В. В. Вершинин, Группы кос и пространства петель, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 2(326), 3–84

DOI: https://doi.org/10.4213/rm132

1999 г. март — апрель *т. 54, вып. 2(326)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 512.664.4+515.15.5

ГРУППЫ КОС И ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

В. В. Вершинин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Косы были строго определены Э. Артином [1] в 1925 году, хотя корни этого естественного понятия видны в работах А. Гурвица ([2], 1891 г.), Р. Фрике и Ф. Клейна ([3], 1897 г.) и даже в записных книжках К.-Ф. Гаусса. В своей работе [4] Э. Артин дал копредставление группы кос (см. формулы (1.2) в § 1), широко известное в настоящее время.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS.

Косы можно рассматривать с различных точек зрения. Во-первых, они естественно возникают как классы изотопии набора из n связных кривых (нитей) в трехмерном пространстве. С этой точки зрения они принадлежат маломерной топологии. По теореме А. А. Маркова [5], [6] они являются существенными компонентами при изучении зацеплений и узлов. Начиная с работы В. Ф. Р. Джонса [7], обширное семейство инвариантов зацеплений было построено с использованием кос (см., например, [8], [9]). Эта точка зрения связана с определением группы кос как фундаментальной группы конфигурационного пространства n точек на плоскости [10]. Оказалось, что это пространство является $K(\pi,1)$-пространством [11] и, таким образом, может служить естественной геометрической моделью классифицирующего пространства группы кос. С другой стороны, В. И. Арнольд [12] интерпретировал это конфигурационное пространство как пространство полиномов над $\mathbb{C}$ степени n без кратных корней, т.е. как дополнение в $\mathbb{C}^n$ к дискриминантному множеству. Этот подход также имел последствия для маломерной топологии. А именно, первоначальное определение инвариантов Васильева узлов [13] моделировало ситуацию изучения дополнения к дискриминантному множеству, образованному узлами с простыми особенностями (двойными точками трансверсальных самопересечений).

Конфигурационное пространство можно рассматривать как пространство орбит дополнения комплексификации конфигурации гиперплоскостей, соответствующей группе Кокстера $A_{n-1} = \Sigma_n$. Обобщая этот подход на все конечные группы Кокстера, Э. Брискорн [14] определил так называемые обобщенные группы кос, которые иногда называют также Артиновыми группами, наверное потому, что Э. Артин никогда их не рассматривал.

Другим способом обобщения является рассмотрение групп кос в трехмерных многообразиях, возможно с краем. Простейшим примером являются группы кос в телах с ручками. А. Б. Сосинский [15] был первым, кто их изучал. Такая группа может быть интерпретирована как фундаментальная группа конфигурационного пространства плоскости без g точек, где g есть род тела с ручками. На языке конфигураций гиперплоскостей это соответствует "дискриминантным" конфигурациям, которые связаны с дифференциальным уравнением Книжника–Замолодчикова и изучались В. В. Шехтманом и А. Н. Варченко [16]. Обобщенная группа кос типа C изоморфна группе кос в полнотории и была использована С. Ламбропулу [17] при построении полинома типа Джонса для зацеплений в полнотории. Группы кос в телах с ручками использовались автором при изучении инвариантов Васильева зацеплений в телах с ручками [18], [19].

Классическая группа кос, так же как и симметрическая группа, является группой автоморфизмов свободной группы [4], [20]. Эта точка зрения и копредставление группы кос дают связи с теорией групп и, в частности, с теорией свободных групп.

В попытках интерпретировать инварианты Васильева через косы, следуя общей идеологии В. А. Васильева расширять набор основных объектов до объектов с простыми особенностями, было введено понятие кос с особенностями. Соответствующими алгебраическими структурами являются моноид Баеса–Бирман [21], [22] и группа кос-перестановок Р. Фенна, Р. Риманьи и К. Рурка [23], [24]. По-видимому, косы с особенностями также имеют широкие связи с различными разделами математики. Группа кос-перестановок определяется как подгруппа группы автоморфизмов свободной группы и имеет интерпретацию как группа кос со спайками, как их называют авторы. Она может быть также интерпретирована как группа автоморфизмов свободного объекта в категории, образованной некоторой алгебраической структурой с одной бинарной операцией (quandle) [24]. Дж. Баес обсуждал в [21] связи моноида кос с особенностями с теорией возмущений Черна–Саймонса и другими вопросами математической физики.

Когомологии классических групп кос появились в работах В. И. Арнольда [12], [25], опубликованных в 1970 году. Они были введены в связи с изучением проблемы представимости алгебраических функций нескольких переменных посредством суперпозиции алгебраических функций меньшего числа переменных. А именно, в размерностях вида 2^n-1 этих когомологий В. И. Арнольд обнаружил препятствия к такой представимости. В упомянутых работах когомологии групп кос обсуждались в широком математическом контексте, а также демонстрировались их связи с различными математическими дисциплинами. В. И. Арнольд доказал три важные теоремы о целочисленных когомологиях групп кос (теоремы 8.1–8.3 настоящей работы) и проделал вычисления в малых размерностях. В. И. Арнольд также описал полностью когомологии групп крашеных кос [26]. Д. Б. Фукс продолжил исследования когомологий классических групп кос и вычислил когомологии по модулю 2 [27].

Независимо от работ В. И. Арнольда и Д. Б. Фукса Ф. Р. Коэн изучал гомологии классических групп кос другими методами и в связи с теорией конфигурационных пространств, пространств петель, операциями Араки–Кудо–Даера–Лашофа и спектрами Тома [28]–[32]. Он вычислил эти гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, а также в $\mathbb{Z}/p$ как модули над алгеброй Стинрода. Аддитивная структура когомологий групп кос с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ была также вычислена Ф. В. Вайнштейном [33], который использовал методы Д. Б. Фукса. Позже В. В. Горюнов применил эти методы в [34], [35] и выразил когомологии обобщенных групп кос типов C и D в терминах когомологий классических групп кос. Теорема Г. Сегала [36], устанавливающая связи между гомологиями группы кос из бесконечного числа нитей и двукратным пространством петель на двумерной сфере, является аналогом теоремы М. Баррата, С. Придди и Д. Квиллена [37], [38] о связи между гомологиями бесконечной симметрической группы и бесконечнократным пространством петель $\Omega^\infty S^\infty$. Отсюда происходит связь с работами М. Маховальда [39], [40] по теории гомотопий.

Для вещественной конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ (т.е. конфигурации, заданной вещественными уравнениями) М. Сальветти построил в [41] клеточный комплекс размерности n, гомотопически эквивалентный дополнению к конфигурации. В [42] он применил эту конструкцию к конфигурации конечной группы Кокстера, заметил, что в этом случае комплекс допускает естественное свободное действие данной группы Кокстера, которое делает указанную выше гомотопическую эквивалентность эквивариантной. Затем он получил эффективное описание фактор-комплекса этого действия, что дало простой способ вычисления когомологий всех обобщенных групп кос, в том числе исключительных.

Композиция канонического эпиморфизма группы кос на симметрическую группу $Br_n \to \Sigma_n$ и стандартного представления симметрической группы в ортогональную группу $\Sigma_n \to O_n$ порождает спектр Тома $\{MBr_n\}$. Ф. Р. Коэн [30], М. Маховальд [39] и Ш. Буллет [43] доказали, что спектр $\{MBr_n\}$ изоморфен спектру Эйленберга–Маклейна обычных гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ (см. теорему 13.3 в § 13).

Другая удивительная связь, обнаруженная Ф. Р. Коэном, Р. Л. Коэном, Б. М. Манном, Р. Дж. Мильграмом [44] и С.К. Дональдсоном [45], наблюдается между классифицирующим пространством группы кос, пространством комплексных рациональных функций и пространством модулей монополей. Используя эту связь, Р. Л. Коэн и Дж. Д. С. Джонс проинтерпретировали индексное расслоение оператора Дирака в гомотопических терминах [46], [47].

Мы не касаемся в нашем обзоре алгоритмических проблем, связанных с косами [48]–[51], потому что теорема Гарсайда отражена в книге Дж. Бирман [6], а более полное обсуждение этих вопросов невозможно из-за существенного увеличения объема настоящей работы. Связи, открытые С. Смейлом [52] и развитые В. А. Васильевым [53], между когомологиями кос и сложностью алгоритмов также не рассматриваются. Этот предмет уже отражен в монографической литературе [13].

Настоящий обзор организован следующим образом. В первых пяти параграфах мы обсуждаем косы без упоминаний о классифицирующих пространствах или (ко)гомологиях. Эти объекты возникают в § 6 и изучаются в связи с группами кос и пространствами петель в следующих параграфах. В § 1 мы вводим конфигурационные пространства, фундаментальные группы которых являются группами кос. Связи с группами автоморфизмов свободных групп рассматриваются в § 2. В § 3 мы даем краткий очерк о группах Кокстера и изучаем обобщенные группы кос, которые этими группами Кокстера определяются. Свойства групп кос в телах с ручками обсуждаются в § 4. Косы с особенностями появляются в § 5. В § 6 рассматриваются некоторые общие черты классифицирующих пространств групп автоморфизмов свободных групп. В § 7 даны когомологии групп крашеных кос. Мы обсуждаем различные аспекты (ко)гомологий классических групп кос в § 8. В § 9 мы описываем когомологии обобщенных групп кос типов C и D в терминах когомологий классических групп кос. Параграф 10 содержит конструкцию комплекса Сальветти и его приложения к когомологиям обобщенных групп кос. Гомологические свойства групп кос в телах с ручками и кос с особенностями изучаются соответственно в § 11 и 12. Мы изучаем спектры Тома групп кос в § 13. В § 14 указаны связи с пространством рациональных функций комплексного переменного и теорией монополей. В дополнении собраны необходимые понятия и факты из теории категорий и алгебраической топологии.

Автор благодарен В.И. Арнольду, который привлек его внимание к связи между косами и теорией монополей и снабдил необходимой литературой по этому предмету. Особая благодарность В. А. Васильеву за массу полезных замечаний (от принципиальных до опечаток). Автор также признателен Ф.Р. Коэну за плодотворные беседы о когомологиях кос, С.С. Кутателадзе и Е.П. Волокитину за помощь и советы, касающиеся изложения материала работы, а также В.М. Бухштаберу, без внимания которого этот обзор никогда бы не был написан.

§ 1. Группы кос и конфигурационные пространства

Косы естественно возникают как объекты в трехмерном пространстве. Чтобы формализовать их как группу, простейшим способом является интерпретировать их как фундаментальную группу конфигурационного пространства.

Пусть Y есть связное топологическое многообразие, а W есть конечная группа, действующая на Y. Точка $y \in Y$ называется *регулярной*, если ее стабилизатор $\{w \in W : wy = y\}$ тривиален, т.е. состоит только из единицы группы W. Множество $\widetilde{Y}$ всех регулярных точек открыто. Предположим, что оно связно и непусто. Подпространство $ORB(Y, W)$ пространства всех орбит $Orb(Y, W)$, состоящее из орбит всех регулярных точек, называется *пространством регулярных орбит*. Имеется свободное действие W на $\widetilde{Y}$, и проекция $p\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}/W = ORB(Y, W)$ определяет накрытие. Рассмотрим начальный отрезок длинной точной последовательности этого накрытия:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\widetilde{Y}, y_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1\bigl(ORB(Y, W), p(y_0)\bigr) \longrightarrow W \longrightarrow 1. \tag{1.1}$$

Фундаментальная группа $\pi_1(ORB(Y, W), p(y_0))$ пространства регулярных орбит называется *группой кос действия W на Y* и обозначается через $Br(Y, W)$. Фундаментальная группа $\pi_1(\widetilde{Y}, y_0)$ называется *группой крашеных кос действия W на Y* и обозначается через $P(Y, W)$. Пространства $\widetilde{Y}$ и $ORB(Y, W)$ линейно связны, так что обе эти группы определены однозначно с точностью до изоморфизма и можно не указывать в обозначениях базисную точку y_0.

Для любого пространства Y симметрическая группа Σ_m действует на декартовой степени Y^m пространства Y:

$$w(y_1, \ldots, y_m) = (y_{w^{-1}(1)}, \ldots, y_{w^{-1}(m)}), \qquad w \in \Sigma_m.$$

Обозначим через $F(Y, m)$ пространство m-ок попарно различных точек в Y:

$$F(Y, m) = \bigl\{(p_1, \ldots, p_m) \in Y^m : p_i \neq p_j \text{ при } i \neq j\bigr\}.$$

Оно является пространством регулярных точек указанного действия. В случае, когда Y есть связное топологическое многообразие M без края и $\dim M \geqslant 2$, пространство регулярных орбит $ORB(M^m, \Sigma_m)$ открыто, связно и непусто. Мы называем $ORB(M^m, \Sigma_m)$ *конфигурационным пространством многообразия M* и обозначаем $B(M, m)$. Группа кос $Br(M^m, \Sigma_m)$ называется *группой кос из m нитей многообразия M* и обозначается $Br(m, M)$. Аналогично мы называем группу $P(M^m, \Sigma_m)$ *группой крашеных кос из m нитей многообразия M* и обозначаем $P(m, M)$. Эти определения групп кос были даны Р. Фоксом и Л. Нойвиртом [10]. Классическая группа кос из m нитей Br_m и соответствующая группа крашеных кос P_m возникают в случае, когда многообразие M является евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Пусть $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть фиксированная последовательность различных точек многообразия M, положим $Q_m = \{q_1, \ldots, q_m\}$. Мы будем использовать

$$Q_{m,l} = (q_{l+1}, \ldots, q_{l+m}) \in F(M \setminus Q_l, m)$$

в качестве стандартной базисной точки пространства $F(M \setminus Q_l, m)$. Если $k < m$, определим проекцию

$$\operatorname{proj}\colon F(M \setminus Q_l, m) \to F(M \setminus Q_l, k)$$

по формуле: $\operatorname{proj}(p_1, \ldots, p_m) = (p_1, \ldots, p_k)$. Следующие теоремы были доказаны Э. Фаделлом и Л. Нойвиртом [11].

Теорема 1.1. *Тройка* $\operatorname{proj}\colon F(M\setminus Q_l,m)\to F(M\setminus Q_l,k)$ *является локально тривиальным расслоением со слоем* $\operatorname{proj}^{-1}Q_{k,l}$, *гомеоморфным* $F(M\setminus Q_{k+l},m-k)$.

Из рассмотрения последовательности расслоений

$$
\begin{gathered}
F(M\setminus Q_{m-1},1)\to F(M\setminus Q_{m-2},2)\to M\setminus Q_{m-2},\\
F(M\setminus Q_{m-2},2)\to F(M\setminus Q_{m-3},3)\to M\setminus Q_{m-3},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F(M\setminus Q_1,m-1)\to F(M,m)\to M
\end{gathered}
$$

вытекает следующий факт.

Теорема 1.2. *Для любого многообразия* M

$$\pi_i\big(F(M\setminus Q_1,m-1)\big)=\bigoplus_{k=1}^{m-1}\pi_i(M\setminus Q_k)$$

при $i\geqslant 2$. *Если* $\operatorname{proj}\colon F(M,m)\to M$ *допускает сечение, то*

$$\operatorname{proj}_i\pi_i\big(F(M,m)\big)=\bigoplus_{k=0}^{m-1}\pi_i(M\setminus Q_k),\qquad i\geqslant 2.$$

Следствие 1.1. *Если* M *есть* r-*мерное евклидово пространство, то*

$$\pi_i\big(F(M,m)\big)=\bigoplus_{k=0}^{m-1}\pi_i\big(\underbrace{S^{r-1}\vee\dots\vee S^{r-1}}_{k}\big),\qquad i\geqslant 2.$$

Следствие 1.2. *Если* M *есть двумерное евклидово пространство, то* $F(\mathbb{R}^2,m)$ *есть* $K(P_m,1)$-*пространство, а* $B(\mathbb{R}^2,m)$ *есть* $K(Br_m,1)$-*пространство.*

В этом случае точная последовательность (1.1) имеет следующий вид:

$$1\longrightarrow P_m\longrightarrow Br_m\xrightarrow{\tau_m}\Sigma_m\longrightarrow 1.$$

Она может быть использована для доказательства канонического копредставления группы кос Br_m с образующими σ_i, $i=1,\dots,m-1$, и соотношениями:

$$
\begin{cases}
\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i, & \text{если } |i-j|>1,\\
\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}.
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Детали можно найти, например, в книге Дж. Бирман [6].

При интерпретации кос как классов изотопии набора из n связных кривых (нитей) в трехмерном пространстве образующая σ_i соответствует набору кривых, изображенному на рис. 1.1.

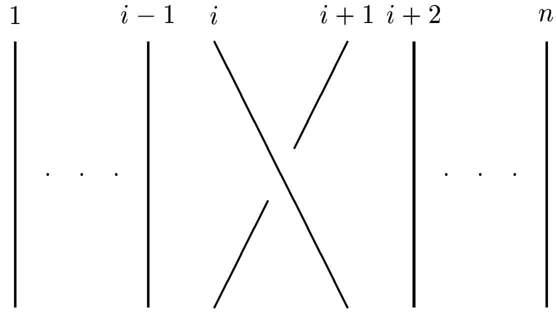


Рис. 1.1

Конечно, имеются и другие копредставления группы кос. Интересная серия копредставлений была дана В. Сержиеску [54]. Для каждого плоского графа он построил копредставление группы Br_n, где n есть число вершин графа, образующие соответствуют ребрам, а соотношения отражают геометрию графа. Представление Артина в этом контексте соответствует графу, состоящему из отрезка вещественной прямой от 1 до n с натуральными числами (от 1 до n) в качестве вершин и отрезками, их соединяющими, в качестве ребер.

§ 2. Группы автоморфизмов свободных групп

Другой важный подход к группе кос основывается на факте, что она может рассматриваться как подгруппа группы всех автоморфизмов свободной группы.

Пусть F_n есть свободная группа ранга n с множеством свободных образующих $\{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим далее, что $\operatorname{Aut} F_n$ есть группа автоморфизмов группы F_n. Имеем стандартные вложения симметрической группы Σ_n и группы кос Br_n в группу $\operatorname{Aut} F_n$. Они могут быть описаны следующим образом. Пусть $\xi_i \in \operatorname{Aut} F_n$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, заданы следующими формулами действия на образующих:

$$
\begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_j \mapsto x_j, \quad j \neq i, i+1, \end{cases} \tag{2.1}
$$

а автоморфизмы $\sigma_i \in \operatorname{Aut} F_n$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, определяются формулами:

$$
\begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}, \\ x_j \mapsto x_j, \quad j \neq i, i+1. \end{cases} \tag{2.2}
$$

Свободная группа F_n является фундаментальной группой диска D_n без n точек, а образующая x_i соответствует петле, обходящей вокруг i-й точки. Группа кос Br_n является группой классов отображений диска D_n с фиксированным краем [6] и действует на фундаментальной группе D_n по формулам (2.2). Геометрически это действие изображено на рис. 2.1.

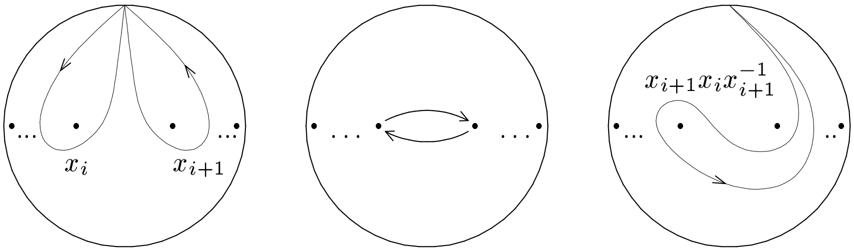


Рис. 2.1

Отображая стандартные образующие симметрической группы на ξ_i, а стандартные образующие группы кос на σ_i, мы получим мономорфизмы групп r и t:

$$t\colon \Sigma_n \to \operatorname{Aut} F_n,$$
$$r\colon Br_n \to \operatorname{Aut} F_n.$$

Используя такое определение группы кос, А. А. Марков [20] доказал копредставление (1.2).

Имеем также канонические вложения

$$\operatorname{Aut} F_m \times \operatorname{Aut} F_n \to \operatorname{Aut} F_{m+n}, \tag{2.3}$$

согласующиеся со стандартными спариваниями симметрических групп и групп кос

$$\begin{gathered} \Sigma_k \times \Sigma_l \to \Sigma_{k+l}, \\ \mu\colon Br_k \times Br_l \to Br_{k+l}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Эти спаривания коммутируют с отображениями $\tau_j : Br_j \to \Sigma_j$. Для групп кос это спаривание может быть построено добавлением дополнительных l нитей к начальным k. Если σ_i' суть образующие Br_k, σ_j'' – образующие Br_l и σ_r – образующие Br_{k+l}, тогда отображение μ может быть выражено в виде

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_i', e) &= \sigma_i, & 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ \mu(e, \sigma_j'') &= \sigma_{j+k}, & 1 \leqslant j \leqslant l-1. \end{aligned}$$

Пусть $f(y_1, \dots, y_m)$ есть слово с вхождениями (возможно, пустыми) y_i^ε, где y_i – некоторые буквы, а ε может быть ± 1. Если y_i являются элементами группы G, тогда $f(y_1, \dots, y_m)$ будет рассматриваться как элемент G.

Определим элементы $s_{i,j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, группы кос Br_m по формуле:

$$s_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Эти элементы удовлетворяют следующим соотношениям Бурау ([20], см. также [55]):

$$\begin{aligned} s_{i,j} s_{k,l} &= s_{k,l} s_{i,j} && \text{для } i<j<k<l \text{ и } i<k<l<j, \\ s_{i,j} s_{i,k} s_{j,k} &= s_{i,k} s_{j,k} s_{i,j} && \text{для } i<j<k, \\ s_{i,k} s_{j,k} s_{i,j} &= s_{j,k} s_{i,j} s_{i,k} && \text{для } i<j<k, \\ s_{i,k} s_{j,k} s_{j,l} s_{j,k}^{-1} &= s_{j,k} s_{j,l} s_{j,k}^{-1} s_{i,k} && \text{для } i<j<k<l. \end{aligned} \tag{2.5}$$

А. А. Марков доказал, что элементы $s_{i,j}$ вместе с соотношениями (2.5) дают копредставление группы крашенных кос P_m [20]. Следующая формула является следствием соотношений Бурау и также принадлежит А. А. Маркову:

$$[s_{i,l}, s^{\varepsilon}_{j,k}] = f(s_{1,l}, \dots, s_{l-1,l}), \qquad \varepsilon = \pm 1, \quad k < l. \tag{2.6}$$

Определим элементы $\sigma_{k,l}$, $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$, по формулам:

$$\sigma_{k,k} = e,$$
$$\sigma_{k,l} = \sigma_k \dots \sigma_{l-1}.$$

Замечание. Наше определение $\sigma_{k,l}$ отличается от первоначального, данного А. А. Марковым:

$$\sigma_{k,l} = \sigma_k^{-1} \dots \sigma_{l-1}^{-1}.$$

Пусть P^k_m есть подгруппа P_m, порожденная элементами $s_{i,j}$ с $k < j$.

Теорема 2.1 (А. А. Марков). (i) *Каждый элемент группы Br_m может быть единственным образом записан в виде*

$$f_2(s_{1,2}) \dots f_j(s_{1,j}, \dots, s_{j-1,j}) \dots f_m(s_{1,m}, \dots, s_{m-1,m}) \sigma_{i_m,m} \dots \sigma_{i_j,j} \dots \sigma_{i_2,2}. \tag{2.7}$$

(ii) *Фактор группа P^k_m / P^{k-1}_m есть свободная группа от свободных образующих $s_{i,k+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Замечание. В копредставлении (2.7) наш порядок элементов f_j противоположен первоначальному, определенному А. А. Марковым. Доказательство то же самое, что и в [20]: используется формула коммутирования (2.6).

