gilt für die Veränderliche  $cX$*

$$\overline{cX} = c\overline{X}.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 12, 3 und Definition 12, 4.

**Satz 12, 7.** *Sind  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  zwei beschränkte Veränderliche in  $F$ , so gilt*

$$\overline{X^{(1)} + X^{(2)}} = \overline{X^{(1)}} + \overline{X^{(2)}}.$$

*Der Mittelwert der Summe zweier beschränkter Veränderlicher in  $F$  ist also gleich der Summe der Mittelwerte der Summanden.*

Beweis. Nach Definition 12, 4 gilt

$$X^{(1)} + X^{(2)} = [(\mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}, x_{v_1}^{(1)} + x_{v_2}^{(2)})].$$

Also ist

$$\begin{aligned} \overline{X^{(1)} + X^{(2)}} &= \sum_{v_1, v_2} (x_{v_1}^{(1)} + x_{v_2}^{(2)}) (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) \\ &= \sum_{v_1, v_2} x_{v_1}^{(1)} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) + \sum_{v_1, v_2} x_{v_2}^{(2)} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) \\ &= \sum_{v_1} x_{v_1}^{(1)} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \sum_{v_2} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) + \sum_{v_2} x_{v_2}^{(2)} (F, \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)} \sum_{v_1} \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)}) \\ &= \sum_{v_1} x_{v_1}^{(1)} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)}) + \sum_{v_2} x_{v_2}^{(2)} (F, \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) = \overline{X^{(1)}} + \overline{X^{(2)}}. \end{aligned}$$

**Satz 12, 8.** *Sind  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$  beschränkte Veränderliche in  $F$  und  $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$  Konstante, so gilt für die lineare Funktion*

$$X = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)} + c_{n+1}$$

*dieser Veränderlichen*

$$\overline{X} = c_1 \overline{X^{(1)}} + c_2 \overline{X^{(2)}} + \dots + c_n \overline{X^{(n)}} + c_{n+1}.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Sätzen 12, 5; 12, 6; 12, 7.

Nachdem wir diesen allgemeinen Satz über lineare Funktionen von  $n$  Veränderlichen in  $F$  bewiesen haben, wollen wir jetzt einen Satz über eine quadratische Funktion einer Veränderlichen ableiten.

**Satz 12, 9.** Ist  $X$  eine beschränkte Veränderliche in  $F$ , so gilt

$$\overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{X^2} - (\bar{X})^2.$$

Beweis. Offenbar ist

$$(X - \bar{X})^2 = [(\mathfrak{A}_v, (x_v - \bar{X})^2)],$$

also

$$\begin{aligned} \overline{(X - \bar{X})^2} &= \sum_v (x_v - \bar{X})^2 (F, \mathfrak{A}_v) = \sum_v x_v^2 (F, \mathfrak{A}_v) - 2\bar{X} \sum_v x_v (F, \mathfrak{A}_v) + (\bar{X})^2 \sum_v (F, \mathfrak{A}_v) \\ &= \overline{X^2} - 2\bar{X} \cdot \bar{X} + (\bar{X})^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2. \end{aligned}$$

**Definition 12, 6.** Ist  $X$  eine beschränkte Veränderliche in  $F$ , so heisst die nicht negative Zahl

$$\sigma_X = \sqrt{\overline{(X - \bar{X})^2}}$$

die Streuung von  $X$ .

Der vorige Satz besagt also die Gleichung

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2.$$

Offenbar ist die Streuung ein Mass für die Ungleichheit der  $x_v$ . Dieses Mass ist ein Spezialfall der durch folgende Definition eingeführten Vergleichsmaassstäbe:

**Definition 12, 7.** Ist  $X$  eine beschränkte Veränderliche in  $F$ , so heisst, wenn  $k$  eine natürliche Zahl ist

$$\overline{(X - \bar{X})^k} = \sum_v (x_v - \bar{X})^k (F, \mathfrak{A}_v)$$

das Moment  $k$ -ter Ordnung von  $X$ , während man

$$|\overline{X - \bar{X}}|^k = \sum_v |x_v - \bar{X}|^k (F, \mathfrak{A}_v)$$

das absolute Moment  $k$ -ter Ordnung von  $X$  zu nennen pflegt.

Das Quadrat der Streuung ist also das Moment 2-ter Ordnung oder auch das absolute Moment 2-ter Ordnung, denn bei gerader Ordnung decken sich diese Begriffe.

Wir wollen jetzt noch untersuchen, welche Beziehungen zwischen den Mit-

telwerten und den Modellen bestehen, welches also der Häufigkeitssinn der Mittelwerte ist.<sup>1</sup>

**Definition 12, 8.** Ist  $X = [\mathfrak{A}_v, x_v]$  Veränderliche in  $F$ , so heisst

$$(\bar{F}, X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_v r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k x_v$$

echter Modellwert (durchschnittlicher Gewinn, Barwert, billiger Einsatz etc.) von  $X$ , wenn dieser Grenzwert für jedes  $\bar{F}$  der Modellklasse  $\bar{F}$  existiert und denselben endlichen Wert hat. Ist dagegen  $(\bar{F}, X)$  stets  $+\infty$  oder stets  $-\infty$ , so sollen diese Symbole unechte Modellwerte von  $X$  heissen.

Die Bezeichnungen »billiger Einsatz« etc. stammen aus folgender Vorstellung:

Man denkt sich einen Bankhalter, der Wetten darauf entgegennimmt, zu welchem  $\mathfrak{A}_v$  eine Realisierung der Versuchsvorschrift gehören wird, und der den (ev. negativen) Betrag  $x_v$  auszahlt, falls die Realisierung zu  $\mathfrak{A}_v$  gehört.

Die Frage ist nun, ob es einen (ev. negativen) Betrag  $c$  gibt, so dass, wenn der Spieler gerade diesen Betrag vor der Herstellung jeder Realisierung dem Bankhalter auszahlt, die Einnahmen und Ausgaben sowohl des Spielers als auch des Bankhalters sich bei dauernder Wiederholung des Spiels wenigstens der Gröszenordnung nach ausgleichen.

Die einzige praktische Annahme, die man zur Beantwortung dieser Frage benötigt, ist, dass die dauernde Wiederholung des Spiels ein Modell  $\bar{F}$  der Versuchsvorschrift erzeugt. Dies vorausgesetzt, müsste also gelten

$$kc = \sum_v a(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k x_v + o(k)$$

oder

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_v r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k x_v$$

da man mit  $o(k)$  bekanntlich eine Funktion von  $k$  bezeichnet, für die gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{o(k)}{k} = 0.$$

<sup>1</sup> Anmerk. Diese Untersuchung wurde durch die Betrachtungen von Herrn E. KAMKE zum Petersburger Problem in Nr. 34, 35 seines schönen Buches »Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie« angeregt. An dem nun anzuführenden Beweise hat Herr W. FELLER, Kiel, ausschlaggebenden Anteil.

Natürlich müsste diese Zahl  $c$  von der speziellen Wahl von  $\bar{F}$  unabhängig sein, denn welches  $\bar{F}$  aus  $\bar{F}$  erzeugt wird, weiss man ja nicht.

Die Antwort auf diese Fragen gibt

**Satz 12, 10.** *X hat dann und nur dann einen echten Modellwert, wenn X eine beschränkte Veränderliche ist. X hat dann und nur dann einen unechten Modellwert, wenn  $\bar{X}$  divergiert und ausserdem entweder die positiven  $x_r$  oder die negativen  $x_r$  beschränkt sind. In beiden Fällen gilt für den Modellwert*

$$(\bar{F}, X) = \bar{X}.$$

**Beweis.** Wir stellen  $X$  als Differenz nicht negativer Veränderlicher  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  dar, wo  $X^{(1)}$  aus  $X$  entsteht, wenn alle negativen  $x_r$  durch 0 ersetzt werden und  $X^{(2)}$ , wenn alle negativen  $x_r$  durch ihren absoluten Betrag die positiven aber durch 0 ersetzt werden. Man hat dann

$$X = X^{(1)} - X^{(2)}.$$

Der Beweis selbst zerfällt in folgende Teile:

A)  $X \equiv X^{(1)}$ , d. h.  $X$  nimmt keine negativen Werte an.

Dann gilt

$\alpha$ )  $X$  beschränkt: Echter Modellwert,

$\beta$ )  $X$  unbeschränkt und

$\beta_1$ )  $\bar{X}$  divergent: Unechter Modellwert,

$\beta_2$ )  $\bar{X}$  konvergent: Kein Modellwert.

B)  $X$  nimmt auch negative Werte an.

Dann gilt

$\alpha$ ) Sowohl  $X^{(1)}$  als auch  $X^{(2)}$  beschränkt: Echter Modellwert,

$\beta$ ) Genau eine der beiden Veränderlichen  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  ist unbeschränkt und

$\beta_1$ )  $\bar{X}$  divergent: Unechter Modellwert,

$\beta_2$ )  $\bar{X}$  konvergent: Kein Modellwert,

$\gamma$ ) Sowohl  $X^{(1)}$  als auch  $X^{(2)}$  unbeschränkt: Kein Modellwert.

Die Gesamtheit dieser Aussagen ist offenbar mit unserem Satz gleichwertig.

A) Die  $x_r$  seien also zunächst nie negativ.

$\alpha$ ) Offenbar gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, X)_k \geq \sum_r (\bar{F}, \mathfrak{A}_r) x_r.$$

Andererseits ist mit  $C \geq \max(x_v)$  für jedes  $N$

$$\begin{aligned} r(\bar{F}, X)_k &\leq \sum_{v=1}^N r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k x_v + C \sum_{\lambda=1}^{\infty} r(\bar{F}, \mathfrak{A}_{N+\lambda})_k \leq \\ &\leq \sum_{v=1}^N (F, \mathfrak{A}_v) x_v + \left| \sum_{v=1}^N \{r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k - (F, \mathfrak{A}_v)\} x_v \right| + C \sum_{\lambda=1}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_{N+\lambda}) + \\ &\quad + C \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} \{r(\bar{F}, \mathfrak{A}_{N+\lambda})_k - (F, \mathfrak{A}_{N+\lambda})\} \right|. \end{aligned}$$

Ist  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so kann man  $N = N(\varepsilon)$  so wählen, dass gilt

$$1) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_{N+\lambda}) < \frac{\varepsilon}{C}$$

und  $k(N)$  so, dass für  $k > k(N)$

$$2) \quad \left| \sum_{v=1}^N \{r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k - (F, \mathfrak{A}_v)\} x_v \right| < \varepsilon$$

und

$$3) \quad \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} \{r(\bar{F}, \mathfrak{A}_{N+\lambda})_k - (F, \mathfrak{A}_{N+\lambda})\} \right| = \left| \sum_{v=1}^N \{r(\bar{F}, \mathfrak{A}_v)_k - (F, \mathfrak{A}_v)\} \right| < \frac{\varepsilon}{C}$$

ist.

Dann folgt aber

$$r(\bar{F}, X)_k \leq \sum_{v=1}^N (F, \mathfrak{A}_v) x_v + 3\varepsilon.$$

Also gilt

$$\overline{\lim} r(\bar{F}, X)_k \leq \sum_{v=1}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_v) x_v.$$

Somit ist

$$(\bar{F}, X) = \bar{X}.$$

$\beta_1)$  Aus der ersten Ungleichung unter  $\alpha)$  folgt sofort, dass ein unechter Modellwert existiert, wenn  $\bar{X} = \infty$  ist.

$\beta_2)$  Es ist somit unter A) nur noch zu zeigen, dass nie ein Modellwert existiert, wenn  $X$  unbeschränkt aber  $\bar{X}$  endlich ist.

Es sind also zwei Modelle  $\bar{F}$  und  $\bar{F}'$  anzugeben, so dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, X)_k \neq \lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}', X)_k.$$

Wir konstruieren zunächst  $\bar{F}$  so, dass für jedes  $k$  gilt

$$r(\bar{F}, \mathfrak{A}_\varrho)_k \leq (F, \mathfrak{A}_\varrho) \quad \text{für } \varrho = 2, 3, 4, \dots$$

Hierzu gehen wir von einem beliebigen Modell  $\bar{F}_1$  aus.  $\bar{F}_1$  wird dadurch abgeändert, dass die erste Spalte in  $\bar{F}_1$ , für die

$$a(\bar{F}_1, \mathfrak{A}_2)_k > k(F, \mathfrak{A}_2)$$

gilt, durch einen Punkt aus  $\mathfrak{A}_1$  ersetzt wird. Ebenso wird mit dem dadurch erzeugten Modell verfahren und diese Abänderungsmethode wird unbegrenzt fortgesetzt. Dadurch entsteht offenbar ein Modell  $\bar{F}_2$ , in dem für jedes  $k$  gilt

$$r(\bar{F}_2, \mathfrak{A}_2)_k \leq (F, \mathfrak{A}_2).$$

$\bar{F}_2$  wird nun in bezug auf  $\mathfrak{A}_3$  ebenso behandelt, wie  $\bar{F}_1$  in bezug auf  $\mathfrak{A}_2$  und dadurch ein Modell  $\bar{F}_3$  erzeugt, in dem sowohl

$$r(\bar{F}_3, \mathfrak{A}_2)_k \leq (F, \mathfrak{A}_2) \quad \text{als auch} \quad r(\bar{F}_3, \mathfrak{A}_3)_k \leq (F, \mathfrak{A}_3)$$

für jedes  $k$  gilt.

Unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt das gesuchte Modell  $\bar{F}$ , für das nun gilt

$$r(\bar{F}, X)_k \leq r(\bar{F}, \mathfrak{A}_1)_k x_1 + \sum_{\varrho=2}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_\varrho) x_\varrho,$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, X)_k \leq \sum_{\varrho=1}^{\infty} (F, \mathfrak{A}_\varrho) x_\varrho = \bar{X}.$$

Nunmehr wird das Modell  $\bar{F}'$  aus  $\bar{F}$  abgeleitet.

$f(n) > 0$  sei für alle natürlichen Zahlen  $n$  erklärt. Eine Folge  $\{q_n\}$  natürlicher Zahlen werde so gewählt, dass für jedes  $n$  gilt

$$f(n) \leq x_{q_n}.$$

Nun wird festgesetzt, dass aus  $\bar{F}'$  durch Fortlassen der  $1^2$ -ten,  $2^2$ -ten,  $3^2$ -ten, ...



Spalte  $\bar{F}$  entstehen soll, und dass in  $\bar{F}'$  die  $n^2$ -te Spalte durch einen Punkt aus  $\mathfrak{A}_{\varrho_n}$  besetzt sein soll. Dann ist zunächst  $\bar{F}'$  ein Modell. Ferner gilt offensichtlich

$$a(\bar{F}', \mathfrak{A}_{\varrho})_{k^2} = a(\bar{F}, \mathfrak{A}_{\varrho})_{k^2-k} + 1$$

falls  $\varrho = \varrho_n$  mit  $n \leq k$  ist, und sonst

$$a(\bar{F}', \mathfrak{A}_{\varrho})_{k^2} = a(\bar{F}, \mathfrak{A}_{\varrho})_{k^2-k}.$$

Somit ergibt Multiplikation mit den  $x_{\varrho}$  und Addition:

$$r(\bar{F}', X)_{k^2} \geq \frac{1}{k^2} (x_{\varrho_1} + x_{\varrho_2} + \dots + x_{\varrho_k}) \geq \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^k f(n).$$

Bei geeigneter Wahl von  $f(n)$  ist somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}', X)_k = +\infty.$$

Also ist  $\beta_2$ ) bewiesen und somit A) erledigt.

