Л. А. Бекларян, Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 4(358), 3–68

DOI: https://doi.org/10.4213/rm758

2004 г. июль — август *т. 59, вып. 4(358)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.544.43

ГРУППЫ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Л. А. Бекларян

Обзор посвящен исследованиям по топологическим, алгебраическим и комбинаторным характеристикам, а также метрическим инвариантам для произвольных групп гомеоморфизмов прямой и окружности. Установлены взаимосвязи между этими характеристиками, изучены важнейшие метрические инварианты в виде инвариантных, проективно-инвариантных и ω-проективно-инвариантных мер, описаны основные "препятствия" для существования таких метрических инвариантов.

Библиография: 53 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Различные вопросы алгебры, анализа, теории динамических систем приводят к необходимости исследования групп гомеоморфизмов локально-компактного пространства [1]–[41]. Первые работы в этом направлении связаны с исследованиями А. Пуанкаре поведения решений дифференциального уравнения на торе $\mathbb{T}^2$, которые породили задачу описания структуры гомеоморфизма единичной окружности на себя. Решение этой задачи связано с именами Пуанкаре, Данжуа, Боголюбова, Крылова, Колмогорова, Арнольда, Мозера и других [34], [2], [4], [5], [27], [38]. Гомеоморфизм окружности характеризуется важнейшим инвариантом, называемым числом вращения. Со значением этого инварианта (рациональным или иррациональным) связаны: существование неподвижных точек для какой-либо степени гомеоморфизма; существование замены переменной, приводящей данный гомеоморфизм к вращению окружности; вопрос о гладкости замены переменной, приводящей данный диффеоморфизм к вращению окружности. Всякому гомеоморфизму окружности соответствует эквивалентный ему объект – коммутативная группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, с двумя образующими. Одна из образующих является накрытием исходного гомеоморфизма, а вторая образующая – преобразование сдвига на единицу, т.е. $q(t) = t + 1$.

В теории функций комплексных переменных исследование группы квазиконформных преобразований верхней полуплоскости, изложенное в книге Л.В. Альфорса [1], сводится к изучению квазисимметрической группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной группой граничных следов исходной группы. В частности, вопрос о квазисимметрической сопряженности группы квазисимметрических преобразований группе аффинных преобразований прямой исследовался в работах [24], [14].

В геометрии исследование компоненты Новикова слоения коразмерности один сводится к изучению представления фундаментальной группы этой компоненты в группу гомеоморфизмов прямой [39]–[41], [32], [33], [25]. В частности, класс слоений, приспособленных для этой операции, – это слоения коразмерности один, порожденные потоками Аносова.

Другой класс задач связан с исследованием дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_s(t))), \qquad t \in I,$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96107) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00174).

где I – отрезок, полупрямая или прямая $\mathbb{R}$, а функции отклонения $g_j(t)$, $j=\overline{1,s}$, задают гомеоморфизмы $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j=\overline{1,s}$, сохраняющие ориентацию, и, соответственно, образуют конечно-порожденную группу гомеоморфизмов $G = \langle g_j,\, j=\overline{1,s}\rangle$. Оказывается, что важнейшие свойства вариационных задач для систем с отклоняющимся аргументом связаны со структурой группы гомеоморфизмов G [6]–[8]. В частности, со структурой группы гомеоморфизмов G связана проблема классификации дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [15].

В алгебре одной из самостоятельных задач является исследование правоупорядочиваемых групп [42]. Известно, что правоупорядочиваемая группа может быть реализована как группа автоморфизмов упорядоченного множества. Правоупорядоченная счетная группа может быть реализована как группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию [19]. Независимо от работы [19], на этот результат автору указал Р. И. Григорчук. Более того, им было отмечено, что такие реализации упорядочиваемых групп в виде групп гомеоморфизмов прямой обладают дополнительным важным свойством: графики различных элементов образуют кортеж, т.е. график одного из них расположен над графиком другого, хотя касание допустимо.

Отмеченные выше задачи призваны показать, что такие специальные группы гомеоморфизмов локально компактного пространства, как группы гомеоморфизмов прямой, являются универсальными объектами теории групп.

Данный обзор посвящен исследованию важнейших характеристик групп гомеоморфизмов прямой и окружности. К ним относятся топологические, метрические, алгебраические и комбинаторные характеристики, и большая часть обзора посвящена изучению взаимосвязей между характеристиками различной природы.

Из топологических характеристик следует выделить минимальные множества, орбиты точек, множество неподвижных точек элементов группы. Оказывается, что каждое из этих множеств имеет каноническую структуру, которая будет в дальнейшем описана. Будут сформулированы различные критерии и признаки наличия тех или иных свойств для топологических характеристик. В частности, конечно-порожденные группы отличаются наличием непустого минимального множества.

Метрический инвариант в виде инвариантной меры является одним из центральных объектов теории динамических систем. К таким задачам относится, в частности, проблема существования инвариантной меры для различных групп гомеоморфизмов локально компактного пространства и описания ее свойств. По истории этого вопроса и важнейшим результатам существует исчерпывающий обзор Д. В. Аносова [2] с полным списком литературы. Важнейшим вопросом при исследовании групп гомеоморфизмов прямой и их классификации является описание метрических инвариантов как в виде инвариантных и проективно-инвариантных мер, так и в виде более общих ω-проективно-инвариантных мер, где ω – кардинальное число [11]. Будут сформулированы различные критерии и признаки существования метрических инвариантов, а также изучены их носители и эргодические свойства. В частности, для групп гомеоморфизмов прямой необходимым условием наличия метрического инварианта является непустота минимального множества.

С каждой группой гомеоморфизмов прямой связан ряд канонических подгрупп. Свойства таких канонических подгрупп связаны как с метрическими и комбинаторными характеристиками, так и с конструкциями нетривиальных характеров для исходной группы. На этом пути, в частности, будут описаны все максимальные нормальные подгруппы с инвариантной мерой.

В данной работе к наиболее важным рассматриваемым комбинаторным характеристикам относятся: субэкспоненциальность; аменабельность; отсутствие свободной подгруппы или свободной подполугруппы с двумя образующими у фактор-группы исходной группы по канонически выделенным подгруппам. Изучаются связи между отмеченными комбинаторными характеристиками и метрическими инвариантами. В частности, показано, что для групп с непустым минимальным множеством отсутствие соответствующих комбинаторных характеристик является препятствием для существования инвариантной либо проективно-инвариантной меры.

В основе всех замечательных свойств групп гомеоморфизмов прямой лежит некоторое естественное отношение частичного порядка для групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию [9], и фундаментальная теорема Гёльдера об архимедовых группах [43]. Вместе с тем, к примеру, известные до сих пор доказательства существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, использовали те или иные комбинаторные свойства групп (субэкспоненциальность, абелевость, аменабельность, конечная порожденность) либо наличие некоторых дифференциальных свойств (рассмотрение специальных классов диффеоморфизмов) [20], [32], [33], [35]–[37]. В этой связи природа существования инвариантной меры (и других метрических инвариантов) не совсем была ясна. Подход, принятый в работах [9]–[13], [16] для изучения групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, позволяет полностью исследовать природу существования не только инвариантной меры (априори не предполагая никаких ограничений), но и более общего метрического инварианта в виде ω-проективно-инвариантной меры. Указанный подход положен в основу данного обзора. Важно отметить, что доказательства всех основных анонсируемых результатов построены на использовании внутренних конструкций для гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, и многократном использовании фундаментальной теоремы Гёльдера об архимедовых группах. В этой связи автор хотел бы выразить свою признательность Д.В. Аносову, который при подготовке работы [6] обратил мое внимание на важность теоремы Гёльдера для рассматриваемой там задачи.

За рамками данной статьи остались такие важные вопросы, как исследование специальных групп G гомеоморфизмов прямой и окружности, в частности: групп диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию (возможность уточнения структуры минимальных множеств в виде теорем Данжуа, существование инвариантной меры и другие вопросы); групп кусочно-линейных гомеоморфизмов; группы $PSL(2,\mathbb{R})$. Мы также не будем касаться групп ограниченных когомологий $H^k_B(G:\mathbb{R})$, $H^k_B(G:\mathbb{Z})$ и связанных с ними инвариантов. Такие исследования проведены в работах [22], [21], [32], [33], [25], [35]–[37], [29], [30], [18], [19], [44]–[51], [42]. По многим из отмеченных вопросов существует исчерпывающий обзор Э. Гиза [19] с полным списком литературы.

§ 1. Основные определения

В дальнейшем X обозначает либо $\mathbb{R}$, либо S^1. Пусть:

$\mathrm{Homeo}(X)$ – группа всех гомеоморфизмов X, а $\mathrm{Homeo}_+(X)$ – нормальная подгруппа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов;

$\widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ – группа всех гомеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями гомеоморфизмов из $\mathrm{Homeo}(S^1)$, а $\widetilde{\mathrm{Homeo}_+}(S^1)$ – нормальная подгруппа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов.

Наряду с группой $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ будем рассматривать ее нормальную подгруппу

$$G_+ = G \cap \mathrm{Homeo}_+(X),$$

принадлежащее ей объединение стабилизаторов точек X

$$G^s = \{g : g \in G_+;\ \exists\, t \in X,\ g(t) = t\}$$

и подмножества

$$G^s_\infty = \bigl\{g : g \in G^s,\ \inf\{t : g(t) = t\} = -\infty,\ \sup\{t : g(t) = t\} = +\infty\bigr\},$$
$$C_G = (G \setminus G^s) \cup G^s_\infty$$

в случае $X = \mathbb{R}$, которые не всегда являются подгруппами. Заметим, что нормальная подгруппа G_+ является подгруппой индекса не более двух. Для произвольного множества гомеоморфизмов Q через $\langle Q\rangle$ будем обозначать группу, порожденную этими гомеоморфизмами, а также определим топологическую характеристику в виде множества неподвижных точек

$$\mathrm{Fix}\, Q = \{t : t \in X,\ \forall\, q \in Q,\ q(t) = t\}.$$

Гомеоморфизм g называется свободно действующим, если $\mathrm{Fix}\,\langle g\rangle = \varnothing$; сдвигом, если он задается функцией $t + b$; аффинным преобразованием, если он задается функцией $at + b$.

Замечание 1.1. Для любого $g \in G$ выполнены условия: $g^{-1}G^s g = G^s$, $g^{-1}G^s_\infty g = G^s_\infty$, $g^{-1}C_G g = C_G$. Поэтому группы $\langle G^s\rangle$, $\langle G^s_\infty\rangle$ и $\langle C\rangle$ являются нормальными подгруппами исходной группы G.

Пусть $\overline{g}(t) = t+1$ – сдвиг на единицу, а $\lambda\colon \mathbb{R} \to S^1$ отображение вида $\lambda(t) = t - [t]$, где $[\,\cdot\,]$ означает целую часть числа. Очевидно, что $\overline{g} \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ и коммутирует со всеми элементами группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$. Отображение λ индуцирует естественный эпиморфизм $\pi\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1) \to \mathrm{Homeo}(S^1)$, для которого $\ker \pi = \langle \overline{g}\rangle$. Для любой группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ через $\widehat{G}$ будем обозначать подгруппу группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ вида $\widehat{G} = \langle \{l_g\}_{g\in G}, \overline{g}\rangle$, где l_g для любого $g \in G$ обозначает гомеоморфизм прямой, являющийся накрытием гомеоморфизма g и нормированный условием $0 \leqslant l_g(0) < 1$. Через $\pi_{\widehat{G}}$ будем обозначать ограничение эпиморфизма π на подгруппу $\widehat{G}$. Справедливо следующее простое предложение.

Предложение 1.1. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. *Тогда* $\mathrm{Im}\,\pi_{\widehat{G}} = G$, $\ker \pi_{\widehat{G}} = \langle \overline{g}\rangle$, $\pi_{\widehat{G}}(\widehat{G}^s) = G^s$.

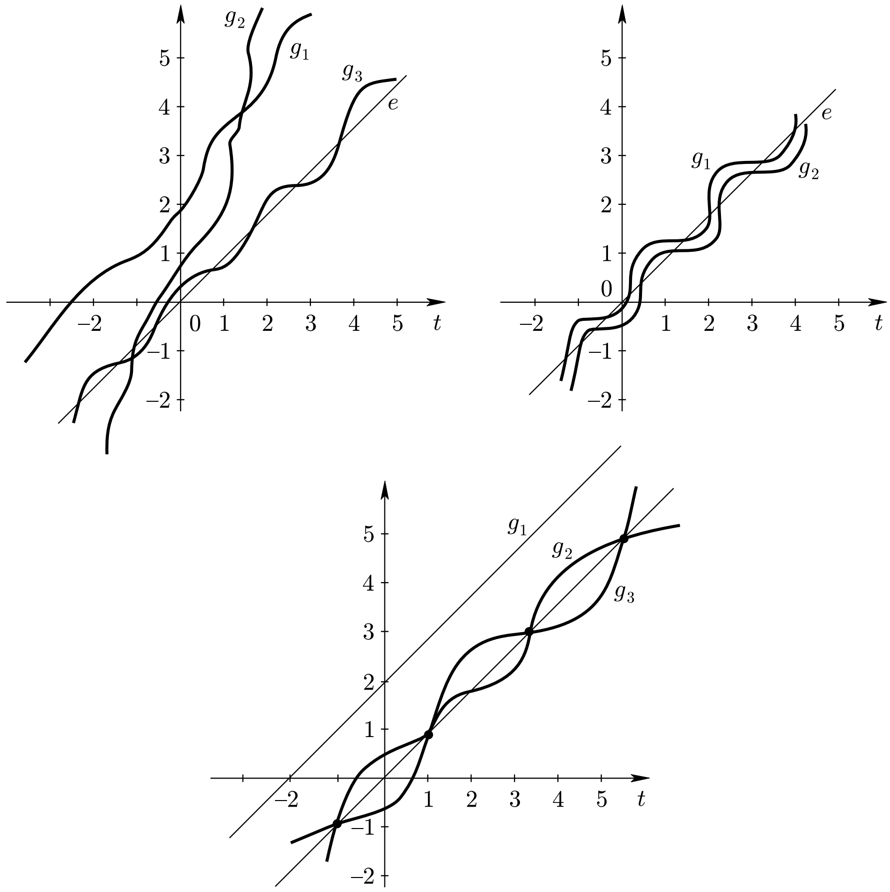
Доказательство непосредственно следует из определения.

Если $A \subseteq X$ – некоторое подмножество, то $P(A)$ будет обозначать множество его предельных точек. Если A – пустое подмножество, то по определению положим $P(A) = \varnothing$.

Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ через p_G будем обозначать стандартный гомоморфизм группы G в фактор-группу $G/\langle G^s\rangle$.

§ 2. Структура фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$

Хорошо известно, что группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ свободно действующих гомеоморфизмов изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы X [31]. Для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ ситуация усложняется в связи с появлением нетривиальных элементов группы, имеющих неподвижные точки (нетривиальные стабилизаторы точек на X). Такие элементы группы G образуют множество G^s. При этом множество G^s не обязано быть подгруппой. Минимальной подгруппой, связанной с множеством всех стабилизаторов точек на X, является группа $\langle G^s\rangle$, порожденная множеством G^s. Подгруппа $\langle G^s\rangle$ является нормальной, а в случае группы G со свободно действующими гомеоморфизмами подгруппа $\langle G^s\rangle$ тривиальная, т.е. $\langle G^s\rangle = \langle e\rangle$. В связи с изложенным естественно надеяться, что для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ также будет иметь простую структуру. Это оказывается действительно так, чему и посвящен основной результат данного параграфа – теорема о фактор-групме (теорема 2.1). В силу этого при исследовании произвольных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ определяющей оказывается структура фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$.



Для трех примеров конечно-порожденных групп на рисунках приведены графики их образующих. График диагонали задает единичный элемент группы.

В первом примере для группы $G = \langle g_1, g_2, g_3\rangle$ элементы g_2, g_3 принадлежат множеству G^s. Более того, элемент g_3 принадлежит также и подмножеству G^s_∞ множества G^s, а элемент g_2 принадлежит подмножеству $G^s \setminus G^s_\infty$. Элемент g_1 принадлежит множеству $G \setminus G^s$. В таком случае множество G^s не является подгруппой, так как элементы g_2 и $g_2^{-1}g_1$ принадлежат множеству G^s, а их произведение $g_2g_2^{-1}g_1 = g_1$ не принадлежит G^s. Заметим, что для такой группы множество $\operatorname{Fix} G^s$ пустое.

Во втором примере для группы $G = \langle g_1, g_2\rangle$ элементы g_1, g_2 принадлежат множеству G^s (более того, подмножеству G^s_∞) и удовлетворяют условиям: $g_1(t+1) = g_1(t)+1$, $g_2(t) = g_1(t) - \alpha$, $\alpha > 0$. Очевидно, что элемент g_1g_2 не принадлежит множеству G^s, множество G^s не образует подгруппу, совпадает с G^s_∞, а множество $\operatorname{Fix} G^s$ также является пустым.

В третьем примере для группы $G = \langle g_1, g_2, g_3\rangle$ элементы g_2, g_3 принадлежат множеству G^s_∞, имеют общие неподвижные точки $\{(2k-1) : k \in \mathbb{Z}\}$. Множество G^s образует подгруппу, совпадает с G^s_∞, а множество $\operatorname{Fix} G^s$ непусто и совпадает с множеством $\{(2k-1) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Существуют примеры групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (не конечно порожденных), для которых $G = G^s_\infty$, а множество $\operatorname{Fix} G^s$ пустое.

Для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ описание фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$ основано на существовании некоторого естественного отношения частичного порядка в группе G, которое определяется следующим образом: $g_1 \preceq g_2$, если для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно $g_1(t) \leqslant g_2(t)$. Учитывая важность теоремы о фактор-группе, мы приведем доказательство основных результатов, связанных с ней.

Вначале (лемма 2.1) изучаются свойства частичного порядка в группе $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, определенного выше. Затем (основная лемма) описывается структура нормальной подгруппы $\langle G^s\rangle$. Оказывается, что нормальная подгруппа $\langle G^s\rangle$ удовлетворяет экстремальному свойству: она совпадает или с порождающим множеством G^s, или с исходной группой G. При некоторых дополнительных условиях структура нормальной подгруппы $\langle G^s\rangle$ допускает уточнение (лемма 2.3). И наконец, на основе леммы 2.1 доказывается теорема о фактор-группе.

Лемма 2.1 [9]. *Пусть задана группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, в которой определено отношение частичного порядка: $g_1 \preceq g_2$, если для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно $g_1(t) \leqslant g_2(t)$. Если $g_1\langle G^s\rangle \neq g_2\langle G^s\rangle$, то между любыми элементами левых смежных классов $g_1\langle G^s\rangle$, $g_2\langle G^s\rangle$ выполняется одно и то же отношение порядка.*

Доказательство. Если $g_1\langle G^s\rangle \neq g_2\langle G^s\rangle$, то очевидно, что $g_1^{-1}g_2 \notin \langle G^s\rangle$ и, в частности, $g_1^{-1}g_2 \notin G^s$. В таком случае между элементами g_1, g_2 существует отношение строгого порядка, т.е. для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно либо $g_1(t) > g_2(t)$, либо $g_1(t) < g_2(t)$. Заметим, что для любых $g_1, g_2 \in G$, $\overline{g} \in \langle G^s\rangle$, $g_1\langle G^s\rangle \neq g_2\langle G^s\rangle$, соотношения $g_2 \succ g_1$, $g_2\overline{g} \succ g_1$, $g_2 \succ g_1\overline{g}$ эквивалентны. Поэтому отношение порядка между двумя произвольными элементами левых смежных классов $g_1\langle G^s\rangle$ и $g_2\langle G^s\rangle$ одно и то же.

На основе леммы 2.1, пользуясь свойствами гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, доказана следующая основная лемма.

Основная лемма 2.2 [9]. *Пусть задана группа* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. *Тогда справедливо хотя бы одно из условий*: $G^s = \langle G^s \rangle$ *или* $G = \langle G^s \rangle$.

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство построено на использовании отношения частичного порядка, определенного в лемме 2.1 (см. [9]).

Пусть $G^s \subset \langle G^s \rangle \subset G$. Из условия $G^s \neq \langle G^s \rangle$ следует существование элементов $g_1, g_2 \in G^s, \overline{g} \in \langle G^s \rangle \setminus G^s$ таких, что $\overline{g} = g_1 g_2$. Не нарушая общности, можем полагать, что $\overline{g} \succ e$.

Из условия $\langle G^s \rangle \neq G$ следует существование элемента $g \in G \setminus \langle G^s \rangle$. Так как элементы $g, \overline{g}$ принадлежат разным смежным классам ($\overline{g} \in e\langle G^s \rangle$), то между ними существует отношение порядка. Не нарушая общности, можем полагать, что для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно $g(t) > \overline{g}(t)$. В противном случае это условие выполняется для некоторой степени g^m, $m \in \mathbb{Z}$, элемента g, которую мы и выберем вместо g. Тогда найдется натуральное n такое, что

$$\overline{g}^n \prec g \prec \overline{g}^{n+1}.$$

Элементы $\overline{g}^n, \overline{g}^{n+1}$ принадлежат одному и тому же левому смежному классу $e\langle G^s \rangle$, а по предыдущей лемме отношение порядка между двумя произвольными элементами двух левых смежных классов одно и то же. Полученное противоречие и доказывает лемму для случая $X = \mathbb{R}$.

Проведем доказательство для случая $X = S^1$. Наряду с группой $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ рассмотрим соответствующую группу $\widehat{G} \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ и эпиморфизм $\pi_{\widehat{G}} \colon \widehat{G} \to G$ из предложения 1.1. Из предложения 1.1 следует, что $\pi_{\widehat{G}}(\mathscr{T}) = \langle G^s \rangle$, где $\mathscr{T} = \langle \widehat{G}^s, \overline{g} \rangle$. В таком случае существуют эпиморфизм $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s \rangle \to \widehat{G}/\mathscr{T}$ и изоморфизм $\widehat{G}/\mathscr{T} \simeq G/\langle G^s \rangle$. Из нетривиальности фактор-группы $G/\langle G^s \rangle$ и, соответственно, фактор-группы $\widehat{G}/\mathscr{T}$ будет следовать нетривиальность фактор-группы $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s \rangle$. Тогда по предыдущему пункту должно выполняться условие $\langle \widehat{G}^s \rangle = \widehat{G}^s$. Так как $\pi_{\widehat{G}}(\widehat{G}^s) = G^s$, то отсюда и будет следовать условие $\langle G^s \rangle = G^s$.

В действительности о подгруппе $\langle G^s \rangle$ мы можем получить еще некоторую дополнительную информацию.

Лемма 2.3 [9]. *Пусть задана группа* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *для которой* $G \neq \langle G^s \rangle$. *Тогда* $\langle G^s \rangle = G^s = G^s_\infty$.

Доказательство. Очевидно, что $G^s_\infty \subseteq G^s$. Покажем, что $G^s = G^s_\infty$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $G^s \setminus G^s_\infty \neq \varnothing$. Выберем $g_1 \in G \setminus \langle G^s \rangle$ и $g_2 \in G^s \setminus G^s_\infty$. Тогда найдутся $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, для которых выполняется условие $g_1(t) = g_2^n(t)$, что противоречит лемме 2.1. Остается показать, что $\langle G^s \rangle = G^s$. Предположим, что $\langle G^s \rangle \neq G^s$. Тогда найдется элемент g_3 со свойствами $g_3 \in \langle G^s \rangle$, $\quad g_3 \in G \setminus G^s$. Так как существует элемент $g_1 \in G \setminus \langle G^s \rangle$, то наличие элемента g_3 также противоречит лемме 2.1.

Замечание 2.1. Пусть задана группа $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда $G^s = G^s_\infty$.

Доказательство. Заметим, что для любого $g \in G$ множество $\mathrm{Fix}\langle g \rangle$ инвариантно относительно сдвига $\overline{g}(t) = t + 1$, откуда и следует условие $G^s = G^s_\infty$.

Теперь мы можем сформулировать теорему о фактор-группе, которая является обобщением теоремы Гёльдера [31] о коммутативности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ свободно действующих гомеоморфизмов на прямой (для любого $g \in G$, $g \neq e$, выполняется условие $\mathrm{Fix}\langle g\rangle = \varnothing$).

Теорема о фактор-группе 2.1 [9]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Тогда фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы X.*

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство теоремы построено на использовании основной леммы и теоремы Гёльдера об архимедовых группах.