Пусть теперь G_n, $n = 0, 1, \dots, G_0 = \{e\}$, есть система подгрупп групп автоморфизмов свободных групп:

$$G_n \leqslant \operatorname{Aut} F_n$$

такая, что G_{m+n}, как подгруппа $\operatorname{Aut} F_{m+n}$, содержит образ $G_m \times G_n$ при гомоморфизме (2.3) для всех m и n. В этом случае мы имеем систему гомоморфизмов

$$\mu_{m,n}(G) \colon G_m \times G_n \to G_{m+n}.$$

Эти спаривания являются строго ассоциативными, что влечет коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G_l \times G_m \times G_n & \xrightarrow{\operatorname{Id} \times \mu_{m,n}} & G_l \times G_{m+n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{l,m} \times \operatorname{Id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{l,m+n}} \\ G_{l+m} \times G_n & \xrightarrow{\mu_{l+m,n}} & G_{l+m+n} \end{array} \tag{2.8}$$

Предположим теперь, что для каждого m группа G_m содержит симметрическую группу Σ_m, канонически вложенную в $\operatorname{Aut} F_m$. В этом случае обычным образом определяется строгая моноидальная (тензорная) категория $\mathscr{G}$. А именно, ее объекты $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots\}$

соответствуют целым числам от 0 до бесконечности, а морфизмы определяются по формуле

$$\hom(\overline{k},\overline{l}\,)=\begin{cases} G_k, & \text{если } k=l,\\ \varnothing, & \text{если } k\neq l.\end{cases}$$

Категория Σ, соответствующая симметрическим группам, имеет симметрию (см. [56; с. 180], а также дополнение к настоящему обзору), т.е. систему изоморфизмов

$$s_{\overline{m},\overline{n}}:\overline{m+n}\cong\overline{n+m}\,,$$

естественную по отношению к морфизмам из $\overline{m}$ в себя и из $\overline{n}$ в себя, обладающую некоторым свойством когерентности и такую, что

$$s_{\overline{m},\overline{n}}s_{\overline{n},\overline{m}}=1_{\overline{m+n}}\,. \tag{2.9}$$

Предложение 2.1. *Если группа G_m, $m=0,1,\dots$, содержит симметрическую группу Σ_m для всех m, то симметрия из категории, порожденной симметрическими группами, индуцирует симметрию в категории $\mathscr{G}$. Таким образом, последняя становится пермутативной категорией, а функтор, индуцированный вложениями $\Sigma_m\to G_m$, становится морфизмом между пермутативными категориями.*

Предположим, что мы имеем систему нормальных подгрупп $N_m\triangleleft G_m$ для всех m, такую, что N_{m+n}, как подгруппа $\operatorname{Aut}F_{m+n}$, содержит $N_m\times N_n$ для всех m и n. Пусть H_m есть система фактор-групп $H_m=G_m/N_m$ и $\mathscr{H}$ есть соответствующая категория.

Следствие 2.1. *Категория $\mathscr{H}$ является пермутативной категорией, а функтор $\mathscr{G}\to\mathscr{H}$, индуцированный эпиморфизмами $G_m\to H_m$, является морфизмом между пермутативными категориями.*

Имеются еще такие мультипликативные структуры для систем симметрических групп и групп кос:

$$\Sigma_k\times\Sigma_l\to\Sigma_{kl}, \tag{2.10}$$

$$Br_k\times Br_l\to Br_{kl}. \tag{2.11}$$

Для системы симметрических групп это спаривание может быть описано следующим образом. Пусть $\sigma\in\Sigma_k$ и $s\in\Sigma_l$. Тогда $\sigma\circ s\in\Sigma_{kl}$ задается по формуле

$$\sigma\circ s\colon (i-1)k+j\mapsto (s(i)-1)k+\sigma(j)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant l,\ \ 1\leqslant j\leqslant k.$$

Это означает, что $\sigma\circ s$ переставляет kl символов, разделенных на l блоков (по k символов в каждом), таким образом, что $\sigma\circ s$ переставляет блоки как перестановка s и $\sigma\circ s$ переставляет символы внутри каждого блока как перестановка σ. Спаривание (2.11) для групп кос описывается следующим образом. Мы утолщаем каждую нить косы

$\beta \in Br_l$ и вкладываем косу $\alpha \in Br_k$ в каждую получившуюся трубку. Графически это изображено на рис. 2.2.

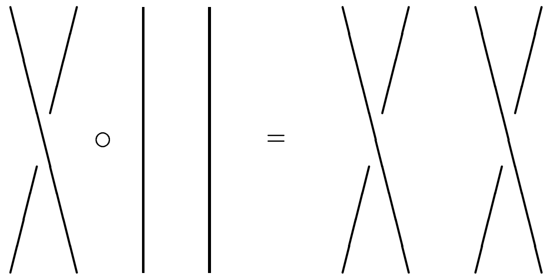


Рис. 2.2

Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, F_k$ и $\beta \in \mathrm{Aut}\, F_l$ суть автоморфизмы свободных групп от образующих $x_1, \dots, x_k$ и $y_1, \dots, y_l$. Распишем действие автоморфизмов α и β на x_j и y_i:

$$\alpha\colon x_j \mapsto \omega_j(x_1, \dots, x_k),$$
$$\beta\colon y_i \mapsto \nu_i(y_1, \dots, y_l).$$

Пусть F_{kl} есть свободная группа от образующих $a_{i,j}$, где $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Определим эндоморфизм $\alpha \circ \beta$ группы F_{kl} по формуле

$$\alpha \circ \beta\colon a_{i,j} \mapsto \nu_i\big(\omega_j(a_{1,1}, \dots, a_{1,k}), \dots, \omega_j(a_{l,1}, \dots, a_{l,k})\big). \tag{2.12}$$

Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}\, F_k$ как π_0 H-пространства гомотопических самоэквивалентностей букета из k окружностей $\vee^k S^1$: $\mathrm{Aut}(\vee^k S^1)$. Группа $\mathrm{Aut}\, F_k$ гомотопически эквивалентна $\mathrm{Aut}(\vee^k S^1)$. Тогда элемент $\alpha \circ \beta$ может быть описан следующим образом. Пусть β представлен отображением букета из l окружностей:

$$b\colon \vee^l S^1 \to \vee^l S^1.$$

Отметим точки $p_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $0 \leqslant j \leqslant k$, которые делят i-ю окружность на k равных частей так, что $p_{i,0}$ является базисной точкой букета. Мы берем такой представитель b элемента β, что $b(p_{i,j})$ есть одна из точек $p_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Это можно сделать, например, следующим образом. Рассмотрим окружность, соответствующую символу y_i, и пусть d_i есть длина слова $\nu_i(y_1, \dots, y_l)$. Мы отображаем интервал $[0,1]$ линейно на интервал $[0, d_i]$. Тогда точки r/k, $r = 0, 1, \dots, k$, отобразятся на точки $d_i r/k$. Факторизуя по целочисленной решетке, мы получим нужный представитель элемента β. Это отображение b определяет гомотопическую эквивалентность букета из kl окружностей на себя

$$b\colon \vee^{kl} S^1 \to \vee^{kl} S^1.$$

Букет $\vee^{kl} S^1$ естественно разделен на l букетов, имеющих k окружностей в каждом. Применим теперь гомотопическую эквивалентность, соответствующую α, на каждом таком подбукете. Мы получим гомотопическую эквивалентность, соответствующую

$\alpha \circ \beta$. Таким образом, $\alpha \circ \beta$, определенный исходя из (2.12), является автоморфизмом группы F_{kl}. Это определяет спаривание

$$\operatorname{Aut} F_k \times \operatorname{Aut} F_l \to \operatorname{Aut} F_{kl}, \tag{2.13}$$

согласованное с (2.10) и (2.11). Оно ассоциативно. Согласованность с (2.10) видна, если мы будем интерпретировать симметрическую группу таким же образом, как и $\operatorname{Aut} F_k$, заменив S^1 на S^0. Отображение $\operatorname{Aut}(\vee^k S^0) \to \operatorname{Aut}(\vee^k S^1)$ индуцировано функтором надстройки.

§ 3. Обобщенные группы кос

Группы кос входят в серию так называемых обобщенных групп кос (или Артиновых групп). Нам потребуются некоторые предварительные рассмотрения для определения этих групп.

Пусть V есть конечномерное вещественное векторное пространство ($\dim V = n$) с евклидовой структурой. Пусть W есть конечная подгруппа $GL(V)$, порожденная отражениями. Мы используем терминологию и обозначения из книги Н. Бурбаки [57]. Пусть $\mathscr{M}$ есть множество гиперплоскостей таких, что W порождена ортогональными отражениями относительно $M \in \mathscr{M}$. Мы предполагаем, что для любого $w \in W$ и любой гиперплоскости $M \in \mathscr{M}$ гиперплоскость $w(M)$ принадлежит $\mathscr{M}$. Гиперплоскости системы $\mathscr{M}$ делят все пространство V (включая сами гиперплоскости) на клетки, называемые *ячейками.* Ячейки максимальной размерности (равной n) называются *камерами.* Граница камеры A является подмножеством некоторого объединения гиперплоскостей. Эти гиперплоскости называются *стенками камеры* A. Следующие факты хорошо известны [57].

Предложение 3.1. (i) *W переставляет камеры из $\mathscr{M}$ транзитивно.*

(ii) *Замыкание $\overline{A}$ камеры A является фундаментальной областью для W, действующей на V.*

(iii) *Если $x \in V$ принадлежит $\overline{A}$, то стабилизатор x порождается отражениями по отношению к стенкам A, содержащим x.*

Существует множество I и взаимно однозначное соответствие между элементами I и стенками камеры A: $i \mapsto M_i(A)$, которое называется *канонической индексацией* стенок камеры A. Тогда W порождается отражениями $w_i = w_i(M_i)$, $i \in I$, удовлетворяющими только следующим соотношениям:

$$(w_i w_j)^{m_{i,j}} = e, \qquad i,j \in I,$$

где натуральные числа $m_{i,j} = m_{j,i}$ образуют *матрицу Кокстера* для W, по которой *граф Кокстера* $\Gamma(W)$ для W строится таким образом: вершины соответствуют элементам $i \in I$, причем вершины i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда $m_{i,j} \geqslant 3$. Мы используем далее следующее обозначение П. Делиня [58]: $\operatorname{prod}(m; x, y)$ обозначает произведение $xyxy\ldots$ (m сомножителей). *Обобщенная группа кос $Br(W)$ для W* [14], [58] определяется как группа с образующими $\{s_i,\ i \in I\}$ и соотношениями

$$\operatorname{prod}(m_{i,j}; s_i, s_j) = \operatorname{prod}(m_{j,i}; s_j, s_i).$$

Представление группы W отсюда получается добавлением соотношений:

$$s_i^2 = e; \qquad i \in I.$$

В теореме 3.1 мы увидим, что это определение обобщенной группы кос согласуется с нашим общим определением группы кос действия группы W (§ 1). Мы обозначаем через τ_W канонический гомоморфизм из $Br(W)$ в W. Классические косы из k нитей Br_k получены этой конструкцией, когда W есть симметрическая группа на $k+1$ символах. В этом случае $m_{i,i+1} = 3$ и $m_{i,j} = 2$, если $j \neq i, i+1$.

Теперь пусть $J_1, \dots, J_s$ суть множества вершин связных компонент графа Кокстера W. Предположим далее, что W_q – подгруппа W, порожденная отражениями w_i, $i \in J_q$. Пусть V_q^0 есть подпространство V, состоящее из векторов, инвариантных при действии W_q. Пусть V_q обозначает ортогональное дополнение V_q^0 в V, $V_0 = \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant s} V_q^0$. Тогда мы имеем следующие факты [57; гл. V, § 3.7, предложение 5].

Предложение 3.2. (i) *Группа W есть прямое произведение W_q $(1 \leqslant q \leqslant s)$.*

(ii) *Векторное пространство V есть прямая сумма ортогональных подпространств $V_1, \dots, V_s, V_0$, инвариантных при действии W.*

Если $V_0 = 0$, то группа W, действующая на V, называется *существенной*. В этом случае каждая камера является открытым симплициальным конусом. Зададим некоторое упорядочивание стенок M_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, каждой камеры A. Произведение отражений $w_{M_1} w_{M_2} \dots w_{M_n}$ есть *преобразование Кокстера*, определенное упорядоченной камерой A. Все преобразования Кокстера сопряжены в W, и, следовательно, все они имеют одинаковый характеристический многочлен и одинаковый (конечный) порядок. Это число называется *числом Кокстера* группы W. Обозначим его через h. Тогда характеристический полином преобразования Кокстера может быть записан в виде

$$f(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(t - \exp\left(\frac{2i\pi m_j}{h} \right) \right),$$

где $m_1, m_2, \dots, m_n$ – такие числа, что

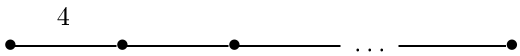
$$0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n < h.$$

Числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ называются *показателями* W.

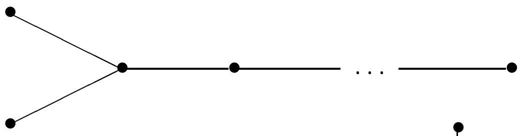
Классификация *неприводимых* (т.е. со связными графами Кокстера) групп Кокстера хорошо известна (см., например, теорему 1 гл. VI, § 4 книги [57]). Она состоит из трех бесконечных серий: A, C (которую также обозначают через B потому, что в соответствующей классификации простых алгебр Ли две различные серии B и C имеют эту группу в качестве группы Вейля) и D, а также исключительных групп: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4 и $I_2(p)$. Например, имеем следующие графы Кокстера для A_n, C_n, D_n и E_8:

(A_n)

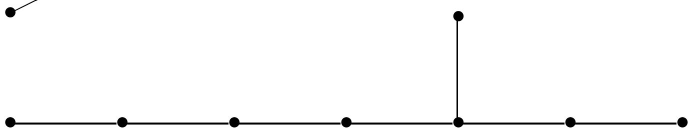
(C_n)



(D_n)



(E_8)



Число вершин в этих диаграммах равно n, а число m над ребром означает, что $m_{i,j} = m$ для пары образующих, соответствующих точкам, соединенным данным ребром. Если $m_{i,j} = 3$, то написание числа над ребром опускается.

Рассмотрим теперь комплексификацию V_C пространства V и комплексификацию M_C для $M \in \mathscr{M}$. Пусть $Y_W = V_C - \bigcup_{M \in \mathscr{M}} M_C$. Из пункта (iii) предложения 3.1 мы заключаем, что W действует свободно на Y_W. Пусть $X_W = Y_W/W$, тогда Y_W есть накрытие над X_W, соответствующее группе W. Пусть y_0 есть точка в некоторой камере A_0 и x_0 – ее образ в X_W. Мы находимся в ситуации, описанной в § 1, в определении группы кос действия группы W. Эта группа кос определялась как фундаментальная группа пространства регулярных орбит действия W. В нашем случае $ORB(V_C, W) = X_W$. Следовательно, обобщенная группа кос равна $\pi_1(X_W, x_0)$. Для каждого $j \in I$ пусть ℓ'_j есть гомотопический класс путей в Y_W, начинающихся в y_0 и оканчивающихся в $w_j(y_0)$, которые содержат ломаную линию с последовательными вершинами: $y_0, y_0 + iy_0, w_j(y_0) + iy_0, w_j(y_0)$. Образ ℓ_j класса ℓ'_j в X_W является петлей с базисной точкой x_0.

Теорема 3.1. (i) *Фундаментальная группа* $\pi_1(X_W, x_0)$ *порождена элементами* ℓ_j, *удовлетворяющими следующим соотношениям*:

$$\mathrm{prod}(m_{j,k}; \ell_j, \ell_k) = \mathrm{prod}(m_{k,j}; \ell_k, \ell_j).$$

(ii) *Универсальное накрытие* X_W *стягиваемо, и, следовательно,* X_W *есть пространство типа* $K(\pi; 1)$.

Часть (i) этой теоремы была доказана Э. Брискорном [59]. Часть (ii) для групп типов C_n, G_2 и $I_2(p)$ была доказана также Э. Брискорном [59] аналогично тому, как Э. Фаделл и Л. Нойвирт [11] доказывали теоремы 1.1, 1.2 и следствие 1.2. В доказательстве утверждения (ii) для групп типов D_n и F_4 Э. Брискорн использует этот метод с небольшими изменениями. В общем случае часть (ii) этой теорема была доказана П. Делинем [58].

Если W есть прямое произведение W' и W'', то группа $Br(W)$ есть прямое произведение $Br(W')$ и $Br(W'')$. Следовательно, если группа W такая же, как в предложении 3.2, то $Br(W) = Br(W_1) \times \cdots \times Br(W_s)$.

В терминах графов Кокстера спаривание μ из (2.4) для классических групп кос означает, что мы берем вершину, соответствующую σ_k в графе Кокстера $\Gamma(\Sigma_{k+l})$, и вкладываем $Br_k \times Br_l$ в Br_{k+l} в соответствии с вложением $\Gamma(\Sigma_k \times \Sigma_l) = \Gamma(\Sigma_k) \cup \Gamma(\Sigma_l)$ в две компоненты графа $\Gamma(\Sigma_{k+l}) \setminus \sigma_k$. Таким же образом мы интерпретируем различные вложения произведений конечных групп Кокстера в группу с большим индексом. Это верно также для соответствующих обобщенных групп кос. Мы удаляем вершину в связном графе Кокстера и получаем граф, у которого число компонент связности меньше или равно 3. Эти компоненты соответствуют неприводимым группам Кокстера или группам кос, прямое произведение которых является областью определения отображения. Например, имеем очевидные спаривания:

$$\mu(C,A)\colon Br(C_k) \times Br(A_l) \to Br(C_{k+l+1}),$$
$$\mu(D,A)\colon Br(D_k) \times Br(A_l) \to Br(D_{k+l+1}) \text{ для всех } k \text{ и } l,$$

или спаривание

$$\mu(A_3,A_4;E_8)\colon Br(A_3) \times Br(A_4) \to Br(E_8),$$

которое соответствует четвертой горизонтальной вершине графа Кокстера E_8.

Вложения групп (не произведений) могут быть также выражены на этом языке. Например, имеем вложение

$$\alpha_C\colon Br(A_{l-1}) \to Br(C_l)$$

и два различных вложения:

$$\alpha_D\colon Br(A_{l-1}) \to Br(D_l)$$

в соответствии с двумя различными вершинами на одном конце графа Кокстера для D_l.

Теорема 3.1 дает копредставление группы $Br(C_k)$ образующими $\{s_1,\dots,s_k\}$, удовлетворяющими соотношению

$$s_1s_2s_1s_2 = s_2s_1s_2s_1, \tag{3.1}$$

а также соотношениям группы кос (1.2) для образующих $s_2,\dots,s_k$. Пусть $Br_{1,n+1}$ есть подгруппа группы кос Br_{n+1}, состоящая из всех элементов Br_{n+1}, с тем свойством, что перестановки, им соответствующие, оставляют единицу инвариантной. Это означает, что конец первой нити находится снова на первом месте. В.-Л. Чжоу [60] нашел копредставление этой группы с образующими

$$\sigma_2,\dots,\sigma_n,a_2,\dots,a_{n+1},$$

где σ_j есть стандартная образующая группы кос Br_{n+1}, а элементы a_i заданы равенством $a_i = \sigma_1^{-1}\dots\sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^2\sigma_{i-2}\dots\sigma_1$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Элементы $\sigma_2,\dots,\sigma_n$ порождают подгруппу в $Br_{1,n+1}$, изоморфную Br_n, а элементы $a_2,\dots,a_{n+1}$ порождают нормальную свободную подгруппу F_n. Следующее соотношение выполнено в $Br_{1,n+1}$:

$$\sigma_2a_2\sigma_2a_2 = a_2\sigma_2a_2\sigma_2.$$

Определим гомоморфизм $\phi\colon Br(C_n) \to Br_{1,n+1}$ по формулам:

$$\phi(w_1) = a_2,$$
$$\phi(w_i) = \sigma_i, \quad i = 2,\dots,n,$$

и получим следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Отображение ϕ определяет изоморфизм*

$$\phi\colon Br(C_n) \cong Br_{1,n+1}.$$

Это утверждение очевидно с геометрической точки зрения. Пространство X_{C_n} можно интерпретировать как пространство n различных пар точек из $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, симметричных относительно нуля [34], [35]. Это то же самое, что просто пространство n различных точек в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Группа Br_{n+1} интерпретируется как фундаментальная группа пространства X_{A_n} наборов $n+1$ различных точек из $\mathbb{R}^2$. Если зафиксировать одну точку (скажем, 0), то это будет X_{C_n}. Для фундаментальной группы X_{A_n} это означает, что первая нить должна иметь те же самые начало и конец (равные нулю). Наши рассмотрения означают также, что группа кос $Br(C_n) \cong Br_{1,n+1}$ может быть интерпретирована как группа кос в полнотории, которая определяется в следующем параграфе.

Пусть β есть гомоморфизм из $Br(C_n)$ в Br_n, определенный по формулам:

$$\beta(s_1) = e,$$
$$\beta(s_i) = \sigma_{i-1} \text{ для } i > 1.$$

Тогда $\beta\alpha_C = 1_{Br_n}$ и $Br(C_n)$ изоморфна полупрямому произведению F_n и Br_n с действием Br_n на F_n, описанным в §2. Известно, что группа C_k изоморфна сплетению симметрической группы $\Sigma_k = A_{k-1}$ с $\mathbb{Z}/2$: $C_k \cong \Sigma_k \int \mathbb{Z}/2$. Спаривание

$$m_C\colon C_k \times C_l \to C_{k+l}$$

может быть определено, используя спаривание для симметрических групп

$$\Sigma_k \times \Sigma_l \to \Sigma_{k+l}$$

и структуру сплетения.

Пусть $s'_1, \dots, s'_k$ суть образующие $Br(C_k)$, $s''_1, \dots, s''_l$ – образующие $Br(C_l)$. Тогда мы можем определить спаривание

$$\mu(C,C)\colon Br(C_k) \times Br(C_l) \to Br(C_{k+l})$$

по формулам:

$$\mu(C,C)(s'_i, e) = s_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$
$$\mu(C,C)(e, s''_1) = s_{k+1} \dots s_2 s_1 s_2 \dots s_{k+1},$$
$$\mu(C,C)(e, s''_j) = s_{k+j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l.$$

Соотношение (3.1) показывает, что образы s'_1 и s''_1 коммутируют в $Br(C_{k+l})$. Коммутирование образов s'_i, $i \geqslant 2$, и s''_1 следует из соотношений группы кос. Следовательно,

$\mu(C,C)$ есть гомоморфизм. Спаривание $\mu(C,C)$ было впервые определено в [61]. Легко проверить, что $\mu(C,C)$ ассоциативно, т.е. что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} Br(C_k)\times Br(C_l)\times Br(C_q) & \xrightarrow{\mu_i\times 1} & Br(C_{k+l})\times Br(C_q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\times\mu(C,C)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu(C,C)} \\ Br(C_k)\times Br(C_{l+q}) & \xrightarrow{\mu_i} & Br(C_{k+l+q}) \end{array}$$

Это спаривание согласовано со спариванием для групп Кокстера

$$m_C\colon C_k\times C_l\to C_{k+l},$$

так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Br(C_k)\times Br(C_l) & \xrightarrow{\tau_C\times\tau_C} & C_k\times C_l \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu(C,C)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m_C} \\ Br(C_{k+l}) & \xrightarrow{\tau_C} & C_{k+l} \end{array}$$

коммутативна. Спаривание $\mu(C,C)$ также согласовано со спариванием

$$Br(C_k)\times Br_l\to Br(C_{k+l})$$

через каноническое вложение $Br_l\to Br(C_l)$. Легко проверить коммутативность диаграммы для гомоморфизма α_C:

$$\begin{array}{ccc} Br_k\times Br_l & \xrightarrow{\alpha_C\times\alpha_C} & Br(C_k)\times Br(C_l) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu(C,C)} \\ Br_{k+l} & \xrightarrow{\alpha_C} & Br(C_{k+l}) \end{array}$$

Однако, нет аналогичной коммутативности для $\beta\colon Br(C_k)\to Br_k$ и $\mu(C,C)$. Действительно, пусть $k=2$. Тогда $\mu(\beta,\beta)(e,s_1'')=\mu(e,e)=e$ и $\beta\mu(C,C)(e,s_1'')=\beta(s_3s_2s_1s_2s_3)=\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\neq e$. Следовательно, гомоморфизм β не согласован со спариваниями μ и $\mu(C,C)$.

На уровне конфигурационных пространств спаривание $\mu(C,C)$ для кос серии C может быть описано следующим образом. Отобразим $\mathbb{R}^2\setminus 0$ (с k различными точками) диффеоморфно на открытый диск радиуса $k+1/2$ без нуля: $\mathscr{D}_{k+1/2}\setminus 0$ таким образом, что точки с координатами $(1,0),\dots,(k,0)$ отображаются на себя. Отобразим также $\mathbb{R}^2\setminus 0$ (с l различными точками) диффеоморфно на $\mathbb{R}^2\setminus\mathscr{D}_{k+1/2}$ таким образом, что точки с координатами $(1,0),\dots,(l,0)$ отображаются в точки $(k+1,0),\dots,(k+l,0)$. Это отображение

$$\mathbb{R}^2\setminus 0\times\mathbb{R}^2\setminus 0\to\mathbb{R}^2\setminus 0 \tag{3.2}$$

является частным случаем отображения конфигурационных пространств:

$$B(X,k)\times B(X,l)\to B(X,k+l),$$

где пространство X может быть представлено в виде $X = Y \times \mathbb{R}$ для некоторого другого пространства Y. Отображение (3.2) порождает спаривание фундаментальных групп конфигурационных пространств, которое совпадает с $\mu(C, C)$. Рассматривая обобщенные группы кос типа C как подгруппы обычных групп кос, мы можем описать спаривание $\mu(C, C)$ через вложение $k+1$ нитей первой группы вместо нулевой нити второй группы.