B) Es werde nun angenommen, dass  $X$  negative Werte annimmt.

$\alpha$ ) Ist  $X$  beschränkt, so auch  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$ . Deshalb folgt nach  $A_{\alpha}$ ) un-  
mittelbar

$$(\bar{F}, X) = \bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)} = \bar{X}.$$

$\beta$ ) Es sei genau eine der beiden Veränderlichen  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  unbeschränkt.

$\beta_1$ ) Ist  $\bar{X}$  divergent, so auch der Mittelwert der unbeschränkten Veränderlichen. Daher folgt nach  $A_{\alpha}$ ) und  $A_{\beta_1}$ ), dass, je nachdem ob  $X^{(1)}$  oder  $X^{(2)}$  un-  
beschränkt ist, gilt

$$(\bar{F}, X) = +\infty \quad \text{resp.} \quad (\bar{F}, X) = -\infty.$$

$\beta_2$ ) Nun sei  $\bar{X}$  konvergent und z. B.  $X^{(1)}$  unbeschränkt. Dann ist auch  $\bar{X}^{(1)}$  konvergent und nach  $A_{\beta_2}$ ) existiert für  $X^{(1)}$  kein Modellwert, während er nach  $A_{\alpha}$ ) für  $X^{(2)}$  existiert. Somit existiert auch für  $X$  kein Modellwert.

$\gamma$ ) Es bleibt noch der Fall zu erledigen, dass sowohl  $X^{(1)}$  als auch  $X^{(2)}$  un-  
beschränkt ist.

$\bar{F}$  sei ein Modell und  $\bar{F}'_1$  werde unter Verwendung von  $X^{(1)}$  aus  $\bar{F}$  ent-  
sprechend erzeugt, wie unter  $A_{\beta_2}$ )  $\bar{F}'$  aus  $\bar{F}$  unter Benutzung von  $X$  erzeugt  
wurde. Dann gilt

$$r(\bar{F}_1, X)_{k^2} = r(\bar{F}_1, X^{(1)})_{k^2} - r(\bar{F}_1, X^{(2)})_{k^2} \geq \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^k f(n) - r(\bar{F}_1, X^{(2)})_{k^2}$$

und es ist

$${}^a(\bar{F}_1, X^{(2)})_{k^2} = {}^a(\bar{F}, X^{(2)})_{k^2-k}$$

wie auch  $f(n)$  gewählt wird. Man kann also  $f(n)$  so wählen, dass gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_1, X)_k = +\infty.$$

Geht man entsprechend relativ zu  $X^{(2)}$  vor, so erhält man ein Modell  $\bar{F}_2$ , für das gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}_2, X)_k = -\infty.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

### § 13.

#### Sätze über assoziierte Veränderliche.<sup>1</sup>

(Das Gesetz der grossen Zahlen.)

**Definition 13, 1.**  $n$  Veränderliche in  $F$

$$X^{(i)} = [(\mathfrak{A}_{r_i}^{(i)}, \alpha_{r_i}^{(i)})], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

heissen assoziiert, wenn jedes  $n$ -Tupel von Mengen

$$\mathfrak{A}_{r_1}^{(1)}, \mathfrak{A}_{r_2}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}$$

assoziiert ist, d. h. wenn für sie gilt

$$(F, \mathfrak{A}_{r_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{r_2}^{(2)} \dots \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}) = (F, \mathfrak{A}_{r_1}^{(1)}) (F, \mathfrak{A}_{r_2}^{(2)}) \dots (F, \mathfrak{A}_{r_n}^{(n)}).$$

Eine Folge von Veränderlichen in  $F$  heisst assoziiert, wenn für jedes  $n$  die  $n$  ersten Veränderlichen der Folge assoziiert sind.

Es sei ausdrücklich bemerkt, dass hier keinerlei Voraussetzung über spezielle Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsmetrik von  $F$  gemacht wird, sondern dass die Definition rein hypothetisch dahin zu verstehen ist: Wenn für  $n$  Veränderliche die Bedingung erfüllt ist, dann heissen sie assoziiert. Voraussetzungen über

<sup>1</sup> Vergl. die Anm. der Inhaltsübersicht zu diesem Paragraphen.

die Metrik dagegen hätten die Folge, dass man ev. von bestimmten Veränderlichen behaupten kann, dass sie assoziiert sind.

**Satz 13, 1.** Sind  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$   $n$  beschränkte, assoziierte Veränderliche in  $F$ , so gilt

$$\overline{X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)}} = \overline{X^{(1)}} \cdot \overline{X^{(2)}} \dots \overline{X^{(n)}}.$$

Der Mittelwert des Produktes ist also unter diesen Voraussetzungen das Produkt der Mittelwerte der Faktoren.

Beweis. Es ist

$$X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)} = [(\mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)} \dots \mathfrak{A}_{v_n}^{(n)}, x_{v_1}^{(1)} x_{v_2}^{(2)} \dots x_{v_n}^{(n)})],$$

also

$$\begin{aligned} \overline{X^{(1)} X^{(2)} \dots X^{(n)}} &= \sum_{v_1, v_2, \dots, v_n} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)} \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)} \dots \mathfrak{A}_{v_n}^{(n)}) x_{v_1}^{(1)} x_{v_2}^{(2)} \dots x_{v_n}^{(n)} \\ &= \sum_{v_1, v_2, \dots, v_n} (F, \mathfrak{A}_{v_1}^{(1)}) (F, \mathfrak{A}_{v_2}^{(2)}) \dots (F, \mathfrak{A}_{v_n}^{(n)}) x_{v_1}^{(1)} x_{v_2}^{(2)} \dots x_{v_n}^{(n)} = \prod_{i=1}^n \left\{ \sum_{v_i} (F, \mathfrak{A}_{v_i}^{(i)}) x_{v_i}^{(i)} \right\}. \end{aligned}$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

**Satz 13, 2.<sup>1</sup>** Sind  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$   $n$  beschränkte assoziierte Veränderliche in  $F$ , und ist

$$X_n = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)},$$

so gilt

$$\sigma_{X_n}^2 = \sigma_{X^{(1)}}^2 + \sigma_{X^{(2)}}^2 + \dots + \sigma_{X^{(n)}}^2.$$

Das Quadrat der Streuung der Summe ist also hier die Summe der Quadrate der Streuungen der Summanden.

Beweis. Nach Satz 12, 9 gilt

$$\sigma_{X_n}^2 = \overline{(X_n - \overline{X_n})^2} = \overline{X_n^2} - (\overline{X_n})^2 = \left( \sum_i \overline{X^{(i)^2}} \right) - \left( \sum_i \overline{X^{(i)}} \right)^2.$$

Somit erhält man durch Quadrieren nach Satz 12, 8 und Satz 13, 1, da sich die doppelten Produkte aufheben

$$\sigma_{X_n}^2 = \sum_i \overline{X^{(i)^2}} - \sum_i (\overline{X^{(i)}})^2 = \sum_i \{ \overline{X^{(i)^2}} - (\overline{X^{(i)}})^2 \} = \sum_i \sigma_{X^{(i)}}^2.$$

<sup>1</sup> Anmerk. Für die Sätze 13, 2—13, 5 genügt die wesentlich schwächere Voraussetzung, dass die auftretenden assoziierten Veränderlichen nur paarweise assoziiert sind. Die Beweise bleiben gleichlautend.

**Satz 13, 3.** Sind  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$   $n$  beschränkte assoziierte Veränderliche in  $F$ , und ist  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben, so gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P$  des Erfüllseins der Ungleichung

$$\left| \frac{X_n}{n} - \left( \frac{\bar{X}_n}{n} \right) \right| \leq \varepsilon$$

stets

$$P \stackrel{(\geq)}{=} 1 - \frac{\sum \sigma_{X^{(i)}}^2}{n^2 \varepsilon^2}.$$

Hierbei hat  $X_n$  dieselbe Bedeutung wie im vorigen Satz. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle Veränderlichen konstante Streuung 0 haben.

Beweis. Wendet man Satz 12, 1 auf die Veränderliche  $(X - \bar{X})^2$  an, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit  $II$  der Ungleichung

$$(X - \bar{X})^2 \leq \sigma_{\bar{X}}^2 t^2 \quad (t \neq 0)$$

$$II > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Wählt man  $t$  so, dass gilt

$$\sigma_{\bar{X}} t = \varepsilon \quad (\sigma_{\bar{X}} \neq 0 \text{ vorausgesetzt!})$$

so erhält man für die Wahrscheinlichkeit  $II$  der Ungleichung

$$|X - \bar{X}| \leq \varepsilon,$$

sofort

$$II > 1 - \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{\varepsilon^2}.$$

Nunmehr wählen wir als Veränderliche  $X$  der letzten Relation

$$X = \frac{X_n}{n}.$$

Dann bleibt offenbar nur noch zu zeigen, falls  $\sigma_{\bar{X}} \neq 0$ ,

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2} (\sigma_{X^{(1)}}^2 + \sigma_{X^{(2)}}^2 + \dots + \sigma_{X^{(n)}}^2).$$

Wie man sofort sieht, sind auch  $\frac{X^{(1)}}{n}, \frac{X^{(2)}}{n}, \dots, \frac{X^{(n)}}{n}$   $n$  assoziierte Veränderliche in  $F$  und

$$X = \frac{X^{(1)}}{n} + \frac{X^{(2)}}{n} + \dots + \frac{X^{(n)}}{n}.$$

Nach Satz 13, 2 gilt also

$$\sigma_X^2 = \sum_i \sigma_{\left(\frac{X^{(i)}}{n}\right)}^2.$$

Nach Satz 12, 2 folgt nun

$$\sigma_{\left(\frac{X^{(i)}}{n}\right)}^2 = \overline{\left(\frac{X^{(i)}}{n} - \overline{\left(\frac{X^{(i)}}{n}\right)}\right)^2} = \frac{1}{n^2} \overline{(X^{(i)} - \overline{X^{(i)}})^2} = \frac{1}{n^2} \sigma_{X^{(i)}}^2.$$

Ist also  $\sigma_X \neq 0$ , so ist der Satz bewiesen.

Ist aber  $\sigma_X = 0$ , so ist  $\sigma_{X^{(i)}} = 0$  für jedes  $i$ . Wir müssen somit zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür 1 ist, dass für irgend eine Veränderliche  $X$

$$|X - \bar{X}| \leq \varepsilon$$

gilt, wenn  $\sigma_X = 0$  ist.

Es sei

$$X = [(\mathfrak{A}_v, x_v)], \text{ dann folgt}$$

$$0 = \sigma_X^2 = \sum_v (x_v - \bar{X})^2 (F, \mathfrak{A}_v).$$

Es ist somit  $x_v = \bar{X}$  für jedes  $v$ , für das  $(F, \mathfrak{A}_v) \neq 0$  ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür also, dass  $X = \bar{X}$  gilt, ist 1, somit auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $|X - \bar{X}| \leq \varepsilon$  erfüllt ist.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Der Inhalt dieses Satzes wird anschaulicher durch eine sofort aus ihm zu ziehende Folgerung:

**Satz 13, 4.** *Ist  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots$  eine Folge von assoziierten beschränkten Veränderlichen in  $F$  und gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{X^{(i)}}^2 = 0,$$

*so liegt für jedes noch so klein vorgegebene  $\varepsilon$  die Wahrscheinlichkeit dafür beliebig dicht an 1, dass der Durchschnitt der  $n$  ersten Veränderlichen sich von seinem Mittelwert absolut um höchstens  $\varepsilon$  unterscheidet, wenn nur  $n = n(\varepsilon)$  hinreichend gross gewählt wird.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 13, 3.

Für ein Modell  $\bar{F}$  von  $F$  sagt der Satz also folgendes aus: Betrachtet man die Dichte der Spalten, für die der Durchschnitt der  $n$  ersten Veränderlichen sich von seinem Mittelwert absolut um höchstens  $\varepsilon$  unterscheidet, so geht diese Dichte bei wachsendem  $n$  gegen 1, wie klein auch  $\varepsilon$  vorgegeben war.

Der Satz gibt offenbar eine Methode, von den bekannten Mittelwerten auf die unbekanntenen Durchschnitte mit asymptotisch gegen 1 wachsender Wahrscheinlichkeit zu schliessen.

Wir wollen nunmehr eine Erweiterung dieses Satzes beweisen, die ausserdem noch einen Schluss vom beobachteten Durchschnitt auf den unbekanntenen Mittelwert gestattet.

Dazu erklären wir in Verallgemeinerung der Sachlage von Beispiel 3, § 7 zunächst:

**Definition 13, 2.** *Es sei  $F$  ein  $W$ - $F$  und es gelte*

$$B_F = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \dots,$$

wo  $\mathfrak{A}_n$  zu  $F$  gehört und die  $\mathfrak{A}_n$  paarweise fremd sind und  $(F, \mathfrak{A}_n) \neq 0$ .

Setzt man

$$F\mathfrak{A}_n = F_n \quad (\text{vergl. § 11})$$

so soll

$$F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$$

eine Komponentendarstellung von  $F$  heissen.

**Satz 13, 5.** **Gesetz der grossen Zahlen**

$$F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$$

sei eine Komponentendarstellung von  $F$ .

$$X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)}, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sei eine Folge beschränkter assoziierter Veränderlicher in  $F_n$ , für die gilt

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S^2} \sum_{i=1}^S \sigma_{X_n^{(i)}}^2 = 0.$$

$X^{(i)}$  bezeichne die Punktfunktion auf  $B_F = B_{F_1} + B_{F_2} + \dots$ , die für jeden Punkt  $P$  von  $B_F$  erklärt ist durch

$$X^{(i)}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)}(P)^1$$

und  $X_S$  bezeichne die Punktfunktion auf  $B_F$ , die für jedes  $P$  erklärt ist durch

$$X_S(P) = \sum_{i=1}^S X^{(i)}(P).$$

Endlich sei

$$X_{n,S} = X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + \dots + X_n^{(S)}.$$

Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen 1 dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem der Durchschnitt

$$\frac{X_S}{S}(P) = \alpha$$

beobachtet wird, zu einem  $F_n$  gehört, für das gilt,

$$\left| \alpha - \overline{\left( \frac{X_{n,S}}{S} \right)} \right| \leq \varepsilon$$

wie klein auch  $\varepsilon$  vorgegeben sein mag.

Damit der mathematische Sachverhalt klar wird, wollen wir ihn noch an einem Modell  $\bar{F}$  von  $F$  erläutern.

Man gibt  $\varepsilon > 0$  und  $S$  vor und stellt für jede Spalte  $P$  aus  $\bar{F}$  fest, zu welchem  $F_{n(P)}$  sie gehört und markiert in  $\bar{F}$  die Spalten  $P$ , für die der Absolutbetrag der Differenz des obigen Durchschnitts (des an  $P$  beobachteten Durchschnitts) und des zu seinem  $F_{n(P)}$  gehörigen Mittelwertes höchstens  $\varepsilon$  ist. Bezeichnet man die Dichte der markierten Spalten mit  $d_{S,\varepsilon}$ , so behauptet der Satz:  $\lim_{S \rightarrow \infty} d_{S,\varepsilon} = 1$ , für jedes  $\varepsilon$ .