Покажем, что фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ является линейно упорядоченной и архимедовой. В группе G существует отношение частичного порядка, указанное в лемме 2.1. По этой же лемме отношение порядка между двумя произвольными элементами левых смежных классов $g_1\langle G^s\rangle$ и $g_2\langle G^s\rangle$ одно и то же. Значит, можно корректно определить отношение частичного порядка между любыми левыми смежными классами следующим образом: если $g_1\langle G^s\rangle$, $g_2\langle G^s\rangle$ – левые смежные классы группы G по подгруппе $\langle G^s\rangle$, то $g_1\langle G^s\rangle \preceq g_2\langle G^s\rangle$ тогда и только тогда, когда $g_1 \preceq g_2$.

Пусть заданы произвольные левые смежные классы $g_1\langle G^s\rangle$ и $g_2\langle G^s\rangle$ такие, что $g_1 \succ e$, $g_2 \succ e$. Для любых таких элементов g_1 и g_2 найдется натуральное n такое, что $g_2^n \succ g_1$. Следовательно, $g_2^n\langle G^s\rangle \succ g_1\langle G^s\rangle$, откуда и следует архимедовость фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$. Тогда по теореме Гёльдера [43] фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ коммутативна и изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел.

Проведем доказательство для случая $X = S^1$. Наряду с группой $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ рассмотрим соответствующую группу $\widehat{G} \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ и эпиморфизм $\pi_{\widehat{G}}\colon \widehat{G} \to G$ из предложения 1.1. Из предложения 1.1 следует, что $\pi_{\widehat{G}}(\mathscr{T}) = \langle G^s\rangle$, где $\mathscr{T} = \langle \widehat{G}^s, \overline{g}\rangle$. В таком случае существуют изоморфизм $\widehat{G}/\mathscr{T} \simeq G/\langle G^s\rangle$ и эпиморфизм $\widehat{G}/\langle\widehat{G}^s\rangle \to \widehat{G}/\mathscr{T}$. Ядром эпиморфизма является циклическая подгруппа с образующей $\overline{g}\langle G^s\rangle$ (левый смежный класс элемента $\overline{g}$ по подгруппе $\langle G^s\rangle$). Так как фактор-группа $\widehat{G}/\langle\widehat{G}^s\rangle$ изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$, то фактор-группа G/G^s будет изоморфна подгруппе группы S^1.

Теорема о фактор-группе является центральной при исследовании метрических инвариантов. В частности, в § 5 будет показано, что из нетривиальности фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$ следует существование G-инвариантной меры.

Для специальных групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, утверждение теоремы о фактор-группе было получено в работах [31], [39], [35]–[37]. В работе [31] исследовались свободно действующие группы, в [39] – конечно-порожденные группы, не содержащие свободных подполугрупп с двумя образующими, а в [35]–[37] – счетные группы G с общей неподвижной точкой для элементов, имеющих хотя бы одну неподвижную точку, т.е. счетные группы G со свойством $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$.

§ 3. Структура минимальных множеств и критерии их существования

Среди топологических характеристик групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, выделяются минимальные множества. Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их "нетривиальности" орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов. К ранним исследованиям по минимальным множествам относятся работы Данжуа для циклической группы гомеоморфизмов окружности [27]. Для произвольных групп гомеоморфизмов окружности $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ (компактный случай) непустое минимальное множество всегда существует, а структура минимального множества в точности совпадает со структурой минимального множества для циклической группы. Как наиболее ранняя работа с таким результатом автору известен курс лекций Л. В. Альфорса [52]. Интересным оказалось то, что в некомпактном случае для групп гомеоморфизмов прямой $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ структура минимального множества осталась такой же и добавился случай отсутствия минимального множества. Это и является основным результатом данного параграфа и приводится в виде теоремы 3.1. Выделен важный признак существования минимального множества в виде условия конечной порожденности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (теорема 3.2). Приводятся и иные признаки, а также критерии существования минимального множества. В общем случае описание минимальных множеств неконструктивно, так как использует аксиому выбора. Выделяется класс групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, важный с точки зрения метрических инвариантов, для которых минимальные множества могут быть конструктивно описаны (теорема 3.8). При изучении ряда задач, например при исследовании следов группы квазиконформных отображений верхней полуплоскости в себя, оказывается важной замена исходной группы гомеоморфизмов X на более простую подгруппу с той же топологической сложностью (с тем же минимальным множеством). Поэтому изучение подгрупп исходной группы и их минимальных множеств представляет большой интерес. Оказывается, что минимальное множество нормальных подгрупп также удовлетворяет экстремальному свойству: или является дискретным множеством (возможно, пустым), или совпадает с минимальным множеством исходной группы. Результат такого типа сформулирован в лемме 3.4. Все отмеченные результаты получены для групп гомеоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, сохраняющих ориентацию. Для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ приводится процедура описания минимального множества по минимальному множеству максимальной нормальной подгруппы G_+ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (теорема 3.9).

Счетные группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ исследовались в работах [35]–[37]. Были сформулированы признаки существования минимальных множеств, и при этих условиях описана структура орбит. Там же исследовались признаки существования минимальных множеств для специальных групп диффеоморфизмов (теорема 3.5). Минимальные множества для произвольных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ описывались различными авторами. В частности, для счетных групп – в работах [35]–[37], для свободно действующих групп гомеоморфизмов – в работе [26]. Мы уже отмечали в предыдущем абзаце, что наиболее ранней работой по этой теме, известной автору, является курс лекций [52].

Далее будет сформулирована теорема о структуре минимального множества для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, а также о свойствах орбит (теорема 3.1). Следствием из него является теорема о структуре минимального множества для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ (теорема 3.7), которая получена в работе [26]. Сформулирован критерий пустоты минимального множества (теорема 3.3), и в случае пустоты минимального множества уточнена структура исходной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (лемма 3.1). Приводится ряд признаков существования непустого минимального множества для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (предложение 3.1, теоремы 3.2, 3.4–3.6). Установлена связь между минимальными множествами группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ и ее подгрупп (леммы 3.3 и 3.4.). Для специального класса групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ конструктивно описаны минимальные множества (теорема 3.8). В дальнейшем будет показано, что такой класс групп совпадает с классом групп с инвариантной мерой. Если группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ не принадлежит к такому специальному классу, то орбиты неограничены (лемма 3.2). Описана связь минимальных множеств группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и ее нормальной подгруппы G_+ (теорема 3.9).

Определение 3.1. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. Непустое подмножество X называется *минимальным*, если оно замкнуто, G-инвариантно и не содержит собственных замкнутых G-инвариантных подмножеств. Если не существует минимального множества, то по определению будем полагать, что оно пустое.

В случае единственного минимального множества его будем обозначать через $E(G)$.

Вследствие одномерности фазового пространства, минимальное множество имеет вполне определенную каноническую структуру, описание которой дается следующей теоремой.

Теорема 3.1 [10]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений*:

а) *любое минимальное множество дискретное и принадлежит множеству $\mathrm{Fix}\, G^s$, а множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ состоит из объединения минимальных множеств*;

б) *минимальное множество является совершенным нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}$ (в этом случае оно является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты $\overline{G(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$)*;

в) *минимальное множество совпадает с $\mathbb{R}$*;

г) *минимальное множество пустое.*

Одним из достаточных условий непустоты минимального множества является конечная порожденность рассматриваемой группы.

Теорема 3.2 [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ – конечно-порожденная группа. Тогда существует непустое минимальное множество.*

Приведем критерий пустоты минимального множества, основанный на топологических свойствах ее конечно-порожденных подгрупп.

Теорема 3.3 [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Для пустоты минимального множества необходимо и достаточно, чтобы следующие три условия выполнялись одновременно*:

а) *для любой конечно-порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ справедливо условие $\mathrm{Fix}\, \Gamma^s \neq \varnothing$*;

б) *для любого $n = 1, 2, \ldots$ существует конечно-порожденная подгруппа $\Gamma \subseteq G$, для которой $[-n, n] \cap \mathrm{Fix}\, \Gamma^s = \varnothing$*;

в) *для любого $n = 1, 2, \ldots$ существует точка $t \in \mathbb{R}$ такая, что $G(t) \cap [-n, n] = \varnothing$.*

Наличие минимального множества или его отсутствие придает группе определенные свойства. Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 3.1 [11]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Если минимальное множество пустое, то* $G = G^s_\infty$.

На основе леммы 3.1 мы можем сформулировать еще одно достаточное условие существования минимального множества, основанное на свойствах канонически выделенного подмножества G^s_∞ группы G.

Предложение 3.1. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Если* $G \neq G^s_\infty$, *то существует непустое минимальное множество.*

Приведем ряд других важных достаточных условий существования минимального множества.

Теорема 3.4 [10]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Для существования непустого минимального множества достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих условий*:

а) $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$;

б) *для любого* $g \in G$, $g \neq e$, *множество* $\mathrm{Fix}\langle g\rangle$ *дискретное*;

в) G *содержит конечно-порожденную подгруппу* Q, *имеющую неограниченную орбиту.*

Теорема 3.5 [33], [35]–[37]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ – *счетная группа. Если* G *абелева и ее элементы принадлежат* $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})$ *или элементы* G *задаются аналитическими функциями, то существует непустое минимальное множество.*

Существуют примеры счетных абелевых групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, для которых минимальное множество пустое.

В случае $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ по теореме 3.3 существует непустое минимальное множество и поведение орбит точек $t \in \mathbb{R}$ описывается теоремой 3.1. Приведем результат, уточняющий поведение орбит точек $t \in \mathbb{R}$ в случае $\mathrm{Fix}\, G^s = \varnothing$.

Лемма 3.2 [10]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Если* $\mathrm{Fix}\, G^s = \varnothing$, *то орбита* $G(t)$ *любой точки* $t \in \mathbb{R}$ *не ограничена ни сверху, ни снизу.*

На основании теоремы 3.3 и лемм 3.1, 3.2 можно получить утверждение о существовании непустого минимального множества для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ ($G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$).

Теорема 3.6. *Пусть* $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. *Тогда существует непустое минимальное множество.*

Доказательство. Если $G \neq G^s_\infty$, то существование непустого минимального множества следует из леммы 3.1. Пусть $G = G^s_\infty$. Если $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$, то существование непустого минимального множества следует из п. а) теоремы 3.3. Более того, в этом случае непустое минимальное множество дискретное. Остается рассмотреть случай $G = G^s_\infty$, $\mathrm{Fix}\, G^s = \varnothing$. Заметим, что для любого $g \in G$ множество $\mathrm{Fix}\langle g\rangle$ непусто и инвариантно относительно сдвига $\overline{g}(t) = t + 1$. Поэтому для любого $g \in G$

выполняется условие $\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)-t|<1$. С другой стороны, по лемме 3.2 орбита любой точки $t\in\mathbb{R}$ не ограничена ни снизу, ни сверху. Противоречие.

Следовательно, для рассматриваемых групп случай $G=G^s_\infty$, $\operatorname{Fix} G^s=\varnothing$ не реализуем, что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть задана группа* $G\subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. *Если* $G=G^s$, *то* $\operatorname{Fix} G^s\neq\varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 2.1 для таких групп $G^s=G^s_\infty$, а в последнем абзаце доказательства теоремы 3.6 показано, что случай $G=G^s_\infty$, $\operatorname{Fix} G^s=\varnothing$ не реализуем.

Сформулируем аналог теоремы 3.1 о структуре минимальных множеств для групп $G\subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть* $G\subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. *Тогда минимальное множество непустое и справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений*:

а) *любое минимальное множество дискретное и принадлежит множеству* $\operatorname{Fix} G^s$, *а множество* $\operatorname{Fix} G^s$ *состоит из объединения минимальных множеств*;

б) *минимальное множество является совершенным нигде не плотным подмножеством* S^1 (*в этом случае оно является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты* $\overline{G(t)}$ *произвольной точки* $t\in S^1$);

в) *минимальное множество совпадает с* S^1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1.). По теореме 3.6 для группы $\widehat{G}$ существует непустое минимальное множество. Несложно заметить, что минимальное множество группы $\widehat{G}$ инвариантно относительно сдвига $\overline{g}(t)=t+1$ и при отображении λ образ минимального множества группы $\widehat{G}$ совпадает с минимальным множеством группы G, а прообраз минимального множества группы G совпадает с минимальным множеством группы $\widehat{G}$. Поэтому все утверждения теоремы 3.7 следуют из соответствующих утверждений теоремы 3.1, примененных к группе $\widehat{G}$.

Весьма важно с помощью более простых подгрупп получить информацию о структуре минимальных множеств исходной группы. Приведем результаты, связывающие свойства минимальных множеств исходной группы со свойствами минимальных множеств ее подгрупп.

ЛЕММА 3.3 [11]. *Пусть* $G\subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. *Если для подгруппы* $\Gamma\subseteq G$ *минимальное множество* $E(\Gamma)$ *непусто и недискретно, то минимальное множество* $E(G)$ *группы* G *также непусто и недискретно и, более того,* $E(\Gamma)\subseteq E(G)$.

ЛЕММА 3.4 [11]. *Пусть* $G\subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. *Если для нормальной подгруппы* $\Gamma\subseteq G$ *минимальное множество* $E(\Gamma)$ *непусто и недискретно, то оно является минимальным множеством исходной группы* G, *т.е.* $E(\Gamma)=E(G)$.

Во всех приведенных теоремах (кроме теоремы 3.5) доказательство существования минимального множества основано на использовании теоремы о фактор-группе и аксиомы выбора и поэтому неконструктивно.

Существуют специальные группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, важные с точки зрения метрических инвариантов, для которых минимальные множества могут быть конструктивно описаны. К таким группам, в частности, относятся группы G со свойством $\mathrm{Fix}\,G^s \neq \varnothing$. (Далее будет использовано обозначение $P(A)$, введенное в § 1.)

Теорема 3.8 [9]. *Пусть задана группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, для которой $\mathrm{Fix}\,G^s \neq \varnothing$. Тогда*:

1) *для всякого $t \in \mathrm{Fix}\,G^s$ множество $P(G(t))$ не зависит от точки t (мы будем обозначать его $\mathbb{P}(G)$)*;
2) *справедливо включение $\mathbb{P}(G) \subseteq \mathrm{Fix}\,G^s$*;
3) *либо $\mathbb{P}(G) = X$, либо $\mathbb{P}(G)$ – совершенное нигде неплотное подмножество $\mathbb{X}$, либо $\mathbb{P}(G) = \varnothing$*;
4) *если $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$, то группа G имеет единственное недискретное минимальное множество $E(G)$ и $\mathbb{P}(G)$ совпадает с $E(G)$*;
5) *если $\mathbb{P}(G) = \varnothing$, то все минимальные множества дискретные, принадлежат множеству $\mathrm{Fix}\,G^s$, а само множество $\mathrm{Fix}\,G^s$ состоит из объединения дискретных минимальных множеств.*

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство приведено в [9]. Рассмотрим случай окружности S^1. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что при отображении λ образы минимального множества группы $\widehat{G}$, орбиты $\widehat{G}(t)$ точки $t \in \mathbb{R}$, множества $\mathbb{P}(\widehat{G})$ инвариантны относительно сдвига $\overline{g}(t) = t+1$ и совпадают с минимальным множеством группы G, орбитой $G(\lambda(t))$ точки $\lambda(t) \in S^1$, множеством $\mathbb{P}(G)$ соответственно. Верно и обратное. При отоборажении λ прообразы минимального множества группы G, орбиты $G(t)$ точки $t \in S^1$, множества $\mathbb{P}(G)$ совпадают с минимальным множеством группы $\widehat{G}$, орбитой $\widehat{G}(\lambda^{-1}(t))$ точки $\lambda^{-1}(t) \in \mathbb{R}$, множеством $\mathbb{P}(\widehat{G})$ соответственно.

Тогда утверждение теоремы в случае окружности S^1 будет следовать из утверждения теоремы для случая $X = \mathbb{R}$, примененной к группе $\widehat{G}$.

Нам остается связать свойства минимальных множеств группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и ее нормальной подгруппы G_+.

Теорема 3.9 [16]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. Минимальные множества группы G и нормальной подгруппы G_+ непусты одновременно. Более того, если минимальное множество группы G непусто, то справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений*:

1) *минимальное множество группы G дискретно и состоит из объединения не более чем двух дискретных минимальных множеств нормальной подгруппы G_+*;
2) *минимальное множество группы G недискретно и совпадает с минимальным множеством нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. Следует рассмотреть случай $G \neq G_+$. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$. Поэтому если множество B инвариантно относительно подгруппы G_+, то множество $f(B)$ также будет инвариантным относительно подгруппы G_+. Более того, так как $f^2(B) = B$, то множество $B \cup f(B)$ будет инвариантным относительно самой группы G.

Пусть для подгруппы G_+ существует непустое минимальное множество U. Как уже отмечалось выше, множество $f(U)$ инвариантно относительно подгруппы G_+, а множество $U \cup f(U)$ будет инвариантным относительно самой группы G. Следовательно, для группы G множество $U \cup f(U)$ является минимальным.

Пусть минимальное множество группы G непусто и D является таким минимальным множеством. В силу инвариантности для любого $g \in G$ его действие на минимальном множестве является гомеоморфизмом. Предположим, что для подгруппы G_+ не существует минимального множества. Фиксируем точку $\overline{t} \in D$. Найдется замкнутое подмножество $\widetilde{D} \subseteq D$, инвариантное относительно подгруппы G_+, такое,что точки $\overline{t}$, $f^{-1}(\overline{t})$ ему не принадлежат. В таком случае точка $\overline{t}$ не будет принадлежать замыканию множества $\widetilde{D} \cup f(\widetilde{D})$ и оно будет собственным замкнутым подмножеством множества D, инвариантным относительно группы G. Это противоречит условию минимальности множества D, откуда и следует непустота минимального множества для подгруппы G_+.

Наконец, если минимальное множество подгруппы G_+ недискретное, то по теореме 3.1 оно единственное и обозначается через $E(G_+)$. Из инвариантности множества $f(E(G_+))$ относительно подгруппы G_+ и теоремы 3.1 получим включение $E(G_+) \subseteq f(E(G_+))$. Из полученного включения следует, что $f(E(G_+)) \subseteq f^2(E(G_+))$. С другой стороны, из инвариантности множества $E(G_+)$ относительно подгруппы G_+ и условия $f^2 \in G_+$ получим равенство $f^2(E(G_+)) = E(G_+)$. Тогда из полученных включений следует, что $f(E(G_+)) = E(G_+)$, т.е. минимальные множества группы G и ее нормальной подгруппы G_+ совпадают.

Если U – дискретное минимальное множество подгруппы G_+, то множество $f(U)$ также будет дискретным минимальным множеством для подгруппы G_+. Множества U и $f(U)$ либо не пересекаются, либо совпадают, а множество $U \cup f(U)$ является минимальным множеством для исходной группы G и состоит из не более чем двух минимальных множеств подгруппы G_+.

С понятием минимального множества для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ связана некоторая каноническим образом определяемая нормальная подгруппа H_G, которая играет важную роль в формулировке комбинаторных критериев существования метрических инвариантов.

Определение 3.2. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ определим нормальную подгруппу H_G следующим образом.

1) Если минимальное множество непусто и недискретно, то положим

$$H_G = \{h : h \in G_+,\ E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\langle h\rangle\}.$$

2) Если минимальное множество непусто и дискретно, то положим $H_G = G^s$. (По теореме 3.1 из дискретности минимального множества следует непустота множества $\mathrm{Fix}\, G^s$. Из непустоты $\mathrm{Fix}\, G^s$ следует, что G^s является подгруппой, а из замечания 1.1 следует нормальность подгруппы G^s.)
3) Если минимальное множество пусто, то положим $H_G = \langle e\rangle$.

Для гомеоморфизма окружности первый результат об отсутствии минимального множества, изоморфного канторову множеству, был получен Данжуа (см. [27]) для циклической группы и известен под названием теоремы Данжуа. Этот же вопрос весьма важен и для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ [12], [14]–[16]. Справедливости теоремы Данжуа следует ожидать только для специальных групп. В частности, такая теорема получена для одного важного класса квазисимметрических групп [14].

§ 4. Уточнение теоремы о фактор-группе $G/\langle G^s\rangle$ с использованием свойств минимальных множеств

Теорема о фактор-группе всего лишь утверждает, что фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ коммутативна. В действительности, важно знать больше о структуре фактор-группы на предмет цикличности либо счетности. Это продиктовано тем, что отмеченные характеристики фактор-группы тесно связаны как с топологическими свойствами минимальных множеств группы G, так и с другой важной топологической характеристикой $\mathrm{Fix}\, G^s$, выступающей критерием существования метрического инварианта. Соответствующий результат сформулирован в виде теоремы 4.1. Мы отмечали, что весьма важно уметь выделять более простые подгруппы исходной группы, имеющие ту же топологическую сложность (то же минимальное множество). Уточнение структуры фактор-группы и позволяет сформулировать предложение о существовании таких простых подгрупп (предложение 4.1).

Далее будет уточнена структура фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$ для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (теорема 4.1) и сформулирована альтернатива о существовании для такой фактор-группы абелевой свободной подгруппы с двумя образующими (лемма 4.1, предложение 4.1). Отмеченные уточнения структуры фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$ будут приведены и для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ (теорема 4.2, лемма 4.2, предложение 4.2).

Теорема 4.1 [9]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, для любого $t \in \mathrm{Fix}\, G^s$ множество $P(G(t))$ не зависит от точки t, обозначается $\mathbb{P}(G)$ и выполняется одно из следующих взаимоисключающих условий:*

1) *либо $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{R}$ (соответственно $\langle G^s\rangle = \langle e\rangle$) и фактор-группа $G/\langle G^s\rangle \cong G$ нециклическая группа;*
2) *либо $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G)$ является совершенным нигде не плотным подмножеством и фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ нециклическая, но не более чем счетная;*
3) *либо $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G) = \varnothing$ и фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ циклическая;*
4) *либо $\mathrm{Fix}\, G^s = \varnothing$ (соответственно $\mathbb{P}(G) = \varnothing$) и фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ тривиальна.*

Важным частным случаем служат группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для которых $\mathrm{Fix}\, G^s = \mathbb{R}$, что эквивалентно условию $G^s = \langle e\rangle$ (группы свободно действующих гомеоморфизмов). По теореме о фактор-группе такие группы являются коммутативными. В таких группах выделяются специальные подгруппы, необходимые для изучения топологической структуры минимального множества исходной группы G. Выделенные подгруппы алгебраически более простые, но имеют ту же топологическую сложность, что и исходная группа G, а именно, минимальные множества выделенных подгрупп совпадают с минимальными множествами исходной группы.

Лемма 4.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Fix}\, G^s = \mathbb{R}$. Тогда для коммутативной нециклической группы G справедлива альтернатива*:

1) *или группа G содержит свободную абелеву нециклическую подгруппу Γ с двумя образующими*;
2) *или группа G содержит счетную нециклическую подгруппу Γ, для которой любая конечно-порожденная подгруппа является циклической.*

Более того, минимальные множества группы G и подгруппы Γ совпадают.

Доказательство. Так как условие $\mathrm{Fix}\, G^s = \mathbb{R}$ эквивалентно условию $\langle G^s \rangle = \langle e \rangle$, то по теореме о фактор-группе (теорема 2.1) группа G изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$, откуда и следуют пп. 1) и 2). Из нецикличности группы G и подгруппы Γ и теоремы 4.1 следует, что $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(\Gamma) \neq \varnothing$. Поэтому по теореме 3.8 их минимальные множества недискретные, а по лемме 3.4 они совпадают.

Сформулируем альтернативу из леммы 4.1 для произвольных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$.

Предложение 4.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда для коммутативной не циклической фактор-группы $G/\langle G^s \rangle$ справедлива альтернатива*:

1) *или фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ содержит свободную абелеву нециклическую подгруппу Γ с двумя образующими*;
2) *или фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ содержит счетную нециклическую подгруппу Γ, для которой любая конечно-порожденная подгруппа является циклической.*

Более того, минимальные множества группы G и подгруппы $p_G^{-1}(\Gamma)$ совпадают.

Доказательство. По теореме 4.1 коммутативная фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ изоморфна некоторой подгруппе ${}_*G$ аддитивной группы $\mathbb{R}$. Очевидно, что для нециклической группы сдвигов ${}_*G$ справедливо условие $\mathrm{Fix}\, G^s = \mathbb{R}$, и она удовлетворяет условиям леммы 4.1. В таком случае, для группы ${}_*G$ справедлива альтернатива из леммы 4.1 (пп. 1) и 2)), что и доказывает справедливость пп. 1) и 2) предложения 4.1.