Рассмотрим теперь прямые пределы конечных групп Кокстера. Обозначим через $\mathscr{W}$ категорию, объектами которой являются конечные группы Кокстера, а морфизмами – вложения $W' \mapsto W$, соответствующие вложениям графов Кокстера $\Gamma' \mapsto \Gamma$. Мы называем *цепью* подкатегорию $\mathscr{E}$ категории $\mathscr{W}$, являющуюся вполне упорядоченным множеством и такую, что общее число компонент связности графов Кокстера элементов из $\mathscr{E}$ ограничено некоторым натуральным числом $N_{\mathscr{E}}$ (для подгруппы W' группы W мы рассматриваем Γ' как подграф Γ). Мы называем *предельной группой Кокстера* W_∞ такую бесконечную группу, что существует цепь $\mathscr{E}$, для которой W_∞ равна прямому пределу $\mathscr{E}$. Если $\mathscr{E}$ есть цепь групп из одной из серий A, C или D с каноническими вложениями в качестве морфизмов, то A_∞, C_∞ и D_∞ суть соответствующие предельные группы Кокстера.

Предложение 3.4. *Предельная группа Кокстера W_∞ изоморфна прямому произведению конечного числа (большего или равного одному) групп A_∞, C_∞ или D_∞ и произвольному конечному числу конечных групп Кокстера.*

Доказательство следует из того факта, что W_∞ должна быть бесконечной и ее граф Кокстера должен иметь конечное число компонент.

Некоторые спаривания, описанные выше, порождают спаривания предельных групп Кокстера и соответствующих групп кос, например:

$$\begin{gathered}\mu(C, A)\colon Br(C_\infty) \times Br(A_\infty) \to Br(C_\infty),\\ \mu(D, A)\colon Br(D_\infty) \times Br(A_\infty) \to Br(D_\infty).\end{gathered}$$

Для произвольной предельной группы Кокстера W_∞ может быть несколько различных спариваний с $Br(A_\infty) = Br_\infty$, в зависимости от копии одной из предельных групп A_∞, C_∞ или D_∞, для которой такое спаривание рассматривается

$$\mu(W, A)\colon Br(W_\infty) \times Br(A_\infty) \to Br(W_\infty).$$

§ 4. Группы кос в телах с ручками

Подгруппа $Br_{1,n+1}$ группы кос Br_{n+1}, состоящая из кос с прямой первой нитью, рассматривавшаяся в предыдущем параграфе, интерпретировалась также как группа кос в полнотории. Здесь мы изучаем косы в телах с ручками произвольного рода g.

Пусть H_g есть тело с ручками рода g. Группа кос Br_n^g из n нитей в H_g рассматривалась А. Б. Сосинским [15]. В § 1 через Q_g было обозначено подмножество многообразия M, состоящее из g различных точек. Пусть M есть комплексная плоскость $\mathbb{C}$, $Q_g = \{z_1^0, \dots, z_g^0\}$, скажем, $z_i^0 = i$. Внутренность тела H_g имеет интерпретацию как прямое произведение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без g точек $\mathbb{C} \setminus Q_g$ на открытый интервал, например, $(-1, 2)$:

$$\dot{H}_g = (\mathbb{C} \setminus Q_g) \times (-1, 2).$$

Косы из Br_n^g можно рассматривать лежащими между плоскостями с координатами $z = 0$ и $z = 1$ и соединяющими точки $((g+1, 0), \dots, (g+n, 0))$. Так что Br_n^g можно считать подгруппой классической группы кос из $g+n$ нитей такой, что косы из Br_n^g оставляют первые g нитей незаплетенными. В этом параграфе мы обозначаем через $\bar{\sigma}_j$ стандартные образующие группы кос из $g+n$ нитей. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \dots, g$, будут следующими косами:

$$\tau_k = \bar{\sigma}_g \bar{\sigma}_{g-1} \dots \bar{\sigma}_{k+1} \bar{\sigma}_k^2 \bar{\sigma}_{k+1}^{-1} \dots \bar{\sigma}_{g-1}^{-1} \bar{\sigma}_g^{-1}.$$

Такая коса изображена на рис. 4.1.

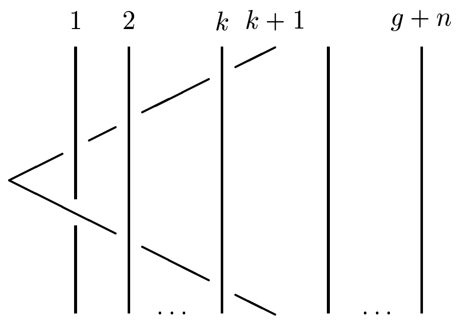


Рис. 4.1

Элементы τ_k, $k = 1, 2, \dots, g$, порождают свободную подгруппу F_g в группе кос Br_{g+n} [6], [20], [60]. Например, из нормальной формы для элементов группы кос (теорема 2.1) следует, что вместе со стандартными образующими $\bar{\sigma}_{g+1}, \dots, \bar{\sigma}_{g+n-1}$ элементы τ_k, $k = 1, 2, \dots, g$, порождают группу Br_n^g. Таким образом, группа кос в теле с ручками Br_n^g может рассматриваться как подгруппа Br_{g+n}, порожденная двумя подгруппами: F_g и Br_n. Обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ стандартные образующие Br_n, рассматриваемые как элементы Br_n^g, $\sigma_i = \bar{\sigma}_{g+i}$, $i = 1, \dots, n-1$. Следовательно, они должны удовлетворять соотношениям группы кос в Br_n^g. Следующий список соотношений между образующими τ_k и σ_i был получен в [15]:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \ \text{ если } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \tau_k \sigma_i = \sigma_i \tau_k, \ \text{ если } k \geqslant 1, \ i \geqslant 2, \\ \tau_k \sigma_1 \tau_k \sigma_1 = \sigma_1 \tau_k \sigma_1 \tau_k, \ \ k = 1, 2, \dots, g; \\ \tau_k \sigma_1^{-1} \tau_{k+l} \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \tau_{k+l} \sigma_1 \tau_k, \ \ k = 1, 2, \dots, g-1; \ l = 1, 2, \dots, g-k. \end{cases}$$

Соотношения четвертого типа в (4.1) уже появлялись в предыдущем параграфе как формула (3.1) для подгруппы $Br_{1,n}$. Соотношения пятого типа в (4.1) описывают взаимодействие образующих свободной подгруппы с их ближайшим соседом σ_1. Геометрически это видно на рис. 4.2.

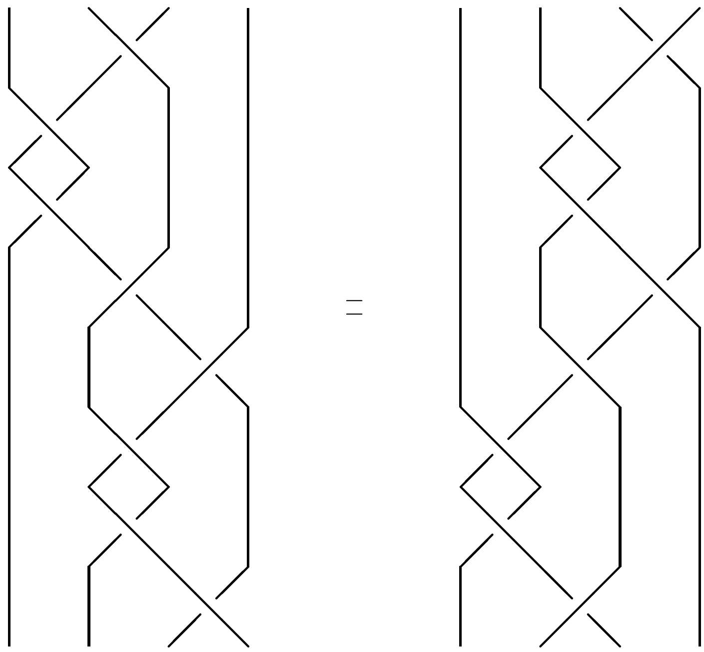


Рис. 4.2

Из теоремы 1.2 следует, что $B(\mathbb{C} \setminus Q_g, n)$ и $F(\mathbb{C} \setminus Q_g, n)$ являются $K(\pi, 1)$-пространствами, $\pi_1 B(\mathbb{C} \setminus Q_g) = Br_n^g$, следовательно, $B(\mathbb{C} \setminus Q_g)$ можно рассматривать как классифицирующее пространство для Br_n^g. Пространство $F(\mathbb{C} \setminus Q_g, n)$ можно интерпретировать как дополнение к конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{C}^{g+n}$, заданной формулами:

$$
\begin{aligned}
&H_{j,k}\colon z_j - z_k = 0 \text{ для всех } j, k;\\
&H_j^i\colon z_j = z_i^0 \text{ для } i = 1, \ldots, g;\ j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

В. В. Шехтман и А. Н. Варченко изучали такие конфигурации в [16], где они были названы "дискриминантными".

Имеется аналог теоремы А. А. Маркова (теорема 2.1) для группы Br_n^g.

Предложение 4.1. (i) *Каждый элемент Br_n^g может быть единственным образом записан в виде*

$$f_{g+1}(s_{1,g+1}, \ldots, s_{g,g+1}) \ldots f_{g+n}(s_{1,g+n}, \ldots, s_{g+n-1,g+n}) \sigma_{i_{g+n},g+n} \ldots \sigma_{i_{g+1},g+1},$$

т.е. в представлении (2.7) имеем $f_j = 1$ и $i_j = j$ для $2 \leqslant j \leqslant g$.

(ii) *Фактор-группа P_m^k / P_m^{k-1} есть свободная группа от свободных образующих $s_{i,k+1}$.*

Доказательство следует из теоремы 2.1.

Обозначим через B_n^g группу, заданную абстрактными образующими τ_k, $1 \leqslant k \leqslant g$, и σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, а также соотношениями (4.1). Существует эпиморфизм

$$\phi_n \colon B_n^g \to Br_n,$$

определенный по формулам:

$$\begin{aligned} \phi_n(\sigma_i) &= \sigma_i, \\ \phi_n(\tau_k) &= e. \end{aligned}$$

Очевидно, что этот эпиморфизм расщепляется.

Пусть h_g есть гомоморфизм из группы B_n^g в группу кос Br_{g+n}, определенный следующим образом:

$$\begin{gathered} \tau_k \mapsto \bar\sigma_g \bar\sigma_{g-1} \dots \bar\sigma_{k+1} \bar\sigma_k^2 \bar\sigma_{k+1}^{-1} \dots \bar\sigma_{g-1}^{-1} \bar\sigma_g^{-1}, \\ \sigma_i \mapsto \bar\sigma_{g+i}. \end{gathered}$$

Зададим элементы $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i < j,\, g+1 \leqslant j)$ и элементы $\alpha_{k,l}$, $(g+1 \leqslant k \leqslant l \leqslant g+n)$ из B_n^g по формулам

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \begin{cases} \tau_i, \ \text{если } j = g+1, \\ \sigma_{j-g-1} \dots \sigma_1 \tau_i \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1}, \ \text{если } 1 \leqslant i \leqslant g, \ g+1 < j \leqslant g+n, \\ \sigma_{j-g-1} \dots \sigma_{i+1-g} \sigma_{i-g}^2 \sigma_{i+1-g}^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1}, \ \text{если } g+1 \leqslant i < j \leqslant g+n, \end{cases} \\ \alpha_{k,k} &= e, \\ \alpha_{k,l} &= \sigma_{k-g} \dots \sigma_{l-g-1}. \end{aligned}$$

Элементы $a_{i,j}$ определены таким образом, что они удовлетворяют соотношениям Бурау (2.5) и их образами в группе Br_{g+n} являются элементы $s_{i,j}$. Образы $\alpha_{k,l}$ суть элементы $\sigma_{k,l}$. Формула (2.6) есть следствие только соотношений Бурау. Следовательно, такая же формула верна для элементов $a_{i,j}$:

$$[a_{i,l}, a_{j,k}^{\varepsilon}] = f(a_{1,l}, \dots, a_{l-1,l}), \qquad \varepsilon = \pm 1, \quad k < l. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Следующие формулы коммутирования выполнены в B_n^g:*

$$\sigma_q^{\varepsilon_1} a_{k,j}^{\varepsilon_2} = \begin{cases} a_{k,j}^{\varepsilon_2} \sigma_q^{\varepsilon_1}, \quad \text{если} \ \ q \neq j-g, \ \ q \neq j-g-1, \\ a_{k,j+\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_q^{\varepsilon_1}, \quad \text{если} \ \ q = j-g, \\ a_{j-1,j} a_{k,j-1} \sigma_{j-g-1}, \quad \text{если} \ \ q = j-g-1, \end{cases} \tag{4.3}$$

если левая часть не равна $\sigma_1^{-1} a_{k,g+1}^{\varepsilon}$. В противном случае имеем

$$\sigma_1^{-1} a_{k,g+1} = a_{k,g+1} a_{k,g+2} a_{k,g+1}^{-1} \sigma_1^{-1}, \tag{4.4}$$

$$\sigma_1^{-1} a_{k,g+1}^{-1} = a_{k,g+1} a_{k,g+2}^{-1} a_{k,g+1}^{-1} \sigma_1^{-1}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Следует непосредственно из соотношений. Рассмотрим, например, в (4.3) случай $\sigma_q a_{k,j}$, когда $1 \leqslant q < j-g-1$ и $k \leqslant g$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_q a_{k,j} &= \sigma_q \sigma_{j-g-1} \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \\
&= \sigma_{j-g-1} \sigma_q \sigma_{q+1} \sigma_q \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \\
&= \sigma_{j-g-1} \sigma_{q+1} \sigma_q \sigma_{q+1} \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \\
&= \sigma_{j-g-1} \sigma_{q+1} \sigma_q \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{q+1} \sigma_q^{-1} \sigma_{q+1}^{-1} \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \\
&= \sigma_{j-g-1} \sigma_{q+1} \sigma_q \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_q^{-1} \sigma_{q+1}^{-1} \sigma_q \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \\
&= \sigma_{j-g-1} \sigma_{q+1} \sigma_q \dots \sigma_1 \tau_k \sigma_1^{-1} \dots \sigma_q^{-1} \sigma_{q+1}^{-1} \sigma_q \dots \sigma_{j-g-1}^{-1} \sigma_q.
\end{aligned}$$

Формулы (4.4) и (4.5) суть переписанное четвертое соотношение в (4.1).

Лемма 4.2. *Каждый элемент B_n^g может быть единственным образом записан в виде*

$$\begin{aligned}
&f_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \\
&\quad \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}) \alpha_{i_{g+n},g+n} \dots \alpha_{i_{g+1},g+1}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказательство. Применим индукцию по длине $l(z)$ элемента $z \in B_n^g$ по отношению к базису $\tau_1, \dots, \tau_g, \sigma_1, \dots, \sigma_n$. Если $l(z) = 0$, то $z = 1$ и утверждение леммы верно. Пусть $l(z) = l$. Тогда $z = \tau_k^\varepsilon z_0$ или $z = \sigma_q^\varepsilon z_0$, где $l(z_0) < l$. Следовательно, z_0 представляется в виде (4.6):

$$\begin{aligned}
z_0 = {} & f_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \\
& \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}) \alpha_{i_{g+n},g+n} \dots \alpha_{i_{g+1},g+1}.
\end{aligned}$$

В первом случае $\tau_k = a_{k,g+1}$. Значит,

$$\begin{aligned}
z = \tau_k^\varepsilon z_0 &= a_{k,g+1}^\varepsilon f_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \\
&\quad \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}) \alpha_{i_{g+n},g+n} \dots \alpha_{i_{g+1},g+1} \\
&= f'_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \\
&\quad \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}) \alpha_{i_{g+n},g+n} \dots \alpha_{i_{g+1},g+1}.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы выполняется в этом случае. Рассмотрим второй случай. Имеем:

$$\begin{aligned}
z = \sigma_q^\varepsilon z_0 &= \sigma_q^\varepsilon f_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \\
&\quad \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}) \alpha_{i_{g+n},g+n} \dots \alpha_{i_{g+1},g+1}.
\end{aligned}$$

Используя лемму 4.1, мы можем записать z как слово $f\omega$, где f есть слово из $a_{i,j}$, а ω – слово из $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Элемент ω можно рассматривать как элемент группы кос Br_n. Следовательно, по теореме 2.1 ω можно переписать в виде

$$f_2(s_{1,2}) \dots f_j(s_{1,j}, \dots, s_{j-1,j}) \dots f_n(s_{1,n}, \dots, s_{n-1,n}) \sigma_{i_n,n} \dots \sigma_{i_j,j} \dots \sigma_{i_2,2}.$$

Значит, элемент z переписан теперь в виде $ff'\alpha$, где α есть $\alpha_{i_n,n} \dots \alpha_{i_2,2}$, f и f' суть слова из $a_{i,j}$. Используя (4.2), перепишем ff' в виде

$$f_{g+1}(a_{1,g+1}, \dots, a_{g,g+1}) \dots f_{g+n}(a_{1,g+n}, \dots, a_{g+n-1,g+n}).$$

Теорема 4.1. *Гомоморфизм h_g из B_n^g в группу кос Br_{g+n} является изоморфизмом группы B_n^g на группу Br_n^g.*

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$\nu'\colon B_n^g \xrightarrow{\phi} Br_n^g \xrightarrow{\nu} \Sigma_n$$

гомоморфизма ϕ с каноническим эпиморфизмом

$$\nu\colon Br_n \to \Sigma_n.$$

Если элемент $z \in B_n^g$ записан в виде (4.6), то его образ в Σ_n равен следующему произведению транспозиций:

$$(i_n, n)\ \ldots\ (i_2, 2).$$

Следовательно, ядро J_{g+n}^g гомоморфизма ν_n' порождено $a_{i,j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant g+n$, $g < j$. Таким образом, гомоморфизм h_g индуцирует морфизм точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] & J_{g+n}^g \arrow[r] \arrow[d, "h_g \mid J_{g+n}^g"] & B_n^g \arrow[r] \arrow[d, "h_g"] & \Sigma_n \arrow[r] \arrow[d] & e \\ e \arrow[r] & P_{g+n} \arrow[r] & Br_{g+n} \arrow[r] & \Sigma_{g+n} \arrow[r] & e \end{tikzcd}$$

Ограничение на подгруппу Br_n^g группы Br_{g+n} дает следующий морфизм точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] & J_{g+n}^g \arrow[r] \arrow[d, "h_g \mid J_{g+n}^g"] & B_n^g \arrow[r] \arrow[d, "h_g"] & \Sigma_n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & e \\ e \arrow[r] & P_{g+n}^g \arrow[r] & Br_n^g \arrow[r] & \Sigma_n \arrow[r] & e \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

Пусть J_{g+n}^k есть подгруппа J_{g+n}^g, порожденная $a_{i,j}$, $k < j$, $g \leqslant k$. Из (4.2) следует, что J_{g+n}^k есть нормальная подгруппа J_{g+n}^g. Гомоморфизм h_g отображает эту подгруппу в P_{g+n}^g. Таким образом, получаем морфизм точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r] & J_{g+n}^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & J_{g+n}^k \arrow[r] \arrow[d, "h_g \mid J_{g+n}^k"] & J_{g+n}^k / J_{g+n}^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & e \\ e \arrow[r] & P_{g+n}^{k+1} \arrow[r] & P_{g+n}^k \arrow[r] & F_k \arrow[r] & e \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Группа $J_{g+n}^k / J_{g+n}^{k+1}$ порождена смежными классами элементов $a_{i,k+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, а их образы в F_k суть свободные образующие. Следовательно, правая стрелка в (4.8) есть изоморфизм. Группа J_{g+n}^{g+n-1} порождена $a_{i,g+n}$, $1 \leqslant i \leqslant g+n-1$, а их образы в группе P_{g+n}^{g+n-1} – также свободные образующие. Следовательно, имеется изоморфизм

$$h_g \mid J_{g+n}^{g+n-1}\colon J_{g+n}^{g+n-1} \cong P_{g+n}^{g+n-1}.$$

По индукции из этого факта и из диаграммы (4.8) получаем, что

$$h_g \mid J_{g+n}^k\colon J_{g+n}^k \to P_{g+n}^k$$

есть изоморфизм для всех k. Тогда из диаграммы (4.7) следует, что

$$h_g\colon B_n^g \to Br_n^g$$

есть изоморфизм.

Следствие 4.1. *Для группы кос Br_n^g в теле с ручками рода g существует нормальный ряд*

$$\{e\} = J_{g+n}^{g+n} \subset J_{g+n}^{g+n-1} \subset \cdots \subset J_{g+n}^{g+1} \subset J_{g+n}^{g} \subset Br_n^g$$

такой, что

$$Br_n^g / J_{g+n}^g \cong \Sigma_n, \;\; J_{g+n}^r / J_{g+n}^{r+1} \cong F_r, \qquad r = g, \dots, g+n-1.$$

Гомоморфизмы, индуцированные вложением $Br_n^g \to Br_{g+n}$, отображают его в соответствующий нормальный ряд группы кос Br_{g+n} таким образом, что $J_{g+n}^r \cong P_{g+n}^r$.

Замечание. Можно рассмотреть группу кос поверхности (ориентированной или неориентированной) с удаленными h точками. Группа кос и группа крашеных кос из m нитей замкнутой поверхности были описаны в [62]. Группа крашеных кос имеет образующие $A_{i,l}$ и $\rho_{i,k}$, где $A_{i,j}$ суть некоторые образующие обычной группы крашеных кос, а $\rho_{i,k}$ возникают из лент Мёбиуса или ручек поверхности. Факт, аналогичный теореме 2.1 (i), остается верным [62]. Таким образом, возможно в принципе получить представление группы кос поверхности с удаленными h точками, используя представление группы кос замкнутой поверхности, описанное в [62].

Теорема 4.1 и следствие 4.1 были доказаны в [63].

§ 5. Косы с особенностями

Пусть BP_n есть подгруппа группы $\operatorname{Aut} F_n$, порожденная двумя множествами автоморфизмов ξ_i и σ_i из (2.1) и (2.2). Она называется *группой кос-перестановок.* Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк доказали [23], [24], что BP_n задается набором образующих $\{\xi_i, \sigma_i, \; i = 1, 2, \dots, n-1\}$ и соотношениями:

$$\begin{cases} \xi_i^2 = 1, \\ \xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i, \;\; \text{если } |i-j| > 1, \\ \xi_i\xi_{i+1}\xi_i = \xi_{i+1}\xi_i\xi_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(соотношения симметрической группы)};$$

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \;\; \text{если } |i-j| > 1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(соотношения группы кос)};$$

$$\begin{cases} \sigma_i\xi_j = \xi_j\sigma_i, \;\; \text{если } |i-j| > 1, \\ \xi_i\xi_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\xi_i\xi_{i+1}, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\xi_i = \xi_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(смешанные соотношения)}.$$

Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк дали также геометрическую интерпретацию BP_n как группы *кос со спайками.* Сначала они определили *диаграмму кос со спайками* из n нитей как набор n монотонных дуг, начинающихся из n точек на горизонтальной линии некоторой плоскости (верх диаграммы) и идущих вниз до n точек на другой горизонтальной линии (низ диаграммы). Диаграммы могут иметь пересечения двух типов: 1) как обычные косы, что показано на рис. 5.1, или 2) точки спайки, как показано на рис. 5.2.

Рис. 5.1

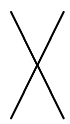


Рис. 5.2

Пример косы со спайками показан на рис. 5.3.

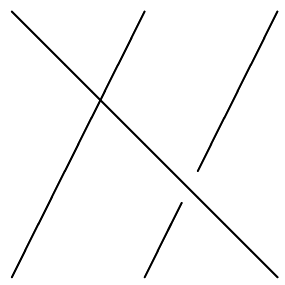


Рис. 5.3

Композиция диаграмм кос со спайками из n нитей определяется расположением одной диаграммы под другой. Диаграмма без пересечений и точек спайки является единичной по отношению к этой композиции. Таким образом, множество диаграмм кос со спайками из n нитей есть полугруппа, обозначаемая через WD_n.

Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк определили следующие типы допустимых преобразований диаграмм кос со спайками. Они изображены на рис. 5.4–5.7.

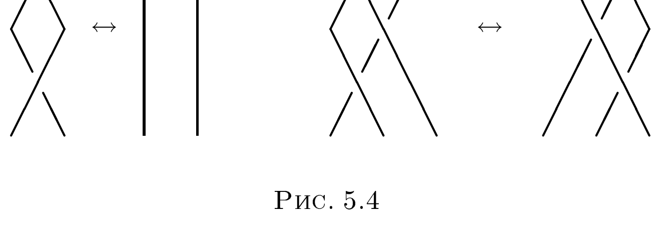


Рис. 5.4

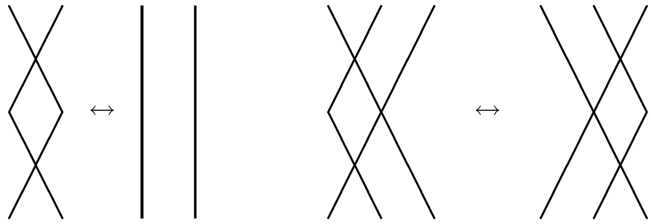


Рис. 5.5

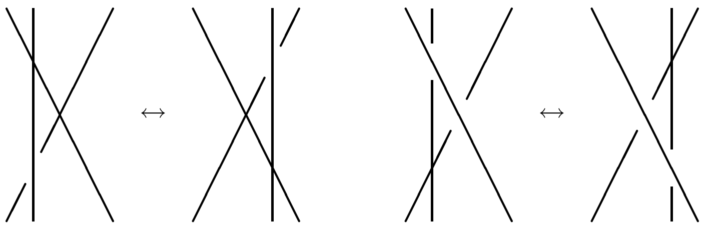


Рис. 5.6

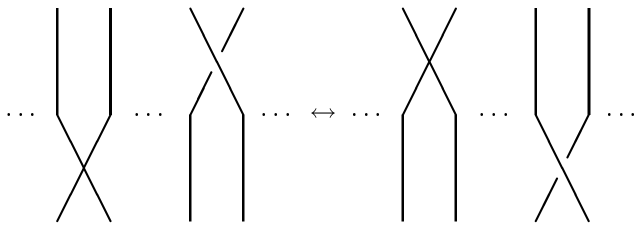


Рис. 5.7

Допустимые преобразования, изображенные на рис. 5.4, суть преобразования Райдемайстера, известные в теории узлов. Первое преобразование на рис. 5.4 соответствует соотношению

$$\xi_i^2 = 1.$$

Преобразование на рис. 5.7 есть геометрическая форма коммутативности из смешанных соотношений.