Beweis. Wir bestimmen  $N$  so, dass

$$\sum_{n > N} (F, F_n) < \frac{\eta}{2},$$

wo  $\eta > 0$  vorgegeben war und  $(F, F_n) = (F, B_{F_n})$  gelte. Dann wird  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) so bestimmt, dass für alle  $S \geq S_n$  die Wahrscheinlichkeit in  $F_n$  der Ungleichung

$$\left| \frac{X_{n,S}}{S} - \overline{\left( \frac{X_{n,S}}{S} \right)} \right| \leq \varepsilon$$

---

<sup>1</sup> Anmerk. Ausserhalb von  $B_{F_n}$  also auf den Mengen  $\mathfrak{A}_v$ ,  $v \neq n$ , werde  $X_n^{(i)} = 0$  gesetzt, also als Veränderliche in  $F$  aufgefasst. Dann ist die Addition definiert.

grösser als

$$1 - \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

ist. Nach dem vorigen Satz gibt es ein solches  $S_n$ . Die Wahrscheinlichkeit in  $F$  der Punkte, für die die Ungleichung bei festem  $S \geq S_n$  erfüllt ist, ist also nach Def. 8, 1 grösser als

$$(F, F_n) - (F, F_n) \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit in  $F$  der für  $n = 1, 2, \dots, N$  in Frage kommenden Punkte dieser Art ist also grösser als

$$\sum_{n=1}^N (F, F_n) - \frac{\eta}{2} \sum_{n=1}^N (F, F_n) \cdot \frac{1}{2^n} > \sum_{n=1}^N (F, F_n) - \frac{\eta}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} > 1 - \eta,$$

wenn

$$S \geq \max(S_1, S_2, \dots, S_N).$$

Da man  $\eta$  ja beliebig klein vorgeben kann, ist der Satz bewiesen, weil ja gilt:

$$X_S(P) = \sum_{i=1}^S X^{(i)}(P) = \sum_{i=1}^S \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(i)}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^S X_n^{(i)}(P) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n,S}(P) = X_{n(P),S}(P).$$

Was der Satz praktisch aussagt ist nun offenbar folgendes:

Wenn man für einen beliebigen Punkt, ohne seine Zugehörigkeit zu  $F_n$  zu berücksichtigen, rein formal für grosses  $S$  den Durchschnitt  $X_S : S$  bildet, so wird sich mit grosser Wahrscheinlichkeit (die mit wachsendem  $S$  gegen 1 geht) dieser Durchschnitt um höchstens  $\varepsilon$  von dem Mittelwert unterscheiden, der sich bei Berücksichtigung der Zugehörigkeit des Punktes zu  $F_n$  ergäbe.

Es ist somit, wie angekündigt, eine Schlussmöglichkeit vom »beobachteten Durchschnitt« auf den »unbekannten Mittelwert« aufgezeigt.

*Spezialisiert man die Komponentendarstellung durch die Annahme, dass sie nur eine Komponente  $F_1$  enthält, so ist  $F = F_1$  und das Gesetz der grossen Zahlen geht wieder in den spezielleren vorigen Satz über. Der Mittelwert wird für festes  $S$  eindeutig und wir können den Satz dann wieder als Schluss vom bekannten Mittelwert (er ist ja eindeutig) auf den Durchschnitt deuten. Obwohl dieser Sachverhalt trivial ist, wird er oft verkannt und angenommen, dass der Schluss vom beobachteten Durchschnitt auf den Mittelwert erst durch einen Satz gerecht-*



fertigt wird, den wir deshalb behandeln müssen, und der sich auch mit dem Rückschluss vom beobachteten Durchschnitt auf Mittelwerte beschäftigt. Seine Aussage aber bezieht sich sozusagen auf die Verhältnisse im Kleinen, während das Gesetz der grossen Zahlen die Frage im Grossen behandelte. Auf das genaue Verhältnis der beiden Sätze gehen wir erst nach dem Beweis ein.

**Satz 13, 6.** (*Verallgemeinertes Bayessesches Theorem.*)  $F = (F_1, F_2, \dots)$  sei eine Komponentendarstellung. In jedem dieser  $F_n$  sei eine Folge assoziierter  $(k + 1)$ -wertiger Veränderlicher gegeben

$$X_n^{(i)} = [\mathfrak{A}_{n,\lambda}^{(i)}, x_\lambda], \quad i = 1, 2, 3, \dots; \lambda = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Die Zahl  $x_\lambda$  ist also von  $n$  und  $i$  unabhängig, d. h. für jede der Veränderlichen dieselbe.

Ferner soll gelten für jedes Paar  $(i, j)$

$$(F_n, \mathfrak{A}_{n,i}^{(i)}) = (F_n, \mathfrak{A}_{n,\lambda}^{(j)}), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Es sei

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

ein vorgegebenes System rationaler Zahlen, für das gilt:

$$0 < \alpha_\lambda \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=0}^k \alpha_\lambda = 1.$$

Ist  $S$  ein Vielfaches des Hauptnenners der  $\alpha$ , so setzen wir

$$s_\lambda = S\alpha_\lambda, \quad \text{also} \quad s_\lambda > 0 \quad \text{und} \quad \text{ganz.}$$

Nunmehr bilden wir die Menge  $M_{\alpha,S}$  der Punkte, die zu genau  $s_\lambda$  unter den  $S$  Mengen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{n,\lambda}^{(1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{n,\lambda}^{(2)}, \quad \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{n,\lambda}^{(S)},$$

und zwar sowohl für  $\lambda=0$ , als auch für  $\lambda=1, \dots$  als auch für  $\lambda=k-1$  gehören.

$\mathfrak{S}_{\alpha,\varrho}$  sei, wenn  $0 < \varrho < 1$ , die Gesamtheit der  $k$ -Tupeln

$$(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}), \quad 0 \leq \mu_\lambda \leq 1$$

für die gilt

$$f_\alpha(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}) > \varrho,$$

wo

$$f_\alpha(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \left(\frac{\xi_0}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\xi_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right)^{\alpha_{k-1}} \left(\frac{1 - \xi_0 - \xi_1 - \dots - \xi_{k-1}}{1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{k-1}}\right)^{1 - \alpha_0 - \dots - \alpha_{k-1}}$$

ist.

$n_\varrho$  durchlaufe die Indizes  $n$ , für die

$$(F_n, \mathfrak{A}_{n,0}), (F_n, \mathfrak{A}_{n,1}), \dots, (F_n, \mathfrak{A}_{n,k-1})$$

ein Punkt von  $\mathfrak{G}_{\alpha,\varrho}$  ist und es gebe ein  $n_\varrho$ .

$n_\sigma$  durchlaufe die anderen Indizes  $n$ .

Wir setzen

$$M_{\alpha,S} \sum_{n_\varrho} B_{n_\varrho} = M_{\alpha,S,\varrho},$$

wo  $B_n$  die grösste Menge aus  $F_n$  ist und behaupten, dass dann stets gilt:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} (F M_{\alpha,S}, M_{\alpha,S,\varrho}) = 1.$$

Wir wollen, ehe wir den Satz beweisen, die etwas komplizierten Mengenverhältnisse durch Vergleich mit den Voraussetzungen des vorigen Satzes und durch ein Beispiel erläutern.

Die Veränderlichen in  $F_n$  im vorigen Satz ergeben durch dreifache Spezialisierung die Veränderlichen dieses Satzes:

- 1) Jede Veränderliche in  $F_n$  soll jetzt  $(k+1)$ -wertig sein.
- 2) Auch die Zahlkomponenten der Veränderlichen an entsprechenden Stellen sollen übereinstimmen.
- 3) In  $F_n$  sollen die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Mengenkompnenten der Veränderlichen gleich sein.

Beispiel: Die Komponente  $F_n$  von  $F$  bestehe aus allen Punkten

$$e_{n,1}^{(\lambda_1)} e_{n,2}^{(\lambda_2)} e_{n,3}^{(\lambda_3)} \dots,$$

wo jedes  $\lambda_i$  die Zahlen  $0, 1, \dots, k$  durchlaufen darf.  $\mathfrak{A}_{n,i}^{(\lambda)}$  sei die Menge der Punkte von  $F_n$ , die an der  $i$ -ten Stelle das Symbol  $e_{n,i}^{(\lambda)}$  haben.

Wählt man die Metrik geeignet, so sind offenbar alle Bedingungen erfüllt.

Gibt man  $\alpha$  vor, so ist  $M_{\alpha,S}$  die Menge der Punkte von  $F_n$  summiert über  $n$ , die an den  $S$  ersten Stellen  $s_0 = S\alpha_0$  mal  $e_{n,0}^{(0)}$ ,  $s_1 = S\alpha_1$  mal  $e_{n,1}^{(1)}$ ,  $s_2 = S\alpha_2$  mal  $e_{n,2}^{(2)}$ , ..., bis  $s_{k-1} = S\alpha_{k-1}$  mal  $e_{n,k-1}^{(k-1)}$  enthalten, also auch  $s_k = S\alpha_k$  mal  $e_{n,k}^{(k)}$ . Die Punkte hinter  $n$ , bedeuten dann insgesamt alle Zahlen  $1, 2, \dots, S$ , jede nur ein mal.

Man erkennt, dass bei vorgegebenem  $\alpha$  das alles nur für solche  $S$  erfüllbar ist, die Vielfache des Hauptnenners der Zahlen  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  sind.

Nunmehr wollen wir den Satz beweisen.

Beweis. Da die  $B_{n_\rho}$  fremd sind, gilt zunächst

$$(FM_{\alpha, S}, M_{\alpha, S, \rho}) = \sum_{n_\rho} (FM_{\alpha, S}, B_{n_\rho} M_{\alpha, S}).$$

Es ist

$$(F, B_n M_{\alpha, S}) = (FM_{\alpha, S}, B_n M_{\alpha, S})(F, M_{\alpha, S}),$$

also

$$(FM_{\alpha, S}, B_n M_{\alpha, S}) = \frac{(F, B_n M_{\alpha, S})}{(F, M_{\alpha, S})} = \frac{(F, B_n)(FB_n, B_n M_{\alpha, S})}{\sum_n (F, B_n)(FB_n, B_n M_{\alpha, S})}.$$

Nun ist

$$(FB_n, B_n M_{\alpha, S}) = (F_n, B_n M_{\alpha, S}).$$

Es handelt sich somit um die Punkte von  $B_n M_{\alpha, S}$ , also um die, die genau zu  $s_\lambda$  unter den  $S$  Mengen

$$\mathfrak{A}_{n, \lambda}^{(1)}, \mathfrak{A}_{n, \lambda}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}_{n, \lambda}^{(S)}$$

und zwar sowohl für  $\lambda = 0$ , als auch für  $\lambda = 1, \dots$  als auch für  $\lambda = k - 1$  gehören. Daher ist

$$(F_n, B_n M_{\alpha, S}) = \binom{S}{s_0 s_1 \dots s_{k-1}} (F_n, \mathfrak{A}_{n, 0})^{s_0} \dots (F_n, \mathfrak{A}_{n, k-1})^{s_{k-1}} \left\{ 1 - \sum_{\lambda=0}^{k-1} (F_n, \mathfrak{A}_{n, \lambda}) \right\}^{S-s_0-\dots-s_{k-1}}.$$

Also folgt

$$(FM_{\alpha, S}, B_n M_{\alpha, S}) = \frac{(F, B_n)(F_n, \mathfrak{A}_{n, 0})^{s_0} \dots (F_n, \mathfrak{A}_{n, k-1})^{s_{k-1}} \left\{ 1 - \sum_{\lambda=0}^{k-1} (F_n, \mathfrak{A}_{n, \lambda}) \right\}^{S-s_0-\dots-s_{k-1}}}{\sum_n (F, B_n)(F_n, \mathfrak{A}_{n, 0})^{s_0} \dots (F_n, \mathfrak{A}_{n, k-1})^{s_{k-1}} \left\{ 1 - \sum_{\lambda=0}^{k-1} (F_n, \mathfrak{A}_{n, \lambda}) \right\}^{S-s_0-\dots-s_{k-1}}}$$

Dividiert man Zähler und Nenner, letzteren gliedweise, durch

$$\alpha_0^{s_0} \cdot \alpha_1^{s_1} \dots \alpha_{k-1}^{s_{k-1}} \left( 1 - \sum_{\lambda=0}^{k-1} \alpha_\lambda \right)^{S-s_0-s_1-\dots-s_{k-1}}$$

und setzt

$$f_\alpha[(F_n, \mathfrak{A}_{n, 0}), (F_n, \mathfrak{A}_{n, 1}), \dots, (F_n, \mathfrak{A}_{n, k-1})] = Z_n$$

und

$$(F, B_n) = J_n,$$

so erhält man sofort

$$(FM_{\alpha, S}, B_n M_{\alpha, S}) = \frac{J_n Z_n^S}{\sum_n J_n Z_n^S}.$$

Daher findet man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$(FM_{\alpha, S}, M_{\alpha, S, \varrho}) = \frac{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S}{\sum_n J_n Z_n^S} = \frac{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S}{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S + \sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma} Z_{n_\sigma}^S}.$$

Um unseren Satz zu beweisen, ist also nur noch zu zeigen, dass gilt

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma} Z_{n_\sigma}^S}{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S} = 0.$$

Wir setzen

$$\overline{\lim}_{n_\sigma} Z_{n_\sigma} = Z_*.$$

Dann gilt

$$Z_* \leq \varrho.$$

Ferner ist aber jedes  $Z_{n_\varrho} > \varrho$ . Es sei nun  $Z_{n_\varrho} = Z^*$  fest gewählt.

Dann erhalten wir mit von  $S$  unabhängigem  $K$

$$\frac{\sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma} Z_{n_\sigma}^S}{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S} \leq \frac{\sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma} Z_{n_\sigma}^S}{\sum_{Z_{n_\varrho} \geq Z^*} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S} \leq \frac{Z_*^S \sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma}}{Z_*^S \sum_{Z_{n_\varrho} \geq Z^*} J_{n_\varrho}} = \left(\frac{Z_*}{Z^*}\right)^S \cdot K.$$

Wegen  $Z_* < Z^*$  ist also unser Satz bewiesen.

Wir wollen nun die Bedeutung dieses Satzes näher untersuchen und wenden uns zunächst der Funktion  $f_\alpha(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$  zu, mit deren Hilfe das Gebiet  $\mathcal{G}_{\alpha, \varrho}$  definiert wurde.

Man sieht sofort, dass diese Funktion in dem Quader  $0 \leq \xi_\lambda \leq 1$ ,  $\lambda = 0, 1, \dots, k-1$  nur ein Maximum hat und zwar an der Stelle  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ .

Es ist

$$f_\alpha(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = 1$$

und von dieser Stelle aus fällt die Funktion nach allen Seiten monoton ab.

Hieraus folgt wesentliches über den Bereich  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$ . Zunächst sieht man, dass  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  stets (es werden nur Werte  $\varrho < 1$  zugelassen) den Punkt  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$  enthält. Da hier das Maximum von  $f_\alpha$  liegt, folgt aber auch, dass  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  immer kleiner wird, wenn  $\varrho$  gegen 1 geht.

Genau gesagt heisst das, wenn  $d_{\alpha, \varrho}$  der Durchmesser von  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  ist (die obere Grenze der Entfernungen aller Punktepaare aus  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$ ) so gilt

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} d_{\alpha, \varrho} = 0.$$

Wir können also  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  beliebig klein wählen, sofern es nur mindestens für ein  $n$  den Punkt

$$\{(F, \mathfrak{A}_{n, 0}), (F, \mathfrak{A}_{n, 1}), \dots, (F, \mathfrak{A}_{n, k-1})\}$$

enthält.