Остается доказать последнее утверждение предложения. Очевидно, что из нецикличности подгруппы Γ следует нецикличность подгруппы $p_G^{-1}(\Gamma)$ исходной группы G. Из нецикличности группы G и подгруппы $p_G^{-1}(\Gamma)$ и теоремы 4.1 следует, что $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(p_G^{-1}(\Gamma)) \neq \varnothing$. Поэтому по теореме 3.8 их минимальные множества недискретные, а по лемме 3.4 они совпадают.

Сформулируем аналоги теоремы 4.1, леммы 4.1 и предложения 4.1 для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Заметим, что группа $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ без кручения, а группа $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ с кручением. Поэтому в приводимых ниже теореме, лемме и предложении указания о наличии или отсутствии кручения будут явно присутствовать.

Теорема 4.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Тогда фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы S^1. Более того, для любого $t \in \mathrm{Fix}\, G^s$ множество $P(G(t))$ не зависит от точки t, обозначается $\mathbb{P}(G)$ и выполняется одно из следующих взаимоисключающих условий*:

1) *либо $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G) = S^1$ (соответственно $\langle G^s \rangle = \langle e \rangle$) и фактор-группа $G/\langle G^s \rangle \cong G$ не является циклической группой конечного порядка*;

2) *либо* $\operatorname{Fix} G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G)$ *является совершенным нигде не плотным подмножеством и фактор-группа* $G/\langle G^s \rangle$ *не является циклической группой конечного порядка, при этом она не более чем счетна*;
3) *либо* $\operatorname{Fix} G^s \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(G) = \varnothing$ *и фактор-группа* $G/\langle G^s \rangle$ *– циклическая группа конечного порядка*;
4) *либо* $\operatorname{Fix} G^s = \varnothing$ (*соответственно* $\mathbb{P}(G) = \varnothing$) *и фактор-группа* $G/\langle G^s \rangle$ *тривиальна.*

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Применим к группе $\widehat{G}$ теорему 4.1. Несложно заметить, что при отоборажении λ образы минимального множества группы $\widehat{G}$, орбиты $\widehat{G}(t)$ точки $t \in \mathbb{R}$, множества $\mathbb{P}(\widehat{G})$ инвариантны относительно сдвига $\overline{g}(t) = t + 1$ и совпадают с минимальным множеством группы G, орбитой $G(\lambda(t))$ точки $\lambda(t) \in S^1$, множеством $\mathbb{P}(G)$ соответственно. Верно и обратное. При отоборажении λ прообразы минимального множества группы G, орбиты $G(t)$ точки $t \in S^1$, множества $\mathbb{P}(G)$ совпадают с минимальным множеством группы $\widehat{G}$, орбитой $\widehat{G}(\lambda^{-1}(t))$ точки $\lambda^{-1}(t) \in \mathbb{R}$, множеством $\mathbb{P}(\widehat{G})$ соответственно. Поэтому для множеств $\operatorname{Fix} G^s$ и $\mathbb{P}(G)$ также будут выполняться четыре взаимоисключающие условия из теоремы.

Остается доказать соответствующие условия для фактор-группы $G/\langle G^s \rangle$.

Пусть множества $\operatorname{Fix} G^s$ и $\mathbb{P}(G)$ удовлетворяют условию 1) или 2) теоремы. По теореме 2.1 фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы S^1. Если бы фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ была циклической группой конечного порядка, то выполнялось бы условие $\mathbb{P}(G) = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, в первых двух рассматриваемых случаях фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ не является циклической группой конечного порядка.

Пусть множества $\operatorname{Fix} G^s$ и $\mathbb{P}(G)$ удовлетворяют условию 3) теоремы. Тогда, как отмечалось выше, множества $\operatorname{Fix} \widehat{G}^s$ и $\mathbb{P}(\widehat{G})$ также будут удовлетворять условию 3) теоремы 4.1. По теореме 4.1 фактор-группа $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s \rangle$ – циклическая с образующей $\{g\}$, где через $\{\,\cdot\,\}$ обозначается левый смежный класс по подгруппе $\langle \widehat{G}^s \rangle$. Так как элеменет $\overline{g}$ принадлежит группе $\widehat{G}$, то найдется натуральное число n такое, что $g^n = \overline{g}$. В силу этого и свойств $\pi_{\widehat{G}}(\widehat{G}^s) = G^s$, $\ker \pi_{\widehat{G}} = \langle \overline{g} \rangle$ гомоморфизма $\pi_{\widehat{G}}$ (см. предложение 1.1) получим, что фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ является циклической группой конечного порядка.

Наконец, пусть $\operatorname{Fix} G^s = \varnothing$ (условие 4)). Тогда, как отмечалось выше, множество $\operatorname{Fix} \widehat{G}^s$ также будет удовлетворять условию 4) теоремы 4.1. По теореме 4.1 фактор-группа $\widehat{G}/\langle \widehat{G}^s \rangle$ тривиальная. В силу этого и свойства $\pi_{\widehat{G}}(\widehat{G}^s) = G^s$ гомоморфизма $\pi_{\widehat{G}}$ (см. предложение 1.1) получим, что фактор-группа $G/\langle G^s \rangle$ также является тривиальной.

Лемма 4.2. *Пусть* $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(S^1)$ *и* $\operatorname{Fix} G^s = S^1$. *Тогда для коммутативной группы* G, *не являющейся циклической группой конечного порядка, справедлива альтернатива*:

1) *или группа* G *содержит циклическую подгруппу* Γ *бесконечного порядка*;
2) *или группа* G *содержит счетную нециклическую подгруппу* Γ, *для которой любая конечно-порожденная подгруппа является циклической подгруппой конечного порядка.*

Более того, минимальные множества группы G и подгруппы Γ совпадают.

Доказательство. Так как условие $\operatorname{Fix} G^s = S^1$ эквивалентно условию $\langle G^s\rangle = \langle e\rangle$, то по теореме о фактор-группе (теорема 2.1) группа G изоморфна подгруппе аддитивной группы S^1, откуда и следуют пп. 1) и 2). Так как группа G и подгруппа Γ нециклические группы конечного порядка, то по теореме 4.2 следует, что $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(\Gamma) \neq \varnothing$. Поэтому по теореме 3.8 их минимальные множества недискретные, а по лемме 3.4 они совпадают.

Предложение 4.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Тогда для коммутативной фактор-группы $G/\langle G^s\rangle$, не являющейся циклической группой конечного порядка, справедлива альтернатива*:

1) *или фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ содержит циклическую подгруппу Γ бесконечного порядка*;
2) *или фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ содержит счетную нециклическую подгруппу Γ, для которой любая конечно-порожденная подгруппа является циклической подгруппой конечного порядка.*

Более того, минимальные множества группы G и подгруппы $p_G^{-1}(\Gamma)$ совпадают.

Доказательство. По теореме 4.2 коммутативная фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ изоморфна некоторой подгруппе ${}_*G$ аддитивной группы S^1. Очевидно, что для ${}_*G$, не являющейся циклической группой вращений конечного порядка, справедливо условие $\operatorname{Fix} G^s = S^1$ и она удовлетворяет условиям леммы 4.2. Следовательно, для группы ${}_*G$ справедлива альтернатива из леммы 4.2 (пп. 1) и 2)), что и доказывает справедливость пп. 1) и 2) предложения 4.2.

Остается доказать последнее утверждение предложения. Так как подгруппа Γ не является циклической группой конечного порядка, то подгруппа $p_G^{-1}(\Gamma)$ исходной группы G и сама группа G не будут циклическими группами конечного порядка. Тогда по теореме 4.2 следует справедливость условий $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(p_G^{-1}(\Gamma)) \neq \varnothing$. Поэтому по теореме 3.8 их минимальные множества недискретные, а по лемме 3.4 они совпадают.

Лемма 4.1 является определяющей при исследовании вопроса о топологической сопряженности (см. § 8) квазисимметрической группы группе аффинных преобразований прямой [14].

§ 5. Инвариантные меры

Вопрос существования инвариантной меры для группы гомеоморфизмов локально компактного пространства является центральным в теории Боголюбова–Крылова. Во введении отмечалось, что по истории этого вопроса и важнейшим результатам существует исчерпывающий обзор Д. В. Аносова [2]. Далее мы будем интересоваться группами гомеоморфизмов прямой, для которых сформулируем различные критерии существования инвариантной меры. Результаты о существовании инвариантной меры для групп гомеоморфизмов компактного пространства автоматически дают теоремы существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой, являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности. В частности, для таких специальных групп гомеоморфизмов прямой существование инвариантной меры следует из теоремы Дэйя (см. [20]) о существовании инвариантной меры для дискретных аменабельных групп гомеоморфизмов компактного пространства. Для групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию и не являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности, к наиболее существенным продвижениям в этой проблематике следует отнести работу Ж. Ф. Планте [32] об эквивалентности вопроса существования инвариантной меры для конечно-порожденных групп условию неэкспоненциального роста орбиты какой-либо точки $t \in \mathbb{R}$. Вместе с тем, теорема Планте не допускает распространения для не конечно-порожденных групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Поэтому очень важно сформулировать различные критерии существования инвариантной меры без априорных предположений о характере группы. Формулировки и обсуждение теорем Планте и Дэйя будут приведены в § 9, который посвящен комбинаторным критериям существования метрических инвариантов.

Центральным результатом данного параграфа является теорема 5.1, в которой без априорных предположений сформулирован топологический критерий существования инвариантной меры, вскрывающий природу существования такого метрического инварианта. В некоторых случаях для исследуемых групп проще описать канонически выделенные подгруппы, чем топологические характеристики. Поэтому в разделе 5.1 приводится ряд критериев существования инвариантной меры, сформулированных в терминах канонически выделенных подгрупп. Для инвариантной меры весьма важно описать носитель. Оказывается, что носитель инвариантной меры сосредоточен на минимальных множествах (теорема 5.8). Знания о структуре минимального множества позволяют установить эргодические свойства инвариантной меры (теорема 5.9). Все отмеченные результаты получены для групп гомеоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, сохраняющих ориентацию. Показано, что для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ существование инвариантной меры эквивалентно существованию инвариантной меры для максимальной нормальной подгруппы G_+ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (теорема 5.10). Для гомеоморфизма прямой $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, являющегося накрытием гомеоморфизма окружности, хорошо известен топологический инвариант в виде числа сдвига. Для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ число сдвига определяет псевдохарактер. С таким псевдохарактером связан критерий существования инвариантной меры. Существование инвариантной меры для такой группы эквивалентно тому, что псевдохарактер, задаваемый числом сдвига, является характером (теорема 5.14). В работах Планте определена процедура построения характера по инвариантной мере. Характеры, построенные по любой паре инвариантных мер, являются линейно зависимыми (предложение 5.4). Более того, характеры, задаваемые числом сдвига и какой-либо инвариантной мерой, также оказываются линейно зависимыми (теорема 5.15).

Пусть Σ есть σ-алгебра борелевских множеств X. Рассмотрим пространство с борелевской (вероятностной в случае $X = S^1$) мерой, конечной на компактах, т.е. тройку (X, Σ, μ).

Определение 5.1. Борелевская (вероятностная в случае $X = S^1$) мера μ, конечная на компактах, называется *инвариантной* относительно группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$, если для любых $g \in G$, $B \in \Sigma$ выполняется условие $\mu(q^{-1}(B)) = \mu(B)$.

Далее для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ будет сформулирован основной топологический критерий существования инвариантной меры (теорема 5.1), а также критерии, использующие метрические и алгебраические свойства канонических подгрупп (теоремы 5.2–5.4). Для таких групп имеют место и иные критерии существования инвариантной меры, основанные на свойствах конечно-порожденных подгрупп (теоремы 5.5–5.7). Одним из важных вопросов для инвариантных мер является описание их носителей (теорема 5.8). Не менее важным является описание всего множества инвариантных мер. В этой связи сформулированы критерий (теорема 5.9) и признаки (предложения 5.1, 5.2) строгой эргодичности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Описана связь между инвариантными мерами группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и ее нормальной подгруппы G_+ (теорема 5.10), а также их свойствами строгой эргодичности (теорема 5.11). Отмечено, что существование инвариантной меры является достаточным условием существования непустого минимального множества (предложение 5.3).

Для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой μ определяется характер $\tau_{\mu,G}$ (предложение 5.4). В терминах характера $\tau_{\mu,G}$ переформулирована теорема о строгой эргодичности (теорема 5.12). Для любого гомеоморфизма $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ существует хорошо известный топологический инвариант $\tau(g)$, называемый числом сдвига ($\mathrm{mod}\,1$; оно называется числом вращения). Отображение, определяемое числом сдвига, является псевдохарактером (теорема 5.13). Для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ устанавливается соответствие между свойствами ограничения $\tau_G = \tau|_G$ псевдохарактера τ на группу G и вопросом существования инвариантной меры μ, а также характером $\tau_{\mu,G}$ (теоремы 5.14, 5.15). Сдвиг $\overline{g}(t) \equiv t+1$ принадлежит центру группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Вследствие этого для любой группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ ее метрические свойства совпадают с метрическими свойствами более широкой группы $\langle G, \overline{g}\rangle$ (предложение 5.5). Для циклической группы $G = \langle g\rangle$ дается детальное описание структуры коммутативной группы $\langle g, \overline{g}\rangle$ и ее связь с характером значения числа сдвига $\tau(g)$ (теорема 5.16).

Другой способ построения характера для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ связан с существованием нормальной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ с инвариантной мерой μ и нетривиальным характером $\tau_{\mu,\Gamma}$ [33]. Поэтому дается описание таких подгрупп Γ (лемма 5.1). Уточняется структура групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, допускающих построение нетривиального характера вторым способом (предложение 5.6), а также указано на достаточность такого условия для существования непустого минимального множества для исходной группы (следствие 5.2).

Для групп с инвариантной мерой уточняется структура канонической подгруппы H_G (лемма 5.2).

5.1 Топологические и алгебраические критерии существования инвариантной меры. Приведем наиболее важный топологический критерий существования инвариантной меры.

Теорема 5.1 [9]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существует борелевская (вероятностная в случае $X = S^1$) мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
2) *множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ непусто.*

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство приведено в [9]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что множества $\operatorname{Fix}\widehat{G}^s$ и $\operatorname{Fix}G^s$ непусты одновременно и при отображении λ образ множества $\operatorname{Fix}\widehat{G}^s$ совпадают с множеством $\operatorname{Fix}G^s$. С другой стороны, для группы $\widehat{G}$ инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда для группы G существует инвариантная вероятностная мера. Тогда утверждение теоремы в случае окружности S^1 будет следовать из утверждения теоремы для случая $X = \mathbb{R}$, примененной к группе $\widehat{G}$.

В работе [11] была сформулирована теорема существования инвариантной меры, использующая топологические и алгебраические характеристики группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Приведем ее формулировку с некоторыми очевидными модификациями и полным доказательством.

Теорема 5.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

а) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
б) *существует точка $t \in \mathbb{R}$, для которой $\sup_{g\in\langle G^s\rangle} |g(t)| < +\infty$*;
в) *справедливо хотя бы одно из условий*: (1) *фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ нетривиальная*; (2) *существует непустое дискретное минимальное множество*;
г) *справедливо хотя бы одно из условий*: (1) $G = C_G \neq \langle G^s_\infty\rangle = G^s_\infty$; (2) *существует непустое дискретное минимальное множество.*

Доказательство. Пусть справедливо утверждение а). По теореме 5.1 справедливо условие $\operatorname{Fix}G^s \neq \varnothing$ и для любой точки $t \in \operatorname{Fix}G^s$ будет выполняться неравенство из п. б).

Пусть справедливо условие б). В таком случае $\operatorname{Fix}G^s \neq \varnothing$, иначе по теореме 4.1 (п. 4)) $G = \langle G^s\rangle$, а по лемме 3.2 орбита $G(t)$ неограничена, что противоречит предположению б). Из условия $\operatorname{Fix}G^s \neq \varnothing$ следует, что существует непустое минимальное множество. Если минимальное множество недискретное, то (см. теоремы 3.8, 4.1) фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ нетривиальная, что и доказывает п. в).

Пусть справедливо условие в). Тогда из условия (1) п. в) и леммы 2.3 следует условие (1) п. г).

Остается показать, что из г) следует а). Из г) следует, что $\operatorname{Fix}G^s \neq \varnothing$, иначе (см. п. 4) теоремы 4.1) фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ будет тривиальной, что противоречит предположению г). Поэтому условие а) следует из теоремы 5.1.

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ выполняется условие $G^s_\infty = G^s$ (см. замечание 2.1), и поэтому для них справедливо условие $G = C_G$. В силу этого для указанного класса групп теорема 5.2 может быть уточнена.

Теорема 5.3. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

а) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
б) *существует точка $t \in \mathbb{R}$, для которой $\sup_{g\in\langle G^s\rangle} |g(t)| < \infty$*;

в) *справедливо хотя бы одно из условий*: (1) *фактор-группа* $G/\langle G^s\rangle$ *нетривиальная*; (2) *существует непустое дискретное минимальное множество*;
г) $\langle G^s_\infty\rangle = G^s_\infty$.

Доказательство. Эквивалентность условий а), б), в) следует из теоремы 5.2.

Напомним, что для рассматриваемых групп выполняется условие $G^s = G^s_\infty$ и поэтому $G = C_G$. По теореме 3.6 существует непустое минимальное множество. Более того, если $\langle G^s\rangle = G^s$ и фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ тривиальная (соответственно $G = \langle G^s\rangle$), то по следствию 3.1 выполняется условие $\operatorname{Fix} G^s \neq \varnothing$, а по теоремам 4.1 и 3.8 минимальное множество дискретное. Следовательно, для рассматриваемого класса групп условие г) теоремы 5.2 эквивалентно условию г) теоремы 5.3, что и завершает доказательство.

Дадим аналог теоремы 5.3 для групп, действующих на окружности.

Теорема 5.4. *Пусть* $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(S^1)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

а) *существует вероятностная мера* μ, *инвариантная относительно группы* G;
б) *справедливо хотя бы одно из условий*: (1) *фактор-группа* $G/\langle G^s\rangle$ *нетривиальная*; (2) *существует непустое дискретное минимальное множество*;
в) $\langle G^s\rangle = G^s$.

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что условия $\langle G^s\rangle = G^s$ и $\langle \widehat{G}^s\rangle = \widehat{G}^s$ выполняются одновременно, а по предложению 1.1 при гомоморфизме $\pi_{\widehat{G}}$ образ $\widehat{G}^s$ совпадает с G^s. С другой стороны, для группы $\widehat{G}$ инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда для группы G существует инвариантная вероятностная мера. Более того, минимальные множества групп G и $\widehat{G}$ дискретны либо недискретны одновременно.

В таком случае утверждение теоремы будет следовать из утверждения теоремы 5.3, примененной к группе $\widehat{G}$.

Сформулируем иной критерий существования инвариантной меры, использующий свойства конечно-порожденных подгрупп.

Теорема 5.5 [11]. *Пусть* $G \subseteq \operatorname{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы* G, *необходимо и достаточно, чтобы*:

а) *для любой конечно-порожденной подгруппы* $\Gamma \subseteq G$ *существовала борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно подгруппы* Γ;
б) *существовало натуральное число* n *такое, что для любой конечно-порожденной подгруппы* $\Gamma \subseteq G$ *выполняется условие* $[-n, n] \cap \operatorname{Fix} \Gamma^s \neq \varnothing$.

Для групп $G \subseteq \widetilde{\operatorname{Homeo}}_+(S^1)$ теорема 5.5 может быть уточнена, так как для таких групп условие б) автоматически выполняется.

Теорема 5.6. *Пусть* $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}_+}(S^1)$. *Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы* G, *необходимо и достаточно, чтобы для любой конечно-порожденной подгруппы* $\Gamma \subseteq G$ *существовала борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно подгруппы* Γ.

Доказательство. Если для подгруппы $\Gamma \subseteq G$ выполняется условие $\mathrm{Fix}\,\Gamma^s \neq \varnothing$, то в силу инвариантности множества $\mathrm{Fix}\,\Gamma^s$ относительно гомеоморфизма $\overline{g}(t) = t+1$ справедливо условие $[0,1] \cap \mathrm{Fix}\,\Gamma^s \neq \varnothing$. В таком случае доказательство следует из теоремы 5.5.

Сформулируем аналог теоремы 5.6 для групп, действующих на окружности.

Теорема 5.7. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. *Для существования вероятностной меры, инвариантной относительно группы* G, *необходимо и достаточно, чтобы для любой конечно-порожденной подгруппы* $\Gamma \subseteq G$ *существовала вероятностная мера, инвариантная относительно подгруппы* Γ.

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в §1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что для гомоморфизма $\pi_{\widehat{G}}$ прообразом конечно-порожденных подгрупп являются конечно-порожденные подгруппы. С другой стороны, для группы $\widehat{G}$ инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда для группы G существует инвариантная вероятностная мера. Поэтому утверждение теоремы будет следовать из утверждения теоремы 5.6, примененной к группе $\widehat{G}$.

5.2. Эргодические свойства инвариантной меры. Для изучения свойств инвариантной меры следует описать ее носитель. Этому будут посвящены результаты данного раздела. Будут сформулированы результаты о строгой эргодичности, а также о взаимосвязи инвариантных мер группы G и ее нормальной подгруппы G_+.

Теорема 5.8 [9]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ *и существует борелевская* (*вероятностная в случае* $X = S^1$) *мера* μ, *конечная на компактах и инвариантная относительно группы* G. *Тогда*:

1) *для носителя меры* μ *имеет место включение* $\mathrm{supp}\,\mu \subseteq \mathrm{Fix}\,G^s$;
2) *если* $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{supp}\,\mu = \mathbb{P}(G) = E(G)$; *более того, в этом случае мера* μ *непрерывна*;
3) *если* $\mathbb{P}(G) = \varnothing$, *то* $\mathrm{supp}\,\mu$ *состоит из некоторого объединения дискретных минимальных множеств*.

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство приведено в [9]. Рассмотрим случай окружности $X = S^1$. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в §1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что множества $\mathrm{Fix}\,\widehat{G}^s$ и $\mathrm{Fix}\,G^s$ непусты одновременно и при отображении λ образы множеств $\mathrm{Fix}\,\widehat{G}^s$, $\mathbb{P}(\widehat{G})$ совпадают с множествами $\mathrm{Fix}\,G^s$, $\mathbb{P}(G)$ соответственно. Тогда утверждение теоремы в случае окружности S^1 будет следовать из утверждения теоремы для случая $X = \mathbb{R}$, примененной к группе $\widehat{G}$.

Определение 5.2. Группа гомеоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ называется *строго эргодичной*, если существует борелевская (вероятностная в случае $X = S^1$) мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G, и для любой пары μ_1, μ_2 борелевских (вероятностных) мер, конечных на компактах и инвариантных относительно группы G, справедливо соотношение $\mu_1 = \lambda\mu_2$, $\lambda \subseteq \mathbb{R}^+$ ($\mu_1 = \mu_2$).

Сформулируем теорему о строгой эргодичности. Ее доказательство основано на свойстве строгой эргодичности для нециклической группы сдвигов на прямой.

Теорема 5.9 [9]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ и существует борелевская (вероятностная в случае $X = S^1$) мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G. Группа G является строго эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется одно из взаимоисключающих условий:*

1) $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$;
2) $\mathbb{P}(G) = \varnothing$, *а множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ состоит из одного непустого дискретного минимального множества.*

Доказательство. В случае $X = \mathbb{R}$ доказательство приведено в [9]. В случае окружности $X = S^1$ доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 5.8.

Сформулируем одно важное достаточное условие строгой эргодичности.

Предложение 5.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Для строгой эргодичности группы G достаточно, чтобы фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ не была циклической.*

Доказательство. По теореме 4.1 для такой группы справедливы условия $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$. Тогда по теоремам 5.1 и 5.9 группа G строго эргодичная.

Сформулируем аналог предложения 5.1 для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

Предложение 5.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Для строгой эргодичности группы G достаточно, чтобы фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ не была циклической группой конечного порядка.*

Доказательство. По теореме 4.2 для такой группы справедливы условия $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ и $\mathbb{P}(G) \neq \varnothing$. Тогда по теореме 5.9 группа G строго эргодичная.