Коса со спайками определяется как класс эквивалентности диаграмм кос со спайками при допустимых преобразованиях. Р. Фенн, Р. Риманьи и К. Рурк доказали, что косы со спайками образуют группу, и эта группа изоморфна группе кос-перестановок BP_n. Образующая σ_i соответствует канонической образующей группы кос Br_n и изображена на рис. 1.1. Образующие ξ_i соответствуют косам со спайками, изображенным на рис. 5.8.

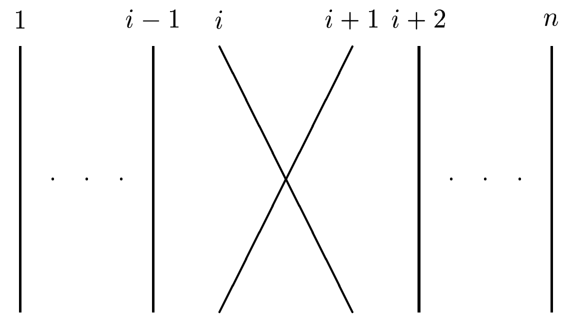


Рис. 5.8

Можно также рассматривать косы со спайками как объекты трехмерного пространства. Мы рассматриваем их вложенными в положительное полупространство (например, по третьей координате) трехмерного евклидова пространства, в то время как точки спайки предполагаются принадлежащими двумерной плоскости с нулевой третьей координатой. Таким образом, нитям не разрешается проходить под точками спайки.

Автоморфизмы группы F_n, лежащие в BP_n, могут быть охарактеризованы следующим образом [24]. Пусть $\pi \in \Sigma_n$ есть перестановка, а w_i, $i = 1, 2 \ldots, n$, суть слова в F_n. Тогда отображение

$$x_i \mapsto w_i^{-1} x_{\pi(i)} w_i$$

определяет инъективный эндоморфизм F_n. Если он также сюръективен, то он называется автоморфизмом *типа "перестановка–сопряжение"*. Автоморфизмы этого типа образуют подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, F_n$, которая является в точности BP_n. Из этой интерпретации мы видим, что спаривание

$$\mu(n,m)\colon BP_n \times BP_m \to BP_{n+m}$$

и вложения

$$BP_n \to BP_{n+k}$$

корректно определены и удовлетворяют условиям, которые предъявлялись для системы групп $G_m \leqslant \mathrm{Aut}\, F_n$ в § 2. Система групп BP_n согласована со спариванием (2.13) для групп автоморфизмов свободных групп. Действительно, пусть $\alpha \in BP_k$ и $\beta \in BP_l$ заданы по формулам

$$\alpha\colon x_j \mapsto w_j^{-1} x_{\pi(j)} w_j,$$
$$\beta\colon y_i \mapsto v_i^{-1} y_{\sigma(i)} v_i.$$

Обозначим через $z_{p,j}$ следующее выражение из букв $a_{i,j}$ (§ 2):

$$w_j^{-1}(a_{p,1}, \ldots, a_{p,k}) a_{p,\pi(j)} w_j(a_{p,1}, \ldots, a_{p,k}).$$

Тогда $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Aut}\, F_{kl}$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{i,j} \mapsto v_i^{-1}(z_{1,j}, \ldots, z_{l,j}) w_j^{-1}&(a_{\sigma(i),1}, \ldots, a_{\sigma(i),k}) \\ &\times a_{\sigma(i),\pi(j)} w_j(a_{\sigma(i),1}, \ldots, a_{\sigma(i),k}) v_i(z_{1,j}, \ldots, z_{l,j}). \end{aligned}$$

Следовательно, он принадлежит группе кос-перестановок BP_{kl} и спаривание

$$BP_k \times BP_l \to BP_{kl}$$

корректно определено.

Рассмотрим систему групп $\overline{BP}_m$ с теми же образующими, что и для группы кос-перестановок, и такую, что к соотношениям в BP_m мы добавляем еще две серии соотношений:

$$\begin{aligned} \xi_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \xi_{i+1}, \\ \xi_i \sigma_i &= \sigma_i \xi_i. \end{aligned}$$

Назовем эту группу *редуцированной группой кос-перестановок.* Таким образом, смешанные соотношения для редуцированной группы кос-перестановок имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_i \xi_j = \xi_j \sigma_i, \ \text{если } |i-j| \neq 1, \\ \xi_i \xi_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \xi_i \xi_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \xi_i = \xi_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \xi_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \xi_{i+1} \end{cases} \qquad \text{(смешанные соотношения для } \overline{BP}_m).$$

Моноид Баеса–Бирман SB_n, или *моноид обобщенных кос*, или *моноид кос с особенностями* [21], [22], определяется как моноид с образующими g_i, g_i^{-1}, a_i, $i = 1, \ldots, n-1$, и соотношениями

$$\begin{aligned} &g_i g_j = g_j g_i, \ \text{если } |i-j| > 1, \\ &a_i a_j = a_j a_i, \ \text{если } |i-j| > 1, \\ &a_i g_j = g_j a_i, \ \text{если } |i-j| \neq 1, \\ &g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ &g_i g_{i+1} a_i = a_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ &g_{i+1} g_i a_{i+1} = a_i g_{i+1} g_i, \\ &g_i g_i^{-1} = g_i^{-1} g_i = 1. \end{aligned}$$

На рисунках g_i соответствует канонической образующей группы кос (правосторонний переход), а a_i представляется пересечением i-й и $(i+1)$-й нитей, как показано на рис. 1.1 и 5.8. Более детальную геометрическую интерпретацию моноида Баеса–Бирман можно найти в работе Дж. Бирман [22].

Гомоморфизм j_n из группы кос Br_n определяется очевидным образом:

$$j_n \colon Br_n \to SB_n.$$

Р. Фенн, Э. Кейман и К. Рурк доказали [64], что моноид Баеса–Бирман вкладывается в группу, которую они назвали *группой кос с особенностями*:

$$SB_n \to SG_n.$$

Это означает, что в SG_n элементы a_i становятся обратимыми и все соотношения из SB_n остаются справедливыми.

§ 6. Классифицирующие пространства для групп автоморфизмов свободных групп

Под классифицирующим пространством BG для дискретной группы G мы понимаем пространство Эйленберга–Маклейна $K(G,1)$. Г. Сегал определил классифицирующее пространство для категории как геометрическую реализацию ее нерва ([65], см. также [66]). В случае, когда категория совпадает с группой, т.е. имеет только один объект, и каждый морфизм обратим, классифицирующее пространство для категории совпадает с классифицирующим пространством группы.

Пусть G_n и H_n суть системы групп, описанные в § 2. Пусть $\operatorname{Aut}_\infty$ обозначает объединение всех групп $\operatorname{Aut} F_n$ при канонических вложениях. Спаривание $\mu_{m,1}$ из § 2 определяет вложение группы G_m в группу G_{m+1}. В случае системы групп H_m это дает гомоморфизм $H_m \to H_{m+1}$. Тогда группы G_∞ и H_∞ определяются как прямые пределы систем $\{G_m\}$ и $\{H_m\}$. Пусть $\amalg_{n\geqslant 0} BG_n$ и $\amalg_{n\geqslant 0} BH_n$ суть моноиды, состоящие из несвязных сумм классифицирующих пространств групп G_n и H_n. Эти моноиды могут быть отождествлены с классифицирующими пространствами категорий $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ [66].

Предложение 6.1. *Классифицирующие пространства категорий $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ являются E_∞-пространствами, для которых имеются очевидные E_∞-отображения*

$$B\Sigma \to B\mathscr{G} \to B\mathscr{H}.$$

Имеет место следующая коммутативная диаграмма групповых пополнений

$$\begin{array}{ccccc} B\Sigma_\infty & \longrightarrow & BG_\infty & \longrightarrow & BH_\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^\infty S^\infty & \longrightarrow & \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n) & \longrightarrow & \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BH_n), \end{array} \tag{6.1}$$

где верхняя строчка индуцирована каноническими групповыми гомоморфизмами

$$\Sigma_\infty \to G_\infty \to H_\infty,$$

а нижняя строчка состоит из бесконечнократных петлевых отображений.

Доказательство основывается на теореме П. Мэя и теореме о групповом пополнении (см., например, [67] или [66; с. 69, 90–91]). Определение E_∞-пространств и E_∞-отображений дано в дополнении.

Для пространства X, имеющего гомотопический тип CW-комплекса, мы используем символ X^+ в том же смысле, в каком и Д. Б. Фукс в [68] использует понятие "квилленизации". Это означает, что X^+ есть гомотопически простой CW-комплекс и существует отображение

$$q\colon X \to X^+,$$

индуцирующее изоморфизм в гомологиях. По теореме Дж. Г. К. Уайтхеда X^+, если существует, то единствен с точностью до гомотопической эквивалентности. Оригинальная плюс-конструкция Д. Квиллена для пространств, у которых коммутант фундаментальной группы есть совершенная подгруппа, является конструктивным способом построить X^+ в этом случае.

Обозначим через $\Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n)$ и $\Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} BH_n)$ компоненты связности постоянных отображений в пространствах $\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n)$ и $\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BH_n)$.

Следствие 6.1. *При выполнении условий предложения* 6.1 *имеются изоморфизмы*
$$BG_\infty^+ \cong \Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n)$$
и
$$BH_\infty^+ \cong \Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} BH_n),$$
которые могут быть включены в коммутативную диаграмму, аналогичную (6.1).

Предложение 6.2. *Существует бесконечнократное пространство петель X такое, что имеет место следующее бесконечнократное петлевое расщепление*:
$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n) \simeq \Omega^\infty S^\infty \times X.$$

Доказательство. Напомним некоторые результаты Ф. Вальдхаузена [69]. Он изучал пространство
$$A(*) = \mathbb{Z} \times \varinjlim_{n,k} \big(B\,\mathrm{Aut}(\vee^k S^n)\big)^+$$
и доказал, что каноническое отображение
$$B\Sigma_\infty^+ \to A(*) \tag{6.2}$$
расщепляется, т.е. существует отображение
$$A(*) \to B\Sigma_\infty^+ \tag{6.3}$$
такое, что его композиция с предыдущим отображением есть гомотопическая эквивалентность пространства $B\Sigma_\infty^+$. Более того, отображения (6.2) и (6.3) являются бесконечнократно петлевыми отображениями между бесконечнократными пространствами петель (см. замечание 5.3 в [69]). А. Хэтчер использовал это расщепление в [70]. Он рассматривал отображение
$$\mathrm{Aut}(\vee^k S^0) \to \mathrm{Aut}(\vee^k S^1),$$
индуцированное функтором надстройки, а также композицию
$$\mathrm{Aut}(\vee^k S^0) \to \mathrm{Aut}(\vee^k S^1) \to \varinjlim_{n,k} \mathrm{Aut}(\vee^k S^n). \tag{6.4}$$
Затем он взял композицию (6.4) с отображением Ф. Вальдхаузена (6.3) и получил аналогичное расщепление для $B\,\mathrm{Aut}_\infty^+$. Заметим, что аргументы А. Хэтчера остаются справедливыми и для нашей системы подгрупп G_n. А именно, пусть X есть слой композиции
$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n) \to \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} B\,\mathrm{Aut}\,F_n) \to \Omega^\infty S^\infty,$$
в которой вторым является отображение Ф. Вальдхаузена (6.3). Пространство X является бесконечнократным пространством петель, и бесконечнократно петлевое отображение
$$\Omega^\infty S^\infty \to \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n)$$
дает необходимое расщепление.

Предложение 6.3. *Если система групп G_n согласована со спариванием (2.12)–(2.13), то она определяет мультипликативный, ассоциативный (возможно, некоммутативный) спектр TG вместе с мультипликативным отображением в сферический спектр*

$$TG \to S,$$

и это отображение мультипликативно расщепляется.

Доказательство. Система групп G_n порождает Γ-*категорию* в смысле Г. Сегала [71] (см. также дополнение). Эта Γ-*категория* порождает Γ-*пространство* и затем спектр. Если система групп G_n из предложения 2.1 согласована со спариванием (2.13), то определено аналогичное спаривание

$$G_k \times G_l \to G_{kl}.$$

Оно определяет умножение соответствующих Γ-пространств. Следовательно, спектр, соответствующий бесконечнократному пространству петель $\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BG_n)$, мультипликативен [71; § 5]. Рассмотрим композицию спаривания (2.13) с отображением, порожденным надстройкой

$$\operatorname{Aut}(\vee^k S^1) \times \operatorname{Aut}(\vee^l S^1) \to \operatorname{Aut}(\vee^{kl} S^1) \to \operatorname{Aut}(\vee^{kl} S^2).$$

Мы получаем спаривание $\operatorname{Aut}(\vee^k S^1)$ и $\operatorname{Aut}(\vee^l S^1)$, порожденное смэш-произведением. Это спаривание рассматривалось Ф. Вальдхаузеном [69] при изучении пространства $A(*)$. Канонические отображения

$$\operatorname{Aut}(\vee^k S^0) \to \operatorname{Aut}(\vee^k S^1) \to \varinjlim_{n,k} \operatorname{Aut}(\vee^k S^n)$$

согласованы со спариваниями. Ф. Вальдхаузен доказал [69], что отображение (6.3)

$$A(*) \to B\Sigma_\infty^+$$

согласовано с мультипликативными структурами в $A(*)$ и $B\Sigma_\infty^+$.

Рассматривая расщепление из предложения 6.2, интересно сравнить гомологии групп G_∞ и Σ_∞. Ответ должен зависеть, конечно, от системы групп G_n. Например, для самой группы $\operatorname{Aut}_\infty$ эти гомологии в размерностях 1 и 2 совпадают:

$$H_i(\operatorname{Aut}_\infty, \mathbb{Z}) = H_i(\Sigma_\infty, \mathbb{Z}) \quad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

А. Хэтчер отметил, что в общем случае (для всех i) неизвестно, справедливо это равенство или нет [70]. Ниже мы будем рассматривать гомологии группы кос-перестановок. Как мы увидим, этот случай весьма отличен от случая целой группы $\operatorname{Aut}_\infty$.

§ 7. Когомологии групп крашеных кос

Когомологии групп крашеных кос были впервые вычислены В. И. Арнольдом [26], который использовал спектральную последовательность Серра. Мы будем рассматривать несколько более общий случай конфигурационного пространства для $\mathbb{R}^n$ [72], [73]. Доказательства из работы В. И. Арнольда [26] полностью проходят и в этом случае. Рассмотрим сначала $F(\mathbb{R}^n, 2)$. Отображение

$$\phi\colon S^{n-1} \to F(\mathbb{R}^n, 2),$$

описываемое формулой $\phi(x) = (x, -x)$, есть Σ_2-эквивариантная гомотопическая эквивалентность. Обозначим через A образующую $H^{n-1}(F(\mathbb{R}^n, 2), \mathbb{Z})$, которая отображается при ϕ^* в стандартную образующую $H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z})$. Для i и j таких, что $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $i \neq j$, определим $\pi_{i,j}\colon F(\mathbb{R}^n, m) \to F(\mathbb{R}^n, 2)$ по формуле $\pi_{i,j}(p_1, \dots, p_m) = (p_i, p_j)$. Пусть

$$A_{i,j} = \pi_{i,j}^*(A) \in H^{n-1}(F(\mathbb{R}^n, m), \mathbb{Z}).$$

Следовательно, $A_{i,j} = (-1)^n A_{j,i}$ и $A_{i,j}^2 = 0$. Для $w \in \Sigma_m$ имеется действие $w(A_{i,j}) = A_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}$, поскольку $\pi_{i,j} w = \pi_{w^{-1}(i), w^{-1}(j)}$. Заметим также, что при ограничении на

$$F(\mathbb{R}^n \setminus Q_k, m-k) \cong \pi^{-1}(Q_k) \subset F(\mathbb{R}^n, m)$$

классы $A_{i,j}$ с $1 \leqslant i, j \leqslant k$ переходят в нуль, поскольку в этом случае отображение $\pi_{i,j}$ является постоянным на $\pi^{-1}(Q_k)$. Рассматривая спектральную последовательность Серра, получаем следующий факт.

Теорема 7.1. *Группа когомологий $H^*(F(\mathbb{R}^n \setminus Q_k, m-k), \mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой с образующими*

$$A_{i_1,j_1} A_{i_2,j_2} \dots A_{i_s,j_s},$$

где $k < j_1 < j_2 < \dots < j_s \leqslant m$ и $i_r < j_r$ при $r = 1, \dots, s$.

Мультипликативная структура и структура Σ_m-алгебры на $H^*(F(\mathbb{R}^n, m), \mathbb{Z})$ дается следующей теоремой, которая доказывается с использованием Σ_3-действия на $H^*(F(\mathbb{R}^n, 3), \mathbb{Z})$.

Теорема 7.2. *Кольцо когомологий $H^*(F(\mathbb{R}^n, m), \mathbb{Z})$ мультипликативно порождено элементами*

$$A_{i,j} \in H^{n-1}(F(\mathbb{R}^n, m), \mathbb{Z}), \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant m,$$

квадраты которых равны нулю, и связанными только соотношениями

$$A_{i,k} A_{j,k} = A_{i,j} A_{j,k} - A_{i,j} A_{i,k} \quad \text{при} \quad i < j < k. \tag{7.1}$$

Ряд Пуанкаре для $F(\mathbb{R}^n, m)$ есть произведение $\prod_{j=1}^{m-1}(1 + jt^{n-1})$.

Замечание. В случае $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ классы когомологий $A_{j,k}$ могут быть интерпретированы как классы когомологий дифференциальных форм

$$\omega_{j,k} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{dz_j - dz_k}{z_j - z_k}\,.$$

Э. Брискорн вычислил когомологии крашеных обобщенных групп кос [14], используя идеи В. И. Арнольда для классического случая. Пусть $\mathscr{V}$ есть конечномерное комплексное векторное пространство, а $H_j \in \mathscr{V}$, $j \in I$, есть конечное семейство аффинных гиперплоскостей, заданное линейными формами l_j. Э. Брискорн доказал следующий факт.

Теорема 7.3. *Классы когомологий, соответствующие голоморфным дифференциальным формам*

$$\omega_j = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{dl_j}{l_j}\,,$$

порождают кольцо когомологий $H^*\bigl(\mathscr{V} \setminus \bigcup_{j\in I} H_j, \mathbb{Z}\bigr)$. Более того, это кольцо изоморфно $\mathbb{Z}$-подалгебре, порожденной формами ω_j в алгебре мероморфных форм на $\mathscr{V}$.

Когомологии крашеных обобщенных групп кос описываются следующим образом.

Теорема 7.4. (i) *Группа когомологий $H^k(P(W),\mathbb{Z})$ группы крашеных обобщенных кос $P(W)$ с целыми коэффициентами является свободной абелевой группой, и ее ранг равен числу элементов $w \in W$ длины $l(w) = k$, где l есть длина, рассматриваемая по отношению к системе образующих, состоящей из всех отражений W.*

(ii) *Ряд Пуанкаре для $H^*(P(W),\mathbb{Z})$ есть произведение $\prod_{j=1}^{n}(1+m_jt)$, где m_j суть показатели группы W, определенные в* § 3.

(iii) *Мультипликативная структура $H^*(P(W),\mathbb{Z})$ совпадает со структурой алгебры, порожденной* 1*-формами, описанной в предыдущей теореме.*

В. А. Голубева и В. П. Лексин изучали структуру кольца $H^*(P(W),\mathbb{Z})$ в терминах квадратичных соотношений, аналогичных (7.1) [74].

§ 8. Гомологии групп кос и пространства петель

Для изучения когомологий классических групп кос $H^*(Br_n,\mathbb{Z})$ В. И. Арнольд [12] интерпретировал пространство $K(Br_n,1) \cong B(\mathbb{R}^2,n)$ как пространство комплексных многочленов степени n без кратных корней и со старшим коэффициентом, равным 1:

$$P_n(t) = t^n + z_1t^{n-1} + \dots + z_{n-1}t + z_n. \tag{8.1}$$

Более точно, рассмотрим “отображение Виета” из $\mathbb{C}^n$, которое мы в этом месте обозначаем через $\mathbb{C}^n_{(\lambda)}$, в $\mathbb{C}^n$, которое мы обозначаем через $\mathbb{C}^n_{(z)}$, чтобы различить область определения и область значений:

$$p\colon \mathbb{C}^n_{(\lambda)} \to \mathbb{C}^n_{(z)}. \tag{8.2}$$

Оно отображает точку $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n_{(\lambda)}$ в полином $P_n(t)=t^n+z_1t^{n-1}+\dots+z_{n-1}t+z_n$, который имеет корни $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (с учетом кратности). Пространство орбит $Orb(\mathbb{C}^n,\Sigma_n)$ канонического действия симметрической группы Σ_n на $\mathbb{C}^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n_{(z)}$ при помощи отображения, принимающего значения базисных симметрических многочленов от $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Стандартный базис состоит из симметрических многочленов:

$$z_k(\lambda)=(-1)^k\sum_{i_1<\dots<i_k}\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k},\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Таким образом, $\mathbb{C}^n_{(z)}\cong Orb(\mathbb{C}^n,\Sigma_n)$, и $ORB(\mathbb{C}^n,\Sigma_n)$ есть пространство регулярных орбит этого действия. Мы увидим сейчас, что отображение p из (8.2) определяет гомеоморфизм

$$p\colon ORB(\mathbb{C}^n,\Sigma_n)\to\mathbb{C}^n_{(z)}\setminus\Delta,$$

где Δ есть *дискриминантная поверхность* полинома (8.1), т.е. подпространство $\mathbb{C}^n$, где дискриминант $\Delta^n(z)$ равен нулю;

$$\Delta^n(z)=\Delta^n(p(\lambda))=\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2.$$

Далее В.И. Арнольд рассматривал каноническое вложение пространства $\mathbb{C}^n_{(z)}\setminus\Delta$ в сферу S^{2n}:

$$\mathbb{C}^n_{(z)}\setminus\Delta\to S^{2n}.$$

Дополнение $\mathbb{C}^n_{(z)}\setminus\Delta$ в S^{2n} эквивалентно одноточечной компактификации Δ^* пространства Δ. Двойственность Александера дает

$$H^i(Br_n;\mathbb{Z})=H^i(\mathbb{C}^n_{(z)}\setminus\Delta;\mathbb{Z})\cong H_{2n-i}(S^{2n},\Delta^*;\mathbb{Z})\cong\widetilde{H}_{2n-i+1}(\Delta^*;\mathbb{Z}),$$

где волна обозначает приведенные гомологии. В.И. Арнольд доказал следующие факты.

Теорема 8.1 (конечности). *Когомологии каждой группы кос конечны, кроме*

$$H^0(Br_n,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\quad H^1(Br_n,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\qquad n\geqslant 2.$$

Также имеем

$$H^i(Br_n,\mathbb{Z})=0\quad\textit{при}\quad i\geqslant n. \tag{8.3}$$

Следствие 8.1. *Эйлерова характеристика любой группы кос равна нулю.*

Теорема 8.2 (повторения). *Все группы когомологий каждой группы кос из нечетного числа нитей такие же, как у группы кос из предыдущего четного числа нитей:*

$$H^i(Br_{2n+1},\mathbb{Z})=H^i(Br_{2n},\mathbb{Z}).$$

Теорема 8.3 (стабилизации). *При увеличении n группа когомологий $H^i(Br_n, \mathbb{Z})$ стабилизируется*:

$$H^i(Br_n, \mathbb{Z}) = H^i(Br_{2i-2}, \mathbb{Z}) \quad \textit{при} \quad n \geqslant 2i-2.$$

Замечание. Изоморфизм $H^1(Br_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ следует из того факта, что абелеанизация Br_n равна $\mathbb{Z}$. Действительно, мы можем определить гомоморфизм из кос в целые числа, беря сумму показателей вхождений образующих σ_i в выражение любого элемента группы через канонические образующие:

$$\deg\colon Br_n \to \mathbb{Z}, \quad \deg(b) = \sum_j m_j, \quad \text{где} \quad b = (\sigma_{i_1})^{m_1} \dots (\sigma_{i_k})^{m_k}.$$

Легко доказать, что ядро deg порождено коммутаторами. Равенство (8.3) следует из того факта, что пространство $C^n_{(z)} \setminus \Delta$ есть прямое произведение $\mathbb{C}^1$ на многообразие Штейна.