Die Gültigkeit des Satzes hängt wesentlich an der Wahl der Bereiche  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$ . Würde man sie etwa durch beliebige  $k$ -dimensionale Kugeln mit dem Mittelpunkt  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$  ersetzen und diese zur Definition der Indizes  $n_\varrho$  in demselben Sinne verwenden wie die alten Bereiche, so wird der Satz falsch. Dies liegt daran, dass  $f_\alpha$  nicht symmetrisch ist. Im Falle  $k = 1$  ist nämlich — die Anzahl der Komponenten  $F_n$  von  $F$  als endlich vorausgesetzt — zunächst

$$f_\alpha(\xi_0) = \left(\frac{\xi_0}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{1 - \xi_0}{1 - \alpha_0}\right)^{1 - \alpha_0}$$

und der Bereich  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  ist die Punktmenge zwischen den Grenzen  $\alpha_0 - \beta_\varrho$  und  $\alpha_0 + \gamma_\varrho$ , wo diese beiden Zahlen die Wurzeln der Gleichung  $f_\alpha(\xi) = \varrho$  sind. Ist nun z. B.  $|\beta_\varrho| < |\gamma_\varrho|$  und wählen wir die eindimensionale Kugel  $\mathfrak{G}'_{\alpha, \varrho} = (\alpha_0 - \beta_\varrho, \alpha_0 + \beta_\varrho)$  an Stelle von  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$ , so können wir jetzt nicht mehr schliessen, dass die nun auftretenden  $Z_{n_\varrho}$  sämtlich grösser sind, als jedes der nun auftretenden  $Z_{n_\sigma}$ . Betrachten wir also, wenn  $M'_{\alpha, s, \varrho}$  entsprechend wie  $M_{\alpha, s, \varrho}$  zu  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  nun zu  $\mathfrak{G}'_{\alpha, \varrho}$  erklärt ist, den Ausdruck

$$(FM_{\alpha, s}, M'_{\alpha, s, \varrho}) = \frac{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S}{\sum_{n_\varrho} J_{n_\varrho} Z_{n_\varrho}^S + \sum_{n_\sigma} J_{n_\sigma} Z_{n_\sigma}^S}$$

und richten es so ein, dass das grösste  $Z_{n_\rho} = Z_{n_\rho}^*$  einem  $Z_{n_\sigma}$  z. B.  $Z_{n_\sigma}^*$  gleich ist, so folgt sofort, wenn Zähler und Nenner durch  $Z_{n_\rho}^{S*}$  dividiert werden

$$\lim_{S \rightarrow \infty} (FM_{\alpha, S}, M'_{\alpha, S, \rho}) = \frac{J_{n_\rho}^*}{J_{n_\rho}^* + J_{n_\sigma}^*} \neq 1.$$

Nunmehr wollen wir den Inhalt des Satzes am Modell betrachten. Er sagt offenbar:

Geben wir  $\alpha$  fest vor und ist  $h$  der Hauptnenner der Elemente  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  von  $\alpha$  und betrachten wir die Folge

$$1h, 2h, 3h, \dots$$

und bilden aus  $\bar{F}$  die Teilmatrix derjenigen Spalten, die zu  $M_{\alpha, kh}$  gehören, so hat in dieser Teilmatrix die Menge  $M_{\alpha, kh, \rho}$  eine sehr grosse Dichte, wenn  $k$  sehr gross ist (Sie geht mit wachsendem  $k$  gegen 1).

Nun sind aber bei grossen  $k$  offenbar die Spalten, die Punkte von  $M_{\alpha, kh}$  sind, in  $\bar{F}$  beliebig dünn verteilt, so dass dieser Satz sich nur auf das gegenseitige Verhältnis relativ zu  $\bar{F}$  verschwindend kleiner Teilmatrizen aus  $\bar{F}$  bezieht, also sozusagen ein Gesetz im Kleinen angibt, während das Gesetz der grossen Zahlen eine Aussage über  $\bar{F}$  selbst macht, also ein Gesetz im Grossen darstellt.<sup>1</sup>

#### § 14.

##### Weitere Sätze über assoziierte Veränderliche.

(Der Integralsatz.)

Wir wollen jetzt Ergänzungen zu den Sätzen aus § 13 herleiten, die dann gelten, wenn noch gewisse einschränkende Annahmen über die Veränderlichen gemacht werden.

**Definition 14, 1.** Nimmt die beschränkte Veränderliche  $X$  in  $F$  nur paarweise verschiedene ganzzahlige Werte an, so heisst die Funktion der reellen Variablen  $z$

$$g(z) = \sum_x v(x) e^{xz}, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

die Laplacesche Adjunkte von  $X$ , wenn  $v(x) = 0$  ist, falls  $X$  den Wert  $x$  nicht annimmt und  $v(x) = p$  ist, wenn  $X$  den Wert  $x$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  annimmt.

<sup>1</sup> Anmerk. Diese Überlegung zeigt, dass Satz 13, 6 keinerlei praktische Bedeutung haben kann.

**Satz 14, 1.** *Es sei  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$  eine Folge assoziierter beschränkter Veränderlicher in  $F$  und  $X^{(v)}$  nehme nur paarweise verschiedene ganzzahlige Werte an.*

$$g_v(z) = \sum_x v_v(x) e^{xzi}$$

sei die Laplacesche Adjunkte von  $X^{(v)}$  und es sei

$$X_n = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)}.$$

Ferner gelte

1) *Es gibt ein  $C_1 > 0$ , so dass für jedes  $v$  gilt:*

$$|X^{(v)} - \bar{X}^{(v)}|^3 \leq C_1.$$

2) *Es gibt ein  $C_2 > 0$ , so dass für jedes  $v$  eine ganze Zahl  $v^*$  existiert, so dass gilt*

$$v_v(v^*) \geq C_2 \quad \text{und} \quad v_v(v^* + 1) \geq C_2.$$

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P_n(u_1, u_2)$ , ( $u_1 < u_2$  vorgegeben), der Ungleichung

$$\bar{X}_n + u_1 \sigma_{X_n} \sqrt{2} < X_n < \bar{X}_n + u_2 \sigma_{X_n} \sqrt{2}$$

stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du.$$

Am Modell  $\bar{F}$  von  $F$  sagt der Satz also: Markiert man die Spalten  $P$  aus  $\bar{F}$ , für die gilt

$$\bar{X}_n + u_1 \sigma_{X_n} \sqrt{2} < X_n(P) < \bar{X}_n + u_2 \sigma_{X_n} \sqrt{2}$$

bei festem  $n$ , so ist, wenn dies  $n$  hinreichend gross gewählt wurde, die Dichte der markierten Spalten beliebig wenig von dem Integral verschieden.

Beweis.<sup>1</sup> a) Wir schaffen uns zunächst die Hilfsmittel zu dem Beweis und untersuchen deshalb einige Funktionen, die eng mit den Laplaceschen Adjunkten  $g_v(z)$  zusammenhängen und beweisen ausserdem die Existenz einiger wichtiger Konstanten.

a<sub>α</sub>) Wir definieren Funktionen  $f_v(z)$  durch die Festsetzung

---

<sup>1</sup> Anmerk. Der Beweis schliesst sich dem von Herrn v. MISES gegebenen an. Einige Abänderungen verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn E. KAMKE.

$$f_v(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } |z| > \pi \\ e^{-\overline{X^{(v)}}zi} g_v(z) = \sum_x e^{(x-\overline{X^{(v)}})zi} v_v(x) & \text{für } |z| \leq \pi. \end{cases}$$

Offenbar gilt dann für  $|z| \leq \pi$

$$f_v(0) = 1$$

$$f'_v(z) = i \sum_x (x - \overline{X^{(v)}}) v_v(x) e^{(x-\overline{X^{(v)}})zi}, \text{ also}$$

$$f'_v(0) = 0 \text{ und } |f'_v(z)| \leq \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}| v_v(x)$$

$$f''_v(z) = - \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^2 v_v(x) e^{(x-\overline{X^{(v)}})zi}, \text{ also}$$

$$f''_v(0) = - \sigma_{X^{(v)}}^2 \text{ und } |f''_v(z)| \leq \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^2 v_v(x)$$

$$f'''_v(z) = -i \sum_x (x - \overline{X^{(v)}})^3 v_v(x) e^{(x-\overline{X^{(v)}})zi}, \text{ also}$$

$$|f'''_v(z)| \leq \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^3 v_v(x) \leq C_1.$$

Da  $|x - \overline{X^{(v)}}|$  höchstens für zwei der Werte, für die  $v_v(x) \neq 0$  ist, kleiner als 1 sein kann, weil ja  $x$  nur ganze Zahlen durchläuft, so ist offensichtlich

$$2 + \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^3 v_v(x) \geq \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^2 v_v(x)$$

und

$$2 + \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}|^2 v_v(x) \geq \sum_x |x - \overline{X^{(v)}}| v_v(x).$$

Diese Ungleichungen besagen zusammen mit den vorigen, dass  $C_1 + 4$  eine obere Schranke sowohl für die absoluten Momente ersten bis dritten Grades als auch für die Beträge der ersten bis dritten Ableitungen der Funktionen  $f_v(z)$  ist. Dies gilt natürlich auch für  $|z| > \pi$ .

Wir zeigen jetzt, dass ein  $C_3 > 0$  existiert, so dass für  $|z| \leq C_3$  und alle  $v$  gilt

$$\Re(f_v(z)) \geq \frac{1}{2},$$

wo  $\Re(f_v(z))$  den Realteil von  $f_v(z)$  bedeutet.



Man hat nach dem Gesagten

$$|f_\nu(z) - f_\nu(0)| = \left| \int_0^z f'_\nu(z) dz \right| \leq |z|(C_1 + 4).$$

Es folgt also

$$|f_\nu(z) - f_\nu(0)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } |z| \leq \frac{1}{2(C_1 + 4)},$$

somit

$$\Re(f_\nu(z)) = \Re(f_\nu(0)) - \Re\{f_\nu(0) - f_\nu(z)\} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$C_3 = 1 : 2(C_1 + 4)$  leistet also das Verlangte.

Hieraus folgt, dass für  $|z| \leq C_3$  a fortiori gilt

$$|f_\nu(z)| \geq \frac{1}{2}.$$

a<sub>β</sub>) Das Ergebnis über die Realteile der  $f_\nu(z)$  lehrt, dass man setzen darf

$$\Gamma_\nu(z) = \lg f_\nu(z) \quad \text{für } |z| \leq C_3,$$

wo  $\lg$  den Hauptwert des Logarithmus bedeuten soll. Diese Funktionen  $\Gamma_\nu(z)$  wollen wir jetzt betrachten. Eine triviale Rechnung lehrt nach a<sub>α</sub>), dass gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu(0) = 0, \quad \Gamma'_\nu(0) = 0, \quad \Gamma''_\nu(0) = -\sigma_{X^{(\nu)}}^2, \\ \Gamma'''_\nu(z) = \frac{f''_\nu(z)f'''_\nu(z) - 3f'_\nu(z)f''_\nu(z)f'''_\nu(z) + 2f''_\nu(z)^2}{f''_\nu(z)^3}. \end{aligned}$$

Somit existiert eine Konstante  $C_4 > 0$ , so dass gilt

$$|\Gamma'''_\nu(z)| \leq C_4 \quad \text{für } |z| \leq C_3, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Entwickelt man nun Real- und Imaginärteil von  $\Gamma_\nu(z)$  nach dem Taylorschen Satz, so erhält man

$$\Gamma_\nu(z) = -\frac{1}{2}\sigma_{X^{(\nu)}}^2 z^2 + \frac{1}{6}z^3 \{ \Re(\Gamma'''_\nu(z_\nu)) + i\Im(\Gamma'''_\nu(z_\nu^*)) \},$$

wobei  $|z_\nu|$  und  $|z_\nu^*|$  zwischen 0 und  $z$  also im Intervall  $|z| \leq C_3$  liegen.

Somit folgt

$$\left| \Gamma_\nu(z) + \frac{1}{2} \sigma_{X^{(\nu)}}^2 z^2 \right| \leq |z^3| C_4$$

oder

$$|f_\nu(z)| \leq e^{-\frac{1}{2} \sigma_{X^{(\nu)}}^2 z^2 + |z^3| C_4}$$

also

$$|f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z)| \leq e^{-\frac{1}{2} \sigma_{X_n}^2 z^2 + n |z^3| C_4}$$

für alle  $|z| \leq C_3$ .

a<sub>v</sub>) Es gibt ein  $C_5 > 0$ , so dass für alle  $\nu$  gilt

$$\sigma_{X^{(\nu)}}^2 \geq C_5.$$

Nach Voraussetzung 2) ist nämlich

$$\sigma_{X^{(\nu)}}^2 \geq (\nu^* - \overline{X^{(\nu)}})^2 C_2 + (\nu^* + 1 - \overline{X^{(\nu)}})^2 C_2.$$

Da sicher eine der beiden Klammern dem Betrage nach mindestens  $\frac{1}{2}$  ist, leistet

$C_5 = \frac{1}{4} C_2$  das Verlangte.

a<sub>d</sub>) Für jedes  $C > 0$  gibt es ein  $0 < \mathfrak{D}_C < 1$ , so dass für jedes  $\nu$  gilt

$$|f_\nu(z)| \leq \mathfrak{D}_C, \text{ wenn } |z| \geq C.$$

Man kann hier  $C \leq \pi$  voraussetzen, da die Behauptung für  $C > \pi$  aus der Erklärung der  $f_\nu(z)$  unter a<sub>c</sub>) folgt. Für  $|z| \leq \pi$  aber erhält man nach Voraussetzung 2)

$$\begin{aligned} |f_\nu(z)| &= \left| \sum_x v_\nu(x) e^{(x - \overline{X^{(\nu)}}) z i} \right| \leq |v_\nu(\nu^*) e^{(\nu^* - \overline{X^{(\nu)}}) z i} + v_\nu(\nu^* + 1) e^{(\nu^* + 1 - \overline{X^{(\nu)}}) z i}| + \sum'_x v_\nu(x) \\ &= |v_\nu(\nu^*) + v_\nu(\nu^* + 1) e^{z i}| + \sum'_x v_\nu(x). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet  $\Sigma'$ , dass nur über die  $x$ , die von  $\nu^*$  und  $\nu^* + 1$  verschieden sind, summiert werden soll.

Setzt man  $v_\nu(\nu^*) = a$ ,  $v_\nu(\nu^* + 1) = b$ , so ist

$$|a + b e^{z i}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos z \leq (a + b)^2 - 2ab(1 - \cos z) + \left( \frac{ab(1 - \cos z)}{a + b} \right)^2.$$

Also folgt

$$|a + be^{zi}| \leq (a + b) - \frac{ab}{a + b}(1 - \cos z) \leq a + b - C_2^2(1 - \cos C),$$

da  $a + b \leq 1$  und  $\pi \geq |z| \geq C$  und  $ab \geq C_2^2$  ist. Somit erhält man für jedes  $\nu$

$$|f_\nu(z)| \leq \sum_x v_\nu(x) - C_2^2(1 - \cos C) = 1 - C_2^2(1 - \cos C) = \mathcal{F}_C < 1.$$

b) Wir leiten jetzt einen geschlossenen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit  $w_n(x)$  ab, dafür, dass  $X_n$  die vorgegebene ganze Zahl  $x$  annimmt.