Теорема 5.8 и теорема о строгой эргодичности (теорема 5.9) описывают все инвариантные меры и их носители. В частности, если минимальное множество недискретное, то инвариантная мера единственная (с точностью до растяжения), а ее носитель совпадает с единственным минимальным множеством. При изучении спектральных свойств группы операторов сдвига, индуцированных группой гомеоморфизмов прямой, возникает проблема описания всех инвариантных множеств (а не только носителей инвариантных мер) [3]. Оказывается, что инвариантные множества (не обязательно замкнутые) могут иметь сколь угодно сложную природу. В работе [3] построен пример коммутативной группы $\langle g, \overline{g}\rangle$, где $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, $\overline{g}(t) = t + 1$, для которой минимальное множество совпадает со всей прямой и существует инвариантное множество (естественно, не замкнутое) неполной лебеговой меры.

Теперь мы в состоянии описать связь между инвариантными мерами группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и ее нормальной подгруппы G_+.

Теорема 5.10. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. Для группы G инвариантная мера (вероятностная мера в случае $X = S^1$) существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера (вероятностная мера) для нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно. Пусть для нормальной подгруппы G_+ существует инвариантная мера μ. Следует рассмотреть случай $G \neq G_+$. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$.

Пусть минимальное множество подгруппы G_+ дискретное. Обозначим его через D. Тогда дискретное множество $f(D)$ также является минимальным множеством подгруппы G_+, и по теореме 3.9 объединение $D \cup f(D)$ будет дискретным минимальным множеством самой группы G. По дискретному минимальному множеству группы G очевидным образом строится мера, инвариантная относительно G.

Пусть минимальное множество нормальной подгруппы G_+ недискретное. Если q гомеоморфизм, то определим меру $q_*\mu$ по следующему правилу: для любого борелевского множества B должно выполняться условие $q_*\mu(B) = \mu(q^{-1}(B))$. Из нормальности подгруппы G_+ следует, что для любого элемента $g \in G$ мера $g_*\mu$ также инвариантна относительно подгруппы G_+. Так как минимальное множество подгруппы G_+ недискретное, то по теореме 5.9 $g_*\mu = d_g\mu$, где $d_g > 0$. Очевидно, что для элементов $g \in G_+$ значение d_g равно единице. Для элемента $g \neq G_+$ справедливо условие $g^2 \in G_+$, поэтому должно выполняться равенство $d_g^2 = 1$. Следовательно, для любого элемента $g \in G$ также должно выполняться условие $d_g = 1$, откуда и следует инвариантность меры μ относительно исходной группы G.

Опишем связь между свойствами строгой эргодичности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и нормальной подгруппы G_+.

Теорема 5.11. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ и существует борелевская (вероятностная в случае $X = S^1$) мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G. Если подгруппа G_+ строго эргодичная, то и группа G будет строго эргодичной. Если минимальное множество недискретное, то группа G и подгруппа G_+ строго эргодичны.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. По теореме 3.9 минимальное множество подгруппы G_+ также не дискретное. Тогда по теореме 5.9 подгруппа G_+ будет строго эргодичной, откуда и следует строгая эргодичность исходной группы G.

Сформулируем одно простое утверждение о минимальных множествах. Напомним, что для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ $(G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1))$ минимальное множество непусто.

Предложение 5.3. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ с инвариантной борелевской мерой, конечной на компактах, минимальное множество непусто.*

Доказательство. В силу теоремы 3.9 достаточно рассмотреть группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Но для таких групп по теореме 5.1 существование инвариантной меры эквивалентно условию $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$. Тогда непустота минимального множества следует из теоремы 3.8.

5.3. Число сдвига и число вращения. Характеры, псевдохарактеры, квазихарактеры. При исследовании структуры группы Q весьма важно иметь информацию о группе гомоморфизмов (*характеров*) $\mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$, которая образует векторное пространство над полем действительных чисел. Часто оказывается полезным исследование объектов из более общих линейных пространств псевдогомоморфизмов (псевдохарактеров) и квазигомоморфизмов (квазихарактеров).

Определение 5.3 [21]. Пусть G – абстрактная группа. Отображение $f\colon G\to\mathbb{R}$ называется *квазихарактером*, если существует константа $L_f>0$ такая, что для любых $g_1,\ g_2\in G$ справедливо условие

$$\left|f(g_1g_2)-f(g_1)-f(g_2)\right|<L_f.$$

Отображение $f\colon G\to\mathbb{R}$ называется *псевдохарактером*, если оно является квазихарактером и для любых $g\in G$, $n\in\mathbb{Z}$ выполняется равенство $f(g^n)=nf(g)$.

В дальнейшем для группы G будем пользоваться обозначениями $X(G)=\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$, $PX(G)$, $QX(G)$ *характеров, псевдохарактеров и квазихарактеров* соответственно. Очевидно, что $X(G)\subseteq PX(G)\subseteq QX(G)$.

В работе [21] для абстрактных групп изучается взаимосвязь пространств $X(G)$, $PX(G)$, $QX(G)$ с ограниченными когомологиями. В частности, там приводится результат, в силу которого для аменабельных групп из существования нетривиального квазихарактера следует существование нетривиального характера.

Один из способов построения характера для групп $G\subseteq\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ связан с наличием инвариантной меры. Следуя работе [33], опишем процедуру построения характера для группы $G\subseteq\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой.

Предложение 5.4 [33]. *Пусть $G\subseteq\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, а μ является борелевской мерой, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G. Тогда для любого $g\in G$ число*

$$\tau_{\mu,G}(g)=\begin{cases}\mu([t,g(t))), & \text{если } g(t)\geqslant t,\\ -\mu([g(t),t)), & \text{если } g(t)<t,\end{cases}$$

не зависит от точки $t\in\mathbb{R}$, а отображение $\tau_{\mu,G}\colon G\to\mathbb{R}$ является характером. Более того, если μ_1, μ_2 – две борелевские меры, конечные на компактах и инвариантные относительно группы G, то $\tau_{\mu_1,G}=\lambda\tau_{\mu_2,G}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Замечание 5.1. В случае существования инвариантной меры множество G^s образует группу, а из определения характера $\tau_{\mu,G}$ следует, что $\ker\tau_{\mu,G}=G^s$. Поэтому фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ изоморфна образу $\mathrm{Im}\,\tau_{\mu,G}$ характера $\tau_{\mu,G}$.

Используя характер $\tau_{\mu,G}$, мы можем несколько переформулировать теорему о строгой эргодичности группы $G\subseteq\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (теорема 5.9).

Теорема 5.12 [10]. *Пусть $G\subseteq\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G. Группа G является строго эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) *образ $\mathrm{Im}\,\tau_{\mu,G}$ всюду плотен в $\mathbb{R}$;*
2) *образ $\mathrm{Im}\,\tau_{\mu,G}$ – дискретное множество, а множество $\mathrm{Fix}\,G^s$ состоит из одного дискретного минимального множества.*

Строгая эргодичность группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ в предположении 1) теоремы 5.12 была доказана в работе [33].

Для группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ существует хорошо известная процедура построения псевдохарактера, не связанная с наличием инвариантной меры.

Определение 5.4. Пусть $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^n(t)}{n}$$

существует и не зависит от t. Этот предел называется *числом сдвига* и обозначается $\tau(g)$. Если $f \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$, а $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ – произвольный элемент, являющийся накрытием гомеоморфизма f, то корректно определено *число вращения* $\rho(f) = \tau(g) \bmod 1$ гомеоморфизма f.

В работе [19] для всей группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ приводится результат о структуре пространства псевдохарактеров.

Теорема 5.13 [19]. *Для группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ отображение $\tau\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$, порожденное числом сдвига $\tau(g)$, $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, является псевдохарактером. Более того, пространство псевдохарактеров $PX(\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1))$ одномерное.*

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, в дополнение к теореме 5.3, мы можем сформулировать новый критерий существования инвариантной меры, использующий число сдвига $\tau(g)$ гомеоморфизма $g \in G$.

Теорема 5.14 [10]. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
2) *псевдохарактер $\tau_G\colon G \to \mathbb{R}$, являющийся ограничением псевдохарактера $\tau\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$ на подгруппу G, является характером.*

В силу теорем 5.1, 5.3 и 5.14 для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ мы имеем эквивалентность следующих трех утверждений: $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$; псевдохарактер τ_G является характером; объединение стабилизаторов G^s образует группу. В работе [40] для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, не содержащих свободных подполугрупп с более чем одной образующей, доказана справедливость каждого из трех утверждений, хотя вопрос об их эквивалентности (соответственно их эквивалентности существованию инвариантной меры) не исследовался.

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ с инвариантной мерой μ существует взаимосвязь между характерами τ_G и $\tau_{\mu,G}$.

Теорема 5.15 [10]. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Если μ – борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G, то $\tau_G = \lambda\tau_{\mu,G}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Далее мы попытаемся установить связь между числом сдвига $\tau(g)$ гомеоморфизма $g \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ и структурой коммутативной группы $\mathscr{J}_g = \langle g, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g}(t) =$

$t + 1$. Для этого установим взаимосвязь между метрическими свойствами групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ и $\langle G, \overline{g} \rangle$.

Предложение 5.5 [10]. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G, существует тогда и только тогда, когда существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы $\langle G, \overline{g} \rangle$.*

Очевидно, что для любой циклической группы $\langle g \rangle$, $g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. Поэтому для любого $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ из предложения 5.4 можно извлечь следствие относительно коммутативной группы $\mathscr{J}_g = \langle g, \overline{g} \rangle$.

Следствие 5.1. *Пусть $g \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда для коммутативной группы $\mathscr{J}_g = \langle g, \overline{g} \rangle$ существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах.*

В действительности, можно получить дополнительную информацию как о структуре группы $\mathscr{J}_g$, так и о взаимосвязи структуры группы $\mathscr{J}_g$ и числа сдвига $\tau(g)$ в виде следствия из теоремы Пуанкаре (теорема Пуанкаре приведена в [19]).

Теорема 5.16. *Пусть $g \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда для группы $\mathscr{J}_g = \langle g, \overline{g} \rangle$ справедлива альтернатива:*

1) *либо* $\mathrm{Fix}\, \mathscr{J}_g^s = \mathbb{R}$ (*что эквивалентно условию* $\mathscr{J}_g^s = \langle e \rangle$ *и, соответственно, группа* $\mathscr{J}_g$ *состоит из свободно действующих гомеоморфизмов*);
2) *либо* $\mathrm{Fix}\, \mathscr{J}_g^s \neq \mathbb{R}$, *а фактор-группа* $\mathscr{J}_g / \mathscr{J}_g^s$ *и подгруппа* $\mathscr{J}_g^s$ *циклические.*

Более того, число сдвига $\tau(g)$ рационально тогда и только тогда, когда:

а) *либо* $\mathrm{Fix}\, \mathscr{J}_g^s = \mathbb{R}$ *и группа* $\mathscr{J}_g$ *циклическая*;
б) *либо* $\mathrm{Fix}\, \mathscr{J}_g^s \neq \mathbb{R}$.

Другой способ построения характеров для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ связан с наличием у таких групп нормальной подгруппы с инвариантной мерой. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, следуя работе [33], опишем процедуру построения характера по нормальной подгруппе $\Gamma \subseteq G$ с инвариантной мерой μ. Если g – гомеоморфизм, то определим меру $g_*\mu$ по следующему правилу: для любого борелевского множества B должно выполняться условие $g_*\mu(B) = \mu(g^{-1}(B))$. Легко видеть, что вся орбита $G_*(\mu) = \{g_*\mu : g \in G\}$ состоит из мер, также инвариантных относительно подгруппы Γ. Если $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$ в $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$, то по предложению 5.4 для любого $g \in G$ имеет место соотношение $\tau_{g_*\mu,\Gamma} = c(g)\tau_{\mu,\Gamma}$, где $c(g) > 0$.

Характер $A_{G,\Gamma} \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ определим следующим образом: для любого $g \in G$ положим

$$A_{G,\Gamma}(g) = \log c(g).$$

Очевидно, при $\Gamma = G$ характер $A_{G,\Gamma}$ тривиальный, а мера μ является инвариантной относительно всей группы G. Для таких групп нетривиальный характер следует строить по первому способу, описанному выше.

Вместе с тем, существуют классы групп, для которых $\Gamma \neq G$ и $A_{G,\Gamma} = 0$ в $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Опишем такие классы групп.

Предложение 5.6 [11]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *а* $\Gamma \subseteq G$ *– нормальная подгруппа с инвариантной мерой* μ *такой, что* $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$ *в* $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{R})$. *Тогда* $A_{G,\Gamma} \neq 0$ *в* $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда* $G \neq C_G$.

Для полного описания класса групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, допускающих построение характера вторым способом, нам следует исследовать вопрос о существовании для них нормальных подгрупп Γ с нетривиальным характером $\tau_{\mu,\Gamma}$.

Лемма 5.1. *Пусть* $\Gamma \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *для группы* Γ *существует инвариантная борелевская мера* μ, *конечная на компактах, для которой характер* $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$ *в* $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{R})$;
2) *для группы* Γ *существует инвариантная борелевская мера* μ, *конечная на компактах, и свободно действующий элемент*;
3) *фактор-группа* $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ *нетривиальная.*

Более того, образ $\mathrm{Im}\,\tau_{\mu,\Gamma}$ *всюду плотен в* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда фактор-группа* $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ *нециклическая.*

Доказательство. Покажем эквивалентность условий 1) и 3). В силу замечания 5.1 из условия 1) следует условие 3). Пусть выполняется условие 3). По теореме 5.2 (п. в)) для такой группы существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, а из замечания 5.1 следует нетривиальность характера $\tau_{\mu,\Gamma}$.

Установим эквивалентность условий 2) и 3). Пусть справедливо условие 3). Тогда по теореме 5.2 (п. в)) существует инвариантная мера. Так как $\Gamma \neq \Gamma^s$, то существует свободно действующий элемент. Пусть справедливо условие 2). Из существования инвариантной меры и теоремы 5.1 следует, что $\mathrm{Fix}\,\Gamma^s \neq \varnothing$. Следовательно, Γ^s образует подгруппу. Так как существует свободно действующий элемент, т.е. $\Gamma \neq \Gamma^s$, то фактор-группа Γ/Γ^s нетривиальная.

И, наконец, по тому же замечанию 5.1 образ $\mathrm{Im}\,\tau_{\mu,\Gamma}$ характера $\tau_{\mu,\Gamma}$ и фактор-группа $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ изоморфны, откуда и следует последнее утверждение леммы.

Следствие 5.2. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ *и* $\Gamma \subseteq G$. *Если для группы* Γ *существует инвариантная борелевская мера* μ, *конечная на компактах, для которой характер* $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$ *в* $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{R})$, *то для исходной группы* G *существует непустое минимальное множество.*

Доказательство. В силу леммы 5.1 справедливо условие $\Gamma \neq \Gamma^s$, откуда следует, что $G \neq G^s$. Тогда по предложению 3.1 для группы G существует непустое минимальное множество.

Итак, группы G, для которых существуют нормальные подгруппы Γ с нетривиальным характером $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$, относятся к классу групп с непустым минимальным множеством. Дальнейшее изучение этого вопроса будет проведено в § 7 и будет связано с существованием 0-максимальных подгрупп.

В конце § 3 была определена каноническая подгруппа H_G. Выясним, какова ее структура для групп с инвариантной мерой.

Лемма 5.2. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. *Если для группы* G *существует инвариантная борелевская мера* μ, *конечная на компактах, то* $H_G = G^s$. *Если при этом минимальное множество недискретное, то* $H_G = G^s = G^s_\infty$.

Доказательство. Из определения нормальной подгруппы H_G следует, что $H_G \subseteq G_+$. Поэтому нам достаточно доказать лемму для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. По предложению 5.3 для таких групп минимальное множество непусто. Если минимальное множество дискретное, то $H_G = G^s$ по определению. Пусть минимальное множество недискретное. Из существования инвариантной меры следует, что $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$ (теорема 5.1). Так как минимальное множество принадлежит множеству $\mathrm{Fix}\, G^s$ (теорема 3.8), то $H_G = G^s$. По теореме 4.1 фактор-группа $G/\langle G^s\rangle$ нетривиальная. Тогда по лемме 2.3 $\langle G^s\rangle = G^s = G^s_\infty$.

§ 6. Проективно-инвариантные меры

К следующему по сложности классу метрических инвариантов относятся проективно-инвариантные меры, являющиеся обобщением инвариантных мер. Вопрос о существовании проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой специального типа возникает, в частности, при изучении слоений коразмерности один, порожденных потоками Аносова [33], а также групп квазиконформных преобразований верхней полуплоскости [14].

Определение 6.1. Борелевская мера μ, конечная на компактах, называется проективно-инвариантной относительно группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, если для любого $g \in G$ существует число $c(g) > 0$ такое, что для всякого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$ выполняется условие $\mu(g^{-1}(B)) = c(g)\mu(B)$. Число $c(g)$ называется *числом растяжения* меры μ гомеоморфизмом $g \in G$.

Очевидно, что в случае $c(g) = 1$ для любого $g \in G$ проективно-инвариантная мера является инвариантной. Для групп $\mathrm{Homeo}(S^1)$ определение проективно-инвариантной меры корректно только лишь в случае $c(g) = 1$ для любого $g \in G$. Поэтому для таких групп определение проективно-инвариантной меры переходит в определение инвариантной меры.

В силу теоремы о фактор-группе для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой фактор-группа исходной группы G по нормальной подгруппе, состоящей из всех стабилизаторов точек на $\mathbb{R}$, изоморфна группе сдвигов. Соответственно, для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с проективно-инвариантной мерой фактор-группа исходной группы G по нормальной подгруппе, состоящей из всех стабилизаторов точек на $\mathbb{R}$, для которых рассматриваемая проективно-инвариантная мера является инвариантной, оказывается изоморфной группе аффинных преобразований (теорема 6.1).

Для циклической группы аффинных преобразований $G = \langle g\rangle$, $g(t) = 2t$, имеется инвариантная мера μ и проективно-инвариантная мера μ_1. Инвариантная мера сосредоточена в точке 0, являющейся минимальным множеством, и мера этой точки равняется 1. Проективно-инвариантная мера сосредоточена в точках 2^k, $k \in \mathbb{Z}$, и мера каждой точки 2^k, $k \in \mathbb{Z}$, равна 2^k. Носитель такой проективно-инвариантной меры не является минимальным множеством. В действительности, такие группы следует изучать как группы с инвариантной мерой.

Поэтому группы с проективно-инвариантной мерой следует изучать в случае, когда для них не существует инвариантной меры. Для таких групп, в отличие от групп с инвариантной мерой, не существует чисто топологического критерия существования проективно-инвариантной меры, хотя существуют различные критерии, сформулированные в терминах канонически выделенных подгрупп. Критерий, использующий топологические характеристики, содержит условия и алгебраического характера (теорема 6.4). Как и для инвариантной меры, для проективно-инвариантной меры весьма важно описать носитель. Оказывается, что для изучаемых групп носитель проективно-инвариантной меры также сосредоточен на минимальном множестве (предложение 6.3). Знания о структуре минимального множества позволяют установить эргодические свойства проективно-инвариантной меры (теорема 6.5). Все отмеченные результаты получены для групп гомеоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, сохраняющих ориентацию. Показано, что для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ существование проективно-инвариантной меры эквивалентно существованию проективно-инвариантной меры для максимальной нормальной подгруппы G_+ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов (теорема 6.6).

Далее для групп гомеоморфизмов $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с проективно-инвариантной мерой μ каноническим образом будет определен характер $\mathscr{A}_{\mu,G}$, а по нему определены канонические нормальные подгруппы. В случае инвариантности меры μ характер $\mathscr{A}_{\mu,G}$ тривиальный. Описывается структура канонически выделенных подгрупп (леммы 6.1–6.3), а также свойства фактор-групп исходной группы по этим подгруппам (теорема 6.1). Сформулировано два признака существования проективно-инвариантной меры, основанных на метрических свойствах подгрупп исходной группы (предложения 6.1, 6.2). Для групп, не имеющих инвариантной меры, сформулированы критерии существования проективно-инвариантной меры, основанные на свойствах канонически выделенных подгрупп (теоремы 6.2–6.4). Дано описание носителя проективно-инвариантной меры (предложение 6.3). Изучены свойства проективно-строгой эргодичности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (теорема 6.5). Установлена эквивалентность вопроса существования проективно-инвариантной меры для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ и ее нормальной подгруппы G_+ (теорема 6.6), а также связь между их свойствами строгой эргодичности (теорема 6.7). Для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ существование проективно-инвариантной меры эквивалентно существованию инвариантной меры (предложение 6.5), а для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ всякая проективно-инвариантная мера является инвариантной.

6.1. Характеры и канонические подгруппы, определяемые числом растяжения. Для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с проективно-инвариантной мерой опишем процедуру построения характера. Следуя [32], по борелевской мере μ, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, построим характер $\mathscr{A}_{\mu,G}\colon G \to \mathbb{R}$ по следующему правилу: для любого $g \in G$ положим $\mathscr{A}_{\mu,G}(g) = \log c(g)$ (см. определение 6.1). Очевидно, что $\mathscr{A}_{\mu,G} = 0$ тогда и только тогда, когда проективно-инвариантная мера μ является инвариантной.

Рассмотрим множества

$$\mathscr{C}_{\mu,G} = \ker \mathscr{A}_{\mu,G}, \qquad \mathscr{H}_{\mu,G} = \ker \mathscr{A}_{\mu,G} \cap G^s.$$

Очевидно, что $\mathscr{C}_{\mu,G}$ – это максимальная нормальная подгруппа группы G, относительно которой мера μ является инвариантной. Если для нормальной подгруппы $\mathscr{C}_{\mu,G}$ характер $\tau_{\mu,\mathscr{C}_{\mu,G}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_{\mu,G}, \mathbb{R})$ нетривиальный, то характеры $\mathscr{A}_{\mu,G}$ и $A_{G,\Gamma}$ совпадают (определение $A_{G,\Gamma}$ в разделе 5.3).

Для групп с проективно-инвариантной мерой опишем фактор-группы $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$, $G/\mathscr{C}_{\mu,G}$, $G/\mathscr{H}_{\mu,G}$.

Теорема 6.1 [10]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G существует проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. Тогда $\mathscr{H}_{\mu,G} \subseteq \mathscr{C}_{\mu,G} \subseteq G$, $\mathscr{H}_{\mu,G}$ и $\mathscr{C}_{\mu,G}$ – нормальные подгруппы группы G, фактор-группа $G/\mathscr{H}_{\mu,G}$ изоморфна группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$, а фактор-группы $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$, $G/\mathscr{C}_{\mu,G}$ изоморфны подгруппам аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$.*

Структура нормальных подгрупп $\mathscr{H}_{\mu,G}$ и $\mathscr{C}_{\mu,G}$ может быть уточнена.

Лемма 6.1 [10]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G существует проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, но не существует инвариантной меры. Тогда $G \neq \mathscr{C}_{\mu,G}$, $\mathscr{C}_{\mu,G} \neq \mathscr{H}_{\mu,G}$, а фактор-группа $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$ нециклическая.*

Лемма 6.2 [10]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G существует проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. Если $\mathscr{C}_{\mu,G} \neq \mathscr{H}_{\mu,G}$, то $\mathscr{H}_{\mu,G} = G^s_\infty$. Более того, $G \setminus G^s \neq \varnothing$ и $G \setminus G^s \subseteq \mathscr{C}_{\mu,G}$.*

Теперь мы можем полностью описать структуру нормальных подгрупп $\mathscr{H}_{\mu,G}$ и $\mathscr{C}_{\mu,G}$.

Лемма 6.3. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G существует проективно-инвариантная борелевская мера μ, конечная на компактах, но не существует инвариантной меры. Тогда $\mathscr{H}_{\mu,G} = H_G$ и $\mathscr{C}_{\mu,G} = C_G$.*

Доказательство. По лемме 6.2 $G \setminus G^s \neq \varnothing$, т.е. существует свободно действующий элемент $\widetilde{g} \in \mathscr{C}_{\mu,G}$. Тогда по лемме 3.1 для группы G существует минимальное множество. Так как элемент $\widetilde{g}$ свободно действующий, то минимальное множество не ограничено ни слева, ни справа. Из условия нецикличности фактор-группы $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$ и того, что $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$ (теорема 6.1), следует, что минимальное множество группы G (мы обозначаем его через $E(G)$) недискретное. Из недискретности минимального множества $E(G)$, его неограниченности слева и справа и условия $\mathscr{H}_{\mu,G} = G^s_\infty$ (см. лемму 6.2) следует, что $H_G \subseteq \mathscr{H}_{\mu,G}$.