В. И. Арнольд также вычислил группы $H^i(Br_n, \mathbb{Z})$ при $n \leqslant 11$ и $i \leqslant 9$.

Д. Б. Фукс описал когомологии групп кос по модулю 2 [27]. Обозначим для простоты через Γ_n конфигурационное пространство $B(\mathbb{R}^2, n) = B(\mathbb{C}, n) = F(\mathbb{C}, n)/\Sigma_n$. Пусть Γ_n^* есть одноточечная компактификация Γ_n. Двойственность Пуанкаре дает:

$$H^k(\Gamma_n, \mathbb{Z}/2) \cong \widetilde{H}_{2n-k}(\Gamma_n^*, \mathbb{Z}/2).$$

Чтобы изучить группу $\widetilde{H}_j(\Gamma_n^*, \mathbb{Z}/2)$, Д. Б. Фукс построил некоторое естественное клеточное разбиение пространства Γ_n^*. Используя это разбиение, он вычислил группы $H^i(Br_n, \mathbb{Z}/2)$, а также описал мультипликативную структуру кольца $H^*(Br_n, \mathbb{Z}/2)$ и связи с когомологиями $H^*(BO_n, \mathbb{Z}/2)$. Структура алгебры Хопфа когомологий группы кос от бесконечного числа нитей $H^*(Br_\infty, \mathbb{Z}/2)$, возникающая из канонического спаривания (2.4), была также определена [27]. Результаты были сформулированы на языке когомологий. Более удобно их перевести на язык гомологий следующим образом.

Теорема 8.4. *Гомологии группы кос от бесконечного числа нитей с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ как алгебра Хопфа изоморфны полиномиальной алгебре от бесконечного числа образующих a_i, $i = 1, 2, \dots$; $\deg a_i = 2^i - 1$*:

$$H_*(Br_\infty, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[a_1, a_2, \dots, a_i, \dots]$$

с копроизведением, заданным формулами:

$$\Delta(a_i) = 1 \otimes a_i + a_i \otimes 1.$$

Теорема 8.5. *Каноническое вложение $Br_n \to Br_\infty$ индуцирует мономорфизм в гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$. Его образом является подкоалгебра полиномиальной алгебры $\mathbb{Z}/2[a_1, a_2, \dots, a_i, \dots]$ с $\mathbb{Z}/2$-базисом, состоящим из мономов*

$$a_1^{k_1} \dots a_l^{k_l} \quad \textit{таких, что} \quad \sum_i k_i 2^i \leqslant n.$$

Теорема 8.6. *Канонический гомоморфизм* $Br_n \to BO_n$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, *индуцирует мономорфизм* (*алгебр Хопфа, если* $n = \infty$)

$$H_*(Br_n, \mathbb{Z}/2) \to H_*(BO_n, \mathbb{Z}/2).$$

Независимо от работ В.И. Арнольда и Д.Б. Фукса Ф.Р. Коэн также изучал гомологии групп кос [28], [29], [32]. Он использовал спектральную последовательность накрытия, имеющую начальный член

$$E_2^{*,*} \cong H^*\big(\Sigma_m; H^*(F(\mathbb{R}^n, m); \mathbb{Z}/p)\big)$$

и сходящуюся к $H^*(B(\mathbb{R}^n, m); \mathbb{Z}/p)$. Когомологии симметрической группы Σ_m рассматриваются с нетривиальным действием Σ_m на группе коэффициентов $H^*(F(\mathbb{R}^n, m); \mathbb{Z}/p)$, описанной в теореме 7.2. Ключевым моментом для вычислений является следующий факт.

Теорема 8.7 (об обнулении). *В спектральной последовательности* $\{E_r\}$ $E_2^{s,t} = 0$ *при* $s > 0$ *и* $0 < t < (n-1)(p-1)$.

Ф.Р. Коэн вычислил гомологии $B(\mathbb{R}^n, m)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ (как в теоремах 8.4 и 8.5) и с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$, $p > 2$.

Теорема 8.8. *Гомологии группы кос от бесконечного числа нитей с коэффициентами в* $\mathbb{Z}/p$, $p > 2$, *как алгебра Хопфа изоморфны тензорному произведению внешней и полиномиальной алгебр*:

$$E(a_1, \dots, a_i, \dots) \otimes \mathbb{Z}/p[b_1, \dots, b_j, \dots], \qquad i = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots;$$
$$\deg a_i = 2p^{i-1} - 1, \qquad \deg b_j = 2p^j - 2,$$

с копроизведением, заданным по формулам:

$$\Delta(a_i) = 1 \otimes a_i + a_i \otimes 1, \qquad \Delta(b_j) = 1 \otimes b_j + b_j \otimes 1.$$

Теорема 8.9. *Каноническое вложение* $Br_n \to Br_\infty$ *индуцирует мономорфизм в гомологиях с коэффициентами в* $\mathbb{Z}/p$, $p > 2$. *Его образом является подкоалгебра тензорного произведения* $E(a_1, \dots, a_j, \dots) \otimes \mathbb{Z}/p[b_1, \dots, b_r, \dots]$ *с* $\mathbb{Z}/p$-*базисом, состоящим из мономов*

$$a_1^{\varepsilon_1} \dots a_l^{\varepsilon_l} b_1^{k_1} \dots b_s^{k_s}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_i = 0, 1; \quad \text{и} \quad 2\left(\sum_i \varepsilon_i p^{i-1} + \sum_j k_j p^j\right) \leqslant n.$$

Ф.Р. Коэн описал также действие алгебры Стинрода $\mathscr{A}$ [30]. Мы выражаем его результаты на языке кодействия ψ алгебры $\mathscr{A}_*$, двойственной к алгебре Стинрода. При $p = 2$ $\mathscr{A}_*$ как алгебра изоморфна полиномиальной алгебре $\mathbb{Z}/2[\xi_1, \dots, \xi_k, \dots]$, $\deg \xi_k = 2^k - 1$, а при $p > 2$ она изоморфна тензорному произведению внешней и полиномиальной алгебр $E(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_l, \dots) \otimes \mathbb{Z}/p[\xi_1, \dots, \xi_k, \dots]$, $\deg \xi_k = 2(p^k - 1)$, $\deg \tau_l = 2p^l - 1$. Копроизведение ψ задается по формулам

$$\psi(\xi_k) = \sum_{i+j=k} \xi_j^{p^i} \otimes \xi_i, \qquad \psi(\tau_l) = \tau_l \otimes 1 + \sum_{i+j=l} \xi_j^{p^i} \otimes \tau_i.$$

Теорема 8.10. *Кодействие алгебры $\mathscr{A}_*$, двойственной к алгебре Стинрода, на гомологиях группы кос Br_m, $1 \leqslant m \leqslant \infty$, задается при $p = 2$ по формуле*:

$$\psi(a_j) = \begin{cases} 1 \otimes a_j, & \text{если } j = 1, \\ 1 \otimes a_j + \xi_1 \otimes a_{j-1}^2, & \text{если } j \geqslant 2, \end{cases}$$

а при $p > 2$ по формулам

$$\psi(a_j) = \begin{cases} 1 \otimes a_j, & \text{если } j = 1, \\ 1 \otimes a_j + \tau_0 \otimes b_{j-1}, & \text{если } j \geqslant 2, \end{cases}$$
$$\psi(b_j) = \begin{cases} 1 \otimes b_j, & \text{если } j = 1, \\ 1 \otimes b_j - \xi_1 \otimes b_{j-1}^p, & \text{если } j \geqslant 2. \end{cases}$$

Пусть $\Omega_0^2 S^2$ есть компонента связности тривиальной петли в двукратном пространстве петель $\Omega^2 S^2$. Г. Сегал установил следующую связь между группой кос от бесконечного числа нитей и итерированными пространствами петель [36].

Теорема 8.11. *Существует отображение $K(Br_\infty, 1) \to \Omega_0^2 S^2$, индуцирующее изоморфизм в гомологиях для любой группы коэффициентов G (с тривиальным действием Br_∞ на G)*:

$$H_*(Br_\infty, G) \cong H_*(\Omega_0^2 S^2, G).$$

Набросок доказательства. Имеется естественное отображение

$$j\colon B(\mathbb{R}^2, k) \to \Omega_k^2 S^2,$$

определенное следующим образом. Сначала мы заменяем пространство $B(\mathbb{R}^2, k)$ на гомотопически эквивалентное пространство конфигураций из k непересекающихся дисков на плоскости. Теперь для данной конфигурации $\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ из k непресекающихся дисков определим отображение

$$f_{\mathbb{D}}\colon S^2 \to S^2.$$

Рассмотрим область определения $f_{\mathbb{D}}$ как $\mathbb{R}^2 \cup \infty$, $f_{\mathbb{D}}$ отображает дополнение к $D_1 \cup \dots \cup D_k$ в базисную точку S^2, а на диске D_i является стандартным отождествлением $D_i / \partial D_i$ с S^2. Тогда

$$\mathbb{D} \mapsto f_{\mathbb{D}}$$

дает требуемое отображение

$$j\colon B(\mathbb{R}^2, k) \to \Omega_k^2 S^2.$$

Осталось только доказать тот факт, что j есть асимптотическая гомологическая эквивалентность.

Классическое расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $\Omega^2 S^3 \simeq \Omega_0^2 S^2$. Это позволяет нам рассматривать пространства $\Omega^2 S^3$ и $\Omega_0^2 S^2$ как варианты плюс-конструкции для $K(Br_\infty, 1)$.

Имеется следующее расслоение пространства путей

$$\Omega^2 S^3 \to P\Omega S^3 \to \Omega S^3,$$

где $P\Omega S^3$ есть пространство путей над ΩS^3. П. Гринберг и В. Сержиеску [75] построили ациклическую группу A и группу F' такие, что следующая коммутативная диаграмма плюс-конструкций

$$\begin{array}{ccccc} K(Br_\infty, 1) & \longrightarrow & K(A,1) & \longrightarrow & K(F',1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^2 S^3 & \longrightarrow & P\Omega S^3 & \longrightarrow & \Omega S^3 \end{array}$$

коммутативна.

П. Мэй доказал, что пространство $F(\mathbb{R}^n, m)$ Σ_m-эквивариантно гомотопически эквивалентно пространству $\mathscr{C}_n(m)$ операды маленьких кубиков [26]. Эта операда играет ключевую роль в принципе распознавания n-кратных пространств петель (см. дополнение). Гомологии конфигурационных пространств использовались в конструкции операций Араки–Кудо–Даера–Лашофа, действующих в гомологиях n-кратных пространств петель [32].

Э. Даер и Р. Лашоф [76], а также Ф. Р. Коэн [32; с. 227] изучали гомологии $\Omega^n S^{n+1}$. Из их результатов следует, что $H_*(\Omega^n S^{n+1}, \mathbb{Z}/p)$ изоморфно полиномиальной алгебре над $\mathbb{Z}/p$ от образующих $Q_1^{k_1} \dots Q_{n-1}^{k_{n-1}} a_1$, где Q_i суть операции Араки–Кудо–Даера–Лашофа, а a_1 есть образ порождающей $H_1(S^1, \mathbb{Z}/p)$ при отображении $H_*(S^1, \mathbb{Z}/p) \to H_*(\Omega^n S^{n+1}, \mathbb{Z}/p)$, индуцированном каноническим вложением $S^1 \to \Omega^n S^{n+1}$. Это дает другое доказательство теорем 8.4 и 8.8. Образующие a_j, $j > 1$, можно считать равными $Q_1^{j-1} a_1$, b_j равными βa_{j+1}. Кодействие двойственной к алгебре Стинрода, описанное в теореме 8.10, может быть получено из теоремы 8.11 с помощью соотношений Нишиды [32], связывающих действие операций Стинрода и операций Араки–Кудо–Даера–Лашофа.

Ф. Р. Коэн использовал спектральную последовательность Бокштейна для вычисления целочисленных гомологий групп кос [32].

ТЕОРЕМА 8.12. *В группах $H_*(Br_n, \mathbb{Z})$, $n \leqslant \infty$, p-кручение имеет порядок p. В группах $H_*(Br_\infty, \mathbb{Z})$ в размерностях, строго больших единицы, p-кручение является следующим:*

(i) *если $p = 2$, то это есть полиномиальная алгебра, порожденная a_1 и a_j^2, $j > 1$;*
(ii) *если $p > 2$, то это есть тензорное произведение внешней алгебры, порожденной a_1, и полиномиальной алгебры, порожденной b_j.*

ТЕОРЕМА 8.13. *Каноническое вложение $Br_n \to Br_\infty$ индуцирует мономорфизм в гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Образ его 2-кручения в размерностях, строго больших 1, имеет $\mathbb{Z}/2$-базис, состоящий из мономов*

$$a_1^{k_1} \dots a_l^{k_l} \quad \textit{таких, что} \quad k_i \equiv 0 \pmod 2 \quad \textit{при} \quad i > 1 \quad \textit{и} \quad \sum_i k_i 2^i \leqslant n,$$

а образ его p-кручения при $p > 2$ в размерностях, строго больших 1, имеет $\mathbb{Z}/p$-базис, состоящий из мономов

$$a_1^{\varepsilon_1} b_1^{k_1} \dots b_s^{k_s}, \quad \text{где} \ \ \varepsilon_1 = 0, 1; \quad \text{и} \ \ 2\biggl(\varepsilon_1 + \sum_j k_j p^j\biggr) \leqslant n.$$

Ф. В. Вайнштейн применил методы Д. Б. Фукса для вычисления когомологий групп кос с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ и $\mathbb{Z}$ [33]. В качестве результата он получил полную информацию об аддитивной структуре этих групп когомологий и о действии гомоморфизма Бокштейна.

Представление Кокстера симметрической группы Σ_n есть представление

$$\Sigma_n \to GL_n(\mathbb{Z}),$$

соответствующее перестановкам базисных векторов в $\mathbb{Z}^n$. Ограничение его на гиперплоскость $\mathbb{Z}^n$, заданную по формуле $\sum x_i = 0$, называется *приведенным представлением Кокстера.* Эти представления определяют структуры Σ_n-модулей на $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^{n-1}$. При помощи канонического гомоморфизма $Br_n \to \Sigma_n$ группы $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^{n-1}$ становятся модулями над Br_n. Обозначим эти модули через K_n и $\widetilde{K}_n$. В. А. Васильев доказал следующий факт [13].

Теорема 8.14. *Когомологии группы кос с коэффициентами в представлении Кокстера и в приведенном представлении Кокстера задаются по формулам:*

$$H^q(Br_n; K_n) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^{q-i}(Br_{n-1-i}; \mathbb{Z}), \quad n \geqslant 2,$$
$$H^q(Br_n; \widetilde{K}_n) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^{q-i}(Br_{n-i}; \mathbb{Z}), \quad n \geqslant 2,$$

где мы формально полагаем Br_0 равной единичной группе, $Br_0 = \{e\}$.

Доказательство. Рассмотрим первую формулу. Модуль K_n изоморфен модулю $\operatorname{Coind}_{Br_{1,n}}^{Br_n} \mathbb{Z}$, коиндуцированному из тривиального модуля $\mathbb{Z}$ над $Br_{1,n}$, где подгруппа $Br_{1,n}$ была определена в § 3. По лемме Шапиро [77] имеем: $H^*(Br_n, K_n) \cong H^*(Br_{1,n}, \mathbb{Z})$. Докажем первый изоморфизм нашего утверждения по индукции. Для $n = 2$ группа $Br_{1,2}$ равна $\mathbb{Z}$ и, таким образом, ее когомологии такие же, как у окружности. Формула справедлива. Пусть $n > 2$. Рассмотрим гомоморфизм $\beta : Br_{1,n} \to Br_{n-1}$, определенный в § 3, и спектральную последовательность Серра–Хохшильда для β. Как это было описано в § 3, $\operatorname{Ker} \beta$ есть свободная подгруппа F_{n-1} группы Br_n, порожденная косами $a_2, \dots, a_n$. Начальный член спектральной последовательности Серра–Хохшильда $E_2^{p,q}$ изоморфен $H^p(Br_{n-1}, H^q(F_{n-1}, \mathbb{Z}))$. Имеются только две ненулевые строки в этой спектральной последовательности, так как

$$H^0(F_{n-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^1(F_{n-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n-1}, \quad H^q(F_{n-1}, \mathbb{Z}) \cong 0 \text{ при } q > 1.$$

Напомним, что группа $Br_{1,n}$ изоморфна полупрямому произведению F_{n-1} и Br_{n-1} со стандартным действием Br_{n-1} на F_{n-1}. Это действие порождает на $H^0(F_{n-1}, \mathbb{Z}) \cong$

$\mathbb{Z}$ структуру тривиального $\mathbb{Z}Br_{n-1}$-модуля, а на $H^1(F_{n-1}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ оно порождает структуру модуля K_{n-1}. Это заканчивает шаг индукции. Изоморфизм для приведенного представления Кокстера следует из точной последовательности $0 \to \widetilde{K}_n \to K_n \to \mathbb{Z} \to 0$.

Н. С. Маркарян продолжил работу В. А. Васильева и вычислил когомологии кос с другими нетривиальными коэффициентами [78].

§ 9. Когомологии обобщенных групп кос

В. В. Горюнов применил методы Д. Б. Фукса и Ф. В. Вайнштейна для вычисления когомологий обобщенных групп кос типов C и D [34], [35]. Конфигурационное пространство X_{C_n} для группы кос типа C было описано в § 3 как пространство n различных пар точек из $\mathbb{C} \setminus 0$, симметричных по отношению к нулю, что есть не что иное, как просто пространство n различных точек из $\mathbb{C} \setminus 0$. Конфигурационное пространство X_{D_n} для группы кос типа D может быть описано следующим образом. Рассмотрим геометрически различные пары точек из $\mathbb{C}$, симметричные относительно нуля. Вырожденный случай, когда пара состоит из одной точки, равной нулю, включается. Предположим, что каждая невырожденная пара рассматривается с различными знаками точек (плюсом или минусом). Инволюция ν действует на невырожденных парах переменой знаков и тождественна на вырожденной паре. Два неупорядоченных множества из n различных пар точек $\{p_1, \dots, p_n\}$ и $\{q_1, \dots, q_n\}$ эквивалентны, если $q_i = \nu^{\varepsilon_i}(p_i)$, $\varepsilon_i = 0, 1$, и $\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i$ четно. Пространство X_{D_n} есть фактор-пространство n-ок геометрически различных пар из $\mathbb{C}$ по отношению к только что описанному отношению эквивалентности.

Пространство $X_{A_{n-1}} = B(\mathbb{C}, n)$ в предыдущем параграфе было интерпретировано как пространство полиномов (8.1) степени n над комплексными числами, без кратных корней и со старшим коэффициентом, равным 1. Аналогично интерпретируем пространство X_{C_n} как пространство многочленов над $\mathbb{C}$ вида (8.1) без кратных и нулевых корней. Пусть Γ_n есть одно из пространств X_{C_n} или X_{D_n}, а Γ_n^* – его одноточечная компактификация. Так же, как Д. Б. Фукс, В. В. Горюнов использовал двойственность Пуанкаре

$$H^k(\Gamma_n, \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{2n-k}(\Gamma_n^*, \mathbb{Z})$$

для вычисления когомологий обобщенных групп кос типов C и D. Он построил клеточное разбиение пространства Γ_n^* и доказал следующие теоремы.

Теорема 9.1. *Когомологии предельных обобщенных групп кос типов C и D с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ выражаются в терминах когомологий классических групп следующим образом*:

$$H^q(Br(C_\infty); \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{q} H^{q-i}(Br_\infty; \mathbb{Z}),$$

$$H^q(Br(D_\infty); \mathbb{Z}) = H^q(Br_\infty; \mathbb{Z}) \oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{q-2i-3}(Br_\infty; \mathbb{Z}/2)\right].$$

Обозначим через γ_n каноническое вложение $\gamma_n\colon Br_{n-1} \to Br_n$, а через γ_n^q гомоморфизм, индуцированный γ_n в когомологиях:

$$\gamma_n^q\colon H^q(Br_n, \mathbb{Z}) \to H^q(Br_{n-1}, \mathbb{Z}).$$

$\operatorname{Ker}\gamma_n^q$ обозначает, как обычно, ядро этого гомоморфизма.

ТЕОРЕМА 9.2. *Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ обобщенных групп кос $Br(C_n)$ и $Br(D_n)$ для конечного n выражаются в терминах когомологий классических групп следующим образом*:

$$\begin{aligned} H^q(Br(C_n);\mathbb{Z}) &= \bigoplus_{i=0}^{n} H^{q-i}(Br_{n-i};\mathbb{Z}), \quad n \geqslant 2,\\ H^q(Br(D_n);\mathbb{Z}) &= H^q(Br_n;\mathbb{Z}) \oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{\infty} \operatorname{Ker}\gamma_{n-2i}^{q-2i}\right]\\ &\qquad \oplus \left[\bigoplus_{j=0}^{\infty} H^{q-2j-3}(Br_{n-2j-3};\mathbb{Z}/2)\right], \quad n \geqslant 3, \end{aligned}$$

где мы полагаем формально Br_0 равной единичной группе, $Br_0 = \{e\}$.

Формула для когомологий $Br(C_n)$ была доказана в предыдущем параграфе (теорема 8.14), так как

$$H^q(Br(C_n);\mathbb{Z}) = H^q(Br_{1,n+1};\mathbb{Z}) = H^q(Br_n;\widetilde{K}_n).$$

СЛЕДСТВИЕ 9.1 (теорема стабилизации). *С возрастанием n группы когомологий обобщенных групп кос типов C и D стабилизируются*:

$$\begin{aligned} H^i(Br(C_n),\mathbb{Z}) &= H^i(Br(C_{2i-2}),\mathbb{Z}), \quad \text{если} \quad n \geqslant 2i-2,\\ H^i(Br(D_n),\mathbb{Z}) &= H^i(Br(D_{2i-1}),\mathbb{Z}), \quad \text{если} \quad n \geqslant 2i-1. \end{aligned}$$

Д. Б. Фукс установил [68] аналоги теоремы Г. Сегала о плюс-конструкции для классифицирующего пространства группы кос от бесконечного числа нитей (теорема 8.11): плюс-конструкция для $K(Br(C_\infty),1)$ эквивалентна $\Omega^2 S^3 \times \Omega S^2$, а плюс-конструкция для $K(Br(D_\infty),1)$ эквивалентна $\Omega^2 S^3 \times S^3\{2\}$, где $S^3\{2\}$ есть гомотопический слой отображения степени 2 из S^3 в S^3.

§ 10. Порядковые комплексы и когомологии исключительных обобщенных групп кос

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_m \subset V$ есть конечное множество аффинных подпространств, возможно различных размерностей, n-мерного аффинного пространства, и пусть

$$Y_V = V - \bigcup_{i=1}^{m} M_i$$

есть дополнение к объединению этих подпространств. С нашим семейством подпространств $\mathscr{M}$ ассоциировано частично упорядоченное множество $\mathscr{P}$, элементы v которого соответствуют частично упорядоченным по включению пересечениям

$$|v| = M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_r}.$$

Единственный максимальный элемент T этого множества соответствует объемлющему пространству V. Определим функцию размерности

$$d(v) = \dim_{\mathbb{R}}(|v|).$$

Для любого частично упорядоченного множества $\mathscr{S}$ можно определить *порядковый комплекс* $K(\mathscr{S})$ (см., например, [79]). Это есть симплициальный комплекс, имеющий по одной вершине для каждого элемента $v \in \mathscr{S}$ и по k-симплексу для каждой цепи $v_0 < v_1 < \cdots < v_k$ элементов из $\mathscr{S}$. Граница этого k-симплекса состоит из всех соответствующих подцепей. Таким образом, $K(\mathscr{S})$ является классифицирующим пространством категории, определенной частично упорядоченным множеством $\mathscr{S}$. Отметим, что $K(\mathscr{S}) = K(\mathscr{S}^*)$, где $\mathscr{S}^*$ – дуальное частично упорядоченное множество, получающееся из $\mathscr{S}$ обращением отношения порядка. Если $\mathscr{S}$ имеет минимальный или максимальный элемент, то $K(\mathscr{S})$ стягиваем. Будем предполагать, что $\mathscr{S}$ имеет единственный максимальный элемент T. Для любых двух сравнимых элементов $v < w$ частично упорядоченного множества $\mathscr{S}$ определим следующие подмножества:

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_{[v,w]} &= \{x \in \mathscr{S} \mid v \leqslant x \leqslant w\},\\
\mathscr{S}_{(v,w)} &= \{x \in \mathscr{S} \mid v < x < w\},\\
\mathscr{S}_{>v} &= \{x \in \mathscr{S} \mid x > v\}.
\end{aligned}$$

Порядковые комплексы используются при описании гомологий дополнений к конфигурациям аффинных плоскостей [79], [80].

Теорема 10.1. *Гомологии дополнения Y_V задаются по формулам*:

$$H_i(Y_V;\mathbb{Z}) = \bigoplus_{v \in \mathscr{P}} H^{n-d(v)-i-1}\big(K(\mathscr{P}_{>v}), K(\mathscr{P}_{(v,T)});\mathbb{Z}\big),$$

где нами принято соглашение $H^{-1}(\varphi,\varnothing;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Комплексные конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как вещественные конфигурации подпространств коразмерности 2 в вещественном аффинном пространстве размерности $2n$. Следовательно, эта теорема дает описание гомологий крашеных обобщенных групп кос.