Wir bemerken, dass durch Multiplikation der Adjunkten  $g(z)$  von  $X$  mit  $e^{-xzi}$  und gliedweise Integration stets folgt

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-xzi} dz, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ferner sieht man, dass wenn  $G_n(z)$  die Adjunkte von  $X_n$  ist, nach dem distributiven Gesetz gilt

$$G_n(z) = g_1(z)g_2(z) \cdots g_n(z).$$

Nach dem eben gesagten ist also

$$w_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_n(z) e^{-xzi} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(z)g_2(z) \cdots g_n(z) e^{-xzi} dz.$$

Führt man in diese Gleichung die unter a.) definierten Funktionen  $f_\nu(z)$  ein, so ergibt sich sofort

$$w_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(X_n - x)zi} f_1(z)f_2(z) \cdots f_n(z) dz.$$

Da die  $f_\nu(z)$  für  $|z| > \pi$  verschwinden, kann man auch schreiben

$$w_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(X_n - x)zi} f_1(z)f_2(z) \cdots f_n(z) dz.$$

Bisher war  $v(x)$  nur für ganze Zahlen  $x$  definiert, von jetzt ab aber wollen wir es für alle reellen  $x$  mit der rechten Seite der obigen Gleichung für  $v(x)$  identi-

fizieren. Dann ist also  $v(x)$  für alle reellen  $x$  definiert und stimmt für ganzzahlige  $x$  mit der Wahrscheinlichkeit dafür überein, dass die zugehörige Veränderliche  $X$  den Wert  $x$  annimmt. Natürlich gilt dies speziell auch für  $w_n(x)$ , das ja für ganzes  $x$  der zu  $e^{xzi}$  gehörige Koeffizient der Laplaceschen Adjunkten  $G_n(z)$  von  $X_n$  war.

Nunmehr dürfen wir die Gleichung für  $w_n(x)$  mit  $\sigma_{X_n} \sqrt{2}$  multiplizieren und durch die Substitutionen

$$\zeta = \sigma_{X_n} z, \quad x = \bar{X}_n + \sigma_{X_n} u \sqrt{2}$$

umformen, wo  $u$  reell ist.

Dadurch ergibt sich sofort

$$\sigma_{X_n} \sqrt{2} w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) f_2\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) \cdots f_n\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) e^{-u\zeta\sqrt{2}i} d\zeta.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$F_n(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots f_n(z).$$

c) Wir wollen jetzt zeigen, dass für  $|\zeta| \leq Z$  stets gleichmässig gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) = e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}.$$

Nach a<sub>γ</sub>) nämlich gibt es ein  $n_0 = n_0(Z)$  so, dass

$$\left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right| \leq C_3 \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Somit gilt nach a<sub>β</sub>) für  $n \geq n_0$

$$\left| \lg F_n\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{X_n}^2} \right| \leq n C_4 \left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right|^3 \leq \frac{n C_4}{n C_5} |\zeta|^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{n} C_5},$$

also gilt gleichmässig für  $|\zeta| < Z$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \lg F_n\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\sigma_{X_n}^2} \right| = 0.$$

Dies aber ist mit der Behauptung c) gleichwertig.

d) Wir wollen jetzt zeigen, dass gleichmässig für alle  $u$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta.$$

Dies bedeutet nach c), dass Grenzübergang und Integration hier vertauschbar sind, was für endliche Grenzen  $(-Z, Z)$  direkt aus c) folgt. In diesem Fall gilt das aber auch gleichmässig für alle  $u$ , denn man hat

$$\begin{aligned} \left| \int_{-Z}^Z F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta - \int_{-Z}^Z e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \right| &= \left| \int_{-Z}^Z \left\{ F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) - e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \right\} e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \right| \\ &\leq \int_{-Z}^Z \left| F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) - e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \right| d\zeta \end{aligned}$$

unabhängig von  $u$  und beliebig klein nach c).

Wir setzen nun

$$C_6 = \text{Min} \left( C_3, \frac{1}{4} \frac{C_5}{C_4} \right)$$

und bezeichnen zur Abkürzung wie folgt

$$\begin{aligned} \text{I} &= \int_Z^{C_6 \sigma_{X_n}} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta; & \text{II} &= \int_{-C_6 \sigma_{X_n}}^{-Z} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \\ \text{III} &= \int_{C_6 \sigma_{X_n}}^{\infty} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta; & \text{IV} &= \int_{-\infty}^{-C_6 \sigma_{X_n}} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \\ \text{V} &= \int_{-Z}^Z F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \\ \text{VI} &= \int_Z^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta; & \text{VII} &= \int_{-\infty}^{-Z} e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta \\ \text{VIII} &= \int_{-Z}^Z e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta V \sqrt{2}i} d\zeta. \end{aligned}$$

Ist  $Z < C_6 \sigma_{X_n}$ , so ist dann

$$\text{I} + \text{II} + \dots + \text{V} = \int_{-\infty}^{\infty} F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u \zeta V \bar{2} i} d\zeta$$

und

$$\text{VI} + \text{VII} + \text{VIII} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u \zeta V \bar{2} i} d\zeta.$$

Wir wollen jetzt I und II abschätzen.

Nach a<sub>β</sub>) ist

$$\left| F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) \cdot e^{-u \zeta V \bar{2} i} \right| = \left| F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) \right| \leq e^{-\frac{1}{2} \zeta^2 + n \frac{|\zeta|^3}{\sigma_{X_n}^3}} C_4, \quad \text{für } \left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right| \leq C_3.$$

Für  $\left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right| \leq C_6 \leq C_3$  folgt aber nach a<sub>γ</sub>)

$$n \frac{|\zeta|^3}{\sigma_{X_n}^3} C_4 = \zeta^2 \frac{n}{\sigma_{X_n}^2} \left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right| C_4 \leq \zeta^2 \frac{1}{C_5} \cdot C_6 \cdot C_4 \leq \frac{\zeta^2}{4}.$$

Daher erhält man

$$\left| F_n \left( \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right) e^{-u \zeta V \bar{2} i} \right| \leq e^{-\frac{1}{4} \zeta^2} \quad \text{für } \left| \frac{\zeta}{\sigma_{X_n}} \right| \leq C_6$$

unabhängig von  $u$ .

Somit folgt, dass unabhängig von  $u$  gilt, wenn  $|Z| \leq C_6 \sigma_{X_n}$

$$\text{Max} (|\text{I}|, |\text{II}|) \leq \int_z^{\infty} e^{-\frac{1}{4} \zeta^2} d\zeta.$$

Jetzt soll III und IV abgeschätzt werden.

Die Substitution  $\zeta = z \sigma_{X_n}$  ergibt wieder

$$\text{III} = \text{III}' = \int_{C_6}^{\infty} \sigma_{X_n} F_n(z) dz, \quad \text{IV} = \text{IV}' = \int_{-\infty}^{-C_6} \sigma_{X_n} F_n(z) dz.$$

Es sei nun  $C_7 > \text{Max} (C_6, \pi)$ , so dass also gilt

$$f_n(z) = 0 \quad \text{für } |z| \geq C_7.$$

Nach a<sub>d</sub>) gibt es eine Zahl  $0 < \vartheta_{C_6} < 1$ , so dass gilt:

$$|f_v(z)| \leq \vartheta_{C_6} \text{ für } |z| \geq C_6,$$

also a fortiori für  $C_6 \leq z \leq C_7$  und  $-C_7 \leq z \leq -C_6$ .

Daher folgt nach a<sub>e</sub>)

$$|\text{III}'| \leq \int_{C_6}^{C_7} V(C_1+4)^n \vartheta_{C_6}^n dz + \int_{C_7}^{\infty} 0 \cdot dz = (C_7 - C_6) V(C_1+4)^n \vartheta_{C_6}^n$$

und

$$|\text{IV}'| \leq \int_{-\infty}^{-C_7} 0 \cdot dz + \int_{-C_7}^{-C_6} V(C_1+4)^n \vartheta_{C_6}^n dz = (C_7 - C_6) V(C_1+4)^n \vartheta_{C_6}^n.$$

Also folgt, dass unabhängig von  $u$  gilt

$$\text{Max} (|\text{III}'|, |\text{IV}'|) \leq (C_7 - C_6) V(C_1+4)^n \vartheta_{C_6}^n.$$

Offensichtlich ist ferner unabhängig von  $u$

$$\text{Max} (|\text{VI}|, |\text{VII}|) \leq \int_z^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta.$$

Ist nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben, so wählt man  $Z_0 = Z_0(\varepsilon) > 0$  so gross, dass unabhängig von  $u$  gilt

$$\varepsilon \geq \text{Max} (|\text{I}|, |\text{II}|, |\text{VI}|, |\text{VII}|).$$

Dann bestimmt man  $N_0 = N_0(Z_0)$  so, dass für  $n \geq N_0$  unabhängig von  $u$  gilt

- 1)  $C_6 \sigma_{X_n} > Z_0,$
- 2)  $\varepsilon \geq \text{Max} (|\text{III}'|, |\text{IV}'|),$
- 3)  $|\text{V} - \text{VIII}| \leq \varepsilon.$

Nun folgt unmittelbar und zwar für alle  $u$  gültig

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F_n\left(\frac{\zeta}{\sigma_{X_n}}\right) e^{-u\zeta V_{2i}} d\zeta - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2 - u\zeta V_{2i}} d\zeta \right| = |(I + \dots + V) - (VI + VII + VIII)|$$

$$\leq |\text{V} - \text{VIII}| + |\text{I}| + |\text{II}| + |\text{III}'| + |\text{IV}'| + |\text{VI}| + |\text{VII}| \leq 7\varepsilon.$$

Hiermit ist d) bewiesen.

e) Wegen d) folgt also aus der Gleichung am Ende von b):

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sigma_{X_n} \sqrt{2} w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u \sqrt{2}) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2 - u\zeta\sqrt{2}i} d\zeta$$

und zwar gleichmässig für alle  $u$ .

Nun ist aber

$$-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta\sqrt{2}i = -\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} + ui\right)^2 - u^2.$$

Die Substitution

$$v = \frac{\zeta}{\sqrt{2}} + ui$$

ergibt<sup>1</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2} - u\zeta\sqrt{2}i} d\zeta = \frac{1}{\pi} e^{-u^2} \int_{-\infty + ui}^{\infty + ui} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\pi} e^{-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}.$$

Es gilt somit gleichmässig für alle  $u$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sigma_{X_n} \sqrt{2} w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u \sqrt{2}) \} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}.$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes selbst, denn offenbar ist

$$P_n(u_1, u_2) = \sum_{u_n^{(i)}} w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u_n^{(i)} \sqrt{2}),$$

wo die  $u_n^{(i)}$  alle die  $u$  im Inneren des Intervalls  $(u_1, u_2)$  durchlaufen, für die  $\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u \sqrt{2}$  ganz ist. Wie man sieht haben zwei solche benachbarte Werte  $u_n^{(i)}$  stets den Abstand  $1 : \sigma_{X_n} \sqrt{2}$ , es gibt also sicher nicht mehr als  $(u_2 - u_1) \sigma_{X_n} \sqrt{2} + 1$  solcher Punkte.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es nun ein  $n^*(\varepsilon)$ , so dass für jedes dieser  $u_n^{(i)}$  für alle  $n \geq n^*$  gilt

$$\left| \sigma_{X_n} \sqrt{2} w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u_n^{(i)} \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u_n^{(i)2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{u_2 - u_1},$$

also

<sup>1</sup> Vergl. z. B. Jordan: Cours d'Analyse, Tome II, Nr. 360.



$$\left| w_n(\bar{X}_n + \sigma_{X_n} u_n^{(i)} \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-u_n^{(i)2}}}{\sigma_{X_n} \sqrt{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \sigma_{X_n} (u_2 - u_1)}.$$

Daher folgt nach dem oben Gesagten für  $n \geq n^*$

$$\left| P_n(u_1, u_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{u_n^{(i)}} \frac{e^{-u_n^{(i)2}}}{\sigma_{X_n} \sqrt{2}} \right| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2} \sigma_{X_n} (u_2 - u_1)}.$$

Die Summe aber geht mit wachsendem  $n$  nach der Integraldefinition gegen

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du \text{ und hiermit ist der Satz 14, 1 vollständig bewiesen.}$$

Dieser Satz gibt also genau wie Satz 13, 4 eine Methode, von dem bekannten  $\bar{X}_n$  und  $\sigma_{X_n}$  auf die unbekannte Summe  $X_n$  mit asymptotisch gegen das Integral konvergierender Wahrscheinlichkeit zu schliessen.

Nunmehr beweisen wir die entsprechende Ergänzung zum Gesetz der grossen Zahlen.

**Satz 14, 2. Der Integralsatz**

$$F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$$

sei eine Komponentendarstellung und es sei

$$X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)}, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eine Folge von Veränderlichen in  $F_n$ , die den Voraussetzungen von Satz 14, 1 genügen.

$X^{(s)}$  und  $X_S$  seien wie in Satz 13, 5 erklärt. Ferner sei

$$X_{n,S} = X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + \dots + X_n^{(S)}.$$

Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du$$

dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem die Zahl

$$X_S(P) = \alpha$$

beobachtet wird, zu einem  $F_{n(P)}$  gehört, für das gilt

$$\bar{X}_{n,S} + u_1 \sigma_{X_{n,S}} \sqrt{2} < \alpha < \bar{X}_{n,S} + u_2 \sigma_{X_{n,S}} \sqrt{2}.$$

Damit der Sachverhalt klar wird, wollen wir ihn an einem Modell  $\bar{F}$  von  $F$  erläutern. Hier sagt der Satz:

Gibt man  $S$  vor und stellt für jede Spalte  $P$  aus  $\bar{F}$  fest, zu welchem  $F_{n(P)}$  sie gehört und markiert die Spalten  $P$ , für die gilt

$$\bar{X}_{n(P),S} + u_1 \sigma_{X_{n(P),S}} \sqrt{2} < X_S(P) < \bar{X}_{n(P),S} + u_2 \sigma_{X_{n(P),S}} \sqrt{2}$$

dann wird sich bei hinreichend grossem  $S$  die Dichte der markierten Spalten beliebig wenig von dem Integral unterscheiden.

Beweis. Der Beweis wird analog zu dem von Satz 13, 5 geführt.

a) Wir bestimmen  $N$  so, dass gilt

$$\sum_{n > N} (F, F_n) < \frac{\eta}{2},$$

wo  $\eta > 0$  vorgegeben ist.

Dann wird  $S_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) so bestimmt, dass für alle  $S \geq S_n$  die Wahrscheinlichkeit in  $F_n$  dafür, dass

$$\bar{X}_{n,S_n} + u_1 \sigma_{X_{n,S_n}} \sqrt{2} < X_{n,S_n} < \bar{X}_{n,S_n} + u_2 \sigma_{X_{n,S_n}} \sqrt{2}$$

gilt, grösser als

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du - \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

ist. Nach dem vorigen Satz gibt es ein solches  $S_n$ . Die Wahrscheinlichkeit in  $F_n$  der Punkte aus  $F_n$ , für die die Ungleichung gilt, ist also grösser als

$$(F, F_n) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du - (F, F_n) \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, der für  $n = 1, 2, \dots, N$  in Frage kommenden Punkte dieser Art ist also grösser als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du \sum_{n=1}^N (F, F_n) - \frac{\eta}{2} \sum_{n=1}^N (F, F_n) \cdot \frac{1}{2^n} &> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du \sum_{n=1}^N (F, F_n) - \frac{\eta}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \\ &> \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du - \frac{\eta}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du - \frac{\eta}{2} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du - \eta, \end{aligned}$$

wenn  $S \geq \text{Max} (S_1, S_2, \dots, S_N)$ .