С другой стороны, так как $\widetilde{g} \in \mathscr{C}_{\mu,G}$ – свободно действующий элемент, то в силу леммы 3.1 минимальное множество группы $\mathscr{C}$ также непусто. Из нецикличности фактор-группы $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$ и условия $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$ (теорема 6.1) следует, что такое минимальное множество недискретное (мы обозначаем его через $E(\mathscr{C}_{\mu,G})$). Тогда по лемме 3.4 $E(G) = E(\mathscr{C}_{\mu,G})$. В силу определения подгруппа $\mathscr{C}_{\mu,G}$ является максимальной нормальной подгруппой, для которой проективно-инвариантная мера μ является инвариантной. Тогда по теореме 5.1 должно выполняться условие $\mathrm{Fix}\,\mathscr{C}^s_{\mu,G} \neq \varnothing$. Очевидно, что минимальное множество $E(\mathscr{C}_{\mu,G})$ должно принадлежать замкнутому множеству $\mathrm{Fix}\,\mathscr{C}^s_{\mu,G}$, инвариантному относительно $\mathscr{C}_{\mu,G}$. В таком случае должно выполняться включение $\mathscr{C}^s_{\mu,G} \subseteq H_G$. Так как $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$, то это влечет за собой включение $\mathscr{H}_{\mu,G} \subseteq H_G$. Сравнивая с полученным ранее обратным включением, имеем, что $H_G = \mathscr{H}_{\mu,G}$.

Из условий $G \setminus G^s \subseteq \mathscr{C}_{\mu,G}$ и $\mathscr{H}_{\mu,G} = G^s_\infty$ (лемма 6.2) следует включение $C_G \subseteq \mathscr{C}_{\mu,G}$. Так как мера μ инвариантна относительно группы $\mathscr{C}_{\mu,G}$ и существует свободно действующий элемент $\widetilde{g} \in \mathscr{C}_{\mu,G}$, то верно и обратное включение $\mathscr{C}_{\mu,G} \subseteq C_G$. Лемма доказана.

6.2. Топологические и алгебраические критерии существования проективно-инвариантной меры. Сформулируем два достаточных условия существования проективно-инвариантной меры.

Предложение 6.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, а Γ – нормальная подгруппа. Если фактор-группа $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ нециклическая, то для исходной группы G существует проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах.*

Результат, эквивалентный предложению 6.1, был доказан в работе [33]. Там условия формулировались в терминах характера $\tau_{\mu,\Gamma} \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{R})$. Такую переформулировку легко восстановить с помощью леммы 5.1.

Предложение 6.2 [33]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, а Γ – нормальная подгруппа с инвариантной борелевской мерой μ, конечной на компактах. Если $\tau_{\mu,\Gamma} \neq 0$ в $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{R})$, а $A_{G,\Gamma} \neq 0$ в $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$, то мера μ является проективно-инвариантной относительно исходной группы G.*

Для групп, не имеющих инвариантной меры, мы можем сформулировать критерии существования проективно-инвариантной меры, использующие свойства канонически выделенных подмножеств исходной группы.

Теорема 6.2 [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G не существует инвариантной борелевской меры, конечной на компактах. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы подмножества G^s_∞ и C_G являлись подгруппами и выполнялось условие $C_G \neq G^s_\infty$.*

Ниже будет описан критерий существования проективно-инвариантной меры, использующий свойства нормальных подгрупп и непосредственно следующий из теоремы 6.1 и предложения 6.1.

Теорема 6.3. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G не существует инвариантной борелевской меры, конечной на компактах. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы существовала нормальная подгруппа $\Gamma \subseteq G$ со свойствами: $\langle\Gamma^s\rangle = \Gamma^s$, а фактор-группа Γ/Γ^s нециклическая.*

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 6.1 $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$, а по лемме 6.1 фактор-группа $\mathscr{C}_{\mu,G}/\mathscr{H}_{\mu,G}$ не циклическая. Остается положить Γ равной $\mathscr{C}_{\mu,G}$.

Достаточность следует из предложения 6.1.

Сформулируем важный критерий существования проективно-инвариантной меры, использующий как топологические, так и алгебраические характеристики. Для любого элемента $q \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ будем пользоваться обозначениями:

$$T_q = \sup\{t : q(t) = t\}, \quad t_q = \inf\{t : q(t) = t\}, \quad \text{если } \mathrm{Fix}\langle q\rangle \neq \varnothing;$$
$$T_q = t_q = -\infty, \quad \text{если } \mathrm{Fix}\langle q\rangle = \varnothing.$$

Теорема 6.4 [13]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, *для которой не существует борелевской инвариантной меры, конечной на компактах. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы* G, *необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия*:

1) *множество* G^s_∞ *является подгруппой и фактор-группа* G/G^s_∞ *некоммутативная*;
2) *для всякого* $g \in G^s \setminus C_G$ *справедливы условия*: t_g, T_g *конечны и для любых* $t \in {]-\infty, t_g[}$, $T \in {]T_g, +\infty[}$ *выполнено соотношение* $\operatorname{sign}[g(t) - t] = -\operatorname{sign}[g(T) - T]$;
3) *для любых* $g_1, g_2 \in G^s \setminus C_G$ *либо* $t_{g_1} = t_{g_2}$ *и* $T_{g_1} = T_{g_2}$, *либо* $[t_{g_1}, T_{g_1}] \cap [t_{g_2}, T_{g_2}] = \varnothing$.

6.3. Эргодические свойства проективно-инвариантной меры. Опишем носители проективно-инвариантных мер. Носители инвариантных мер мы описали в разделе 5.2. Поэтому важно рассмотреть группы с проективно-инвариантной мерой, для которых не существует инвариантной меры.

Предложение 6.3. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ *и для* G *существует проективно-инвариантная борелевская мера* μ, *конечная на компактах, но не существует инвариантной меры. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для группы* G *существует единственное недискретное минимальное множество* $E(G)$;
2) C_G *является нормальной подгруппой, а минимальные множества группы* G *и нормальной подгруппы* C_G *совпадают*;
3) *мера* μ *инвариантна относительно подгруппы* C_G, *а ее носитель совпадает с минимальным множеством* $E(G)$ *группы* G.

Доказательство. По лемме 6.3 C_G совпадает с $\mathscr{C}_{\mu,G}$ и поэтому является нормальной подгруппой. Так как $\mathscr{H}_{\mu,G} = G^s_\infty$ (лемма 6.2), $\mathscr{C}^s_{\mu,G} = \mathscr{H}_{\mu,G}$ (теорема 6.1), то в силу теоремы 4.1 для группы C существует единственное недискретное минимальное множество. Тогда пп. 1) и 2) будут следовать из леммы 3.4.

В силу определения $\mathscr{C}_{\mu,G}$ является максимальной нормальной подгруппой, для которой мера μ является инвариантной. Так как $\mathscr{C}_{\mu,G} = C_G$, а $E(C_G) = E(G)$ – единственное недискретное минимальное множество группы C_G, то по теореме 5.8 $\operatorname{supp} \mu = E(C_G)$.

Замечание 6.1. Из предложения 6.2 следует, что для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, не имеющей инвариантной меры, все свойства проективно-инвариантной меры μ могут быть описаны как свойства меры, инвариантной относительно нормальной подгруппы $C_G \subseteq G$.

Помимо предложения 6.3 сформулируем одно простое, но важное утверждение о существовании минимальных множеств.

Предложение 6.4. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ *и для* G *существует проективно-инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. Тогда существует непустое минимальное множество.*

Доказательство. В силу теоремы 3.9 достаточно рассматривать группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если для группы G существует инвариантная мера, то доказательство следует из предложения 5.2. Пусть для группы G не существует инвариантной меры. В силу лемм 6.1 и 6.2 справедливо условие $G \setminus G^s \neq \varnothing$. Тогда по теореме 3.3 (п. в)) для группы G существует непустое минимальное множество.

Детальное описание носителей проективно-инвариантных мер во всех остальных случаях проведено в [10]. Для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой проективно-инвариантная мера может иметь носитель и вне минимального множества группы G.

Определение 6.2. Группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ называется *проективно-строго эргодичной*, если существует борелевская мера μ, конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы G, и для любой борелевской меры μ_1, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, справедливо условие $\mu_1 = \lambda\mu$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Теорема 6.5. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для G существует борелевская мера μ, конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы G, но не существует инвариантной борелевской меры, конечной на компактах. Тогда группа G будет проективно-строго эргодичной.*

Доказательство. Пусть μ_1 – некоторая другая проективно-инвариантная мера. По предложению 6.2 меры μ и μ_1 инвариантны относительно подгруппы C_G. Так как минимальное множество группы C_G недискретное, то по теореме 5.9 группа C_G строго эргодичная, т.е. $\mu_1 = \lambda\mu$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, что и завершает доказательство теоремы.

Теперь мы в состоянии описать связь между проективно-инвариантными мерами группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ и ее нормальной подгруппы G_+.

Теорема 6.6. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует проективно-инвариантная мера для нормальной подгруппы G_+.*

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно. Пусть для нормальной подгруппы G_+ существует проективно-инвариантная мера μ. Если для G_+ существует инвариантная мера, то по теореме 5.10 для исходной группы G также существует инвариантная мера, что и завершает доказательство. Остается рассмотреть случай, когда для G_+ не существует инвариантной меры. Очевидно, что следует рассматривать случай $G \neq G_+$. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$. Если q – гомеоморфизм, то определим меру $q_*\mu$ по следующему правилу: для любого борелевского множества B должно выполняться условие $q_*\mu(B) = \mu(q^{-1}(B))$. Из нормальности подгруппы G_+ следует, что для любого элемента $g \in G$ мера $g_*\mu$ также проективно-инвариантна относительно подгруппы G_+. Тогда по теореме 6.5 для любого $g \in G$ справедливы соотношения $g_*\mu = d_g\mu$, $d_g > 0$, т.е. мера μ является проективно-инвариантной относительно исходной группы G.

Опишем связь между свойствами строгой эргодичности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ и нормальной подгруппы G_+.

Теорема 6.7. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ и существует борелевская мера, конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы G. Если подгруппа G_+ проективно-строго эргодичная, то и группа G будет проективно-строго эргодичной. Если для подгруппы G_+ не существует инвариантной меры, то группа G и подгруппа G_+ проективно-строго эргодичны.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Проективно-строгая эргодичность подгруппы G_+ следует из теоремы 6.5. Пусть μ_1, μ_2 – две проективно-инвариантные меры относительно группы G. Очевидно, что μ_1, μ_2 являются проективно-инвариантными мерами и относительно подгруппы G_+. Тогда из проективно-строгой эргодичности подгруппы G_+ следует условие $\mu_2 = \lambda\mu_1$, $\lambda > 0$, что и доказывает проективно-строгую эргодичность исходной группы G.

И последнее. Какими дополнительными свойствами обладают группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ с проективно-инвариантной мерой?

Предложение 6.5 [10]. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера.*

§7. ω-проективно-инвариантные меры

Одним из первых результатов по метрическим инвариантам является теорема Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности. Мы уже отмечали, что при исследовании групп гомеоморфизмов прямой центральным является описание различных метрических инвариантов. Такой раздел исследований известен как теория Боголюбова–Крылова, и теоремы существования метрических инвариантов естественно называть теоремами Боголюбова–Крылова. Перейдем к описанию некоторого более общего метрического инварианта, обобщающего понятие проективно-инвариантной меры.

Пусть $\mathscr{M}$ обозначает пространство борелевских мер на X, конечных на компактах ($\mathscr{M}^+$ – конус положительных мер). В случае $X = \mathbb{R}$ пространство $\mathscr{M}$ рассматривается как сопряженное пространство к пространству $\mathscr{R}(\mathbb{R})$ непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и топологией индуктивного предела [53; гл. I, дополнение]. В случае $X = S^1$ пространство $\mathscr{M}$ рассматривается как сопряженное пространство к пространству $C(S^1)$ непрерывных функций на S^1. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ через G_* будем обозначать изоморфную ей группу непрерывных линейных операторов, действующих на пространстве $\mathscr{M}$. Изоморфизм $\theta\colon G \to G_*$, где $\theta(g) = g_*$, определяется следующим образом: для любой меры μ и любого борелевского множества B $g_*\mu(B) = \mu(g^{-1}(B))$.

Заметим, что конус положительных мер $\mathscr{M}^+$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов G_*. Для любой меры $\mu \in \mathscr{M}^+$ через $\mathscr{K}_\mu(G)$ обозначим замкнутый выпуклый конус, порожденный орбитой $G_*(\mu) = \{g_*\mu\}_{g\in G}$ меры μ. Очевидно, что конус $\mathscr{K}_\mu(G)$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов G_*.

Определение 7.1. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$, а $\mu \in \mathscr{M}^+$. Конус $\mathscr{K}_\mu(G)$ называется *минимальным*, если для любой меры $\overline{\mu} \in \mathscr{K}_\mu(G)$ справедливо условие $\mathscr{K}_\mu(G) = \mathscr{K}_{\overline{\mu}}(G)$.

Пусть $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{M}^+$ – конус и $\mu \in \mathscr{K}$. Луч $\lambda\mu$, $\lambda > 0$, называется *крайним*, если не существует мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{K} \setminus \mu$ и неотрицательных чисел λ_1, λ_2 таких, что $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

Определение 7.2. Борелевская мера $\mu \in \mathscr{M}^+$, конечная на компактах, называется *ω-проективно-инвариантной* относительно группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$, если выпуклый конус $\mathscr{K}_\mu(G)$ является минимальным, луч $\lambda\mu$ крайним, а ω является мощностью множества крайних лучей.

В случае $\omega = 1$ инвариантный конус $\mathscr{K}_\mu(G)$ одномерный и определение 1-проективно-инвариантной меры совпадает с определением 6.1 проективно-инвариантной меры. Если инвариантный конус $\mathscr{K}_\mu(G)$ не только одномерный, но и неподвижный относительно группы линейных операторов G_*, то проективно-инвариантная мера является инвариантной. По определению инвариантную меру будем называть 0-проективно-инвариантной. В дальнейшем, в зависимости от контекста, будем пользоваться эквивалентными названиями: 1-проективно-инвариантная мера – проективно-инвариантная мера; 0-проективно-инвариантная мера – инвариантная мера.

Здесь, как и в предыдущих разделах, важно без априорных предположений о характере группы сформулировать различные критерии существования ω-проективно-инвариантной меры. В предыдущих разделах мы отметили, что из существования инвариантной меры или проективно-инвариантной меры следует существование непустого минимального множества. Поэтому в дальнейшем при изучении других метрических инвариантов условие существования непустого минимального множества будет обязательным. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством установлен центральный результат о существовании ω-проективно-инвариантной меры (теорема Боголюбова–Крылова). Показано, что в случае отсутствия проективно-инвариантной меры кардинальное число ω не может быть конечным (теорема 7.11). Весьма важен вопрос о том, когда для группы с непустым минимальным множеством, для которой по теореме Боголюбова–Крылова существует ω-проективно-инвариантная мера, будет существовать инвариантная либо проективно-инвариантная мера? Этот вопрос связан с изучением максимальных нормальных подгрупп с инвариантной либо проективно-инвариантной мерой. Описана как структура таких максимальных нормальных подгрупп (теоремы 7.1, 7.4), так и структура фактор-группы исходной группы по этим подгруппам (теорема 7.5). Оказывается, что максимальные нормальные подгруппы с инвариантной мерой также обладают экстремальными свойствами: или являются “почти” циклическими, или имеют сложность исходной группы.

Далее для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ с непустым минимальным множеством изучается центральный вопрос о существовании максимальных подгрупп с инвариантной (проективно-инвариантной) мерой. Доказаны существование и единственность таких максимальных подгрупп, описана их структура (теоремы 7.1–7.4), а также приводятся критерии их сложности (предложения 7.1, 7.2). Изучен важный вопрос о структуре фактор-группы по отмеченным максимальным подгруппам (теоремы 7.5–7.7). Для исследуемых групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ сформулирована обобщенная теорема Боголюбова–Крылова о существовании ω-проективно-инвариантной меры (теоремы 7.8–7.10). Изучено множество возможных значений кардинального числа ω (теоремы 7.11, 7.12).

7.1. Топологический признак существования 0-максимальных и 1-максимальных подгрупп. Структура таких подгрупп.

Определение 7.3. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Нормальная подгруппа $M_{0,G} \subseteq G$ ($M_{1,G} \subseteq G$) называется 0-*максимальной* (1-*максимальной*), если существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная (проективно-инвариантная) относительно подгруппы $M_{0,G}$ ($M_{1,G}$), и она не является собственной подгруппой какой-либо нормальной подгруппы группы G, для которой также существует борелевская инвариантная (проективно-инвариантная) мера, конечная на компактах.

В определении перед словом "максимальная" стоит 0 и 1, ибо инвариантные меры – это те же 0-проективно-инвариантные меры, а проективно-инвариантные меры – это те же 1-проективно-инвариантные меры, о которых мы говорили выше.

Теорема 7.1 [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для группы G существует непустое минимальное множество. Тогда для группы G существует, причем единственная,* 0*-максимальная подгруппа $M_{0,G}$, при этом она*

1) *совпадает с группой G, если для группы G существует инвариантная мера;*
2) *совпадает с нормальной подгруппой C_G, если для группы G не существует инвариантной меры, но существует проективно-инвариантная мера;*
3) *содержит нормальную подгруппу H_G, если для группы G не существует проективно-инвариантной меры и $G = C_G$; более того, $M^s_{0,G} = H_G$ и фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ – либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа;*
4) *совпадает с нормальной подгруппой H_G, если для группы G не существует проективно-инвариантной меры и $C_G \neq G$.*

Более того, любая нормальная подгруппа с инвариантной мерой содержится в 0*-максимальной подгруппе.*

Доказательство. Существование 0-максимальной подгруппы со свойствами 1)–4) было доказано в работе [11]. Нам следует доказать единственность 0-максимальной подгруппы и последний пункт теоремы.

1. Если для группы G существует инвариантная мера, то доказательство очевидно.

2. Пусть для группы G существует проективно-инвариантная мера, но не существует инвариантной меры. По предложению 6.4 для группы G существует непустое минимальное множество. Так как не существует инвариантной меры, то $\mathrm{Fix}\, G^s = \varnothing$ (теорема 5.1). Тогда по теореме 3.1 для группы G минимальное множество $E(G)$ недискретное и, соответственно, единственное.

Предположим, что $Q \subseteq G$ – нормальная подгруппа с инвариантной мерой. По п. 2) теоремы 7.1 C_G является 0-максимальной подгруппой. Поэтому для доказательства нам достаточно показать справедливость включения $Q \subseteq C_G$. По теореме 5.1 множество $\mathrm{Fix}\, Q^s$ непусто. Напомним, что $\mathrm{Fix}\, Q^s$ – замкнутое множество. Из нормальности подгруппы Q следует, что множество $\mathrm{Fix}\, Q^s$ инвариантно относительно исходной группы G. Тогда по теореме 3.1 $E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\, Q^s$, откуда и будет следовать включение $Q^s \subseteq H_G$. Заметим, что для группы Q множество Q^s образует группу, т.е.

$Q^s = \langle Q^s \rangle$. В случае тривиальной фактор-группы Q/Q^s имеют место включения $Q = Q^s \subseteq H_G \subseteq M_{0,G} = C_G$ и доказательство завершено.

Пусть фактор-группа Q/Q^s нетривиальная. Тогда по лемме 2.3 $Q^s = Q^s_\infty$ откуда будет следовать, что $Q = C_G$. Но в таком случае справедливо включение $Q \subseteq C_G$, что и завершает доказательство.

3. Пусть для группы G не существует проективно-инвариантной меры. В силу пп. 3) и 4) теоремы 7.1 для группы G существует 0-максимальная подгруппа $M_{0,G}$ со свойством $M^s_{0,G} = H_G$. Предположим, что $Q \subseteq G$ – нормальная подгруппа с инвариантной мерой.

На первом шаге покажем, что подгруппа Q содержится в более широкой нормальной подгруппе $\mathscr{F}$ с инвариантной мерой, для которой справедливо условие $\mathscr{F}^s = H_G$. Дословно повторяя рассуждения предыдущего второго пункта, получим, что минимальное множество $E(G)$ группы G недискретное и, соответственно, единственное, а для группы Q справедливы условия: $Q^s = \langle Q^s \rangle$, $E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\, Q^s$, $Q^s \subseteq H_G$. Если $Q = Q^s$, то $Q \subseteq H_G = M^s_{0,G}$. Следовательно, группа Q содержится в 0-максимальной подгруппе $M_{0,G}$. Если $Q \neq Q^s$, то по лемме 2.3 $Q = C_Q$. Образуем группу $\mathscr{F} = \langle Q, H_G \rangle$. Очевидно, что $H_G \subseteq \mathscr{F}^s$. Так как минимальное множество $E(G)$ инвариантно относительно группы G, а тем более относительно подгруппы $\mathscr{F}$, то для любого элемента $f \in \mathscr{F}$ справедлива альтернатива: либо $f(t) = t$ для любого $t \in E(G)$, либо $f(t) \neq t$ для любого $t \in E(G)$. Отсюда следует обратное включение $\mathscr{F}^s \subseteq H_G$ и, соответственно, равенство $\mathscr{F}^s = H_G$. Так как H_G является подгруппой и $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}^s$, то по теореме 5.2 для группы $\mathscr{F}$ также существует инвариантная мера.

На втором шаге покажем, что для любой нормальной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ с инвариантной мерой и включением $H_G \subseteq \Gamma$ справедливо условие $\Gamma^s = H_G$. Действительно, для подгруппы Γ справедливо включение $H_G \subseteq \Gamma^s$. По теореме 5.1 множество $\mathrm{Fix}\,\Gamma^s$ непусто. Из нормальности подгруппы Γ следует, что множество $\mathrm{Fix}\,\Gamma^s$ инвариантно относительно исходной группы G. Тогда по теореме 3.1 $E(G) \subseteq \mathrm{Fix}\,\Gamma^s$, откуда и будет следовать обратное включение $\Gamma^s \subseteq H_G$. Следовательно, $\Gamma^s = H_G$.

На третьем шаге покажем, что любая нормальная подгруппа $Q \subseteq G$ с инвариантной мерой содержится в некоторой 0-максимальной подгруппе $\widetilde{\Gamma}$ со свойством $\widetilde{\Gamma}^s = H_G$. Если $Q = Q^s$, то на первом шаге мы показали, что Q содержится в 0-максимальной подгруппе $M_{0,G}$. Пусть $Q \neq Q^s$. Из первого шага известно, что Q содержится в нормальной подгруппе $\mathscr{F}$ с инвариантной мерой и свойством $\mathscr{F}^s = H_G$. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что подгруппа $\mathscr{F}$ содержится в некоторой 0-максимальной подгруппе. Для этого на множестве всех нормальных подгрупп Γ группы G, для которых существуют инвариантные меры и справедливо включение $\mathscr{F} \subseteq \Gamma$, введем отношение частичного порядка следующим образом: $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$, если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Из результата второго шага следует, что для таких групп Γ выполняется условие $\Gamma^s = H_G$. Так как для исходной группы G не существует проективно-инвариантной меры, то по предложению 6.1 фактор-группа Γ/H_G будет циклической. По лемме Цорна цепь $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}$ содержится в некоторой максимальной цепи $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$, причем для любого $\alpha \in A$ фактор-группа Γ_α/H_G циклическая. Рассмотрим объединение $\widehat{\Gamma} = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, задающее нормальную подгруппу группы G. Очевидно, что $\widetilde{\Gamma}^s = H_G$ и $\widetilde{\Gamma} \neq \widetilde{\Gamma}^s$. Так как H_G – подгруппа, то по теореме 5.2 для $\widetilde{\Gamma}$ существует инвариантная мера. В таком случае $\widetilde{\Gamma}$ будет 0-максимальной подгруппой. Более того, так как для исходной группы G не существует проективно-инвариантной меры, то по предложению 6.1 фактор-группа $\widetilde{\Gamma}/H_G$ будет циклической. Заметим, что из утверждений шагов 1 и 2 следует, что любая 0-максимальная подгруппа $\widetilde{\Gamma} \subseteq G$ удовлетворяет условию $\widetilde{\Gamma}^s = H_G$.

На четвертом шаге покажем, что 0-максимальная подгруппа единственная. Здесь рассмотрим два случая.