При изучении когомологий исключительных обобщенных групп кос мы следуем здесь работам М. Сальветти [41], [42].

Первым шагом является построение комплекса Q, двойственного стратификации $\mathbb{C}^n$, полученной из конфигурации гиперплоскостей. Он может быть реализован в исходном аффинном пространстве V. Ячейки стратификации образуют частично упорядоченное множество $\mathscr{P}$: $F > F'$, если замыкание F содержит F'. Геометрическая реализация комплекса $K(\mathscr{P})$ может быть вложена в пространство V следующим образом. Выберем точку $v(F^j)$ внутри каждой j-комерной ячейки стратификации и рассмотрим симплексы

$$s(F^{i_0},\dots,F^{i_j})=\left\{\sum_{k=0}^{j}\lambda_k v(F^{i_k}):\sum\lambda_k=1,\ \lambda_k\in[0,1]\right\},$$

где $F^{i_k}>F^{i_{k+1}}$, $k=0,\dots,j-1$. Затем мы строим клеточный блок-комплекс из этого симплициального комплекса, склеивая несколько симплексов вместе, чтобы получить клетку. Клетка $e^j(F^j)$ размерности j, двойственная к F^j, получается как объединение $\bigcup s(F^0,\dots,F^{j-1},F^j)$ по всем цепочкам $F^0>\dots>F^{j-1}>F^j$. Пусть $Q=\bigcup e^j(F^j)$, где объединение берется по всем ячейкам, а Q_i обозначает i-мерный остов Q. Определим комбинаторное расстояние между двумя вершинами v и v' как минимальное число ребер в реберном пути, соединяющем v и v'. Для каждой клетки e^j из Q обозначим через $V(e^j)=Q_0\cap e^j$ 0-мерный остов e^j.

Предложение 10.1. *Для данных вершины $v\in Q_0$ и клетки $e^j\in Q$ существует единственная вершина $w(v,e^i)\in V(e^i)$ с наименьшим комбинаторным расстоянием до v:*

$$d(v,w(v,e^i))<d(v,v'),\quad \textit{если}\quad v'\in V(e^i)\setminus\{w(v,e^i)\}.$$

Если $e^j\subset e^i$, то $w(v,e^j)=w(w(v,e^i),e^j)$.

Зафиксируем камеру A_0, и пусть v_0 есть вершина из Q, содержащаяся в A_0. Пусть $\mathscr{F}_0$ – система ячеек A_0, а $\mathscr{Q}_0$ есть множество клеток в Q, двойственных к ячейке из $\mathscr{F}_0$, т.е. клеток, которые пересекаются с A_0. Заметим, что $\mathscr{Q}_0$ не является клеточным комплексом. Для данной клетки $e\in Q$ мы будем обозначать для краткости $w_0:=w(v_0,e)$.

Чтобы определить действие группы W на комплексе Q, проделаем построение более аккуратно. Выберем точку $v(F)$ внутри каждой ячейки $F\in\mathscr{F}_0$; внутри ячейки $\gamma(F),\gamma\in W$, выбираем точку $\gamma(v(F))$. Поскольку стабилизатор ячейки оставляет неподвижной ячейку поточечно, эта точка не зависит от выбора элемента $\gamma\in W$. Затем построим Q, как и выше, используя эти точки. Ясно, что Q и его остовы Q_i инвариантны по отношению к W.

Предложение 10.2. *Для каждой клетки e из Q существует в точности единственная клетка $e_0\in\mathscr{Q}_0$ в фиксированной орбите действия W. Элементы $\gamma\in W$ такие, что $\gamma(e_0)=e$, описывают левые смежные классы стабилизатора W_{F_0} ячейки F_0, где F_0 двойственна к e_0.*

Следствие 10.1. *Для клетки $e\in Q$ единственный элемент $\gamma_e\in W$ такой, что $\gamma_e(v_0)=w_0(e)$, удовлетворяет также условию: $\gamma_e(e_0)=e$.*

Построим комплекс S_W, проводя следующие отождествления клеток комплекса Q. Отождествим две клетки $e,e'\in Q$, если они лежат в одной W-орбите, используя гомеоморфизм, индуцированный элементом $\gamma_{e'}(\gamma_e)^{-1}$. Пусть Y – дополнение к вещественной конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ (как в § 3).

Теорема 10.2. *Пространство орбит Y/W имеет тот же гомотопический тип, что и клеточный комплекс S_W.*

Следствие 10.2. *Если группа W конечна и существенна, то число i-клеток S_W есть $\binom{n}{i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.*

Следствие 10.3. *Если группа W конечна, то клеточный комплекс S_W есть пространство типа $K(\pi_1(Y/W), 1)$.*

Если выбрать точку $v(F)$, $F \in \mathscr{F}_0$, как ортогональную проекцию v_0 на F, то все клетки Q становятся выпуклыми полиэдрами в аффинном пространстве V. А Q сам является выпуклой оболочкой W-орбиты точки v_0. Таким образом, теорема 10.2 описывает гомотопический тип Y/W в терминах комплекса, полученного из выпуклого полиэдра отождествлением его граней.

Предположим с этого момента, что W конечна и существенна. Пусть гиперплоскости (стенки) A_0 суть $M_1, \ldots, M_n$. Пусть также $v_i \in M_i \cap \overline{A}_0$ – точки из Q, $i = 1, 2, \ldots, n$, выбранные, скажем, как ортогональные проекции v_0 на каждую M_i. Всякая ячейка F соответствует единственному пересечению $M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_k}$, $k = \operatorname{codim}(v)$, где M_{i_j} являются стенками A_0, содержащими F, и $i_1 < \cdots < i_k$. Следовательно, F соответствует единственному подмножеству $\Gamma = \Gamma(F) \subset I_n = \{1, \ldots, n\}$, где $|\Gamma| = \operatorname{codim}(F) = \dim e(F)$. Клетки из S_W соответствуют клеткам из $\mathscr{Q}_0$ и, таким образом, ячейкам $\mathscr{F}_0$ камеры A_0. Зададим на двойственной клетке $e(F)$ ориентацию, индуцированную упорядочиванием $v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$. На каждой клетке $e \in Q$ зададим ориентацию требованием, что каждый элемент γ_e, описанный выше, эту ориентацию сохраняет. Тогда на клетках Q определен индекс инцидентности $[e : e'] \in \{0, 1, -1\}$, и он сохраняется при переходе к фактор-комплексу S_W.

Предложение 10.3. *Пусть $F \in \mathscr{F}_0$ соответствует подмножеству Γ. Пусть также G' есть ячейка, W-эквивалентная ячейке $F' \in \mathscr{F}_0$, соответствующей $\Gamma' \subset \Gamma$, где $|\Gamma'| = |\Gamma| - 1$, и такая, что $\overline{G'} \supset F$ (таким образом, G' W_F-эквивалентна F'). Тогда $e(F) \supset e(G')$ и их индекс инцидентности есть*

$$[e(F) : e(G')] = (-1)^{l(G')}[e(F) : e(F')],$$

где $l(G')$ есть кратчайшая длина $l(g)$ элемента $g \in W$, переводящего F' в G'.

Замечание. Для числа $l(G')$ выполняется равенство

$$l(G') = d\big(v_0, w_0(e(G'))\big).$$

Пусть $\mathscr{C}^k$ есть свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный k-клетками S_W, $k = 0, \ldots, n$. Из предыдущего следует, что

$$\mathscr{C}^k \cong \left\{ \sum \nu_\Gamma \Gamma : \nu_\Gamma \in \mathbb{Z},\ \Gamma \subset I_n,\ |I_n| = k \right\}.$$

Определим кограничный гомоморфизм $\delta^k : \mathscr{C}^k \to \mathscr{C}^{k+1}$ в градуированном модуле $\mathscr{C}$, порожденном $\mathscr{C}^k$:

$$\delta^k(\Gamma) = \sum_{j \in I_n \setminus \Gamma} (-1)^{\sigma(j,\Gamma)+1} \Bigg(\sum_{\underline{h} \in W_{\Gamma \cup \{j\}}/W_\Gamma} (-1)^{l(\underline{h})} (\Gamma \cup \{j\}) \Bigg),$$

где положено $\sigma(j, \Gamma) = |\{i \in \Gamma : i < j\}|$, $W_\Gamma = W_{\Gamma(F)} = W_F$ и $l(\underline{h})$ есть минимальная длина элемента $h \in \underline{h}$.

Теорема 10.3. *Когомологии комплекса S_W изоморфны когомологиям комплекса $\mathscr{C}$:*

$$H^*(S_W;\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathscr{C};\mathbb{Z}).$$

Эта теорема позволяет легко посчитать когомологии всех обобщенных групп кос, в том числе исключительные. Результаты для исключительных даны в таблице 10.1 из [42]. М. Сальветти вычислил также когомологии с локальными коэффициентами.

Табл. 10.1

	H^0	H^1	H^2	H^3	H^4	H^5	H^6	H^7	H^8
$I_2(2s)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$						
$I_2(2s+1)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$							
H_3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$					
H_4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$				
F_4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$				
E_6	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/3$		
E_7	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/6\times\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/6\times\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	
E_8	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/6\times\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

§ 11. Гомологии групп кос в телах с ручками и гомологии конфигурационных пространств для поверхностей

В этом параграфе мы изучаем гомологические свойства группы кос от бесконечного числа нитей в теле с ручками рода g и конфигурационного пространства из бесконечного числа точек на поверхности рода h. Мы выражаем эти свойства в терминах плюс-конструкции (определение плюс-конструкции см. в §6).

Теорема 11.1. *Плюс-конструкция Д. Квиллена классифицирующего пространства группы кос из бесконечного числа нитей в теле с ручками рода g эквивалентна следующему произведению пространств петель над сферами*

$$BBr_\infty^g{}^+ \simeq \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2,$$

где число сомножителей в произведении равно роду g. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} BBr_\infty{}^+ & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ BBr_\infty^g{}^+ & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2 \end{array}$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением классической группы кос в группу кос в теле с ручками, а правая стрелка есть вложение сомножителя, коммутативна.

Доказательство. Для наших целей будет удобно рассматривать конфигурационное пространство $B(\mathbb{C}\setminus Q_g, n)$ следующим образом. Пусть D обозначает замкнутый диск в $\mathbb{C}$, а D^i_ε, $i = 1, \dots, g$, суть маленькие замкнутые диски в D. Тогда $\mathbb{C}\setminus Q_g$ гомеоморфно $\dot{D}\setminus\big(\bigcup_{i=1}^g D^i_\varepsilon\big)$, где $\dot{D}$ обозначает внутренность D. Таким образом, нужное конфигурационное пространство есть $B\big(\dot{D}\setminus\big(\bigcup_{i=1}^g D^i_\varepsilon\big), n\big)$. Мы используем здесь результаты Д. Мак-Дуфф [81]. Она рассматривала расслоение E_M над многообразием M, которое получается одноточечной компактификацией каждого слоя касательного расслоения. Пусть $\Gamma(M)$ есть пространство сечений расслоения E_M с компактными носителями, а $\Gamma(M, \partial M)$ составляют сечения E_M, обращающиеся в нуль на краю ∂M. Можно определить понятие степени для таких сечений. Обозначим через $\Gamma_n(M)$ пространство, состоящее из сечений степени n. Д. Мак-Дуфф доказала, что если $\dot{M}$ есть внутренность компактного многообразия с краем, то существует отображение

$$B(\dot{M}, n) \to \Gamma_n(M, \partial M)$$

такое, что соответствующий гомоморфизм в гомологиях

$$H_k\big(B(\dot{M}, n); \mathbb{Z}\big) \to H_k\big(\Gamma_n(M, \partial); \mathbb{Z}\big)$$

является изоморфизмом для больших n. Пусть γ_i, $i = 1, \dots, g$, есть простая кривая, лежащая в $D\setminus\big(\bigcup_{i=1}^g \dot{D}^i_\varepsilon\big)$, соединяющая край диска D с краем диска D^i_ε. Предположим, что кривые γ_i не пересекаются, как это показано на рис. 11.1.

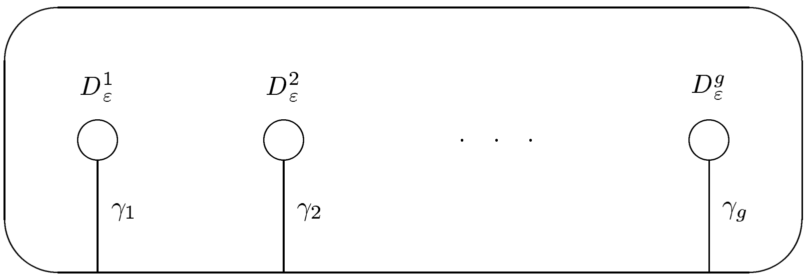


Рис. 11.1

Тогда пространство $\dot{D}\setminus\big(\big(\bigcup_{i=1}^g D^i_\varepsilon\big)\cup\big(\bigcup_{i=1}^g \gamma_i\big)\big)$ гомеоморфно внутренности некоторого диска, скажем $\dot{D}'$. Гомеоморфизм вложения $\dot{D}' \to \dot{D}\setminus\big(\big(\bigcup_{i=1}^g D^i_\varepsilon\big)\cup\big(\bigcup_{i=1}^g \gamma_i\big)\big)$ порождает следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B(\dot{D}', n) & \longrightarrow & \Gamma_n(D', \partial D') \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\Big(\dot{D}\setminus\Big(\bigcup\limits_{i=1}^g D^i_\varepsilon\Big), n\Big) & \longrightarrow & \Gamma_n\Big(D\setminus\Big(\bigcup\limits_{i=1}^g \dot{D}^i_\varepsilon\Big), \partial D\cup\Big(\bigcup\limits_{i=1}^g \partial D^i_\varepsilon\Big)\Big) \end{array} \tag{11.1}$$

Для наших многообразий D' и $D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right)$ касательные расслоения эквивалентны прямым произведениям, следовательно, соответствующие расслоения E_M эквивалентны $S^2 \times D'$ и $S^2 \times D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right)$. Таким образом, пространства $\Gamma(M, \partial M)$ эквивалентны

$$\operatorname{Map}(D', \partial D'; S^2, s_0) \quad \text{и} \quad \operatorname{Map}\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right),$$

где s_0 есть базисная точка сферы S^2. Вложение объединения кривых $\bigcup_{i=1}^{g} \gamma_i$ в многообразие $D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right)$ порождает отображение соответствующих пространств отображений

$$p\colon \operatorname{Map}\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right) \to \operatorname{Map}\left(\bigcup_{i=1}^{g} \gamma_i, \bigcup_{i=1}^{g} \partial\gamma_i; S^2, s_0\right).$$

Отображение p является расслоением в смысле Серра со слоем

$$\operatorname{Map}\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \gamma_i\right); S^2, s_0\right),$$

который эквивалентен $\operatorname{Map}(D', \partial D'; S^2, s_0)$. Рассматривая связную компоненту

$$\operatorname{Map}_n\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right)$$

пространства

$$\operatorname{Map}\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right),$$

мы получим расслоение

$$p_n\colon \operatorname{Map}_n\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right) \to \operatorname{Map}\left(\bigcup_{i=1}^{g} \gamma_i, \bigcup_{i=1}^{g} \partial\gamma_i; S^2, s_0\right).$$

Таким образом, из (11.1) получаем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
B(\dot{D}', n) & \longrightarrow & \operatorname{Map}_n(D', \partial D'; S^2, s_0) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
B\left(\dot{D} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} D_\varepsilon^i\right), n\right) & \longrightarrow & \operatorname{Map}_n\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g} \partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right)
\end{array},$$

в которой правое отображение есть вложение слоя расслоения p_n. Расслоение p_0 имеет сечение, определяемое следующим образом. Зафиксируем отображение из

$$\operatorname{Map}\left(\bigcup_{i=1}^{g} \gamma_i, \bigcup_{i=1}^{g} \partial\gamma_i; S^2, s_0\right).$$

Делим многообразие $D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g} \dot{D}_\varepsilon^i\right)$ на некоторые области $\widetilde{D}^i$, содержащие только по одному диску D_ε^i, как это показано на рис. 11.2.

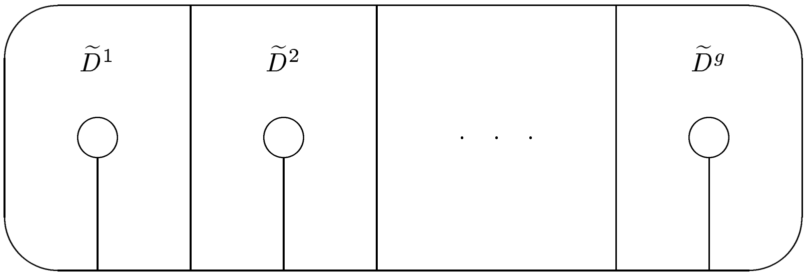


Рис. 11.2

Область $\widetilde{D}^i$ гомеоморфна произведению интервала I и окружности S^1, таким образом, что γ_i гомеоморфна некоторому радиусу. Мы отображаем каждый радиус в S^2, используя ранее фиксированное отображение из γ_i в S^2, и получаем отображение, постоянное по S^1. Это определяет отображение

$$r\colon \operatorname{Map}\left(\bigcup_{i=1}^{g}\gamma_i, \bigcup_{i=1}^{g}\partial\gamma_i; S^2, s_0\right) \to \operatorname{Map}_0\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g}\dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g}\partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right)$$

такое, что $p_0 \circ r = 1$. Если мы сложим отображение r с отображением замкнутого диска в S^2 степени n, мы получим отображение r_n, являющееся сечением для p_n. Существование сечения дает гомотопические эквивалентности

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Map}_n\left(D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{g}\dot{D}_\varepsilon^i\right), \partial D \cup \left(\bigcup_{i=1}^{g}\partial D_\varepsilon^i\right); S^2, s_0\right)\\
&\quad\simeq \operatorname{Map}_n(D', \partial D'; S^2, s_0) \times \operatorname{Map}\left(\bigcup_{i=1}^{g}\gamma_i, \bigcup_{i=1}^{g}\partial\gamma_i; S^2, s_0\right)\\
&\quad\simeq \Omega_n^2 S^2 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2,
\end{aligned}$$

где число сомножителей в произведении равно роду g.

Следствие 11.1. *Гомологии группы кос из бесконечного числа нитей в теле с ручками рода g изоморфны*

$$H_*(Br_\infty; \mathbb{Z}) \otimes H_*(\Omega S^2; \mathbb{Z})^{\otimes g}.$$

Пусть Δ^n, Δ_k^n, $k = 1, \dots, g$, суть следующие “дискриминантные” отображения:

$$\begin{aligned}
&\Delta^n\colon BBr_\infty^g \to \mathbb{C} \setminus 0 \cong S^1, \quad 2 \leqslant n \leqslant \infty,\\
&\Delta_k^n\colon BBr_\infty^g \to \mathbb{C} \setminus 0 \cong S^1, \quad k = 1, \dots, g, \quad 2 \leqslant n \leqslant \infty,
\end{aligned}$$

которые определены для конечных n на конфигурационных пространствах по формулам

$$\Delta^n(z_1,\dots,z_n)=\prod_{i\neq j}(z_i-z_j),\qquad \Delta^n_k(z_1,\dots,z_n)=\prod_i(z_i-k),\quad k=1,2,\dots,g,$$

а для $n=\infty$ как пределы. Тогда они определяют отображения

$$a_n\colon BBr^g_n\to(S^1)^{\times g+1},\qquad 2\leqslant n\leqslant\infty,$$

такие, что $\pi_1(a_n)$ есть гомоморфизм абелеанизации группы Br^g_n.

Теорема 11.1 допускает обобщение на случай гомологий конфигурационных пространств для поверхностей, у которых удалены k точек (или, что то же самое, для конфигурационных пространств поверхностей с k компонентами края), если $k>0$. Пусть M_h есть замкнутая поверхность рода h. Обозначим через $M_h\setminus Q_k$ пространство M_h с удаленными k точками. Пусть Y_h есть пространство расслоения

$$\Omega^2S^3\to Y_h\to(S^1)^{2h},$$

которое классифицируется отображением $(S^1)^{2h}\to\Omega S^3$, переводящим образующую группы $H^2(\Omega S^3,\mathbb{Z})$ в $2\bigl(\sum x_{2i-1}x_{2i}\bigr)$, где x_j обозначает образующую группы $H^1(S^1,\mathbb{Z})$ [68].

Теорема 11.2. *Плюс-конструкция Д. Квиллена бесконечного конфигурационного пространства для поверхности рода h с удаленными k точками эквивалентна следующему произведению пространств*:

$$B(M_h\setminus Q_k,\infty)^+\simeq(\Omega S^2)^{k-1}\times(\Omega S^3)^{2h}\times Y_h.$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
B(\mathbb{R}^2,\infty)^+ & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2S^3\\
\downarrow & & \downarrow\\
B(M_h\setminus Q_k,\infty)^+ & \xrightarrow{\sim} & (\Omega S^2)^{k-1}\times(\Omega S^3)^{2h}\times Y_h
\end{array}$$

в которой левая стрелка индуцирована вложением конфигурационных пространств, а правая есть вложение слоя $\Omega^2S^3\to Y_h$, коммутативна.

Доказательство. Пусть D^i_ε, $i=1,\dots,k$, суть маленькие непересекающиеся диски в M_h. Тогда пространство $M_h\setminus Q_k$ гомеоморфно $M_h\setminus\bigcup_{i=1}^k D^i_\varepsilon$. Многообразие $M_h\setminus Q_k$ параллелизуемо, если $k>0$, следовательно, остаются справедливыми те же самые аргументы, что и в доказательстве теоремы 11.1. Рассмотрим многоугольник P_h такой, что поверхность M_h получается из P_h стандартной процедурой отождествления пар ребер. Пусть P'_h будет аналогичный многоугольник для поверхности без k дисков $M_h\setminus\bigcup_{i=1}^k D^i_\varepsilon$ (см. рис. 11.3). Зафиксируем первый диск D^1_ε. Он будет играть роль внешней границы области, которая была в доказательстве теоремы 11.1. Делаем с многоугольником P'_h то же самое, что мы делали с диском D в доказательстве теоремы 11.1. Соединяем некоторыми интервалами γ_i, $i=2,\dots,k$, края дисков D^i_ε, $i=2,\dots,k$, с краем диска D^1_ε.

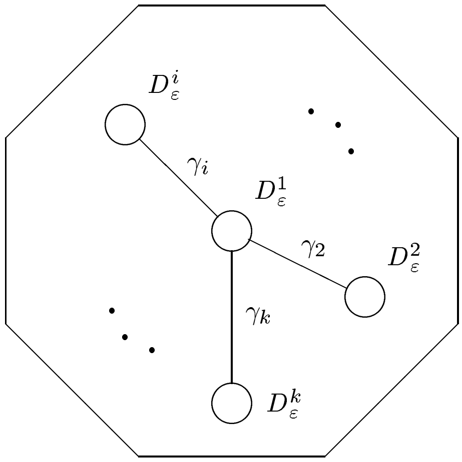


Рис. 11.3

Имеется эквивалентность

$$B(M_h \setminus Q_k, n) \simeq B\left(M_h \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_\varepsilon^i\right), n\right)$$

и отображение

$$B\left(M_h \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_\varepsilon^i\right), n\right) \to \mathrm{Map}_n\left(M_h \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \bigcup_{i=1}^{k} \partial D_\varepsilon^i; S^2, s_0\right),$$

индуцирующее изоморфизм в гомологиях для больших n. Рассматривая последнее пространство, имеем также эквивалентности

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Map}_n\left(M_h \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \dot{D}_\varepsilon^i\right), \bigcup_{i=1}^{k} \partial D_\varepsilon^i; S^2, s_0\right) \\
&\quad \simeq \mathrm{Map}_n(M_{h,1}, \partial M_{h,1}; S^2, s_0) \times \mathrm{Map}\left(\bigcup_{i=2}^{k} \gamma_i, \bigcup_{i=2}^{k} \partial\gamma_i; S^2, s_0\right) \\
&\quad \simeq \mathrm{Map}_n(M_{h,1}, \partial M_{h,1}; S^2, s_0) \times (\Omega S^2)^{k-1} \\
&\quad \simeq \mathrm{Map}_n(M_h, m_0; S^2, s_0) \times (\Omega S^2)^{k-1},
\end{aligned}$$

где $M_{h,1}$ есть многообразие, получающееся из M_h удалением открытого диска, а $m_0 \in M_h$ – точка. Следовательно, имеется отображение

$$B\left(M_h \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} D_\varepsilon^i\right), \infty\right) \to \mathrm{Map}_0(M_h, m_0; S^2, s_0) \times (\Omega S^2)^{k-1},$$

индуцирующее изоморфизм в гомологиях.

К.-Ф. Бедигхаймер, Ф. Р. Коэн и Р. Дж. Мильграм доказали [82] следующую гомотопическую эквивалентность:

$$\mathrm{Map}_0(M_h, m_0; S^2, s_0) \simeq (\Omega S^3)^{2h} \times Y_h.$$

Используя эту гомотопическую эквивалентность, мы завершаем доказательство теоремы.