Da  $\eta$  beliebig klein vorgegeben werden kann, könnte bei wachsendem  $S$  also höchstens ein Wert, der grösser als das Integral ist, auftreten.

Darum zeigen wir nun, dass dies unmöglich ist.

b) Wir bestimmen  $S'_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) so, dass in  $F_n$  für alle  $S \geq S'_n$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Ungleichung gilt, kleiner als

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du + \frac{\eta}{2} \frac{1}{2^n}$$

ist. Die Gesamtheit, der für  $n = 1, 2, \dots, N$  in Frage kommenden Punkte dieser Art hat also eine Wahrscheinlichkeit, die kleiner ist als

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du \sum_{n=1}^N (F, F_n) + \frac{\eta}{2} \sum_{n=1}^N (F, F_n) \frac{1}{2^n},$$

wenn  $S \geq \text{Max} (S'_1, S'_2, \dots, S'_N)$  ist.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit dieser Punkte für alle  $n$  ist also kleiner als diese Zahl  $+ \frac{\eta}{2}$ , da die bisher unberücksichtigten  $F_n$  ja höchstens die Wahrscheinlichkeit  $\frac{\eta}{2}$  in  $F$  haben.

Daher erhält man als obere Schranke den Wert

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du + \eta.$$

Da  $\eta$  beliebig klein gewählt werden kann, ist der Satz bewiesen.

Was der Satz praktisch aussagt ist offenbar folgendes: Wenn man für einen beliebigen Punkt  $P$ , ohne seine Zugehörigkeit zu  $F_n$  zu berücksichtigen, rein formal für grosses  $S$  den Wert  $X_S(P)$  bildet, so wird mit einer sehr dicht

an dem Integral liegenden Wahrscheinlichkeit  $P$  zu einem solchen  $F_{n(P)}$  gehören, für das gilt

$$\bar{X}_{n(P),S} + u_1 \sigma_{X_{n(P),S}} \sqrt{2} < X_S(P) < \bar{X}_{n(P),S} + u_2 \sigma_{X_{n(P),S}} \sqrt{2}.$$

Es ist somit eine Schlussmöglichkeit vom beobachteten  $X_S(P)$  auf die »unbekannten«  $\bar{X}_{n(P),S}$ ,  $\sigma_{X_{n(P),S}}$  vorhanden.

Spezialisiert man die Komponentendarstellung durch die Annahme, dass sie nur eine Komponente  $F_1$  enthält, so hat man ein  $W$ - $F$  und der Satz geht in den spezielleren vorigen über; die Mittelwerte liegen bei gegebenem  $S$  eindeutig fest und man hat wieder die Schlussmöglichkeit in der anderen Richtung.

Der eben bewiesene Satz hat aber praktisch einen grossen Mangel, nämlich dass er auch die von den unbekanntem Wahrscheinlichkeiten in  $F_n$  abhängigen  $\sigma_{X_{n,S}}$  benutzt. Wäre dies nicht der Fall, so hätte man eine einfache Aussage über die Differenz  $X_S(P) - \bar{X}_{n,S}$  vor sich. Das träte ein, wenn man in dem Satz an Stelle von  $\sigma_{X_{n,S}}$  eine Punktfunktion  $\chi_{n,S}(P)$  schreiben dürfte, falls deren Wert an dem vorgegebenen  $P$  beobachtbar wäre, ohne Kenntnis des zu  $P$  gehörigen  $n$ . Man erkennt aus dem Beweis von Satz 14, 2 unmittelbar, dass man einen Satz der gesuchten Art beweisen könnte, wenn an Stelle von Satz 14, 1 ein analoger Satz träte, in dem  $\sigma_{X_n}$  durch eine Punktfunktion  $\chi_n$  dieser Art ersetzt ist, weil dann eben der Beweis von Satz 14, 2 sich wörtlich übertrüge.

Zunächst also müssen wir uns ein Analogon zu Satz 14, 1 beschaffen, in dem  $\sigma_{X_n}$  durch eine Punktfunktion  $\chi_n$  ersetzt ist. Dies geschieht so:

**Satz 14, 3.** *Es seien die Voraussetzungen 1, 2 von Satz 14, 1 erfüllt und es sei  $\{\chi_n\}$  eine Folge von nicht negativen beschränkten Veränderlichen in  $F$ , für die erfüllt sei:*

3) *Ist  $W_n(\varepsilon)$  die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung*

$$\left| \frac{\chi_n^2}{n} - \frac{\sigma_{\chi_n}^2}{n} \right| < \varepsilon,$$

*so sei für jedes  $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\varepsilon) = 1.$$

*Ist dann  $\Pi_n(u_1, u_2)$  die Wahrscheinlichkeit der Ungleichung*

$$u_1 \chi_n \sqrt{2} < X_n - \bar{X}_n < u_2 \chi_n \sqrt{2},$$

so ist stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du.$$

Beweis. Da  $C_1 + 4 > \frac{\sigma_{X_n}^2}{n} > C_5$  für alle  $n$  gilt, gibt es nach 3) zu jedem vorgegebenen  $1 > \varepsilon > 0$  und  $\eta > 0$  eine Zahl  $n_{\varepsilon, \eta}$ , so dass für alle  $n \geq n_{\varepsilon, \eta}$  die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl die Ungleichung

$$\sigma_{X_n}(1 - \varepsilon) \leq \chi_n$$

als auch die Ungleichung

$$\sigma_{X_n}(1 + \varepsilon) \geq \chi_n$$

erfüllt ist, mindestens  $1 - \eta$  ist. Es sei zunächst

$$u_1 \leq 0 \leq u_2.$$

Dann ist auch für  $n \geq n_{\varepsilon, \eta}$  die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl

$$\bar{X}_n + u_1(1 + \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} < \bar{X}_n + u_1\chi_n\sqrt{2},$$

als auch

$$\bar{X}_n + u_2\chi_n\sqrt{2} < \bar{X}_n + u_2(1 + \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2}$$

gilt, mindestens  $1 - \eta$ .

Daraus folgt sofort, dass für  $n \geq n_{\varepsilon, \eta}$  gilt

$$- \eta + \Pi_n(u_1, u_2) \leq P_n(u_1(1 + \varepsilon), u_2(1 + \varepsilon)).$$

Andererseits ist für  $n \geq n_{\varepsilon, \eta}$  auch die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl

$$\bar{X}_n + u_1\chi_n\sqrt{2} < \bar{X}_n + u_1(1 - \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2},$$

als auch

$$\bar{X}_n + u_2(1 - \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} < \bar{X}_n + u_2\chi_n\sqrt{2}$$

gilt, mindestens  $1 - \eta$ .

Daraus folgt sofort, dass für  $n \geq n_{\varepsilon, \eta}$  gilt

$$- \eta + P_n(u_1(1 - \varepsilon), u_2(1 - \varepsilon)) \leq \Pi_n(u_1, u_2).$$

Man hat somit für jedes  $\eta > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} II_n(u_1, u_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_1(1 + \varepsilon), u_2(1 + \varepsilon)) + \eta$$

und

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} II_n(u_1, u_2) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_1(1 - \varepsilon), u_2(1 - \varepsilon)) - \eta.$$

Also folgt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} II_n(u_1, u_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_1(1 + \varepsilon), u_2(1 + \varepsilon))$$

und

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} II_n(u_1, u_2) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_1(1 - \varepsilon), u_2(1 - \varepsilon)).$$

Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt wie behauptet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} II_n(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du.$$

Genau entsprechend führt man den Beweis in den beiden Fällen

$$u_1 < u_2 < 0 \quad \text{und} \quad 0 < u_1 < u_2.$$

Im ersten dieser Fälle benutzt man die Ungleichungspaare

$$\begin{aligned} \overline{X}_n + u_1(1 + \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_1\chi_n\sqrt{2} \\ \overline{X}_n + u_2\chi_n\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_2(1 - \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{X}_n + u_1\chi_n\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_1(1 - \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} \\ \overline{X}_n + u_2(1 + \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_2\chi_n\sqrt{2} \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon < \frac{u_1 - u_2}{u_2 + u_1}.$$

Im zweiten der Fälle benutzt man die Paare

$$\begin{aligned} \overline{X}_n + u_1(1 - \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_1\chi_n\sqrt{2} \\ \overline{X}_n + u_2\chi_n\sqrt{2} &< \overline{X}_n + u_2(1 + \varepsilon)\sigma_{X_n}\sqrt{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{X}_n + u_1 \chi_n \sqrt{2} &< \bar{X}_n + u_1 (1 + \varepsilon) \sigma_{X_n} \sqrt{2} \\ \bar{X}_n + u_2 (1 - \varepsilon) \sigma_{X_n} \sqrt{2} &< \bar{X}_n + u_2 \chi_n \sqrt{2} \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon < \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}.$$

Jetzt betrachten wir einen speziellen Fall, in dem sich die Veränderlichen  $\chi_n$  leicht angeben lassen.

**Satz 14, 4.** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 14, 1 erfüllt und überdies nehme jede der Veränderlichen  $X^{(i)}$  nur die  $k$  paarweise verschiedenen Werte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  an. Die Wahrscheinlichkeit, mit der  $X^{(i)}$  den Wert  $x_\lambda$  annimmt, sei  $p_\lambda^{(i)}$ . Ferner existiere für  $\lambda = 1, 2, \dots, k$*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_\lambda^{(i)} = p_\lambda.$$

Dann erfüllen die Punktfunktionen

$$\chi_n^2(P) = \sum_{\lambda=1}^k a_\lambda^{(n)}(P) \left\{ x_\lambda - \sum_{v=1}^k \frac{a_v^{(n)}(P)}{n} x_v \right\}^2$$

die Voraussetzungen von Satz 14, 3 wenn  $a_\lambda^{(n)}(P)$  angibt, wie oft für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt

$$X^{(i)}(P) = x_\lambda.$$

Beweis. Dass  $a_\lambda^{(n)}(P)$  beschränkte Veränderliche in  $F$  ist, also nach Satz 12, 3 auch dasselbe von  $\chi_n$  gilt, ist klar. Es bleibt also zu zeigen, dass Bedingung 3 von Satz 14, 3 erfüllt ist.

Nach Satz 13, 3 gilt (vergl. Satz 16, 1) für jedes  $\varepsilon > 0$  bei hinreichend grossem  $n$  mit beliebig dicht an eins liegender Wahrscheinlichkeit

$$\left| \frac{a_\lambda^{(n)}(P)}{n} - \frac{p_\lambda^{(1)} + p_\lambda^{(2)} + \dots + p_\lambda^{(n)}}{n} \right| < \varepsilon,$$

also auch

$$\left| \frac{\chi_n^2(P)}{n} - \frac{\sum_{\lambda=1}^k p_\lambda^{(1)} + p_\lambda^{(2)} + \dots + p_\lambda^{(k)}}{n} \left\{ x_\lambda - \frac{\sum_{v=1}^k p_v^{(1)} + p_v^{(2)} + \dots + p_v^{(n)}}{n} x_v \right\}^2 \right| < \varepsilon$$

somit, da identisch mit dieser Ungleichung, auch

$$\left| \frac{\chi_n^2(P)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^k \sum_{i=1}^n p_\lambda^{(i)} \left( x_\lambda - \frac{1}{n} \bar{X}_n \right)^2 \right| < \varepsilon.$$

Wenn man also zeigen könnte, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma_{\bar{X}_n}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^k \sum_{i=1}^n p_\lambda^{(i)} \left( x_\lambda - \frac{1}{n} \bar{X}_n \right)^2,$$

so wäre alles bewiesen.

Wegen  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_\lambda^{(i)} = p_\lambda$  ist aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \bar{X}_n = \sum_{v=1}^k x_v p_v$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\lambda=1}^k p_\lambda^{(i)} \left( x_\lambda - \frac{1}{n} \bar{X}_n \right)^2 = \sum_{\lambda=1}^k p_\lambda \left( x_\lambda - \sum_{v=1}^k x_v p_v \right)^2,$$

und ausserdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sigma_{\bar{X}_n}^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{\bar{X}_n^{(i)}}^2 = \sum_{\lambda=1}^k p_\lambda \left( x_\lambda - \sum_{v=1}^k x_v p_v \right)^2.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wie unmittelbar vor Satz 14, 3 erläutert wurde, können wir jetzt durch wörtliche Übertragung des Beweises von Satz 14, 2 behaupten:

**Satz 14, 5.** (Allgemeiner Rückschlussatz)

$$F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$$

sei eine Komponentendarstellung und es seien

$$X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)}, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Veränderliche in  $F_n$ , die den Voraussetzungen von Satz 14, 4 genügen und es sei

$$\chi_n^2(P) = \sum_{\lambda=1}^k a_\lambda^{(S)}(P) \left\{ x_\lambda - \sum_{v=1}^k \frac{a_v^{(S)}(P)}{S} x_v \right\}^2,$$

wo  $a_\lambda^{(S)}(P)$  die Anzahl der Male zählt, für die für  $i = 1, 2, \dots, S$  gilt

$$X^{(i)}(P) = x_\lambda.$$



Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du$$

dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem die Zahl  $X_S(P)$  beobachtet wird, zu einem  $F_n$  gehört, für das gilt

$$u_1 \chi_S(P) \sqrt{2} < X_S(P) - \bar{X}_{n,S} < u_2 \chi_S(P) \sqrt{2}.$$

Dieser Satz gestattet offenbar einen Schluss von der Beobachtung auf den Mittelwert, der als unbekannt gilt.<sup>1</sup> Dass in den wichtigen Fällen  $\chi_S(P)$  ohne Kenntnis des zu  $P$  gehörenden  $n$  an  $P$  abgelesen werden kann, zeigt Satz 16, 10.

#### Kapitel IV.

### Sätze, die aus der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Versuche folgen.

#### § 15.

#### Der Begriff der Unabhängigkeit.

Die häufigste zusätzliche Annahme, die über die Wahrscheinlichkeitsmetrik gemacht wird, ist die der Unabhängigkeit der Versuche. Mathematisch gesehen wird durch diese Annahme erreicht, dass man von grossen Klassen von Veränderlichen dann immer weiss, dass sie assoziiert sind, dass also die Sätze der vorigen Paragraphen auf sie anwendbar sind.

Um uns zu orientieren, kehren wir zunächst zu dem Spiel Beispiel 2, § 7 zurück: Dort war zugelassen, dass die Kugeln aus  $\mathfrak{M}_i$  nicht homogen sind und ausserdem nicht alle in ähnliche Bereiche zerlegt sind. Es ist deshalb gefühlsmässig einleuchtend, dass in einer Realisierung dann das Ergebnis des  $i$ -ten Versuchs das des  $(i+1)$ -ten und auch der folgenden Versuche beeinflusst. Betrachten wir jedoch den Fall, dass für jedes  $i$  die Einteilungen der Kugeln aus  $\mathfrak{M}_i$  ähnlich und die Kugeln homogen sind, so ist gefühlsmässig das Ergebnis des  $(i+1)$ -ten Versuchs durch das des  $i$ -ten Versuchs nicht beeinflusst. Es handelt sich nun darum, diese Vorstellung mathematisch exakt zu fassen. Wir überlegen deshalb folgendes:

<sup>1</sup> Anmerk. Die Tragweite dieses Satzes vergrössert sich dadurch, dass Satz 14, 4 auch noch gilt, wenn  $p_\lambda^{(i)}$  nur im Mittel gegen  $p_\lambda$  und  $p_\lambda^{(i)2}$  im Mittel gegen  $p_\lambda^2$  strebt.