Случай первый, когда $G \neq C_G$. В конце третьего шага мы отметили, что для любой 0-максимальной подгруппы $\widetilde{\Gamma} \subseteq G$ справедливо условие $\widetilde{\Gamma}^s = H_G$. По п. 4) теоремы 7.1 для группы G, удовлетворяющей условию $G \neq C_G$, существует 0-максимальная подгруппа $M_{0,G}$, и она совпадает с H_G. Следовательно, 0-максимальная подгруппа единственна и равна H_G.

Случай второй, когда $G = C_G$. По результатам третьего шага для любой 0-максимальной подгруппы $\widetilde{\Gamma} \subseteq G$ справедливы условия: $\widetilde{\Gamma}^s = H_G$; фактор-группа $\widetilde{\Gamma}/H_G$ циклическая. Пусть $\widetilde{\Gamma}_1$, $\widetilde{\Gamma}_2$ – две несовпадающие 0-максимальные подгруппы. В таком случае фактор-группы $\widetilde{\Gamma}_1/H_G, \widetilde{\Gamma}_2/H_G$ будут нетривиальные. Пусть левый смежный класс $\gamma_1 H_G$ определяет образующую фактор-группы $\widetilde{\Gamma}_1/H_G$, а левый смежный класс $\gamma_2 H_G$ определяет образующую фактор-группы $\widetilde{\Gamma}_2/H_G$. Образуем группу $\mathscr{J} = \langle \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2 \rangle$. Так как минимальное множество $E(G)$ будет инвариантным и относительно подгруппы $\mathscr{J} \subseteq G$, то имеет место изоморфизм $\mathscr{J}/H_G \simeq \langle \widetilde{\Gamma}_1/H_G, \widetilde{\Gamma}_2/H_G \rangle$.

Далее мы воспроизведем конструкцию из работы [9]. Пусть μ является инвариантной мерой для 0-максимальной подгруппы $\widetilde{\Gamma}_1$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\gamma_1(t) > t$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Так как $\widetilde{\Gamma}_1/H_G$ – циклическая, то мы можем так переопределить меру μ, чтобы она удовлетворяла условиям: μ является инвариантной относительно $\widetilde{\Gamma}_1$; мера μ непрерывна и ее носитель совпадает с минимальным множеством исходной группы G, т.е. $\operatorname{supp} \mu = E(G)$; выполняется равенство $\mu([0, \gamma_1(0))) = 1$.

Определим отображение $\eta(t) = \widetilde{\mu}([0, t))$, где

$$\widetilde{\mu}([0,t)) = \begin{cases} \mu([0,t)), & t \geqslant 0, \\ -\mu((t,0)), & t < 0. \end{cases}$$

Отображение η является непрерывным, монотонно возрастающим и $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \mathscr{J}$ сравним значения $\eta(\gamma(t))$ и $\eta(\gamma(\gamma_1(t)))$. Очевидно, что

$$\eta(\gamma(t)) = \widetilde{\mu}([0, \gamma(t))), \qquad \eta(\gamma(\gamma_1(t))) = \widetilde{\mu}([0, \gamma(\gamma_1(t)))).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta(\gamma(\gamma_1(t))) &= \widetilde{\mu}([0, \gamma(\gamma_1(t)))) = \widetilde{\mu}([0, \gamma(t))) + \mu([\gamma(t), \gamma(\gamma_1(t)))) \\ &= \eta(\gamma(t)) + \gamma_*^{-1}\mu([t, \gamma_1(t))). \end{aligned}$$

По предложению 5.4 $\tau_{\gamma_*^{-1}\mu, \widetilde{\Gamma}_1} = c(\gamma^{-1})\tau_{\mu, \widetilde{\Gamma}_1}$. В частности, из этого равенства в силу определения характера $\tau_{\mu, \widetilde{\Gamma}_1}$ и того же предложения 5.4 следует, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \mathscr{J}$ справедливо равенство

$$\gamma_*^{-1}\mu([t, \gamma_1(t))) = c(\gamma^{-1})\mu([t, \gamma_1(t))).$$

Из условия $G = C_G$ следует, что $\mathscr{J} = C_{\mathscr{J}}$. Из нормальности подгруппы $\widetilde{\Gamma}_1$ в группе G следует, что $\widetilde{\Gamma}_1$ будет нормальной и в группе $\mathscr{J}$. Так как $\mu([0, \gamma_1(0))) = 1$, то характер $\tau_{\mu,\widetilde{\Gamma}_1}$ будет нетривиальным. Тогда по предложению 5.6, в силу условия $\mathscr{J} = C_{\mathscr{J}}$, характер $A_{\mathscr{J},\widetilde{\Gamma}_1}$ тривиальный, т.е. $A_{\mathscr{J},\widetilde{\Gamma}_1} = 0$. Из тривиальности характера $A_{\mathscr{J},\widetilde{\Gamma}_1}$ следует, что для любого $\gamma \in \mathscr{J}$ коэффициент $c(\gamma^{-1})$ равен единице, т.е. мы получаем равенство

$$\gamma_*^{-1}\mu([t, \gamma_1(t))) = \mu([t, \gamma_1(t))),$$

справедливое для любых $\gamma \in \mathscr{J}$ и любых $t \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, в силу предложения 5.4 для любых $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mu([t, \gamma_1(t))) = \mu([0, \gamma_1(0))).$$

Окончательно получим, что для любых $\gamma \in \mathscr{J}$ и любых $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\gamma_*^{-1}\mu([t, \gamma_1(t))) = 1.$$

Таким образом, для любых $\gamma \in \mathscr{J}$ и любых $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(\gamma(\gamma_1(t))) = \eta(\gamma(t)) + 1$$

и, в частности, $\eta(\gamma_1(t)) = \eta(t) + 1$.

Определим группу ${}_*\mathscr{J}$ гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, следующим образом:

$$\begin{aligned}{}_*\mathscr{J} = \{{}_*\gamma : {}_*\gamma \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R});\ &\text{существует } \gamma \in \mathscr{J} \text{ такой,} \\ &\text{что для любого } t \in \mathbb{R},\ {}_*\gamma(\eta(t)) = \eta(\gamma(t))\}.\end{aligned}$$

Отображение $\eta^{\#}\colon \mathscr{J} \to {}_*\mathscr{J}$, где $\eta^{\#}(\gamma) = {}_*\gamma$, ${}_*\gamma(\eta(t)) = \eta(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, является эпиморфизмом. При этом $\ker \eta^{\#} = H_G$ и $\eta^{\#}(\gamma_1) = {}_*\gamma_1$, ${}_*\gamma_1(t) \equiv t + 1$. Заметим, что

$${}_*\gamma(\eta(t) + 1) = {}_*\gamma(\eta(\gamma_1(t))) = \eta(\gamma(\gamma_1(t))) = \eta(\gamma(t)) + 1 = {}_*\gamma(\eta(t)) + 1,$$

откуда следует, что любой элемент ${}_*\gamma \in {}_*\mathscr{J}$ перестановочен с элементом ${}_*\gamma_1$.

В силу изоморфизма $\mathscr{J}/H_G \simeq \langle \widetilde{\Gamma}_1/H_G, \widetilde{\Gamma}_1/H_G \rangle$ и определения эпиморфизма $\eta^{\#}$ следует, что

$${}_*\mathscr{J} = \langle {}_*\gamma_1, {}_*\gamma_2 \rangle, \quad \text{где} \quad {}_*\gamma_1 = \eta^{\#}(\gamma_1), \quad {}_*\gamma_2 = \eta^{\#}(\gamma_2).$$

Мы уже отметили, что ${}_*\gamma_1$ и ${}_*\gamma_2$ будут перестановочными и при этом ${}_*\gamma_1(t) \equiv t + 1$. Тогда ${}_*\mathscr{J} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. По следствию 5.1 для группы ${}_*\mathscr{J}$ существует инвариантная мера ${}_*\nu$. Так как $\eta(t)$ – монотонно возрастающее отображение; то по мере ${}_*\nu$ естественным образом может быть построена мера ν, инвариантная относительно группы $\mathscr{J}$. Из нормальности подгрупп $\widetilde{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\Gamma}_2$ в исходной группе G следует, что и подгруппа $\mathscr{J}$ нормальна в группе G. Таким образом, мы построили нормальную подгруппу $\mathscr{J}$ с инвариантной мерой, которая содержит в себе 0-максимальную собственную подгруппу $\widetilde{\Gamma}_1$. Противоречие. Следовательно, 0-максимальная подгруппа единственная.

Наконец, из единственности 0-максимальной подгруппы и утверждения шага 3 следует последний пункт теоремы.

Если $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, то теорема 7.1 может быть уточнена. Напомним, что для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ минимальное множество всегда непусто, а из существования проективно-инвариантной меры следует существование инвариантной меры.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть* $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. *Тогда для группы* G *выполняется условие* $C_G = G$ *и существует, причем единственная,* 0*-максимальная подгруппа* $M_{0,G}$, *при этом она*

1) *совпадает с группой* G, *если для группы* G *существует инвариантная мера;*
2) *содержит нормальную подгруппу* H_G, *если для группы* G *не существует инвариантной меры; более того,* $M^s_{0,G} = H_G$ *и фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа.*

Более того, любая нормальная подгруппа с инвариантной мерой содержится в 0*-максимальной подгруппе.*

Из определения подгруппы H_G и теоремы 7.1 следует простое замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и существует непустое минимальное множество. Тогда для 0-максимальной подгруппы $M_{0,G}$ справедливо условие $M^s_{0,G} = H_G$.

В силу замечания 7.1 имеет место включение $H_G \subseteq M_{0,G}$. Выясним, при каких условиях имеет место строгое включение, т.е. $M_{0,G} \neq H_G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1 [16]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Для существования непустого минимального множества и* 0*-максимальной подгруппы* $M_{0,G}$ *со свойством* $M_{0,G} \neq H_G$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала нормальная подгруппа* Γ, *для которой фактор-группа* $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ *нетривиальная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть существует непустое минимальное множество, а 0-максимальная подгруппа $M_{0,G}$ удовлетворяет условию $M_{0,G} \neq H_G$. Так как по замечанию 7.1 выполняется условие $M^s_{0,G} = H_G$, то достаточно положить $\Gamma = M_{0,G}$.

Достаточность. Пусть существует нормальная подгруппа Γ, для которой фактор-группа $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ нетривиальная. Тогда для такой подгруппы существует свободно действующий элемент. По теореме 3.3 (п. в)) для группы G существует непустое минимальное множество. Более того, по теореме 5.2 для такой группы существует инвариантная мера. Следовательно, по теореме 7.1 такая подгруппа содержится в 0-максимальной подгруппе $M_{0,G}$. Так как $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ нетривиальная и по замечанию 7.1 $M^s_{0,G} = H_G$, то будет выполняться условие $M_{0,G} \neq H_G$.

В работе [16] условие "фактор-группа $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ нетривиальная", фигурирующее в предложении 7.1, заменено на эквивалентное условие "для подгруппы Γ существует инвариантная мера и свободно действующий элемент" (см. лемму 5.1).

Теперь мы можем сформулировать теорему о 0-максимальной подгруппе для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. *Тогда для группы* G *существует, причем единственная,* 0*-максимальная подгруппа* $M_{0,G}$, *при этом она*

1) *совпадает с группой* G, *если для группы* G *существует инвариантная вероятностная мера;*
2) *содержит нормальную подгруппу* H_G, *если для группы* G *не существует инвариантной вероятностной меры; более того,* $M^s_{0,G} = H_G$ *и фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *либо тривиальная, либо циклическая группа конечного порядка.*

Более того, любая нормальная подгруппа с инвариантной вероятностной мерой содержится в 0*-максимальной подгруппе.*

Доказательство. Если для группы G существует инвариантная вероятностная мера, то доказательство очевидно.

Предположим, что для группы G не существует инвариантной вероятностной меры. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в §1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что множества $\operatorname{Fix}\widehat{G^s}$ и $\operatorname{Fix} G^s$ непусты одновременно и при отображении λ образ множества $\operatorname{Fix}\widehat{G^s}$ совпадает с множеством $\operatorname{Fix} G^s$. Тогда по теореме 5.1 для группы $\widehat{G}$ инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда для группы G существует вероятностная мера. Следовательно, для группы $\widehat{G}$ не существует инвариантной меры. В силу рассуждений, приведенных выше, для любой нормальной подгруппы $Q \subseteq G$ с инвариантной вероятностной мерой подгруппа $\widehat{Q} \subseteq \widehat{G}$, где $\widehat{Q} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(Q)$, также является нормальной и для нее существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. Более того, нормальная подгрупа $M_{0,G} \subseteq G$ является 0-максимальной тогда и только тогда, когда подгруппа $M_{0,\widehat{G}} \subseteq \widehat{G}$, где $M_{0,\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(M_{0,G})$, является 0-максимальной.

Так как группа $\widehat{G}$ принадлежит $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, то для нее справедлива теорема 7.2. Поэтому для группы $\widehat{G}$ существует 0-максимальная подгруппа, а любая нормальная подгруппа с инвариантной борелевской мерой, конечной на компактах, содержится в 0-максимальной подгрупе. По той же теореме 7.2, в силу условий $H_{\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(H_G)$, $M_{0,\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(M_{0,G})$, $M^s_{0,\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(M^s_{0,G})$, будет выполняться условие $M^s_{0,G} = H_G$.

Остается показать, что фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ либо тривиальная, либо циклическая группа конечного порядка. Но по теореме 7.2 фактор-группа $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$ – либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа. Так как минимальное множество группы $\widehat{G}$ является прообразом минимального множества группы G при отображении λ, то оно будет инвариантно относительно сдвига $\overline{g}(t) = t+1$. Поэтому для группы $\Gamma = \langle \overline{g}, H_{\widehat{G}} \rangle$ будет выполняться условие $\operatorname{Fix}\Gamma^s \neq \varnothing$. Тогда по теореме 5.1 для такой группы существует инвариантная мера и в силу этого она содержится в 0-максимальной подгрупе $M_{0,\widehat{G}}$. Следовательно, элемент $\overline{g}(t) = t+1$ принадлежит группе $M_{0,\widehat{G}}$. Поэтому фактор-группа $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$ всегда бесконечная циклическая группа. Пусть левый смежный класс $\widehat{g}H_{\widehat{G}}$ определяет образующую фактор-группы $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$. Тогда найдется натуральное n такое, что $\widehat{g}^n H_{\widehat{G}} = \overline{g}H_{\widehat{G}}$. Гомоморфизм $\pi_{\widehat{G}}\colon \widehat{G} \to G$ индуцирует естественный гомоморфизм фактор-групп $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}} \to M_{0,G}/H_G$, при котором левый смежный класс $\overline{g}H_{\widehat{G}}$ переходит в H_G. Следовательно, фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ является циклической группой конечного порядка.

Из определения подгруппы H_G и теоремы 7.3 следует аналог замечания 7.1.

Замечание 7.2. Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Тогда для 0-максимальной подгруппы $M_{0,G}$ справедливо условие $M^s_{0,G} = H_G$.

В силу замечания 7.2 имеет место включение $H_G \subseteq M_{0,G}$. Выясним, при каких условиях имеет место строгое включение, т.е. $M_{0,G} \neq H_G$.

Предложение 7.2 [16]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. *Для существования* 0*-максимальной подгруппы* $M_{0,G}$ *со свойством* $M_{0,G} \neq H_G$ *необходимо и достаточ-*

но, чтобы существовала нормальная подгруппа Γ, *для которой фактор-группа* $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ *нетривиальная.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть 0-максимальная подгруппа $M_{0,G}$ удовлетворяет условию $M_{0,G} \neq H_G$. Так как по замечанию 7.2 выполняется условие $M_{0,G}^s = H_G$, то достаточно положить $\Gamma = M_{0,G}$.

Достаточность. Пусть существует нормальная подгруппа Γ, для которой фактор-группа $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$ нетривиальная. Тогда для такой подгруппы существует свободно действующий элемент. Более того, по теореме 5.4 для такой группы существует инвариантная мера. Следовательно, по теореме 7.3 такая подгруппа содержится в 0-максимальной подгруппе $M_{0,G}$, для которой будет выполняться условие $M_{0,G} \neq H_G$.

Перейдем к описанию 1-максимальных подгрупп для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$.

Теорема 7.4. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ *и для группы* G *существует непустое минимальное множество. Тогда для группы* G *существует единственная* 1*-максимальная подгруппа* $M_{1,G}$*, любая нормальная подгруппа с проективно-инвариантной мерой содержится в подгруппе* $M_{1,G}$*, а подгруппа* $M_{1,G}$

1) *совпадает с группой* G*, если для группы* G *существует проективно-инвариантная мера;*
2) *совпадает с* 0*-максимальной подгруппой* $M_{0,G}$*, если для группы* G *не существует проективно-инвариантной меры.*

Доказательство. Если для группы G существует проективно-инвариантная мера, то доказательство очевидно.

Пусть для группы G не существует проективно-инвариантной меры. Покажем, что для любой нормальной подгруппы $Q \subseteq G$ с проективно-инвариантной мерой μ существует инвариантная мера. Действительно, предположим, что это не так. Тогда по теореме 6.5 группа Q будет проективно-строго эргодичной. Для любого элемента $g \in G$ в силу нормальности подгруппы Q мера $g_*\mu$ также будет проективно-инвариантной относительно группы Q (определение меры $g_*\mu$ см. в § 7). Так как группа Q проективно-строго эргодична, то найдется число $c(g) > 0$ такое, что $g_*\mu = c(g)\mu$. Поэтому мера μ оказывается проективно-инвариантной относительно исходной группы G. Противоречие. Следовательно, для любой нормальной подгруппы $Q \subseteq G$ с проективно-инвариантной мерой существует инвариантная мера. Но для таких групп 1-максимальная подгруппа совпадает с 0-максимальной подгруппой, и теорема доказана.

Мы уже отмечали, что для подгрупп группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ из существования проективно-инвариантной меры следует существование инвариантной меры, а для подгрупп группы $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ всякая проективно-инвариантная мера является инвариантной. Поэтому для таких подгрупп уточнение теоремы 7.4 либо формулировка ее аналогов не требуется.

Итак, для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством существует, причем единственная, 0-максимальная подгруппа $M_{0,G}$, для которой справедливы условия:

$$H_G \subseteq M_{0,G} \subseteq G, \qquad M_{0,G}^s = H_G.$$

По теореме о фактор-группе (теорема 2.1) $M_{0,G}/H_G$ является коммутативной группой. Поэтому сложность структуры таких групп G зависит от сложности фактор-группы $G/M_{0,G}$.

Теорема 7.5. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для нее существует непустое минимальное множество. Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих условий*:

1) *для группы G существует инвариантная мера и при этом фактор-группа $G/M_{0,G}$ тривиальная, а фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ коммутативная*;
2) *для группы G существует проективно-инвариантная мера, но не существует инвариантной меры и при этом фактор-группы $G/M_{0,G}$, $M_{0,G}/H_G$ нетривиальные и коммутативные, а фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ нециклическая*;
3) *для группы G не существует проективно-инвариантной меры, $G = C_G$ и при этом фактор-группа $G/M_{0,G}$ некоммутативная, а фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа*;
4) *для группы G не существует проективно-инвариантной меры, $G \neq C_G$ и при этом фактор-группа $G/M_{0,G}$ некоммутативная, а фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ тривиальная.*

Доказательство. Пункт 1). Пусть для группы G существует инвариантная мера. Тогда из определения 0-максимальной подгруппы следует, что $G = M_{0,G}$ и фактор-группа $G/M_{0,G}$ тривиальная. В таком случае из определения подгруппы H_G следует, что $H_G = G^s$ и по теореме о фактор-группе (теорема 2.1) $M_{0,G}/H_G$ коммутативная.

Пункт 2). Пусть для группы G существует проективно-инвариантная мера μ, но не существует инвариантной меры. По теореме 7.1 $M_{0,G} = C_G$, а по лемме 6.3 $\mathscr{H}_{\mu,G} = H_G$ и $\mathscr{C}_{\mu,G} = C_G$. Тогда коммутативность фактор-групп $G/M_{0,G}$, $M_{0,G}/H_G$ будет следовать из теоремы 6.1, а их нетривиальность и нецикличность $M_{0,G}/H_G$ – из леммы 6.1.

Пункты 3) и 4). Пусть для группы G не существует проективно-инвариантной меры. Для таких групп цикличность фактор-группы $M_{0,G}/H_G$ в случае $G = C_G$ и ее тривиальность в случае $G \neq C_G$ следует из теоремы 7.1. Нам остается доказать некоммутативность фактор-группы $G/M_{0,G}$. Заметим, что для группы G в силу теоремы 3.1 минимальное множество $E(G)$ недискретное и единственное. Доказательство проведем от противного.

Предположим, что фактор-группа $G/M_{0,G}$ коммутативная. Пусть μ является инвариантной мерой для 0-максимальной подгруппы $M_{0,G}$. Так как $M_{0,G}/H_G$ циклическая, то мы можем так переопределить меру μ, чтобы она удовлетворяла условиям: μ является инвариантной относительно $M_{0,G}$; мера μ непрерывная, и ее носитель совпадает с минимальным множеством исходной группы G, т.е. $\operatorname{supp}\mu = E(G)$. При этом фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ нетривиальная, а левый смежный класс mH_G определяет ее образующую. Не нарушая общности, можем считать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $m(t) > t$. Более того, меру μ можно так подобрать, чтобы в дополнение к перечисленным условиям она удовлетворяла и условию $\mu([0, m(0))) = 1$.

Определим отображение $\eta(t) = \widetilde{\mu}([0,t))$, где

$$\widetilde{\mu}([0,t)) = \begin{cases} \mu([0,t)), & t \geqslant 0, \\ -\mu((t,0]), & t < 0. \end{cases}$$

Отображение η является непрерывным, монотонно возрастающим и $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Определим группу ${}_*G$ гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, следующим образом: ${}_*G = \{{}_*g : {}_*g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$; существует $g \in G$ такой, что ${}_*g(\eta(t)) = \eta(g(t))$ для любого $t \in \mathbb{R}\}$. Отображение $\eta^{\#}: G \to {}_*G$, где $\eta^{\#}(g) = {}_*g$, ${}_*g(\eta(t)) = \eta(g(t))$, $t \in \mathbb{R}$, является эпиморфизмом и $\ker \eta^{\#} = H_G$. При этом если фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ не тривиальная, то $\eta^{\#}(m) = {}_*m$, ${}_*m(t) \equiv t+1$. Из определения группы ${}_*G$ следует, что минимальное множество $E({}_*G)$ группы ${}_*G$ совпадает с $\mathbb{R}$, т.е. $E({}_*G) = \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая.

Случай первый – фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ тривиальная. Тогда фактор-группа G/H_G также будет коммутативной. Так как $\ker \eta^{\#} = H_G$, то группа ${}_*G$ изоморфна фактор-группе G/H_G и, соответственно, коммутативна. Из коммутативности группы гомеоморфизмов ${}_*G$ следует, что для любого элемента ${}_*g \in {}_*G^s$ множество $\mathrm{Fix}\langle {}_*g\rangle$ инвариантно относительно группы ${}_*G$. В таком случае по теореме 3.1 справедливо включение $\mathbb{R} = E({}_*G) \subseteq \mathrm{Fix}\langle {}_*g\rangle$. Из справедливости такого включения для любого элемента ${}_*g \in {}_*G^s$ следует условие ${}_*G^s = \langle e\rangle$, что эквивалентно условию $\mathrm{Fix}\, {}_*G^s = \mathbb{R}$. Тогда по теореме 5.1 для группы ${}_*G$ существует инвариантная мера ${}_*\nu$. Определим на $\mathbb{R}$ меру ν по следующему правилу: для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 \geqslant t_1$,

$$\nu([t_1,t_2)) = {}_*\nu([\eta(t_1), \eta(t_2))).$$

Несложно видеть, что такое определение меры ν является корректным и носитель меры ν принадлежит минимальному множеству $E(G)$. Более того, в силу справедливости условия ${}_*g(\eta(t)) = \eta(g(t))$ для любых $g \in G$, ${}_*g = \eta^{\#}(g)$, $t \in \mathbb{R}$, мера ν будет инвариантной относительно исходной группы G. Противоречие. Следовательно, фактор-группа $G/M_{0,G}$ некоммутативная.