Следствие 11.2. *Имеем следующий изоморфизм в гомологиях с коэффициентами в* $\mathbb{Z}/2$:

$$H^*(B(M_h \setminus Q_k, \infty); \mathbb{Z}/2) \cong H^*(\Omega S^2; \mathbb{Z}/2)^{\otimes^{2h+k-1}} \otimes H^*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Z}/2).$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^*(B(\mathbb{R}^2, \infty); \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\simeq} & H^*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Z}/2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B(M_h \setminus Q_k, \infty); \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\simeq} & H^*(\Omega S^2; \mathbb{Z}/2)^{\otimes^{2h+k-1}} \otimes H^*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Z}/2) \end{array}$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением конфигурационных пространств, коммутативна.

Замечание. Результаты этого параграфа были получены в [33].

§ 12. Гомологии кос с особенностями

В этом параграфе мы рассматриваем группу кос-перестановок и группу кос с особенностями с гомологической точки зрения.

Предложение 12.1. *Канонический эпиморфизм* $BP_\infty \to \overline{BP}_\infty$ *индуцирует отображение групповых пополнений*

$$\begin{array}{ccc} BBP_\infty & \longrightarrow & B\overline{BP}_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) & \longrightarrow & \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} B\overline{BP}_n) \end{array} \tag{12.1}$$

в котором нижняя строчка есть бесконечнократное петлевое отображение. Следовательно, имеются изоморфизмы

$$BBP_\infty^+ \cong \Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n), \qquad B\overline{BP}_\infty^+ \cong \Omega_0 B(\amalg_{n\geqslant 0} B\overline{BP}_n),$$

которые могут быть включены в коммутативную диаграмму, аналогичную (12.1).

Нам потребуется следующий простой факт о группах BP_n и $\overline{BP}_n$.

Предложение 12.2. *Абелеанизации групп BP_n и $\overline{BP}_n$, $2 \leqslant n \leqslant \infty$, равны $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$:*

$$BP_n/[BP_n, BP_n] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2,$$
$$\overline{BP}_n/[\overline{BP}_n, \overline{BP}_n] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Добавим следующие соотношения к соотношениям группы кос Br_n и симметрической группы Σ_n: $\sigma_i = \sigma_j$ для всех i и j, $\xi_i = \xi_j$ для всех i и j, и получим эпиморфизмы абелеанизации из группы кос и симметрической группы $ab_{Br} \colon Br_n \to \mathbb{Z}$ и $ab_\Sigma \colon \Sigma_n \to \mathbb{Z}/2$. Если добавим соотношения этих двух типов к определяющим соотношениям группы кос-перестановок, получим эпиморфизм $ab_{BP} \colon BP_n \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$. С другой стороны, универсальность дает то, что гомоморфизм абелеанизации для свободного произведения группы кос и симметрической группы $Br_n * \Sigma_n$ может быть определен как композиция

$$ab_{BP*\Sigma} \colon Br_n * \Sigma_n \xrightarrow{ab \quad * ab_\Sigma} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2,$$

в которой второе отображение есть канонический эпиморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $ab_{BP*\Sigma}$ как следующую композицию:

$$Br_n * \Sigma_n \longrightarrow BP_n \xrightarrow{ab_{BP}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2,$$

где первое отображение есть канонический эпиморфизм. Снова используя универсальность, видим, что ab_{BP} есть абелеанизация BP_n. Доказательство для редуцированной группы кос-перестановок такое же.

Имеются эпиморфизмы $\alpha_n \colon BP_n \to \mathbb{Z}$ и $\overline{\alpha}_n \colon \overline{BP}_n \to \mathbb{Z}$, заданные по формулам

$$\xi_i \mapsto 0 \ \text{ для всех } \ i,$$
$$\sigma_i \mapsto 1 \ \text{ для всех } \ i.$$

Из определяющих соотношений группы кос-перестановок следует, что мы имеем эпиморфизм $\phi_n \colon BP_n \to \Sigma_n$, определенный по формулам: $\phi_n(\xi_i) = \xi_i$, $\phi_n(\sigma_i) = \xi_i$. Его композиция с каноническим вложением ν_n группы Σ_n в BP_n равна тождественному гомоморфизму группы Σ_n. Эти гомоморфизмы порождают отображения классифицирующих пространств $B\nu_n$ и $B\phi_n$ такие, что их композиция $B\Sigma_n \to BBP_n \to B\Sigma_n$ равна тождественному отображению. Имеем также вложение κ_n группы кос в BP_n, которое порождает отображение классифицирующих пространств: $BBr_n \to BBP_n$. Композиция κ_n и ϕ_n дает канонический эпиморфизм $\tau_n \colon Br_n \to \Sigma_n$.

Обозначим через $\mathscr{Z}$ строгую моноидальную (тензорную) категорию, объекты которой $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots\}$ соответствуют целым числам от 0 до ∞, а морфизмы определены по формуле

$$\hom(\overline{k}, \overline{l}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = l, \\ \varnothing, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Произведение в $\mathscr{Z}$ определено на объектах как сумма неотрицательных чисел, а на морфизмах – как сумма целых чисел. Эта категория обладает симметрией, которая равна нулевому элементу для всех $\overline{m}$ и $\overline{n}$. Гомоморфизмы α_n индуцируют морфизм пермутативных категорий $A\colon \mathscr{BP} \to \mathscr{Z}$ и отображения классифицирующих пространств

$$B\alpha_n\colon BBP_n \to S^1.$$

Имеется также вложение группы $\mathbb{Z}$ в Br_n

$$\gamma\colon \mathbb{Z} \to Br_n,$$

отображающее образующую циклической группы на одну из образующих группы кос σ_i, скажем, σ_1: $\gamma(1) = \sigma_1$. Мы будем опускать индекс n в обозначениях для групп и гомоморфизмов, когда $n = \infty$.

Теорема 12.1. *Существуют отображения*

$$\psi\colon B\Sigma \times BBr \to BBP^+$$

и

$$\beta\colon \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \to \Omega^\infty S^\infty \times S^1$$

такие, что отображение ψ становится петлевым отображением после группового пополнения, а отображение β есть бесконечнократное петлевое отображение, и оно расщепляется отображением

$$\mathbb{Z} \times B\Sigma^+ \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{Id}\times(B\gamma)^+} \mathbb{Z} \times B\Sigma^+ \times BBr^+ \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\psi^+} \mathbb{Z} \times BBP^+.$$

Если бесконечнократное пространство петель Y является слоем отображения β, то оно участвует в расщеплении

$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \simeq \Omega^\infty S^\infty \times S^1 \times Y.$$

То же самое верно и для редуцированной группы кос-перестановок с одним изменением: отображение

$$\overline{\psi}\colon B\Sigma \times BBr \to B\overline{BP}^+$$

становится двукратным петлевым отображением после группового пополнения.

Доказательство. Морфизм A порождает бесконечнократное петлевое отображение $\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \to S^1$. Аналогично гомоморфизмы ϕ_n порождают морфизм пермутативных категорий $\mathscr{BP} \to \Sigma$ и соответствующее бесконечнократное петлевое отображение
$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \to \Omega^\infty S^\infty.$$
Обозначим через β следующую композицию:
$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \xrightarrow{\mathrm{diag}} \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \times \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \longrightarrow \Omega^\infty S^\infty \times S^1.$$
Гомоморфизмы ν и κ порождают отображение произведений классифицирующих пространств:
$$B\Sigma \times BBr \to BBP \times BBP.$$
Пространство BBP^+ является H-пространством, следовательно, существует отображение
$$\mu\colon BBP^+ \times BBP^+ \to BBP^+.$$
Рассмотрим теперь композицию f:
$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{B\nu\times B\kappa} BBP \times BBP \xrightarrow{q\times q} BBP^+ \times BBP^+ \xrightarrow{\mu} BBP^+.$$
Из конструкции мы видим, что отображение
$$B\Sigma \xrightarrow{\mathrm{equiv}} B\Sigma \times * \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{incl}} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{f} BBP^+$$
гомотопно $qB\nu$, а отображение
$$BBr \xrightarrow{\mathrm{equiv}} * \times BBr \xrightarrow{\mathrm{incl}\times\mathrm{id}} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{f} BBP^+$$
гомотопно $qB\kappa$. Используя тот факт, что $\mathbb{Z} \times BBP^+$ есть пространство петель, мы немного изменим отображение $qB\kappa\colon BBr \to BBP^+$ и определим отображение $g\colon BBr \to BP^+$ по формуле
$$g(b) = (qB\tau(b))^{-1} \cdot qB\kappa(b), \qquad b \in BBr.$$
В этом случае композиция $B^+\phi \cdot g\colon BBr \to B\Sigma^+$ гомотопна нулю. Обозначим через ψ композицию
$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{B\nu\times g} BBP \times BBP \xrightarrow{q\times q} BBP^+ \times BBP^+ \xrightarrow{\mu} BBP^+,$$
через χ композицию
$$B\Sigma \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{id}\times B\gamma} B\Sigma \times BBr \xrightarrow{\psi} BBP^+.$$
Наконец, обозначим через $\overline{\psi}$ и $\overline{\chi}$ соответствующие отображения для редуцированной группы кос-перестановок. Таким образом, композиция
$$B\Sigma \times BBr \xrightarrow{\psi} BBP^+ \xrightarrow{B^+\phi\times B^+\alpha} B\Sigma^+ \times S^1$$

гомотопна произведению $q \times B\alpha$, а композиция

$$B\Sigma \times S^1 \xrightarrow{\chi} BBP^+ \xrightarrow{B^+\phi \times B^+\alpha} B\Sigma^+ \times S^1$$

является каноническим отображением из пространства в его плюс-конструкцию. Это дает следующее расщепление:

$$B\Sigma^+ \times S^1 \xrightarrow{\chi^+} BBP^+ \xrightarrow{B^+\phi \times B^+\alpha} B\Sigma^+ \times S^1.$$

Отображение $B\kappa$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} BBr & \xrightarrow{\kappa} & BBP \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBr_n) & \longrightarrow & \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \end{array}$$

в которой нижняя стрелка является петлевым отображением.

Категория $\mathscr{B}$, образованная группами кос, является *моноидальной категорией с заплетением* (*braided monoidal category* – англ.), как это определено А. Жуаялем и Р. Стритом [83] (см. также дополнение). Следующая система элементов:

$$\sigma_m \ldots \sigma_1 \sigma_{m+1} \ldots \sigma_2 \ldots \sigma_{n+m-1} \ldots \sigma_n \in Br_{m+n},$$

определяет заплетение c в $\mathscr{B}$. Графически такой элемент изображен на рис. Д.1 (см. дополнение). Образом заплетения c при применении функтора $\overline{\mathscr{K}} \colon \mathscr{B} \to \overline{\mathscr{B}\mathscr{P}}$ является заплетение в категории $\overline{\mathscr{B}\mathscr{P}}$. Доказательство этого факта такое же, как и предложения 12.3 ниже. Отсюда и из теоремы Д.2 дополнения следует, что в нашем случае отображение классифицирующих пространств

$$B\mathscr{B} \to B\overline{\mathscr{B}\mathscr{P}},$$

индуцированное функтором $\overline{\mathscr{K}}$, становится двукратно петлевым после группового пополнения.

Следствие 12.1. *В гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ эпиморфизм алгебр*

$$\beta_* \colon H_*(BP;\mathbb{Z}) \to H_*(\Sigma \times \mathbb{Z};\mathbb{Z})$$

расщепляется (*как гомоморфизм абелевых групп*) *при помощи гомоморфизма*:

$$\chi_* \colon H_*(\Sigma \times \mathbb{Z};\mathbb{Z}) \to H_*(BP;\mathbb{Z}).$$

Гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ группы кос-перестановок из бесконечного числа нитей $H_*(BP,\mathbb{Z}/p)$ как $H_*(\Sigma;\mathbb{Z}/p)$-модуль изоморфны

$$H_*(\Sigma;\mathbb{Z}/p) \otimes H_*(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p) \otimes H_*(Y;\mathbb{Z}/p).$$

То же самое верно и для гомологий редуцированной группы кос-перестановок $\overline{BP}$.

Гомоморфизм вложения $BP_n \to \operatorname{Aut} F_n$ порождает E_∞-отображение классифицирующих пространств соответствующих категорий $B\mathscr{BP} \to BAut$ и соответствующее отображение бесконечнократных пространств петель

$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BBP_n) \to \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} B \operatorname{Aut}_n).$$

Рассмотрим композицию

$$B\Sigma^+ \times BBr^+ \to BBP^+ \to (B \operatorname{Aut}_\infty)^+$$

и увидим, что в гомологиях по модулю p элементы из $H_*(BP, \mathbb{Z}/p)$, которые являются образами элементов из $H_*(Br, \mathbb{Z}/p)$, и те, которые получаются из них применением операций Араки–Кудо–Даера–Лашофа [32], отображаются в образ $H_*(B\Sigma, \mathbb{Z}/p)$, лежащий в гомологиях группы $\operatorname{Aut}_\infty$.

Пусть π_i^S, $i = 0, 1, \dots$, обозначают стабильные гомотопические группы сфер. Бесконечнократные пространства петель $\mathbb{Z} \times BBP^+$ и $\mathbb{Z} \times B\overline{BP}^+$ определяют обобщенные теории гомологий, которые мы будем обозначать через $PB_*(\,\cdot\,)$ (чтобы не спутать с теорией Брауна–Петерсона) и $\overline{PB}_*(\,\cdot\,)$. Наши рассмотрения доказывают также следующее утверждение.

Следствие 12.2. *Последовательность групп кос-перестановок определяет обобщенную мультипликативную теорию гомологий $PB_*(\,\cdot\,)$, группы коэффициентов которой PB_i содержат группы $\pi_i^S \oplus \pi_i(S^1)$ в качестве прямого слагаемого.*

Рассмотрим теперь моноид Баеса–Бирман и группу кос с особенностями. Спаривания

$$\mu_{m,n}\colon SB_m \times SB_n \to SB_{m+n},$$
$$\mu_{m,n}\colon SG_m \times SG_n \to SG_{m+n}$$

определяются стандартным образом по формулам

$$\mu_{m,n}(g_i') = g_i, \quad \mu_{m,n}(a_i') = a_i;$$
$$g_i', a_i' \in SB_m, SG_m; \quad g_i, a_i \in SB_{m+n}, SG_{m+n};$$
$$\mu_{m,n}(g_j'') = g_{j+m}, \quad \mu_{m,n}(a_j'') = a_{j+m};$$
$$g_i'', a_i'' \in SB_n, SG_n; \quad g_{j+m}, a_{j+m} \in SB_{m+n}, SG_{m+n}.$$

Эти спаривания согласованы с соответствующим спариванием для групп кос. Они определяют строгие моноидальные категории $\mathscr{SB}$ и $\mathscr{SG}$, а гомоморфизмы j_n и канонические вложения $SB_n \to SG_n$ определяют функторы из строгой моноидальной категории $\mathscr{B}$, образованной группами кос

$$\mathscr{J}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{SB},$$
$$\mathscr{B} \xrightarrow{\mathscr{J}} \mathscr{SB} \longrightarrow \mathscr{SG},$$

которые являются морфизмами моноидальных категорий. Спаривания μ коммутативны с точностью до сопряжения, так же как и для групп кос. Более точно, имеет место следующий факт.

Предложение 12.3. *Образ заплетения c в категории $\mathscr{B}$ при применении функтора $\mathscr{J}$ является заплетением в категории $\mathscr{SB}$, так что последняя становится категорией с заплетением, а функтор $\mathscr{J}$ – морфизмом категорий с заплетением. Аналогично, категория $\mathscr{SG}$ является категорией с заплетением, а соответствующие функторы – морфизмами категорий с заплетением.*

Доказательство. Мы доказываем утверждение для категории $\mathscr{SB}$. Доказательство для $\mathscr{SG}$ то же самое. По определению естественность заплетения $\mathscr{J}(c)$ (которое мы будем для простоты обозначать тем же символом c) означает, что справедливо следующее равенство:

$$c_{\overline{m},\overline{n}} \cdot \mu(b'_m, b''_n) = \mu(b''_n, b'_m) \cdot c_{\overline{m},\overline{n}}.$$

Это эквивалентно соотношению

$$c_{\overline{m},\overline{n}} \cdot \mu(b'_m, b''_n) \cdot c^{-1}_{\overline{m},\overline{n}} = \mu(b''_n, b'_m),$$

которое означает, что сопряжение элементом $c_{\overline{m},\overline{n}}$ преобразует элементы из $SB_m \times SB_n$, канонически вложенного в SB_{m+n}, в соответствующие элементы из $SB_n \times SB_m$. Элементы $c_{\overline{m},\overline{n}}$ определяют заплетение для категории $\mathscr{B}$ так, что для проверки естественности c в $\mathscr{SB}$ осталось проверить ее на образующих a_i, $1 \leqslant i \leqslant m-1, m \leqslant i \leqslant m+n$. Рассмотрим соответствующее сопряжение:

$$g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \cdots g_n a_i g_n^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1}.$$

Если $i > n$, мы двигаем a_i влево, используя соотношение $a_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i a_{i+1}$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \cdots g_n a_i g_n^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i-1} a_i g_{i-1}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i+1} a_{i-1} g_i g_{i-1} g_{i-1}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} = \cdots = a_{i-n}.
\end{aligned}$$

Если $i < n$, мы двигаем a_i влево, используя соотношение $a_{i+1} g_i g_{i+1} = g_i g_{i+} a_i$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \cdots g_n a_i g_n^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_i g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i+2} g_{i+1} a_i g_{i+1}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_i g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i+2} g_i^{-1} g_i g_{i+1} a_i g_{i+1}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} g_i^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{i+1} g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i+2} a_{i+1} g_i g_{i+1} g_{i+1}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} g_i^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} \\
&\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{i+1} g_{n+m-1} \\
&\qquad \cdots g_{i+2} a_{i+1} g_{i+2}^{-1} \cdots g_{n+m-1}^{-1} g_{i+1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_{m+1}^{-1} g_1^{-1} \cdots g_m^{-1} = \cdots = a_{i+m}.
\end{aligned}$$

Условия когерентности выполнены очевидным образом. Для условия B1 из [83] имеем тождество:

$$\begin{aligned} &g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m-1} \cdots g_n \\ &\qquad \times g_{m+n} \cdots g_{n+1} g_{m+n+1} \cdots g_{n+2} \cdots g_{n+m+q-1} \cdots g_{n+q} \\ &\quad = g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{n+m+q-1} \cdots g_{n+q}. \end{aligned}$$

Для B2 очевидно, что

$$\begin{aligned} &g_{m+n} \cdots g_{m+1} g_{m+n+1} \cdots g_{m+2} \cdots g_{n+m+q-1} \cdots g_{m+q} \\ &\qquad \times g_m \cdots g_1 g_{m+1} \cdots g_2 \cdots g_{m+q-1} \cdots g_q \\ &\quad = g_{m+n} \cdots g_1 g_{m+n+1} \cdots g_2 \cdots g_{m+n+q-1} \cdots g_q. \end{aligned}$$

Пусть BSB и BSG обозначают классифицирующие пространства предельного моноида Баеса–Бирман и соответствующей группы кос с особенностями. Спаривания $\mu_{m,n}$ определяют, как обычно, структуру моноида на несвязной сумме классифицирующих пространств SB_n и SG_n:

$$\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n, \qquad \amalg_{n\geqslant 0} BSG_n.$$

Предложение 12.4. *Канонические отображения*

$$\begin{aligned} BSB &\to \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n), \\ BSG &\to \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \end{aligned}$$

индуцируют изоморфизмы в гомологиях

$$\begin{aligned} H_*(BSB; A) &\to H_*\big((\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n))_0; A\big), \\ H_*(BSG; A) &\to H_*\big((\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n))_0; A\big) \end{aligned}$$

с любыми (постоянными) коэффициентами. Следовательно, имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} BSB^+ &\cong \big(\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n)\big)_0, \\ BSG^+ &\cong \big(\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n)\big)_0. \end{aligned}$$

Доказательство этого факта такое же, как доказательство теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.2 в [66], или (что по существу то же самое) основывается непосредственно на результатах работы [67]. Заплетение c дает необходимую гомотопическую коммутативность для H-пространств $\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n$ и $\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n$.

Сравнивая соотношения, определяющие моноид Баеса–Бирман и редуцированную группу кос-перестановок, мы видим, что можно определить очевидный гомоморфизм $l_n\colon SB_n \to \overline{BP}_n$ по формулам: $l_n(g_i) = \sigma_i$, $l_n(a_i) = \xi_i$. Эти же формулы определяют гомоморфизм $SG_n \to \overline{BP}_n$. Композиция $l_n \circ j_n$ равна каноническому гомоморфизму $\kappa_n\colon Br_n \to \overline{BP}_n$. Гомоморфизмы $l_n, n = 0, 1 \dots$, определяют морфизм моноидальных категорий $\mathscr{L}\colon \mathscr{SB} \to \mathscr{SG} \to \overline{\mathscr{BP}}$ такой, что образ заплетения c является заплетением в категории $\overline{\mathscr{BP}}$.

Теорема 12.2. *Гомоморфизмы j_n и l_n индуцируют морфизмы категорий с заплетением*

$$\mathscr{B} \xrightarrow{\mathscr{J}} \mathscr{S}\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{S}\mathscr{G} \xrightarrow{\mathscr{L}} \overline{\mathscr{B}\mathscr{P}}$$

и соответствующие двукратно петлевые отображения

$$\Omega^2 S^2 \longrightarrow \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSB_n) \longrightarrow \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \longrightarrow \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} B\overline{BP}_n).$$

Доказательство следует из того факта, что классифицирующее пространство категории с заплетением является двукратным пространством петель после группового пополнения.

Предложение 12.5. *Абелеанизация группы SG_n равна $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$:*

$$SG_n/[SG_n, SG_n] \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Добавим следующие соотношения к соотношениям группы кос с особенностями SG_n: $g_i = g_j$ для всех i и j, $a_i = a_j$ для всех i и j, и получим эпиморфизм $ab_{SB}\colon SB_n \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Обозначим через g и a образующие $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, являющиеся образами соответствующих образующих SG_n. Предположим, что имеется гомоморфизм в некоторую абелеву группу A, $f\colon SG_n \to A$. Из соотношений группы кос с особенностями SG_n следует, что $f(g_i) = f(g_j)$ и $f(a_i) = f(a_j)$ для всех i и j. Следовательно, гомоморфизм $f'\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to A$ однозначно определяется по формулам $f'(g) = f(g_i)$, $f'(a) = f(a_i)$. Это означает, что эпиморфизм ab_{SB} является гомоморфизмом абелеанизации SG_n.

Существуют гомоморфизмы, являющиеся правыми обратными к гомоморфизму $j_n\colon Br_n \to SG_n$. Определим один из них $h_n\colon SG_n \to Br_n$ по формулам $h_n(g_i) = \sigma_i$, $h_n(a_i) = e$, а второй $h'_n\colon SG_n \to Br_n$, исходя из следующего действия на образующие: $h'_n(g_i) = \sigma_i$, $h'_n(a_i) = \sigma_i$. Пусть $\deg_n$ есть гомоморфизм $SG_n \to \mathbb{Z}$, сопоставляющий каждому элементу группы SG_n сумму степеней образующих a_i, входящих в запись этого элемента. Определим заплетение

$$c_{\overline{m},\overline{n}}\colon \overline{m+n} \to \overline{m+n}$$

в категории $\mathscr{Z}$: $c_{\overline{m},\overline{n}} = m\cdot n$. Тогда гомоморфизмы $\deg_n$ порождают функтор категорий с заплетением $\mathscr{S}\mathscr{G} \to \mathscr{Z}$ и соответствующее двукратно петлевое отображение

$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \to S^1.$$

Аналогично гомоморфизмы h_n порождают функтор категорий с заплетением $\mathscr{S}\mathscr{G} \to \mathscr{B}$ и соответствующее двукратно петлевое отображение

$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \to \Omega^2 S^2.$$

Обозначим через λ композицию

$$\Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \xrightarrow{\mathrm{diag}} \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \times \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \longrightarrow S^1 \times \Omega^2 S^2.$$

Пусть W есть двукратное пространство петель, являющееся слоем отображения λ. Определим гомоморфизм $\mathbb{Z} \to SG_n$ как вложение циклической группы в качестве подгруппы, порожденной элементом a_1. Тогда композиция $\mathbb{Z} \longrightarrow SG_n \xrightarrow{\deg_n} \mathbb{Z}$ равна тождественному гомоморфизму. Так же, как в доказательстве теоремы 12.1, мы строим отображение $\psi_S\colon S^1 \times BBr \to BSG^+$.

Теорема 12.3. *Двукратно петлевое отображение*

$$\lambda\colon \Omega B(\amalg_{n\geqslant 0} BSG_n) \to S^1 \times \Omega^2 S^2$$

расщепляется петлевым отображением

$$1 \times \psi_S^+\colon \mathbb{Z} \times S^1 \times BBr^+ \to \mathbb{Z} \times BSG^+.$$

Следовательно, имеется эквивалентность

$$\mathbb{Z} \times BSG^+ \simeq S^1 \times \Omega^2 S^2 \times W.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения теоремы 12.1.