Wir betrachten die Möglichkeit  $e_i^{(r)}$  des  $i$ -ten Versuchs. Ist diese Möglichkeit von dem Ergebnis des  $j$ -ten Versuchs ( $i \neq j$ ), also davon, welche der Möglichkeiten  $e_j^{(0)}, e_j^{(1)}, \dots, e_j^{(t_j)}$  sich verwirklicht, dem Gefühl nach unabhängig, so meint man damit offenbar, dass die Wahrscheinlichkeit von  $e_i^{(r)}$  dieselbe bleibt, mag nun  $e_j^{(0)}$  oder  $e_j^{(1)}$ , oder  $e_j^{(2)}, \dots$  eintreten. Das heisst also, dass, weil  $F e_j^{(e)}$  und  $F e_j^{(e')}$  beides  $W$ - $F$ 's sind, gelten soll

$$(F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)}) = (F e_j^{(e')}, e_i^{(r)} e_j^{(e')}).$$

(Wie wir wissen ist  $F e_j^{(e)}$  stets  $W$ - $F$ , wenn  $(F, e_j^{(e)}) \neq 0$ ).

Daher geben wir den Begriff der Unabhängigkeit so wieder:

**Definition 15, 1.** Ist  $F$  ein  $W$ - $F$ , so heisst die Möglichkeit  $e_i^{(r)}$  des  $i$ -ten Versuchs unabhängig von den Möglichkeiten  $e_j^{(0)}, e_j^{(1)}, \dots$  des  $j$ -ten Versuchs, ( $i \neq j$ ) falls gilt

$$(F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)}) = (F e_j^{(e')}, e_i^{(r)} e_j^{(e')})$$

immer wenn

$$(F, e_j^{(e)})(F, e_j^{(e')}) \neq 0.$$

Aus dieser Definition folgt

**Satz 15, 1.** Ist  $e_i^{(r)}$  unabhängig von den Möglichkeiten des  $j$ -ten Versuchs so ist

$$(F, e_i^{(r)} e_j^{(e)}) = (F, e_i^{(r)})(F, e_j^{(e)}) \quad e = 0, 1, \dots, t_j.$$

**Beweis.** Falls  $(F, e_j^{(e)}) = 0$  ist, ist der Satz trivial. Es sei also  $(F, e_j^{(e)}) \neq 0$ , so dass also  $(F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)})$  existiert. Nun ist

$$\sum_{\lambda} (F, e_j^{(\lambda)}) = 1,$$

also folgt

$$(F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)}) = \sum_{\lambda} (F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)})(F, e_j^{(\lambda)}).$$

Falls  $(F, e_j^{(\lambda)}) \neq 0$  ist, gilt aber nach Voraussetzung wegen  $(F, e_j^{(e)}) \neq 0$  stets

$$(F e_j^{(e)}, e_i^{(r)} e_j^{(e)}) = (F e_j^{(\lambda)}, e_i^{(r)} e_j^{(\lambda)}),$$

somit erhält man nach Satz 11, 4

$$\begin{aligned} (F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}) &= \sum_{\lambda} (F e_j^{(\lambda)}, e_i^{(r)} e_j^{(\lambda)}) (F, e_j^{(\lambda)}) = \sum_{\lambda} (F, e_j^{(\lambda)} e_i^{(r)}) \\ &= (F, e_i^{(r)} \sum_{\lambda} e_j^{(\lambda)}) = (F, e_i^{(r)}). \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Satz 11, 4

$$(F, e_j^{(q)} e_i^{(r)}) = (F, e_j^{(q)}) (F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}),$$

also

$$(F, e_j^{(q)} e_i^{(r)}) = (F, e_j^{(q)}) (F, e_i^{(r)}).$$

**Satz 15, 2.** *Definition 15, 1 ist gleichwertig mit folgender:  $e_i^{(r)}$  heisst von den Möglichkeiten des  $j$ -ten Versuchs unabhängig, wenn gilt*

$$(F, e_j^{(q)} e_i^{(r)}) = (F, e_i^{(r)}) (F, e_j^{(q)}), \quad q = 0, 1, 2, \dots, t_j.$$

**Beweis.** Dass aus Definition 15, 1 dieser Multiplikationssatz folgt, ist bereits gezeigt. Es bleibt zu beweisen, dass aus der Gültigkeit des Multiplikationssatzes, falls  $(F, e_j^{(q)}) (F, e_i^{(r)}) \neq 0$  ist, folgt

$$(F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}) = (F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}).$$

Sind aber die beiden Faktoren von Null verschieden, so ist nach, Satz 11, 4

$$(F, e_j^{(q)} e_i^{(r)}) = (F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}) (F, e_j^{(q)}).$$

Aus der Voraussetzung folgt also

$$(F, e_i^{(r)}) = (F e_j^{(q)}, e_i^{(r)} e_j^{(q)}).$$

Da man ebenso zeigt

$$(F, e_i^{(r)}) = (F e_j^{(q')}, e_i^{(r)} e_j^{(q')})$$

ist der Satz bewiesen.

Jetzt können wir die allgemeine Erklärung für unabhängige  $W$ - $F$ 's und unabhängige Komponentendarstellungen geben.

**Definition 15, 2.** *Ein  $W$ - $F$  heisst unabhängiges  $W$ - $F$  ( $u$ - $W$ - $F$ ), wenn jede Möglichkeit des  $n$ -ten Versuches von jeder Ergebniskombination der  $n - 1$  ersten Versuche unabhängig ist. Eine Komponentendarstellung von  $F$  heisst unabhängig, wenn alle Komponenten  $F_n$   $u$ - $W$ - $F$ 's sind.*

## § 16.

**Folgerungen aus den Sätzen über assoziierte Veränderliche.**

Wie schon angedeutet, wird durch die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Versuche formal mathematisch erreicht, dass in den  $u$ - $W$ - $F$ 's von gewissen Veränderlichen a priori feststeht, dass sie assoziiert sind. Betrachten wir z. B. ein  $u$ - $W$ - $F$   $F$  und setzen

$$X^{(i)} = [(e_i^{(r)}, x_i^{(r)})], \quad r = 0, 1, 2, \dots, t_i$$

als  $i$ -tes Element der Folge von Veränderlichen

$$X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots$$

wo unter  $e_i^{(r)}$  die Menge der Punkte des Raumes zu verstehen ist, die an der  $i$ -ten Stelle dies Symbol enthalten, so hat man eine Folge von assoziierten Veränderlichen in  $F$  vor sich.

Wir wollen nun näher auf den Spezialfall eingehen:

$$t_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

auf den Fall also, dass in jedem Versuch nur zwei Ergebnisse möglich sind und wollen setzen

$$x_i^{(0)} = 0, \quad x_i^{(1)} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 13, 4 erfüllt.

Zunächst nämlich handelt es sich um beschränkte Veränderliche, die assoziiert sind. Es gilt aber auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{X^{(i)}}^2}{n^2} = 0.$$

Es ist nämlich

$$\overline{X^{(i)}}^2 = 1 \cdot (F, e_i^{(1)}), \quad (\overline{X^{(i)}})^2 = (1 \cdot (F, e_i^{(1)}))^2.$$

Nach Satz 12, 9 ergibt sich somit

$$\sigma_{X^{(i)}}^2 = (F, e_i^{(1)}) - (F, e_i^{(1)})^2 = (F, e_i^{(1)}) \{1 - (F, e_i^{(1)})\} = (F, e_i^{(1)}) (F, e_i^{(0)}) < 1.$$

Hieraus folgt die Gültigkeit der Limesgleichung sofort. Ferner ist

$$\overline{\left(\frac{X_n}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)}),$$

und für jeden Punkt  $P$  ist

$$\frac{X_n}{n}(P)$$

die relative Häufigkeit des Auftretens des oberen Index 1 bis zur  $n$ -ten Stelle inkl.

Auf Grund von Satz 13, 4 können wir also sagen:

**Satz 16, 1.** (Poissonsches Theorem.)

*Sind in einem  $u$ - $W$ - $F$  für jedes  $i$  im  $i$ -ten Versuch nur zwei Ergebnisse  $e_i^{(0)}$  und  $e_i^{(1)}$  möglich, so geht mit wachsendem  $n$  die Wahrscheinlichkeit dafür gegen 1, dass die relative Häufigkeit des Eintritts von  $e^{(1)}$  in den  $n$  ersten Versuchen sich um weniger als  $\varepsilon$  von der »durchschnittlichen« Wahrscheinlichkeit*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)})$$

*unterscheidet.*

Aus diesem Satz folgt durch die weitere Spezialisierung  $(F, e_j^{(1)}) = (F, e_i^{(1)})$  für alle  $(i, j)$ :

**Satz 16, 2.** (Bernoullisches Theorem.)

*Sind die beiden Wahrscheinlichkeiten in allen Versuchen dieselben, so geht mit wachsendem  $n$  die Wahrscheinlichkeit dafür gegen 1, dass die relative Häufigkeit des Eintritts von  $e^{(1)}$  in den  $n$  ersten Versuchen sich um weniger als  $\varepsilon$  von der Wahrscheinlichkeit  $(F, e^{(1)})$  unterscheidet.*

Jetzt wollen wir aus Satz 13, 5, dem Gesetz der grossen Zahlen, für unseren Spezialfall folgern und müssen also nach dem dort gesagten einen Satz erhalten, der die beiden vorangehenden als Spezialfälle enthält und den Schluss von der beobachteten relativen Häufigkeit auf die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit gestattet.

**Satz 16, 3.**  $F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$

*sei eine unabhängige Komponentendarstellung, und es seien für jedes  $F_n$  in jedem Versuch nur zwei Ergebnisse möglich. Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen 1 dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem in den  $S$  ersten Versuchen eine relative Häufigkeit  $a_S$  für das Auftreten des oberen Index 1 beobachtet wird zu einem  $F_n$  gehört, für das sich*

$$\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S (F_n, e_i^{(1)})$$

und  $\alpha_S$  um weniger als  $\varepsilon$  unterscheiden.

Hat  $F$  nur eine Komponente, so erhält man aus diesem Satz, der von der beobachteten relativen Häufigkeit auf den unbekanntem Durchschnitt schliesst, wieder das Poissonsche Theorem, bei dem der Schluss entgegengesetzt gerichtet ist und aus ihm natürlich durch weitere Spezialisierung wie oben das Bernoullische Theorem.

Nehmen wir an, dass für jedes  $F_n$  gilt

$$(F_n, e_i^{(1)}) = (F_n, e_j^{(1)}) \text{ für alle } (i, j),$$

so folgt aus Satz 16, 3 als weiterer Spezialfall

**Satz 16, 4.** *Mit wachsendem  $S$  geht die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen 1 dafür, dass ein Punkt  $P$  an dem in den  $S$  ersten Versuchen eine relative Häufigkeit  $\alpha_S$  beobachtet wird, zu einem  $F_n$  gehört, für das sich  $(F_n, e^{(1)})$  von  $\alpha_S$  um weniger als  $\varepsilon$  unterscheidet.*

Diesen Satz über den Rückschluss im Grossen wollen wir nun mit dem Rückschluss im Kleinen vergleichen, der sich durch Spezialisierung von Satz 13, 6 ergibt.

Damit die Voraussetzung von Satz 13, 6 über die Existenz mindestens eines  $n_\varrho$  stets erfüllt ist, wollen wir annehmen, dass die Zahlen  $(F_n, e^{(0)})$  im Intervall  $0 \rightarrow 1$  dicht liegen. Dann gilt als unmittelbare Folgerung von Satz 13, 6

**Satz 16, 5.** (Bayessches Theorem.)

*Sind die Voraussetzungen von Satz 16, 4 erfüllt und liegen die Zahlen  $(F_n, e^{(0)})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  im Intervall  $0 \rightarrow 1$  dicht, dann gilt: Es geht bei vorgegebener Rationalzahl  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in der Menge aller der Punkte, für die die relative Häufigkeit in den  $S$  ersten Versuchen des oberen Index 1 genau  $\alpha$  ist, gegen 1, dafür, dass ein Punkt, der also in den  $S$  ersten Versuchen diese relative Häufigkeit hat, zu einem  $F_n$  gehört, für das sich  $(F_n, e^{(1)})$  von  $\alpha$  um weniger als  $\varepsilon$  unterscheidet.*

(Man kann ein zu  $\varepsilon$  passendes  $\varrho$  in Satz 13, 6 z. B. so herstellen, dass man von  $\xi = \alpha$  nach links und rechts  $\varepsilon$  abträgt, in diesen Punkten die Lote errichtet bis zum Schnitt mit

$$f_\alpha = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{1-\xi}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Das längere der Lote ist offenbar ein geeignetes  $\varrho$  für dies  $\varepsilon$ , weil dann  $\mathfrak{G}_{\alpha, \varrho}$  Teil aller  $(F_n, e^{(1)})$  zwischen  $\alpha - \varepsilon$  und  $\alpha + \varepsilon$  ist.)

Nunmehr wollen wir die entsprechenden Folgerungen aus den Sätzen von § 14 ziehen. Wir nehmen also wieder an, dass in jedem Versuch nur zwei Ergebnisse möglich sind und machen weiterhin eine Annahme, die das Erfülltsein aller Voraussetzungen von Satz 14, 1 garantiert. Diese ist

$$\text{fin inf}_{i \rightarrow \infty} (F, e_i^{(0)})(F, e_i^{(1)}) > 0.$$

Um 1) zu beweisen, berechnet man

$$|X^{(v)} - \bar{X}^{(v)}|^3 = |0 - (F, e_v^{(1)})|^3 (F, e_v^{(0)}) + |1 - (F, e_v^{(1)})|^3 (F, e_v^{(1)}) < 1,$$

womit der Beweis erbracht ist.

2) folgt unmittelbar aus der Annahme, z. B. mit

$$\text{fin inf}_{\lambda \rightarrow \infty} (F, e_\lambda^{(0)})(F, e_\lambda^{(1)}) = C_2.$$

Alle Voraussetzungen von Satz 14, 1 gelten also. Deshalb erhält man

**Satz 16, 6.** Falls

$$\text{fin inf}_{i \rightarrow \infty} (F, e_i^{(1)})(F, e_i^{(0)}) > 0$$

geht mit wachsendem  $n$  die Wahrscheinlichkeit dafür gegen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du,$$

dass die Anzahl der Eintritte von  $e^{(1)}(X_n)$  in den  $n$  ersten Versuchen in den Grenzen

$$\sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)}) + u_1 \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)})(F, e_i^{(0)})} < X_n < \sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)}) + u_2 \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (F, e_i^{(1)})(F, e_i^{(0)})}$$

liegt.