Случай второй – $M_{0,G}/H_G$ нетривиальная. По теореме 7.1 для такой группы G имеет место условие $G = C_G$. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$ сравним значения $\eta(g(t))$ и $\eta(g(m(t)))$. Очевидно, что

$$\eta(g(t)) = \widetilde{\mu}([0, g(t))), \qquad \eta(g(m(t))) = \widetilde{\mu}([0, g(m(t)))).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\eta(g(m(t))) &= \widetilde{\mu}([0, g(m(t)))) = \widetilde{\mu}([0, g(t))) + \mu([g(t), g(m(t)))) \\ &= \eta(g(t)) + g_*^{-1}\mu([t, m(t))).\end{aligned}$$

По предложению 5.4 $\tau_{g_*^{-1}\mu, M_{0,G}} = c(g^{-1})\tau_{\mu, M_{0,G}}$. В частности, из этого равенства в силу определения характера $\tau_{\mu, M_{0,G}}$ и того же предложения 5.4 следует, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $g \in G$ справедливо равенство

$$g_*^{-1}\mu([t, m(t))) = c(g^{-1})\mu([t, m(t))).$$

Так как $\mu([0, m(0))) = 1$, то характер $\tau_{\mu, M_{0,G}}$ будет нетривиальным. Тогда по предложению 5.6, в силу условия $G = C_G$, характер $A_{G,M_{0,G}}$ будет тривиальным, т.е. $A_{G,M_{0,G}} = 0$. Из тривиальности характера $A_{G,M_{0,G}}$ следует, что для любого $g \in G$ коэффициент $c(g^{-1})$ равен единице, т.е. мы получаем равенство

$$g_*^{-1}\mu([t, m(t))) = \mu([t, m(t))),$$

справедливое для любых $g \in G$ и $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, в силу предложения 5.4 для любых $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\mu([t, m(t))) = \mu([0, m(0))).$$

Окончательно получим, что любых $g \in G$ и $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$g_*^{-1}\mu([t, m(t))) = 1.$$

Таким образом, для любых $g \in G$ и $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(g(m(t))) = \eta(g(t)) + 1$$

и, в частности, $\eta(m(t)) = \eta(t) + 1$. Заметим, что

$${}_*g(\eta(t) + 1) = {}_*g(\eta(m(t))) = \eta(g(m(t))) = \eta(g(t)) + 1 = {}_*g(\eta(t)) + 1,$$

откуда следует, что любой элемент ${}_*g \in {}_*G$ перестановочен с элементом ${}_*m(t) \equiv t+1$. Следовательно, группа ${}_*G$ содержится в $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Несложно заметить, что подгруппа $M_{0,{}_*G} = \eta^{\#}(M_{0,G})$ совпадает с циклической подгруппой $\langle {}_*m \rangle$ и, как было доказано выше, принадлежит центру группы ${}_*G$. Так как $\ker \eta^{\#} = H_G$ и $M_{0,{}_*G} = \eta^{\#}(M_{0,G})$, то группа ${}_*G$ изоморфна фактор-группе G/H_G, а фактор-группа ${}_*G/M_{0,{}_*G}$ изоморфна фактор-группе $G/M_{0,G}$. В таком случае фактор-группа ${}_*G/M_{0,{}_*G}$ также будет коммутативной. Из коммутативности фактор-группы ${}_*G/M_{0,{}_*G}$ и принадлежности подгруппы $M_{0,{}_*G}$ к центру группы ${}_*G$ следует, что любой элемент ${}_*g \in {}_*G^s$ также будет принадлежать центру группы ${}_*G$. В силу этого для любого элемента ${}_*g \in {}_*G^s$ множество $\mathrm{Fix}\langle {}_*g \rangle$ будет инвариантным относительно группы ${}_*G$. В таком случае по теореме 3.1 справедливо включение $\mathbb{R} = E({}_*G) \subseteq \mathrm{Fix}\langle {}_*g \rangle$. Из справедливости такого включения для любого элемента ${}_*g \in {}_*G^s$ следует условие ${}_*G^s = \langle e \rangle$, что эквивалентно условию $\mathrm{Fix}\, {}_*G^s = \mathbb{R}$. Тогда по теореме 4.1 такая группа ${}_*G$ является коммутативной, а по теореме 5.1 для группы ${}_*G$ существует инвариантная мера ${}_*\nu$. Как и в первом случае, по мере ${}_*\nu$ мы можем построить меру ν, инвариантную относительно исходной группы G. Противоречие. Следовательно, фактор-группа $G/M_{0,G}$ некоммутативная.

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ теорема 7.5 допускает уточнения, так как для таких групп минимальное множество непустое, $G = C_G$, а из существования проективно-инвариантной меры следует существование инвариантной меры.

ТЕОРЕМА 7.6. *Пусть* $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. *Тогда* $G = C_G$ *и справедливо одно из следующих взаимоисключающих условий*:

1) *для группы* G *существует инвариантная мера и при этом фактор-группа* $G/M_{0,G}$ *тривиальная, а фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *коммутативная*;
2) *для группы* G *не существует инвариантной меры и при этом фактор-группа* $G/M_{0,G}$ *некоммутативная, а фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа.*

Теперь мы в состоянии сформулировать аналог теоремы 7.5 для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

ТЕОРЕМА 7.7. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. *Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих условий*:

1) *для группы* G *существует вероятностная мера и при этом фактор-группа* $G/M_{0,G}$ *тривиальная, а фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *коммутативная*;
2) *для группы* G *не существует вероятностной меры и при этом фактор-группа* $G/M_{0,G}$ *некоммутативная, а фактор-группа* $M_{0,G}/H_G$ *либо тривиальная, либо циклическая группа конечного порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Несложно заметить, что множества $\mathrm{Fix}\,\widehat{G^s}$ и $\mathrm{Fix}\,G^s$ непусты одновременно и при отображении λ образ множества $\mathrm{Fix}\,\widehat{G^s}$ совпадает с множеством $\mathrm{Fix}\,G^s$. Тогда по теореме 5.1 для группы $\widehat{G}$ инвариантная борелевская мера, конечная на компактах, существует тогда и только тогда, когда для группы G существует вероятностная мера. Заметим, что $H_{\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(H_G)$, $M_{0,\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(M_{0,G})$, $M^s_{0,\widehat{G}} = \pi_{\widehat{G}}^{-1}(M^s_{0,G})$. Так как группа $\widehat{G}$ принадлежит $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, то для нее справедлива теорема 7.6.

Если для группы G существует инвариантная вероятностная мера, то доказательство очевидным образом следует из п. 1) теоремы 7.6.

Предположим, что для группы G не существует инвариантной вероятностной меры. Тогда для группы $\widehat{G}$ также не существует инвариантной меры. В таком случае некоммутативность фактор-группы $G/M_{0,G}$ следует из некоммутативности фактор-группы $\widehat{G}/M_{0,\widehat{G}}$. Остается показать, что фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ либо тривиальная, либо циклическая группа конечного порядка. Но по теореме 7.6 фактор-группа $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$ либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа. Заметим, что элемент $\overline{g}(t) = t + 1$ принадлежит группе $M_{0,\widehat{G}}$. Поэтому фактор-группа $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$ всегда бесконечная циклическая группа. Пусть левый смежный класс $\widehat{g}H_{\widehat{G}}$ определяет образующую фактор-группы $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}}$. Тогда найдется натуральное n такое, что $\widehat{g}^n H_{\widehat{G}} = \overline{g}H_{\widehat{G}}$. Гомоморфизм $\pi_{\widehat{G}} \colon \widehat{G} \to G$ индуцирует естественный гомоморфизм фактор-групп $M_{0,\widehat{G}}/H_{\widehat{G}} \to M_{0,G}/H_G$, при котором левый смежный класс $\overline{g}H_{\widehat{G}}$ переходит в H_G. Следовательно, фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ является циклической группой конечного порядка.

Для групп G с непустым минимальным множеством теорема 7.5 в терминах фактор-групп $G/M_{0,G}$, $M_{0,G}/H_G$ дает критерии существования либо отсутствия инвариантных и проективно-инвариантных мер. Как следует из теоремы 7.5, структура выделенных фактор-групп строго определенная и произвольной быть не может.

С другой стороны, для групп с проективно-инвариантной мерой, в силу той же теоремы 7.5 фактор-группа G/H_G является разрешимой ступени не больше двух. Интересен вопрос о наличии критерия существования проективно-инвариантной меры, сформулированного в терминах фактор-группы G/H_G. Теорема 7.5 на этот вопрос не отвечает, ибо в случае отсутствия проективно-инвариантной меры мы можем утверждать только лишь, что фактор-группа G/H_G некоммутативна. Все эти вопросы будут обсуждены в § 9.

7.2. Топологические признаки существования ω-проективно-инвариантной меры. Одним из первых результатов по метрическим инвариантам является теорема Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности. Во введении мы отмечали, что по истории вопроса о существовании инвариантной меры для групп гомеоморфизмов локально компактного пространства существует исчерпывающий обзор [2]. Как нами было отмечено, ω-проективно-инвариантные меры являются обобщением проективно-инвариантных мер и, в частности, инвариантных мер. В предыдущих параграфах были подробно исследованы инвариантные и проективно-инвариантные меры: получен ряд критериев существования таких мер; описаны носители этих мер; сформулированы теоремы об эргодичности. Здесь будут приведены признаки существования этих более общих метрических инвариантов.

Теорема 7.8 (обобщенная теорема Боголюбова–Крылова) [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если минимальное множество группы G непусто, то найдется такое кардинальное число ω, что для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера.*

Так как для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ всегда существует минимальное множество, то теорема 7.8 может быть уточнена.

Теорема 7.9. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$. Тогда найдется такое кардинальное число ω, что для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера.*

Теперь мы можем сформулировать теорему о существовании ω-проективно-инвариантной меры для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

Теорема 7.10. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Тогда найдется такое кардинальное число ω, что для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера.*

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в § 1 (см. предложение 1.1). Так как $\widehat{G} \subset \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, то найдется такое кардинальное число ω, что для группы $\widehat{G}$ существует ω-проективно-инвариантная мера. В работе [11] доказательство существования ω-проективно-инвариантной меры построено на изучении свойств произвольной максимальной цепи вложенных G-инвариантных замкнутых выпуклых конусов в пространстве мер $\mathscr{M}^+$. Показано, что для любой такой максимальной цепи существует ω-проективно-инвариантная мера, принадлежащая всем элементам этой цепи. Очевидно, мы можем рассмотреть такую максимальную цепь, стартуя с конуса $\mathscr{K}_\mu(\widehat{G})$ (см. определение 7.1), где μ – некоторая мера, инвариантная относительно сдвига $\overline{g}(t) = t+1$. Так как $\widehat{G} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}_+}(S^1)$, то все меры из конуса $\mathscr{K}_\mu(\widehat{G})$ также будут инвариантны относительно сдвига $\overline{g}$. Тогда ω-проективно-инвариантная мера $\widehat{\mu}$ также будет инвариантна относительно сдвига $\overline{g}$. Несложно заметить, что ограничение меры $\widehat{\mu}$ на полуинтервал $[0,1)$ будет задавать ω-проективно-инвариантную меру для исходной группы G.

Здесь интересен следующий вопрос. В каких случаях существует ω-проективно-инвариантная мера с конечным ω? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 7.11. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и для нее существует непустое минимальное множество. Если для группы G не существует проективно-инвариантной меры, то для любой ω-проективно-инвариантной меры μ кардинальное число ω не может быть конечным.*

Доказательство. Так как для группы G не существует проективно-инвариантной меры, то минимальное множество $E(G)$ недискретное.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует ω-проективно-инвариантная мера μ, для которой кардинальное число ω конечное. Конечность ω означает, что орбита $G_*(\mu) = \{g_*\mu : g \in G\}$ расположена на конечном числе лучей пространства мер $\mathscr{M}$, т.е. количество лучей $\{\lambda g_*\mu : \lambda \in \mathbb{R}_+\}_{g\in G}$ в пространстве $\mathscr{M}$ конечно. Определим нормальную подгруппу Q группы G по следующему правилу:

$$Q = \{q : \forall\, g \in G,\ q_*(g_*\mu) = \gamma_{qg} g_*\mu,\ \gamma_{qg} > 0\}.$$

Для подгруппы Q_* крайние лучи $\{\lambda g_*\mu : \lambda \in \mathbb{R}_+\}_{g\in G}$ являются инвариантными.

В частности, луч $\{\lambda\mu : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ будет инвариантен относительно подгруппы Q_*, т.е. мера μ является проективно-инвариантной относительно подгруппы Q. Тогда по теореме 7.4 подгруппа Q содержится в 0-максимальной подгруппе $M_{0,G}$. Так как крайних лучей конечное число, то фактор-группа G/Q будет конечной. В таком случае фактор-группа $G/M_{0,G}$ также конечная. По теореме 7.1 (пп. 3) и 4)) фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ либо тривиальная, либо циклическая. Образующей такой циклической группы является свободно действующий гомеоморфизм. Тогда из определения подгруппы H_G следует, что в обоих случаях для любой точки $t \in E(G)$ орбита $G(t)$ будет дискретной, а значит, дискретно и само минимальное множество. Противоречие. Следовательно, кардинальное число ω не может быть конечным.

Так как для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ всегда существует непустое минимальное множество, то теорема 7.11 допускает естественное уточнение.

Теорема 7.12. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Если для группы G не существует инвариантной меры, то для любой ω-проективно-инвариантной меры μ кардинальное число ω не может быть конечным.*

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G}$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в §1 (см. предложение 1.1). Покажем, что для группы $\widehat{G}$ не существует проективно-инвариантной меры. Действительно, в противном случае в силу предложения 6.5 для такой группы существует инвариантная мера $\widetilde{\mu}$. Тогда ограничение меры $\widetilde{\mu}$ на полуинтервал $[0,1)$ будет задавать меру, инвариантную относительно исходной группы G. Противоречие. Следовательно, для группы $\widehat{G}$ не существует проективно-инвариантной меры. По мере μ можно однозначно определить меру $\widehat{\mu}$ на всем $\mathbb{R}$ по следующему правилу:

$\widehat{\mu}|_{[0,1]} = \mu$; $\widehat{\mu}$ инвариантна относительно сдвига $\overline{g}(t) \equiv t+1$. Несложно видеть, что мера $\widehat{\mu}$ является ω-проективно-инвариантной относительно группы $\widehat{G}$. Поэтому по теореме 7.11 оно не может быть конечным.

Утверждение обобщенной теоремы Боголюбова–Крылова (теорема 7.8) о существовании ω-проективно-инвариантной меры, вероятнее всего, имеет обращение.

Гипотеза 7.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Если для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера, то минимальное множество непустое.*

Для ω-проективно-инвариантной меры также важно описание как ее носителей, так и ее эргодических свойств. Носители инвариантных и проективно-инвариантных мер нами уже описаны.

Гипотеза 7.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера μ $(\omega \neq 1)$, но не существует проективно-инвариантной меры. Тогда носитель $\operatorname{supp}\mu$ меры μ совпадает с минимальным множеством.*

Гипотеза 7.3. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для группы G существует ω-проективно-инвариантная мера μ $(\omega \neq 1)$, но не существует проективно-инвариантной меры. Тогда группа G строго эргодичная, т.е. для любой $\overline{\omega}$-проективно-инвариантной меры $\overline{\mu}$ справедливо условие $\overline{\mu} \in \mathscr{K}_\mu(G)$.*

§8. Метрические инварианты и полусопряженность

Важность метрических инвариантов в задаче классификации групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, обуславливает систематическое исследование как вопроса существования таких инвариантов, так и их характеристик. В частности, к таким характеристикам относится определенное в работе [9] понятие полусопряженности, которое оказывается каноническим объектом теории метрических инвариантов для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$. Связь такого определения полусопряженности с метрическими инвариантами позволяет поставить вопрос о выделении классов групп гомеоморфизмов прямой, элементам из которых будет полусопряжена заданная группа гомеоморфизмов с непустым минимальным множеством. В работах [29], [19] приводится другое определение полусопряженности. Взаимосвязи между такими определениями полусопряженности будут обсуждены ниже.

Определение 8.1 [9]. Пусть заданы группы $G, {}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Группа G называется *полусопряженной* группе ${}_*G$, если существуют сохраняющее ориентацию (монотонно возрастающее) отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с образом, состоящим из более чем одной точки, и эпиморфизм $\eta^\# : G \to {}_*G$ такие, что для любого $q \in G$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{{}_*g=\eta^\#(g)} & \mathbb{R} \\ \eta\Big\uparrow & & \Big\uparrow\eta \\ \mathbb{R} & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\eta^\#(g)\eta = \eta g$.

Если в определении полусопряженности отображение η непрерывно, то говорят о топологической полусопряженности. Если отображение η является гомеоморфизмом, и как следствие эпиморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом, то группа G называется топологически сопряженной группе ${}_*G$ или просто *сопряженной*.

Определение 8.2. Пусть заданы группы $G, {}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. Группа G называется *полусопряженной* группе ${}_*G$, если:

1) группа $\widehat{G} \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ полусопряжена группе ${}_*\widehat{G} \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, где $\widehat{G}$ и ${}_*\widehat{G}$ – группы накрытий для гомеоморфизмов окружности из G и ${}_*G$ соответственно (см. §1);
2) отображение η из определения 8.1 коммутирует с гомеоморфизмом $\overline{g}(t) = t+1$, т.е. $\eta\overline{g} = \overline{g}\eta$.

Приведем определение полусопряженности из работ [29], [19]. Пусть Γ – абстрактная группа. Действием группы Γ на $\mathbb{R}$ будем называть гомоморфизм $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Действие Φ называется полусопряженным действию ${}_*\Phi$, если существует сохраняющее ориентацию (монотонно возрастающее) отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что образ состоит из более чем одной точки и для любого $\gamma \in \Gamma$ справедливо правило перестановочности $\eta\Phi(\gamma) = {}_*\Phi(\gamma)\eta$. Такое определение полусопряженности позволяет сравнивать алгебраические свойства подгрупп группы $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ с соответствующими свойствами выделенной абстрактной группы Γ. Более того, Э. Гизом установлено, что такая полусопряженность задает отношение эквивалентности. Если гомоморфизм Φ является мономорфизмом, то, отождествляя группу Γ с ее образом $\mathrm{Im}\,\Phi$, получим понятие полусопряженности из определения 8.1. Мы уже отмечали, что полусопряженность из определения 8.1 важна тем, что является каноническим объектом теории метрических инвариантов, что и будет продемонстрировано в теоремах 8.1 и 8.3.

Далее в терминах полусопряженности для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ (теоремы 8.1, 8.2) и групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ (теоремы 8.4, 8.5) будут сформулированы критерии существования инвариантных мер, а также проективно-инвариантных мер (теоремы 8.3, 8.6). Приводится один признак полусопряженности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ группе аффинных преобразований прямой (теорема 8.7). Для группы $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(\mathbb{R})$ сформулирован критерий ее сопряженности некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ (предложение 8.1). Даются эквивалентные переформулировки теорем 8.4–8.6. Такие переформулировки (теоремы 8.4′–8.6′) позволяют сформулировать соответствующую гипотезу для групп с ω-проективно-инвариантной мерой.

Теорема 8.1 [9]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ сдвигов на прямой.*

Сформулируем аналог теоремы 8.1 для групп, действующих на окружности.

Теорема 8.2. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует вероятностная мера μ, инвариантная относительно группы G*;

(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ вращений окружности.*

Доказательство. Пусть группа $\widehat{G} \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что и в §1 (см. предложение 1.1). Заметим, что вероятностная мера, инвариантная относительно исходной группы G, существует тогда и только тогда, когда существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы $\widehat{G}$. В таком случае утверждение теоремы будет следовать из теоремы 8.1, примененной к группе $\widehat{G}$.

Теорема 8.3 [10]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы G*;
(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию.*

Замечание 8.1. В теоремах 8.1, 8.3 мера μ и соответствующее отображение η из определения полусопряженности связаны соотношением

$$\eta(t) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, t)), \qquad \widetilde{\mu}([\overline{t}, t)) = \begin{cases} +\mu([\overline{t}, t)), & \text{если } t \geqslant \overline{t}, \\ -\mu((t, \overline{t}\,]), & \text{если } t < \overline{t}, \end{cases}$$

где $\overline{t} \in \mathbb{R}$ – некоторая заданная точка. Из непрерывности отображения η следует непрерывность меры μ и наоборот.

Теперь мы можем сформулировать аналоги теорем 8.1–8.3 для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$.

Теорема 8.4. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и инвариантная относительно группы G*;
(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ изометрий.*

Доказательство. Пусть существует мера μ, инвариантная относительно группы G. Если $G = G_+$, то доказательство следует из теоремы 5.1. Пусть $G \neq G_+$. Тогда по теореме 8.1 подгруппа G_+ будет полусопряжена некоторой подгруппе ${}_*G_+$ группы сдвигов. Отображение η из определения полусопряженности задается с помощью формул из замечания 8.1. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \backslash G_+$. Остается показать, что с помощью отображения η гомеоморфизм f будет полусопряжен некоторой изометрии. Действительно, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(f(t)) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(t))) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(\overline{t}\,))) + \widetilde{\mu}([f(\overline{t}\,), f(t))).$$

Так как гомеоморфизм f меняет ориентацию, а мера μ инвариантна относительно f, то

$$\widetilde{\mu}([f(\overline{t}\,), f(t))) = -\widetilde{\mu}([\overline{t}, t)) = -\eta(t).$$

Окончательно получим, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(f(t)) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(\overline{t}\,))) - \eta(t),$$

т.е. отображение f полусопряжено изометрии.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ изометрий. Тогда G_+ будет полусопряжена некоторой группе сдвигов и по теореме 8.1 существует мера, инвариантная относительно G_+. Тогда по теореме 5.10 существует мера, инвариантная относительно исходной группы G.

Теорема 8.5. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует вероятностная мера, инвариантная относительно группы* G;
(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ *изометрий.*

Доказательство. Пусть $\widehat{G} \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ и отображения $\overline{g}$, λ, $\pi_{\widehat{G}}$ те же, что в § 1 (см. предложение 1.1). Заметим, что вероятностная мера, инвариантная относительно исходной группы G, существует тогда и только тогда, когда существует борелевская мера, конечная на компактах и инвариантная относительно группы $\widehat{G}$. В таком случае утверждение теоремы будет следовать из теоремы 8.4, примененной к группе $\widehat{G}$.

В теоремах 8.4 и 8.5 важно знать, как устроено ядро гомоморфизма $\eta^{\#}$ из определения полусопряженности.

Следствие 8.1. *В условиях теорем* 8.4 *и* 8.5 *справедливо равенство* $\ker \eta^{\#} = H_G$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно провести доказательство для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. По лемме 5.2 $H_G = G^s$. Так как носитель инвариантной меры μ принадлежит непустому множеству $\mathrm{Fix}\, G^s$, то в силу замечания 8.1 справедливо равенство $\ker \eta^{\#} = G^s$.

Теорема 8.6. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера* μ, *конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы* G;
(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ *аффинных преобразований прямой.*

Доказательство. Пусть существует мера μ, проективно-инвариантная относительно группы G. Если $G = G_+$, то доказательство следует из теоремы 8.3. Пусть $G \neq G_+$. Тогда по теореме 8.1 подгруппа G_+ будет полусопряжена некоторой подгруппе ${}_*G_+$ группы аффинных преобразований. Отображение η из определения полусопряженности задается с помощью формул из замечания 8.1. Мы знаем, что $G = G_+ \cup fG_+$, где f – некоторый элемент из $G \setminus G_+$. Остается показать, что с помощью отображения η гомеоморфизм f будет полусопряжен некоторому аффинному преобразованию. Действительно, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(f(t)) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(t))) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(\overline{t}\,))) + \widetilde{\mu}([f(\overline{t}\,), f(t))).$$

Так как гомеоморфизм f меняет ориентацию, а мера μ – проективно-инвариантная относительно f, то

$$\widetilde{\mu}([f(\overline{t}\,), f(t))) = -c(f)\widetilde{\mu}([\overline{t}, t)) = -c(f)\eta(t),$$

где $c(f)$ – некоторая положительная константа. Окончательно получим, что для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(f(t)) = \widetilde{\mu}([\overline{t}, f(\overline{t}\,))) - c(f)\eta(t),$$

т.е. отображение f полусопряжено аффинному преобразованию.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ аффинных преобразований. Тогда G_+ будет полусопряжена некоторой группе аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию, и по теореме 8.3 существует мера, проективно-инвариантная относительно G_+. Тогда по теореме 6.6 существует мера, проективно-инвариантная относительно исходной группы G.

В теореме 8.6 также важно знать, как устроено ядро гомоморфизма $\eta^{\#}$ из определения полусопряженности.