Hieraus folgt speziell für den Fall

$$(F, e_i^{(1)}) = (F, e_j^{(1)}) \text{ für alle } (i, j):$$

**Satz 16, 7.** *Mit wachsendem  $n$  geht die Wahrscheinlichkeit dafür gegen*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du,$$

*dass die Anzahl der Eintritte von  $e^{(1)}$  in den  $n$  ersten Versuchen in den Grenzen*

$$n(F, e^{(1)}) + u_1 \sqrt{2n(F, e^{(1)})(F, e^{(0)})} < X_n < n(F, e^{(1)}) + u_2 \sqrt{2n(F, e^{(1)})(F, e^{(0)})}$$

*liegt.*

Nunmehr ziehen wir die entsprechende Folgerung aus dem Integralsatz 14, 2, die natürlich wieder alle diese Sätze als Spezialfälle enthält, wenn die Komponentendarstellung nämlich nur eine Komponente hat.

**Satz 16, 8.**  $F = (F_1, F_2, F_3, \dots)$

*sei eine unabhängige Komponentendarstellung und es seien für jedes  $F_n$  in jedem Versuch nur zwei Ergebnisse möglich.*

*Ferner gelte für jedes  $n$*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (F_n, e_i^{(1)})(F_n, e_i^{(0)}) > 0.$$

*Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du,$$

*dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem in den  $S$  ersten Versuchen die Anzahl  $a_S$  für das Auftreten von  $e^{(1)}$  beobachtet wird, zu einem  $F_n$  gehört, für das gilt*

$$\sum_{i=1}^S (F_n, e_i^{(1)}) + u_1 \sqrt{2 \sum_{i=1}^S (F_n, e_i^{(1)})(F_n, e_i^{(0)})} < a_S < \sum_{i=1}^S (F_n, e_i^{(1)}) + u_2 \sqrt{2 \sum_{i=1}^S (F_n, e_i^{(1)})(F_n, e_i^{(0)})}.$$



Nehmen wir an, dass für jedes  $F_n$  gilt

$$(F_n, e_i^{(1)}) = (F_n, e_j^{(1)}) \text{ für alle } (i, j),$$

so folgt aus Satz 16, 8

**Satz 16, 9.** *Mit wachsendem  $S$  geht die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du$$

dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem in den  $S$  ersten Versuchen die Anzahl  $a_S$  für das Auftreten von  $e^{(1)}$  beobachtet wird, zu einem  $F_n$  gehört, für das gilt

$$S(F_n, e^{(1)}) + u_1 \sqrt{2S(F_n, e^{(1)})(F_n, e^{(0)})} < a_S < S(F_n, e^{(1)}) + u_2 \sqrt{2S(F_n, e^{(1)})(F_n, e^{(0)})}.$$

Nunmehr ziehen wir die entsprechende Folgerung aus dem Rückschlussatz 14, 5 und erreichen dadurch, dass auch unter den Wurzelzeichen nicht mehr die unbekanntenen Wahrscheinlichkeiten, sondern nur noch beobachtete Häufigkeiten auftreten.

**Satz 16, 10**  $F = (F_1, F_2, \dots)$

sei eine Komponentendarstellung und es seien für jedes  $F_n$  in jedem Versuch nur zwei Ergebnisse möglich, die in  $F_n$  in jedem Versuch die gleichen Wahrscheinlichkeiten  $(F_n, e^{(0)})$  und  $(F_n, e^{(1)})$  haben sollen. Dann geht mit wachsendem  $S$  die Wahrscheinlichkeit in  $F$  gegen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du$$

dafür, dass ein Punkt  $P$ , an dem in den  $S$  ersten Versuchen die relative Häufigkeit  $p_S$  für das Auftreten von  $e^{(1)}$  und die relative Häufigkeit  $q_S$  für das Auftreten von  $e^{(0)}$  beobachtet wurde, zu einem  $F_n$  gehört, für das gilt

$$S(F_n, e^{(1)}) + u_1 \sqrt{2S p_S q_S} < S p_S < S(F_n, e^{(1)}) + u_2 \sqrt{2S p_S q_S}.$$

**Beweis.** Folgt sofort daraus, dass hier gilt

$$\chi_S^2(P) = S p_S q_S,$$

wie eine einfache Rechnung lehrt.

Hiermit sind die wichtigsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet. Natürlich wäre es noch eine praktisch wichtige Aufgabe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Sätze Näherungsformeln ergeben, d. h. mit welcher Genauigkeit die Integrale zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit bei endlichen  $S$  verwandt werden dürfen. Bei den gemeinhin auftretenden praktischen Aufgaben sind, wie bemerkt sei, die Integrale als Näherungswerte recht brauchbar. Der Leser, den diese Fragen interessieren, möge sich darüber z. B. bei R. v. MISES, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1931, orientieren.

## § 17.

**Die Zahlenreihe als Modell eines u-W-F.**

Wir wollen jetzt zeigen, dass man die Zahlenreihe als Modell eines  $u$ - $W$ - $F$  auffassen kann. Dadurch ist dann bewiesen, dass man strenge Beweise gewisser zahlentheoretischer Sätze mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung führen kann. Ausserdem wird diese Betrachtung zeigen, dass die verschiedenen möglichen Wahrscheinlichkeitsrechnungen, deren Existenz wir nachgewiesen haben, durchaus ernsthafte Anwendungsmöglichkeiten besitzen.

Wir schreiben zunächst die Zahlenreihe auf folgende Art als unendliche Matrix  $\bar{F}$ :

Auf dem  $k$ -ten Platz der  $i$ -ten Zeile soll diejenige Potenz  $p_i^n$  der  $i$ -ten Primzahl  $p_i$  stehen, durch die die Zahl  $k$  genau teilbar ist. Anders gesagt heisst das, dass die  $k$ -te Spalte von  $\bar{F}$  aus der Primzahlpotenzzzerlegung der Zahl  $k$  besteht, wobei auch 0-te Potenzen (wenn  $p_i$  nicht in  $k$  aufgeht) mit angeschrieben werden sollen.

Von dieser Matrix  $\bar{F}$  wollen wir nun zeigen, dass sie Modell des  $u$ - $W$ - $F$   $F$  ist, für das gilt

$$(F, e_i^{(r)}) = \frac{1}{p_i^r} - \frac{1}{p_i^{r+1}}$$

für alle  $i$  und  $r$ .

$B_F$  ist also die Menge aller Folgen von Primzahlpotenzen, so dass also ein Punkt  $P$  aus  $B_F$  die Form hat

$$P = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots, \quad r_i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nach Satz 9, 1 müssen wir nur zeigen, dass für jede Grundmenge

$$E = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, E)_k = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{p_i^{r_i}} - \frac{1}{p_i^{r_i+1}} \right).$$

Wir beweisen dies zunächst für die Grundmengen erster Stufe und dann allgemein durch Induktion.

[ $\alpha$ ] bedeute wie in § 9 die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als die reelle Zahl  $\alpha$  ist.

Jede  $p_i^e$ -te natürliche Zahl ist teilbar durch  $p_i^e$ , jede  $p_i^e$ -te Spalte von  $\bar{F}$  enthält also  $p_i^e$  oder  $p_i^{e+1}$ , oder  $p_i^{e+2}$ , ...

Somit gilt wenn  $\vee$  »oder« bedeutet

$${}^{\alpha}(\bar{F}, p_i^e \vee p_i^{e+1} \vee p_i^{e+2} \vee \dots)_k = \left[ \frac{k}{p_i^e} \right]$$

und

$${}^{\alpha}(\bar{F}, p_i^{e+1} \vee p_i^{e+2} \vee p_i^{e+3} \vee \dots)_k = \left[ \frac{k}{p_i^{e+1}} \right].$$

Durch Subtraktion folgt

$${}^{\alpha}(\bar{F}, p_i^e)_k = \left[ \frac{k}{p_i^e} \right] - \left[ \frac{k}{p_i^{e+1}} \right].$$

Nach Erklärung von [ $\alpha$ ] gilt also

$$\frac{k}{p_i^e} - \frac{k}{p_i^{e+1}} + 1 > {}^{\alpha}(\bar{F}, p_i^e)_k > \frac{k}{p_i^e} - 1 - \frac{k}{p_i^{e+1}}.$$

Wie man sieht, folgt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(\bar{F}, p_i^e)_k = (F, p_i^e) = \frac{1}{p_i^e} - \frac{1}{p_i^{e+1}}.$$

Setzt man  $i = 1$ , so folgt die Grundlage des Induktionsbeweises, der nun zeigen soll, dass das entsprechende für jede Grundmenge gilt.

Wir nehmen an, dass der Beweis für alle Grundmengen  $(n-1)$ -ter Stufe schon erbracht sei.

Da unter den natürlichen Zahlen, die für  $i = 1, 2, \dots, n-1$  gleichzeitig genau durch  $p_i^{r_i}$  teilbar sind, jede  $p_n^{r_n}$ -te durch  $p_n^{r_n}$  teilbar ist, folgt genau wie oben

$${}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}} (p_n^{r_n} \vee p_n^{r_{n+1}} \vee p_n^{r_{n+2}} \vee \dots))_k = \left[ \frac{{}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k}{p_n^{r_n}} \right]$$

und

$${}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}} (p_n^{r_{n+1}} \vee p_n^{r_{n+2}} \vee p_n^{r_{n+3}} \vee \dots))_k = \left[ \frac{{}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k}{p_n^{r_{n+1}}} \right],$$

also durch Subtraktion

$${}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})_k = \left[ \frac{{}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k}{p_n^{r_n}} \right] - \left[ \frac{{}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k}{p_n^{r_{n+1}}} \right].$$

Die entsprechenden Abschätzungen wie oben ergeben

$$\begin{aligned} {}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k \left( \frac{1}{p_n^{r_n}} - \frac{1}{p_n^{r_{n+1}}} \right) + 1 &> {}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n})_k > \\ &> {}^a(\bar{F}, p_1^{r_1} \dots p_{n-1}^{r_{n-1}})_k \left( \frac{1}{p_n^{r_n}} - \frac{1}{p_n^{r_{n+1}}} \right) - 1. \end{aligned}$$

Division durch  $k$  und der Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  liefert sofort die Behauptung.

Hiermit ist folgendes (vergl. Definition 9, 1) bewiesen:

**Satz 17, 1.** *Ist  $\mathfrak{A}$  eine Menge mit  $\alpha_1$ -Inhalt, so haben alle ganzen Zahlen aus  $\mathfrak{A}$  stets eine Dichte in der Reihe der natürlichen Zahlen und diese Dichte kann rein formal als die Wahrscheinlichkeit  $(F, \mathfrak{A})$  berechnet werden.*

Es ist natürlich eine reizvolle Aufgabe, dies Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter auszubauen und die Methode über den Körper der Mengen, die auf Grund unserer Axiome Wahrscheinlichkeiten haben, hinaus zu erweitern. Hierzu muss man neue Axiome einführen, die weiteren Mengen Wahrscheinlichkeiten verleihen. Z. B. könnte man die Zusatzforderung aufstellen, dass die Menge der Punkte, die von irgend einer Stelle ab nur noch den oberen Index 0 aufweisen, die Wahrscheinlichkeit 1 haben soll (oberer  $\alpha_1$ -Inhalt dieser Menge), denn fast alle in einer natürlichen Zahl aufgehende Potenzen von Primzahlen sind ja 0-te Potenzen. Diese Zusatzforderung würde eine Wahrscheinlichkeitsrechnung ergeben, in der der Körper der Mengen, die nun Wahrscheinlichkeiten haben, stark vergrößert ist und wieder hätte die Teilmenge der in einer solchen Menge enthaltenen natürlichen Zahlen eine Dichte in der Zahlenreihe, die mit der Wahrscheinlichkeit der ganzen Menge übereinstimmt. Aber auch diese Wahrscheinlichkeitsrechnung könnte man durch ein neues Axiom weiter spezialisieren,

indem man z. B. die Menge der Punkte, die einen oberen Index, der mindestens 1 ist, genau eine gerade Anzahl von Malen enthalten, adjungiert und ihr die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  zuschreibt, entsprechend der Tatsache, dass die Dichte der Zahlen, die durch genau eine gerade Anzahl verschiedener Primzahlen mindestens in erster Potenz teilbar sind,  $\frac{1}{2}$  ist. So kann man fortfahren und immer speziellere Wahrscheinlichkeitsrechnungen, in denen immer mehr Mengen Wahrscheinlichkeiten haben, aufbauen. Somit leuchtet ein, dass unsere Feststellung in § 10, dass verschiedene Wahrscheinlichkeitsrechnungen möglich sind, keine zwecklose Spitzfindigkeit war, sondern dass es durchaus Verwendungsgebiete für solche Wahrscheinlichkeitsrechnungen gibt.

Diese Beispiele lehren ferner, dass Satz 11, 1 bei gewissen Adjunktionen nur für endlich viele Mengen gilt, denn jeder der abzählbar vielen Punkte, die von irgend einer Stelle ab nur noch den oberen Index 0 aufweisen, hat die Wahrscheinlichkeit 0, während die Summe aller dieser Punkte jetzt die Wahrscheinlichkeit 1 hätte.

Da die Untersuchungen über die Anwendungen von Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Zahlentheorie erst begonnen haben, soll auf diese Fragen nicht näher eingegangen werden.

**Tabelle der durchgehend gebrauchten Bezeichnungen.**

$ \mathfrak{A} $ :	Mass von $\mathfrak{A}$ .
$\mathfrak{A}$ :	inneres Mass von $\mathfrak{A}$ .
$\overline{\mathfrak{A}}$ :	äusseres Mass von $\mathfrak{A}$ .
$B$ :	Nullraum.
$B_F$ :	Grösste Menge des Wahrscheinlichkeitsfeldes $F$ .
$e_i^{(r)}$ :	$r$ -te Möglichkeit im $i$ -ten Versuch.
$E$ :	Grundmengen.
$F$ :	Wahrscheinlichkeitsfeld.
$\overline{F}$ :	Modell von $F$ .
$\overline{F}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_\varepsilon F$ :	Teilmatrix des Modells $F$ von $F$ , die aus allen und nur den Spalten von $\overline{F}$ besteht, die Punkte von $\mathfrak{A}$ sind.
$F\mathfrak{A}$ :	Feld, das $\overline{F}\mathfrak{A}$ als Modell hat.
$(F, \mathfrak{A}), \mathfrak{A}_\varepsilon F$ :	Wahrscheinlichkeit von $\mathfrak{A}$ im Felde $F$ .
${}^a(\overline{F}, \mathfrak{A})_k$ :	Anzahl der Spalten von $\overline{F}$ bis zur $k$ -ten inkl., die Punkte von $\mathfrak{A}$ sind.
$\tau(\overline{F}, \mathfrak{A})_k = \frac{1}{k} {}^a(\overline{F}, \mathfrak{A})_k$ :	entsprechende relative Häufigkeit.
$(\overline{F}, \mathfrak{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(\overline{F}, \mathfrak{A})_k$ :	falls dieser Limes existiert.
$I_x(\mathfrak{A})$ :	Inhalt von $\mathfrak{A}$ relativ zum Bezugskörper $x$ .
$\underline{I}_x(\mathfrak{A})$ :	innerer Inhalt von $\mathfrak{A}$ .
$\overline{I}_x(\mathfrak{A})$ :	äusserer Inhalt von $\mathfrak{A}$ .
$z_1$ :	Körper der $a$ - $o$ -Mengen aus $B$ .
$\sigma_X$ :	Streuung von $X$ .
$t_i + 1$ :	Anzahl der Möglichkeiten im $i$ -ten Versuch.
$X$ :	Veränderliche.
$\overline{X}$ :	Mittelwert von $X$ .