Следствие 8.1. *Пусть для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ не существует инвариантной меры. Тогда в условиях теоремы 8.6 справедливо равенство $\ker \eta^{\#} = H_G$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно провести доказательство для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Так как для группы G не существует инвариантной меры, то минимальное множество такой группы недискретное (предложение 6.3). По теореме 6.3 носитель проективно-инвариантной меры такой группы совпадает с минимальным множеством. Тогда в силу замечания 8.1 справедливо условие $\ker \eta^{\#} = H_G$.

В работе В. В. Солодова [41] для одного класса групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ сформулирован результат об их полусопряженности некоторым группам аффинных преобразований прямой. Приведем его доказательство, основанное на теоремах 6.4 и 8.3.

Теорема 8.7 [41]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ – некоммутативная группа и для любого элемента $g \in G \setminus e$ множество $\mathrm{Fix}\langle g \rangle$ состоит из не более чем одной точки. Тогда группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ аффинных преобразований прямой и при этом гомоморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Покажем, что для группы G не существует инвариантной меры. Доказательство проведем от противного. Пусть существует инвариантная мера. Тогда по теореме 5.1 выполняется условие $\mathrm{Fix}\, G^s \neq \varnothing$. Так как для любого $g \in G \setminus e$ множество $\mathrm{Fix}\langle g \rangle$ состоит из не более чем одной точки, то либо $G^s = \langle e \rangle$, либо $G = G^s$. Если $G^s = \langle e \rangle$, то по теореме 2.1 группа G коммутативная, чего не может быть. Если $G = G^s$, то, не ограничивая общности, можем считать, что множество $\mathrm{Fix}\, G^s$ совпадает с точкой 0. Очевидно, что действие группы G на $\mathbb{R}$ распадается на действия на полупрямых $\mathbb{R}_- = \,]-\infty, 0[$, $\mathbb{R}_+ = \,]0, +\infty[$. Рассмотрим ее действие на полупрямой $\mathbb{R}_+ = \,]0, +\infty[$. Применив преобразование $\theta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\theta(t) = e^t$, получим действие индуцированной группы на прямой. Элементы такой группы, отличные от единицы, действуют свободно. Тогда по теореме 5.1 такая группа коммутативная. Точно так же мы поступим и с действием исходной группы на полупрямой $\mathbb{R}_- = \,]-\infty, 0[$. В итоге получим, что исходная группа G коммутативная, чего не может быть.

Заметим, что для группы G справедливо условие $G^s_\infty = \langle e\rangle$. Поэтому для такой группы условие 1) теоремы 6.4 выполняется.

Если элемент $g \in G \setminus e$ имеет неподвижную точку, то обозначим ее через t_g. Так как группа G некоммутативная, а любой элемент имеет не более одной неподвижной точки, то график преобразования g с неподвижной точкой t_g справа от t_g и слева от t_g будет находиться по разные стороны от диагонали. Следовательно, для группы G выполняется условие 2) теоремы 6.4.

Условие 3) теоремы 6.4 также выполняется, ибо любой элемент $g \in G \setminus e$ имеет не более одной неподвижной точки. Поэтому по теореме 6.4 для группы G существует проективно-инвариантная мера μ, а по теореме 8.3 группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G$ аффинных преобразований прямой. По следствию 8.2 $\ker \eta^\# = G^s_\infty$. Так как $G^s_\infty = \langle e\rangle$, то гомоморфизм $\eta^\#$ является изоморфизмом.

Важным классом групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ являются группы, топологически сопряженные группам ${}_*G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, элементы которых являются накрытиями окружности. Приведем критерий такой топологической сопряженности.

Предложение 8.1 [10]. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. *Группа* G *топологически сопряжена группе* ${}_*G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ *тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм* $\widehat{g} \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ *такой, что*:

1) *гомеоморфизм* $\widehat{g}$ *свободно действует на прямой*;
2) $\widehat{g}$ *перестановочен со всеми элементами группы* G.

Выше были даны критерии полусопряженности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ группе сдвигов и группе аффинных преобразований, что было эквивалентно существованию инвариантной и проективно-инвариантной меры соответственно. Для формулировки критерия полусопряженности группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с ω-проективно-инвариантной мерой некоторой канонической группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ необходимо дать эквивалентные переформулировки теорем 8.4–8.6.

Теорема 8.4$'$. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера* μ, *конечная на компактах и инвариантная относительно группы* G;
(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, *относительно которой мера Лебега* dt *является инвариантной.*

Теорема 8.5$'$. *Пусть* $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует вероятностная мера, инвариантная относительно группы* G;
(2) *группа* G *полусопряжена некоторой группе* ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$, *относительно которой мера Лебега* dt *является инвариантной.*

Теорема 8.6$'$. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и проективно-инвариантная относительно группы G*;
(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, относительно которой мера Лебега dt является проективно-инвариантной.*

Теперь мы можем сформулировать гипотезу о полусопряженности для групп с ω-проективно-инвариантной мерой.

Гипотеза 8.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *существует борелевская мера μ, конечная на компактах и ω-проективно-инвариантная относительно группы G*;
(2) *группа G полусопряжена некоторой группе ${}_*G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$, относительно которой мера Лебега dt является ω-проективно-инвариантной.*

§ 9. О комбинаторных свойствах групп гомеоморфизмов прямой и окружности

Мы уже установили, что для групп гомеоморфизмов прямой с непустым минимальным множеством существует метрический инвариант в виде ω-проективно-инвариантной меры, где ω – некоторое кардинальное число (теорема 7.4). Естественно поставить вопрос: какие дополнительные условия необходимы (или, что то же, какие существуют “препятствия”), чтобы ω-проективно-инвариантная мера оказалась инвариантной либо проективно-инвариантной? Оказывается, эти “препятствия” имеют комбинаторный характер и связаны с комбинаторными характеристиками фактор-группы исходной группы по максимальной нормальной подгруппе с инвариантной мерой, исследованной в § 7. Центральный результат по этой проблеме приводится в теоремах 9.3 и 9.8. Уточнение теоремы 9.3 для группы гомеоморфизмов окружности (теорема 9.7) является неулучшаемым усилением гипотезы Гиза о существовании инвариантной меры, доказанной Г. Маргулисом (теорема 9.2). Используя теорему о фактор-группе, полученные результаты о существовании инвариантной, либо проективно-инвариантной меры удается переформулировать в виде аналогов альтернативы Титса, использующие только лишь комбинаторные характеристики исходной группы (теоремы 9.4$'$, 9.7$'$, 9.8$'$).

Далее будет сформулирована замечательная теорема Планте о критерии существования инвариантной меры для конечно-порожденных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (теорема 9.1). К сожалению, теорема Планте не допускает распространения на случай не конечно-порожденных групп. Для произвольных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ описано комбинаторное “препятствие” для существования проективно-инвариантной меры (теорема 9.3), а также его модификации (теорема 9.4). Отмеченные результаты получены и для общих групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ (теорема 9.5). В случае групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ и $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ такое “препятствие” становится комбинаторным “препятствием” для существования уже инвариантной меры (теоремы 9.6, 9.7). Для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$

сформулирован другой комбинаторный критерий существования инвариантной меры (теорема 9.8). Все отмеченные критерии существования метрических инвариантов для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(X)$ допускают переформулировку в терминах комбинаторных характеристик исходной группы в виде аналога альтернативы Титса (теоремы 9.4$'$, 9.7$'$, 9.8$'$). Для этого будут сформулированы предварительные результаты для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ (леммы 9.3–9.5). Приводятся конструкции свободной подгруппы с двумя образующими из $\widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ (лемма 9.1) и свободной подполугруппы с двумя образующими из $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ (лемма 9.2).

9.1. Проблема существования инвариантных и проективно-инвариантных мер и связанные с ними комбинаторные “препятствия”. Вначале результат такого типа сформулируем для конечно-порожденных групп. Для таких групп известно, что минимальное множество всегда непусто (теорема 3.4).

Определение 9.1. Конечно-порожденная группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ имеет *неэкспоненциальный рост*, если

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |G^n| = 0,$$

где G^n – слова длины не более чем n, а $|G^n|$ – их мощность. Орбита $G(t)$ точки $t \in \mathbb{R}$ имеет неэкспоненциальный рост, если

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |G^n(t)| = 0.$$

Сформулируем замечательную теорему Планте, в которой для конечно-порожденной группы приводится комбинаторный критерий существования инвариантной меры.

Теорема 9.1 [32]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ – конечно-порожденная группа. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $t \in \mathbb{R}$, орбита которой имеет неэкспоненциальный рост.*

К сожалению, теорема Планте не допускает обобщения на произвольные группы.

В работе [28] Г. Маргулисом была доказана гипотеза Гиза.

Теорема 9.2 [28]. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ или существует свободная подгруппа с двумя образующими, или существует вероятностная инвариантная мера на S^1.*

Результат, эквивалентный альтернативе из теоремы 9.2, получен в работе В. В. Солодова [40]. В указанной работе условие существования инвариантной меры заменено на эквивалентное (в силу теоремы 5.14) условие: псевдохарактер τ_G является характером.

Очевидно, что альтернатива из теоремы 9.2 является усилением теоремы Дэйя для случая окружности: *для аменабельной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ существует вероятностная инвариантная мера.*

Неулучшаемое усиление альтернативы из теоремы 9.2 может быть получено как следствие нижеследующей теоремы 9.3 и сформулировано в виде теоремы 9.7.

В конце раздела 7.1 ставился вопрос о критерии существования проективно-инвариантной меры в терминах фактор-группы G/H_G. Оказывается, что для групп G с нетривиальной фактор-группой $M_{0,G}/H_G$ такой критерий можно сформулировать.

ТЕОРЕМА 9.3 [11]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, для группы G существует непустое минимальное множество, а фактор-группа $M_{0,G}/H_G$ нетривиальная. Тогда для существования проективно-инвариантной борелевской меры, конечной на компактах, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G не содержала свободных подгрупп с двумя образующими.*

Напомним, что в теореме 9.3 условие непустоты минимального множества и нетривиальности фактор-группы $M_{0,G}/H_G$ в силу леммы 5.1 и предложения 7.1 допускает еще две эквивалентные переформулировки:

1) для группы G существует нормальная подгруппа Γ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом;
2) для группы G существует нормальная подгруппа Γ с нетривиальной фактор-группой $\Gamma/\langle\Gamma^s\rangle$.

Дадим эквивалентную переформулировку теоремы 9.3.

ТЕОРЕМА 9.4. *Пусть группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу Γ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

В работе Ж.-Ф. Планте [33] приводится доказательство достаточного условия теоремы 9.4 при более сильном предположении, что фактор-группа G/Γ является аменабельной (фактор-группы G/Γ и G/H_G аменабельны одновременно). В той же работе [33] доказано существование проективно-инвариантной меры для специальных разрешимых групп.

В [16] утверждение теоремы 9.3 было получено для произвольной группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, которую мы и приводим.

ТЕОРЕМА 9.5 [16]. *Пусть группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу Γ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ теорема 9.5 может быть уточнена.

ТЕОРЕМА 9.6. *Пусть $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$. Тогда для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для группы G инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера для подгруппы G_+ (теорема 5.10). С другой стороны, фактор-группы G/H_G, G_+/H_G не содержат свободных подгрупп с двумя образующими одновременно. Поэтому достаточно доказательство провести для групп $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$.

По предложению 6.5 для группы G проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера. Образуем группу $\Pi = \langle G, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g}(t) = t+1$. Для произвольной группы $Q \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ минимальное множество непусто (теорема 3.6), а инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная мера для группы $\langle Q, \overline{g}\rangle$ (предложение 5.5). Отсюда следует, что для группы Π 0-максимальная подгруппа $M_{0,\Pi}$ существует и содержит элемент $\overline{g}$. Поэтому $M_{0,\Pi} \neq H_\Pi$ и для группы Π выполняются условия теоремы 9.3. Для завершения доказательства остается заметить, что фактор-группы G/H_G и Π/H_Π одновременно либо содержат свободную подгруппу с двумя образующими, либо ее не содержат.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог теоремы 9.5 для групп, действующих на окружности.

Теорема 9.7 [16]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$. Для существования вероятностной меры, инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G не содержала свободной подгруппы с двумя образующими.*

Доказательство. Заметим, что для группы G инвариантная вероятностная мера существует тогда и только тогда, когда существует инвариантная вероятностная мера для подгруппы G_+ (теорема 5.10). С другой стороны, фактор-группы G/H_G, G_+/H_G не содержат свободных подгрупп с двумя образующими одновременно. Поэтому достаточно провести доказательство для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$.

Для элемента $g \in G$ через l_g обозначим гомеоморфизм прямой, являющийся накрытием гомеоморфизма окружности g и нормированный условием $0 \leqslant l_g(0) < 1$. Образуем группу $\widehat{G} = \langle \{l_g\}_{g\in G}, \overline{g}\rangle$, где $\overline{g}(t) = t+1$. Для группы G инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда она существует для группы $\widehat{G}$. Пусть $\Gamma = \langle H_{\widehat{G}}, \overline{g}\rangle$. Ядро естественного эпиморфизма $\pi\colon \widehat{G} \to G$ равно $\ker\pi = \langle \overline{g}\rangle$ и $\pi(\Gamma) = H_G$. Следовательно, фактор-группы $\widehat{G}/\Gamma$ и G/H_G изоморфны. С другой стороны, фактор-группы $\widehat{G}/\Gamma$ и $\widehat{G}/H_{\widehat{G}}$ одновременно либо содержат свободную подгруппу с двумя образующими, либо ее не содержат. В таком случае для группы $\widehat{G}$ выполняются все условия теоремы 9.4, откуда и следует доказательство.

Замечание 9.1. Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(X)$ фактор-группа G/H_G может быть реализована как группа действий на X. Для любого класса смежности gH_G соответствующее ей действие на минимальном множестве совпадает с действием элемента g, а вне минимального множества действует растяжениями на максимальных открытых интервалах. При этом инвариантная мера для группы G является инвариантной мерой для фактор-группы G/H_G и наоборот.

Альтернатива, сформулированная в теореме 9.7, является неулучшаемым усилением альтернативы, доказанной Маргулисом (теорема 9.2). Заметим, что в случае $H_G = \langle e\rangle$ теоремы 9.2 и 9.7 эквивалентны, т.е. слабая альтернатива эквивалентна сильной. Для справедливости равенства $H_G = \langle e\rangle$ достаточно, чтобы минимальное множество группы G совпадало со всей прямой. Этот факт отмечен в работе Э. Гиза [19].

Теперь мы попытаемся для групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ сформулировать критерий существования инвариантной меры. Очевидно, что, в отличие от критерия существования проективно-инвариантной меры (теорема 9.4), условия на фактор-группу G/H_G должны быть более жесткими.

Теорема 9.8 [16]. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:

(1) *для группы G существует непустое минимальное множество*;

(2) *фактор-группа G/H_G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими.*

Напомним, что для конечно-порожденных групп минимальное множество непусто. В работе В.В. Солодова [39] для специальных конечно-порожденных групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ получен результат, эквивалентный более сильному достаточному условию: *если группа G не содержит свободной подполугруппы с двумя образующими, то множество* $\mathrm{Fix}\, G^s$ *непусто* (в силу теоремы 5.1 последнее условие эквивалентно условию существования инвариантной борелевской меры, конечной на компактах).

Если для любого элемента группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ множество неподвижных точек дискретное, то по теореме 3.3 минимальное множество такой группы непусто. Если группа абелева, то для нее справедливо условие (2) теоремы 9.8, так как она не может содержать неабелевой свободной подполугруппы с двумя образующими. Следовательно, для таких групп существует инвариантная мера. Такая теорема доказана в работе Э. Планте [32]. В другой работе Э. Планте [33] для абелевых групп $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ также сформулированы признаки существования инвариантной меры. Такими признаками являются наличие свободно действующего гомеоморфизма $g \in G$ либо условие принадлежности элементов группы G пространству $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{R})$. В силу теорем 3.3 и 3.5 для таких групп минимальное множество непусто. Так как группа абелева, то она не может содержать неабелевой свободной подполугруппы с двумя образующими. Следовательно, для таких групп по теореме 9.8 будет существовать инвариантная мера.

И наконец, приведем две леммы Солодова. В первой строится свободная группа $G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$ с двумя образующими, а во второй строится свободная подполугруппа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с двумя образующими.

Лемма 9.1 [40]. *Если $g_1, g_2 \in G \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}(S^1)$, $\tau(g_1)=0$, $\tau(g_2)=0$, но $\tau(g_1g_2)\neq 0$, то между некоторыми степенями g_1 и g_2 нет нетривиальных соотношений.*

Лемма 9.2 [39]. *Если $g_1, g_2 \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, $g_1(a) = a$, $g_2(b) = b$, преобразование g_1 не имеет неподвижных точек в интервале (c, a), $b \in (c, a)$, а преобразование g_2 не имеет неподвижных точек в интервале (b, d), $a \in (b, d)$, то группа, порожденная g_1 и g_2, содержит свободную подполугруппу с двумя образующими.*

В теореме 9.4 предполагалось существование специальной нормальной подгруппы Γ. Можно ли отказаться от такого априорного предположения за счет усиление иных условий? Ответ на такой вопрос содержится в следующей гипотезе.

Гипотеза 9.1. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и проективно-инвариантной относительно группы G, необходимо и достаточно, чтобы фактор-группа G/H_G была аменабельной.*

9.2. Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов прямой и окружности. Приводимые критерии существования проективно-инвариантной и инвариантной мер в виде альтернативы используют как метрические, так и комбинаторные характеристики группы. Хотелось бы сформулировать альтернативы, использующие только лишь комбинаторные характеристики группы. Таким примером служит знаменитая альтернатива Титса [51]: *конечно-порожденная линейная группа либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является почти разрешимой.*

Далее будут сформулированы аналоги альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов прямой и окружности, которые являются переформулировками соответствующих альтернатив из раздела 9.1.

Сформулируем предварительную лемму.

Лемма 9.3 [16]. *Пусть группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу Γ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Тогда фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является разрешимой ступени не более двух.*

Теперь мы можем переформулировать теорему 9.4 о существовании проективно-инвариантной мерой в виде аналога альтернативы Титса.

Теорема 9.4′ [16]. *Пусть группа $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ содержит нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с инвариантной мерой и свободно действующим элементом. Тогда фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо содержит разрешимую подгруппу ступени и индекса не более двух.*

Критерий существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов окружности, приводимый в теореме 9.7, также допускает переформулировку в виде аналога альтернативы Титса. Сформулируем предварительную лемму.

Лемма 9.4 [16]. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*

Теперь мы можем сформулировать аналог альтернативы Титса.

Теорема 9.7′ [16]. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(S^1)$ фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подгруппу с двумя образующими, либо содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух.*

Критерий существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой, приводимый в теореме 9.8, также допускает переформулировку в виде аналога альтернативы Титса. Сформулируем предварительную лемму.

Лемма 9.5 [16]. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо является коммутативной.*

Теперь мы можем сформулировать аналог альтернативы Титса.

Теорема 9.8′ [16]. *Для группы $G \subseteq \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ с непустым минимальным множеством фактор-группа G/H_G либо содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, либо содержит коммутативную подгруппу индекса не более двух.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. В. Альфорс. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

[2] Д. В. Аносов. О вкладе Н. Н. Боголюбова в теорию динамических систем // УМН. 1994. Т. 49. №5. С. 5–20.

[3] A. Antonevich, A. Lebedev. Functional-differential Equations. I. C^*-theory. Harlow: Longman, 1994.

[4] В. И. Арнольд. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №1. С. 21–86.

[5] В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[6] Л. А. Бекларян. О приводимости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к уравнению с постоянными соизмеримыми отклонениями // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №5. С. 561–565.

[7] Л. А. Бекларян. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. №5. С. 1033–1038.

[8] Л. А. Бекларян. Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. №6. С. 1289–1294.

[9] Л. А. Бекларян. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры. // Матем. сб. 1996. Т. 187. №3. С. 23–54.

[10] Л. А. Бекларян. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №4. С. 3–28.

[11] Л. А. Бекларян. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω-проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1999. Т. 190. №4. С. 43–62.

[12] Л. А. Бекларян. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прил. Тематические обзоры. 1999. Т. 67. С. 161–182.

[13] Л. А. Бекларян. Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 179–180.

[14] Л. А. Бекларян. О критерии топологической сопряженности квазисимметрической группы группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$ // Матем. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 31–42.

[15] L. A. Beklaryan. About canonical types of the differential equations with deviating argument // Funct. Differential Equations. 2001. V. 8. №1–2. P. 25–33.

[16] Л. А. Бекларян. Об аналогах альтернативы Титса для групп гомеоморфизмов окружности и прямой // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №3. С. 334–347.

[17] П. де ля Арп, Р. И. Григорчук, Т. Чекерини-Сильберстайн. Аменабельность и парадоксальные разбиения для псевдогрупп и дискретных метрических пространств // Труды МИАН. 1999. Т. 224. С. 68–111.

[18] É. Ghys. Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée // Contemp. Math. 1987. V. 58. P. 81–106.

[19] É. Ghys. Groups acting on the circle // Enseign. Math. (2). 2001. V. 47. №3–4. P. 329–407.

[20] Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.

[21] R. I. Grigorchuk. Some results on bounded cohomology // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1995. V. 204. P. 111–163.

[22] Р. И. Григорчук, П. Ф. Курчанов. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. 1990. Т. 58. С. 191–256.

[23] G. Hector, U. Hirsch. Introduction to the Geometry of Foliations. Part B. Foliations of Codimension One. Braunschweig: Vieweg, 1983.

[24] A. Hinkkanen. The structure of certain quasisymmetric groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. №422.

[25] H. Imanishi. Structure of codimension 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group // J. Math. Kyoto Univ. 1979. V. 19. №3. P. 481–495.

[26] Ю. И. Карлович. C-алгебра операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. №3. С. 535–540.

[27] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[28] G. Margulis. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. №9. P. 669–674.

[29] S. Matsumoto. Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 98. №1. P. 163–168.

[30] S. Matsumoto. Some remarks on foliated S^1 bundles // Invent. Math. 1987. V. 90. №2. P. 343–358.

[31] С. П. Новиков. Топология слоений // Труды ММО. 1965. Т. 14. С. 248–278.

[32] J. F. Plante. Foliations with measure preserving holonomy // Ann. of Math. (2). 1975. V. 102. №2. P. 327–361.

[33] J. F. Plante. Solvable groups acting on the line // Transl. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. №1. P. 401–414.

[34] А. Пуанкаре. Избранные труды. Т. I, II. М.: Наука, 1992.

[35] E. Salhi. Sur les ensembles minimaux locaux // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1982. V. 295. №12. P. 691–694.

[36] E. Salhi. Sur un théorème de structure de feuilletages de codimension 1 // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1985. V. 300. №18. P. 635–638.

[37] E. Salhi. Niveau des feuilles // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1985. V. 301. №5. P. 219–222.

[38] Я. Г. Синай. Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.

[39] В. В. Солодов. Гомеоморфизмы прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 1047–1060.

[40] В. В. Солодов. Гомеоморфизмы окружности и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №3. С. 599–613.

[41] В. В. Солодов. Топологические проблемы в теории динамических систем // УМН. 1991. Т. 46. №4. С. 93–114.

[42] А. И. Кокорин, В. М. Копытов. Линейно упорядоченные группы. М.: Мир, 1972.

[43] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.

[44] A. Banyaga. The Structure of Classical Diffeomorphism Groups. Dordrecht: Kluwer, 1997. (Math. Appl. V. 400.)

[45] M. G. Brin. The chameleon groups of Richard J. Thompson: automorphisms and dynamics // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1996. V. 84. P. 5–33.

[46] M. G. Brin, M. Guzmán. Automorphisms of generalized Thompson groups // J. Algebra. 1998. V. 203. №1. P. 285–348.

[47] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry. Introductory notes on Richard Thompson's groups // Enseign. Math. (2). 1996. V. 42. №3–4. P. 215–256.

[48] D. B. A. Epstein, K. Fujiwara. The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups // Topology. 1997. V. 36. №6. P. 1275–1289.

[49] N. Kovačevic. Möbius-like groups of homeomorphisms of the circle // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. № 12. P. 4791–4822.
[50] M. Stein. Groups of piecewise linear homeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 332. № 2. P. 477–514.
[51] J. Tits. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 250–270.
[52] Л. Альфорс. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.
[53] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

Центральный экономико-математический институт
E-mail: `beklar@cemi.rssi.ru`

Поступила в редакцию
08.04.2004