Следствие 12.3. *В гомологиях с целыми коэффициентами эпиморфизм алгебр*

$$\lambda_*\colon H_*(SG;\mathbb{Z}) \to H_*(\mathbb{Z} \times Br;\mathbb{Z})$$

расщепляется при помощи мономорфизма:

$$\psi_{S*}\colon H_*(\mathbb{Z} \times Br;\mathbb{Z}) \to H_*(SG;\mathbb{Z}).$$

Гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ группы кос с особенностями из бесконечного числа нитей $H_*(SG;\mathbb{Z}/p)$ изоморфны $H_*(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p) \otimes H_*(Br;\mathbb{Z}/p) \otimes H_*(W;\mathbb{Z}/p)$ как алгебры.

Результаты этого параграфа были получены в [84].

§ 13. Косы и спектры Тома

Для изучения спектров Тома для кос нам потребуются некоторые сведения из теории гомотопий, связанные с теоремой М. Маховальда [39], [40]. Предположим в этом параграфе (до теоремы 13.6), что пространства и спектры локализованы вне 2.

Предельная ортогональная группа O и ее классифицирующее пространство BO являются бесконечнократными пространствами петель, следовательно, определены итерированные классифицирующие пространства B^kO.

Пусть X есть CW-комплекс, заданный вместе с отображениями $f\colon S^{n+1} \to X$ и $g\colon X \to B^{n+1}O$ такими, что выполнено следующее условие. Рассмотрим композицию

$$gf\colon S^{n+1} \to X \to B^{n+1}O$$

и применим функтор n-кратных петель к ней:

$$\Omega^n gf\colon \Omega^n S^{n+1} \to \Omega^n B^{n+1}O \simeq BO.$$

Пусть $S^1 \to \Omega^n S^{n+1}$ есть вложение, являющееся n-м сопряженным к тождественному отображению $S^{n+1} \to S^{n+1}$. Условие состоит в том, что композиция

$$S^1 \to \Omega^n S^{n+1} \to BO$$

нетривиальна. Отображение $\Omega^n g\colon \Omega^n X \to BO$ порождает спектр Тома $M(X,n)$.

Пусть теперь $X = S^3$, $n = 2$ и отображение $g\colon S^3 \to B^3O$ нетривиально. Оно индуцирует отображение $\Omega^2 g\colon \Omega^2 S^3 \to BO$, которое в свою очередь порождает отображение

$$\Omega^2 g\colon \Omega^2 S^2 \to \mathbb{Z} \times BO. \tag{13.1}$$

Теорема 13.1 (М. Маховальд). *Спектр Тома $M(S^3, 2)$ эквивалентен спектру Эйленберга–Маклейна $H\mathbb{Z}/2$:*

$$M(S^3, 2) \simeq H\mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Имеется стандартное отображение из алгебры Стинрода по модулю 2 $\mathscr{A}$ в $H^*(M(S^3, 2); \mathbb{Z}/2)$, задаваемое сопоставлением Sq^I элемента $Sq^I(U)$, где U – класс Тома. Для доказательства теоремы достаточно установить, что это отображение есть изоморфизм.

Заметим:

1) Ряды Эйлера–Пуанкаре для $H^*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Z}/2)$ и $\mathscr{A}$ совпадают. Следовательно, достаточно увидеть, что рассматриваемое отображение есть мономорфизм, так как каждый ряд “конечного типа”.

2) Рассматриваемое отображение есть морфизм коалгебр, и, следовательно, достаточно увидеть, что оно инъективно на модуле примитивных.

3) Модуль примитивных для $\mathscr{A}$ задается милноровскими Q_i, и имеется не больше одного из них в каждой размерности. Следовательно, достаточно проверить, что каждый Q_i имеет ненулевой образ.

4) Обозначим через w_i i-й класс Штифеля–Уитни, а x_{2^k-1} есть единственный примитивный элемент из $H_*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Z}/2)$ в размерности $2^k - 1$. Из работы Ф. П. Петерсона и Х. Тоды [85] следует, что $Q_k(U) = (w_{2^k-1} + \text{разложимые})U$ в $H^*(MO; \mathbb{Z}/2)$.

5) Пусть $\langle\,,\rangle$ обозначает обычное кронекеровское произведение, которое вычисляет значение когомологического класса на гомологическом той же размерности. Ниже мы проверим, что

$$\langle g^*(w_{2^k-1}), x_{2^k-1}\rangle = 1 \tag{13.2}$$

и

$$\langle g^*(\text{разложимые}), x_{2^k-1}\rangle = 0. \tag{13.3}$$

Тогда $Q_k(U)$ не равен нулю в $H^*(M(S^3, 2); \mathbb{Z}/2)$ и теорема будет доказана.

6) Поскольку x_{2^k-1} примитивен, $\langle g^*(\text{разложимые}), x_{2^k-1}\rangle$ равно нулю. Отсюда следует формула (13.3).

7) Чтобы проверить (13.2), положим $Sq^I = Sq^1 Sq^2 Sq^4 \dots Sq^{2^{k-2}}$. Следовательно,

$$Sq^I w_{2^{k-1}} = w_{2^k-1} + \text{разложимые}$$

по формуле Ву. Значит,

$$\begin{aligned}\langle(\Omega^2 g)^*(w_{2^k-1}), x_{2^k-1}\rangle &= \langle(\Omega^2 g)^* Sq^I w_{2^{k-1}}, x_{2^k-1}\rangle = \langle Sq^I w_{2^{k-1}}, (\Omega^2 g)_* x_{2^k-1}\rangle \\ &= \langle w_{2^{k-1}}, (\Omega^2 g)_* Sq_*^{2^{k-2}} \dots Sq_*^2 Sq_*^1 x_{2^k-1}\rangle \\ &= \langle w_{2^{k-1}}, (\Omega^2 g)_* x_1^{2^{k-1}}\rangle = 1,\end{aligned}$$

так как $w_{2^{k-1}}$ двойствен примитивному классу в $H_*(BO; \mathbb{Z}/2)$, заданному 2^{k-1}-й степенью одномерного класса.

Замечания. 1) Это доказательство никак не использует операции Араки–Кудо–Даера–Лашофа. Для него только требуется наличие некоторого *петлевого* отображения из $\Omega^2 S^3$ в BO, ненулевого на первой группе гомологий.

2) Это доказательство приведено в [86] и было намечено в [31].

Теорема 13.2. *Спектр Тома $M(X,n)$, $n \geqslant 2$, есть букет надстроек над спектром Эйленберга–Маклейна $H\mathbb{Z}/2$.*

Доказательство следует из теоремы М. Маховальда.

Перед тем как рассматривать спектры Тома для кос, дадим некоторые общие определения и конструкции.

Предположим, что заданы последовательность конечно представленных моноидов H_n для $n = 0, 1, 2, \dots$ и гомоморфизмы $g_n \colon H_n \to H_{n+1}$. Обозначим через g^n_{n+m} композицию $g_{n+m-1} \cdots g_n$, $g^n_{n+m} \colon H_n \to H_{n+m}$, а через H прямой предел системы $\{H_n, g_n\}$. Предположим также, что для всех m и n существуют гомоморфизмы

$$\nu_{m,n} \colon Br_m \times H_n \to H_{m+n}$$

такие, что $\nu_{0,n}(e,x) = \mathrm{Id}(x)$, $x \in H_n$ и e есть единица группы $Br_0 = \{e\}$, и диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
Br_l \times Br_m \times H_n & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \nu_{m,n}} & Br_l \times H_{m+n} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mu_{l,m} \times \mathrm{Id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu_{l,m+n}} \\
Br_{l+m} \times H_n & \xrightarrow{\nu_{l+m,n}} & H_{l+m+n}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Br_l \times H_m & \xrightarrow{i^l_{l+k} \times g^m_{m+n}} & Br_{l+k} \times H_{m+n} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \nu_{l,m}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu_{l+k,m+n}} \\
H_{l+m} & \xrightarrow{g^{l+m}_{l+k+m+n}} & H_{l+k+m+n}
\end{array}$$

коммутативны с точностью до сопряжения обратимыми элементами моноидов.

Мы называем такую систему моноидов *модульной над косами системой моноидов*. Если группы кос заменены системой симметрических групп в приведенном выше условии, то такая система моноидов будет называться *симметрически модульной системой моноидов*.

Предположим, что система моноидов $\{H_n, g_n\}$ такова, что H_0 состоит из одного элемента $H_0 = \{e\}$. Тогда $\nu_{m,0}$ есть гомоморфизм из Br_m в H_m. Через канонические гомоморфизмы $\tau_m \colon Br_m \to \Sigma_m$ каждая симметрически модульная система моноидов наделяется структурой модульной над косами системы. Предположим теперь, что система моноидов $\{H_n, g_n\}$ такова, что для всех m и n существуют гомоморфизмы

$$\mu^H_{m,n} \colon H_m \times H_n \to H_{m+n} \tag{13.4}$$

такие, что $\mu^H_{e,n}(e,x) = \mathrm{Id}(x)$ и $\mu^H_{m,n}(x,e) = \mathrm{Id}(x)$, где $x \in H_n$ и e – единица моноида H_0, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
H_m \times H_n & \xrightarrow{g^m_{m+k}\times g^n_{n+l}} & H_{m+k} \times H_{n+l} \\
\Big\downarrow \mu^H_{l,m} & & \Big\downarrow \mu^H_{m+k,n+l} \\
H_{l+m} & \xrightarrow{g^{l+m}_{m+k+n+l}} & H_{m+k+n+l}
\end{array}$$

и аналог диаграммы (2.8) коммутативны с точностью до сопряжения обратимыми элементами моноидов.

Мы называем такую систему моноидов *моноидальной системой моноидов.* Если моноидальная и модульная над косами структуры системы моноидов согласованы очевидным образом, то мы говорим, что $\{H_n\}$ есть *алгебра над косами.*

Морфизмы моноидальных систем моноидов определяются обычным образом. Группы кос и симметрические группы образуют моноидальные системы групп $\{Br_n, i_n\}$ и $\{\Sigma_n, i_n\}$ стандартным образом. Если имеется моноидальная система моноидов $\{H_n, g_n\}$ и морфизмы моноидальных систем

$$\phi\colon \{Br_n, i_n\} \to \{H_n, g_n\},$$

то система $\{H_n, g_n\}$ становится модульной над косами системой моноидов.

Пусть K есть ассоциативное кольцо с единицей 1, а s_m – каноническое представление из симметрической группы Σ_m в GL_mK. Стандартные вложения GL_mK и GL_nK в качестве диагональных блоков в $GL_{m+n}K$ определяют моноидальную структуру для системы групп GL_nK. Морфизмы s_m и $s_m\tau_m$ определяют структуры симметрически модульной системы и модульной над косами системы групп GL_nK. Обозначим эту модульную над косами структуру через ψ. Предположим теперь, что имеется модульная над косами система моноидов $\{H_n, g_n\}$ и модульный над косами морфизм ρ из $\{H_n, g_n\}$ в $\{GL_nK\}$. Это означает, что имеется система гомоморфизмов (представлений)

$$\rho_n\colon H_n \to GL_nK.$$

Предположим, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
H_n & \xrightarrow{\rho_n} & GL_nK \\
\Big\downarrow g_n & & \Big\downarrow i_n \\
H_{n+1} & \xrightarrow{\rho_{n+1}} & GL_{n+1}K
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Br_m \times H_n & \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\rho_n} & Br_m \times GL_nK \\
\Big\downarrow \nu_{m,n} & & \Big\downarrow \psi_{m,n} \\
H_{m+n} & \xrightarrow{\rho_{m+n}} & GL_{m+n}K
\end{array}$$

коммутативны с точностью до сопряжения.

Мы говорим в этой ситуации, что система представлений ρ_n *согласована* с модульной над косами структурой системы моноидов H_n. Аналогично мы определяем, что система представлений согласована с симметрически модульной структурой системы моноидов.

Существует большое количество примеров структур, описанных выше. Некоторые из них уже обсуждались: полные линейные группы $\{GL_nK\}$ образуют структуру алгебры над симметрической группой, сами симметрические группы $\{\Sigma_n\}$ образуют структуру алгебры над косами. Любая система конечных групп Кокстера $\{W_n\}$, действующих на $\mathbb{R}^n$, образует симметрически модульную структуру, а соответствующая система обобщенных групп кос $\{Br(W_n)\}$ образует модуль над косами. Пусть G есть группа, а γ – гомоморфизм из G в $\mathbb{Z}/2$; $\gamma\colon G \to \mathbb{Z}/2$. Рассмотрим сплетение $\Sigma_n \int G$. Гомоморфизм γ индуцирует гомоморфизм $\gamma_n\colon \Sigma_n \int G \to \Sigma_n \int \mathbb{Z}/2$. Последнее сплетение $\Sigma_n \int \mathbb{Z}/2$ изоморфно группе Кокстера C_n и, следовательно, вложено в ортогональную группу O_n. Таким образом, имеется композиция

$$\Sigma_n \int G \to \Sigma_n \int \mathbb{Z}/2 \to O_n \to GL_n\mathbb{R}, \tag{13.5}$$

дающая необходимое представление $\Sigma_n \int G$. Имеются канонические спаривания

$$(\Sigma_k \times \Sigma_n) \int G \to \Sigma_{n+k} \int G,$$
$$\Sigma_k \times (\Sigma_n \int G) \to \Sigma_{n+k} \int G,$$

снабжающие $\{\Sigma_n \int G\}$ структурой алгебры над симметрической группой, а представление (13.5) согласовано с этой структурой. Аналогично можно рассматривать сплетение группы G с группами кос.

Другие примеры описанных выше структур дают группы $\operatorname{Aut} F_n$, $n = 1, 2, \dots$, автоморфизмов свободных групп F_n и их подгруппы. Канонические вложения (2.3) порождают структуру моноидальной системы групп. Стандартные вложения t и r симметрической группы и группы кос в $\operatorname{Aut} F_n$ описаны в §2. Композиция морфизмов t и τ дает еще один морфизм моноидальных систем групп

$$\tau t\colon \{Br_n\} \to \{\operatorname{Aut} F_n\}.$$

Гомоморфизм t определяет структуру алгебры над симметрической группой для системы $\operatorname{Aut} F_n$, а гомоморфизмы r и τt определяют две различные структуры алгебры над косами для системы групп $\operatorname{Aut} F_n$. Абелеанизация свободной группы F_n есть свободная абелева группа ранга n. Это определяет эпиморфизм

$$\rho_n\colon \operatorname{Aut} F_n \to GL_n\mathbb{Z}.$$

Система представлений ρ_n согласована со структурой алгебры над симметрической группой и двумя структурами алгебры над косами для системы групп $\operatorname{Aut} F_n$.

Система моноидов $H_n < \operatorname{Aut} F_n$, $H_n < H_{n+1}$, содержащих симметрические группы:

$$\Sigma_n < H_n < \operatorname{Aut} F_n,$$

или группы кос:

$$Br_n < H_n < \operatorname{Aut} F_n,$$

такая, что композиции

$$\Sigma_n \to H_n \to \operatorname{Aut} F_n \to GL_n\mathbb{Z},$$
$$Br_n \to H_n \to \operatorname{Aut} F_n \to GL_n\mathbb{Z}$$

являются каноническими представлениями, является симметрически модульной системой или модульной над косами системой моноидов. Более конкретным примером этой ситуации является группа кос-перестановок BP_n из $\S 5$. Как и в случае групп $\operatorname{Aut} F_n$, гомоморфизмы t индуцируют структуру алгебры над симметрической группой. Гомоморфизмы r и τt определяют две различные структуры алгебры над косами для системы групп BP_n. Система представлений, возникающая из $\operatorname{Aut} F_n$, согласована со структурами алгебры над симметрической группой и алгебры над косами на BP_n.

Редуцированная группа кос-перестановок $\overline{BP}_m$ из $\S 5$ не является подгруппой $\operatorname{Aut} F_m$. Однако, используя представление этой группы, мы можем определить структуру алгебры над симметрической группой и две различные структуры алгебры над косами для системы групп $\overline{B}P_m$. Представления $\operatorname{Aut} F_m \to GL_m\mathbb{Z}$, $m = 0, 1, \dots$, отображают элементы ξ_i и σ_i в одну и ту же матрицу. Следовательно, представления

$$\overline{BP}_m \to GL_m(\mathbb{Z}), \qquad m = 0, 1, \dots,$$

корректно определены и согласованы со структурами алгебры над симметрической группой и алгебры над косами на $\overline{BP}_n$.

Пусть $\operatorname{Aut}(\vee^k S^n)$ есть моноид пунктированных самоэквивалентностей букета n-мерных сфер $\vee^k S^n$. Пусть V_k определено следующим образом:

$$V_k = \varinjlim_{n} \operatorname{Aut}(\vee^k S^n).$$

Спаривание (13.4) задается для системы $\pi_0(V_k)$ очевидным образом. Отображения

$$\operatorname{Aut}(\vee^k S^0) \to \operatorname{Aut}(\vee^k S^1) \to V_k$$

определены с помощью функтора надстройки. Они индуцируют гомоморфизмы

$$\operatorname{Aut}(\vee^k S^0) \to \pi_0 \operatorname{Aut}(\vee^k S^1) \to \pi_0 V_k.$$

H-пространство $\operatorname{Aut}(\vee^k S^1)$ гомотопически эквивалентно $\operatorname{Aut} F_k$, что определяет гомоморфизм $\chi\colon \operatorname{Aut} F_k \to \pi_0 V_k$ как композицию

$$\operatorname{Aut} F_k \cong \pi_0 \operatorname{Aut}(\vee^k S^1) \to \pi_0 V_k.$$

Отображение

$$\pi_0 \operatorname{Aut}(\vee^k S^n) \to \operatorname{Aut}\big(H_n(\vee^k S^n; \mathbb{Z})\big) \cong GL_k\mathbb{Z}$$

индуцирует гомоморфизм $\pi_0 V_k \to GL_k\mathbb{Z}$ такой, что композиция

$$\mathrm{Aut}\, F_k \xrightarrow{\chi} \pi_0 V_k \longrightarrow GL_k\mathbb{Z}$$

равна ρ_k. Гомоморфизм χ порождает структуру алгебры над симметрической группой и две структуры алгебры над косами для системы групп $\pi_0 V_n$.

Другой пример системы моноидов, которая возникает не из групп, дается системой моноидов Баеса–Бирман, рассматривавшейся в § 5. Гомоморфизм j_n (§ 5) из группы кос Br_n в SB_r и спаривание μ (см. § 12) определяют структуру алгебры над косами для системы моноидов SB_n.

Гомоморфизм $h_n \colon SB_n \to \overline{BP}_n$ определяется по формулам $h_n(g_i) = \sigma_i, h_n(a_i) = \xi_i$. Композиция $h_n \circ j_n$ равна каноническому гомоморфизму $\kappa_n \colon Br_n \to \overline{BP}_n$. Система представлений для редуцированной группы кос-перестановок определяет представления для моноидов SB_n, согласованные со структурой алгебры над косами.

Предположим теперь, что существует гомоморфизм f из кольца K в вещественные числа $\mathbb{R}$, отображающий единицу K в единицу $\mathbb{R}$. Тогда f порождает гомоморфизм

$$GL_n f \colon GL_n K \to GL_n\mathbb{R}.$$

Обозначим его для краткости f_n. Имеется каноническая ретракция r_n из классифицирующего пространства полной линейной группы над вещественными числами в классифицирующее пространство ортогональной группы

$$r_n \colon BGL_n\mathbb{R} \to BO_n.$$

Полезна следующая классическая лемма о r_n.

Лемма 13.1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} BGL_m\mathbb{R} \times BGL_n\mathbb{R} & \xrightarrow{r_m \times r_n} & BO_m \times BO_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ BGL_{m+n}\mathbb{R} & \xrightarrow{r_{m+n}} & BO_{m+n} \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки являются каноническими вложениями, гомотопически коммутативна.

Пусть $\{H_n\}$ – модульная над косами система моноидов, согласованная с представлениями ρ_n. Рассмотрим функтор классифицирующего пространства B [67], [87], [88], [89] для моноида H_n и возьмем композицию

$$r_n B f_n B\rho_n \colon BH_n \to BGL_n K \to BGL_n\mathbb{R} \to BO_n. \tag{13.6}$$

Она индуцирует векторное расслоение

$$F_n \longrightarrow E_n \xrightarrow{p} BH_n.$$

Добавим теперь еще одно отображение $B\mu_{m,n}$ к композиции (13.6) при $m+n$:
(13.7)

$$r_{m+n}Bf_{m+n}B\rho_{m+n}B\mu\colon BBr_m \times BH_n \to BH_{m+n} \to BGL_{m+n}\mathbb{R} \to BO_{m+n}.$$

Из леммы 13.1 получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} BBr_m \times BH_n \arrow[r] \arrow[d] & BO_m \times BO_n \arrow[d] \\ BG_{m+n} \arrow[r] & BO_{m+n} \end{tikzcd}$$

в которой левая нижняя композиция есть отображение (13.7). Каноническое представление группы кос в ортогональную группу O_n порождает отображение $BBr_n \to BO_n$. Применим функтор пространства Тома к этому отображению, получим:

$$MBr_n \to MO_n.$$

Следующая теорема основывается на теореме М. Маховальда (теорема 13.1) и теореме Г. Сегала (теорема 8.11) и была доказана Ф. Р. Коэном [30] и Ш. Буллетом [43].

Теорема 13.3. *Спектр Тома $\{MBr_n\}$ изоморфен спектру Эйленберга–Маклейна для группы $\mathbb{Z}/2$:*

$$MBr_n \cong H\mathbb{Z}/2.$$

Применим функтор пространства Тома к композициям (13.6) и (13.7). Получаем:

$$Mr_nMf_nM\rho_n\colon MH_n \to MGL_nK \to MGL_n\mathbb{R} \to MO_n,$$
$$Mr_{m+n}Mf_{m+n}M\rho_{m+n}M\mu\colon MBr_m \wedge MH_n \to MH_{m+n} \to MGL_{m+n}\mathbb{R} \to MO_{m+n}.$$

Наши условия на систему моноидов H_n означают, что спектр Тома MH становится модульным над спектром Тома групп кос, т.е. над $H\mathbb{Z}/2$. Хорошо известно, что такой спектр сам есть букет надстроек над $H\mathbb{Z}/2$. Если система моноидов H_n является моноидальной и эта структура согласована со структурой модуля над косами и системой представлений, то спектр MH становится мультипликативным спектром. Предположим дополнительно, что MH коммутативен и D есть мультипликативный дискретный спектр (букет сфер) такой, что $H_*(D;\mathbb{Z}/2) \cong \pi_*(MH)$ как кольца. Тогда мы строим мультипликативный морфизм спектров $H\mathbb{Z}/2 \wedge D \to MH$ как композицию

$$H\mathbb{Z}/2 \wedge D \longrightarrow MH \wedge MH \xrightarrow{\mu} MH.$$

Получаем следующую теорему.

Теорема 13.4. *Спектр Тома MH системы моноидов, модульной над косами, с системой представлений, согласованной с модульной над косами структурой, эквивалентен букету надстроек над спектром Эйленберга–Маклейна для группы $\mathbb{Z}/2$. Если система моноидов H_n имеет моноидальную структуру и эта структура согласована с двумя предыдущими, то спектр MH мультипликативен. Если, дополнительно, MH коммутативен, то он эквивалентен смэш-произведению $H\mathbb{Z}/2$ с некоторым мультипликативным дискретным спектром D:*

$$MH \simeq H\mathbb{Z}/2 \wedge D.$$

Следствие 13.1. *Спектр Тома MH симметрически модульной системы моноидов с системой представлений, согласованной с симметрически модульной структурой, эквивалентен букету надстроек над спектром Эйленберга–Маклейна для группы $\mathbb{Z}/2$. Спектр MH есть модульный спектр над спектром Тома $M\Sigma$ симметрической группы. Если система моноидов H_n имеет моноидальную структуру и эта структура согласована с двумя предыдущими, то спектр MH мультипликативен. Если, дополнительно, MH коммутативен, то он эквивалентен смэш-произведению $H\mathbb{Z}/2$ с некоторым мультипликативным дискретным спектром D:*

$$MH \simeq H\mathbb{Z}/2 \wedge D.$$

Теорема 13.4 и вычисления гомологий групп, проделанные в § 8, 9, 11 и 12 позволяют вычислить спектры Тома для групп, обсуждавшихся ранее в настоящей работе. Это проделано в [61] и [86].

Э. Браун и Ф. Петерсон [90], а также Р. Л. Коэн [91] изучали спектры Тома MBr_k для фиксированных k. Пусть $B(l)$ обозначает спектр Брауна–Джитлера [92]. Э. Браун и Ф. Петерсон [90] доказали следующий факт.

Теорема 13.5. *Спектр Тома MBr_k 2-эквивалентен спектру Брауна–Джитлера $B([k/2])$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.*

Следствие 13.2. *Если морфизм*

$$t_n\colon MBr_n \to K(\mathbb{Z}/2)$$

представляет образующую когомологий MBr_n как модуля над алгеброй Стинрода, а X – любой CW-комплекс, то соответствующий морфизм обобщенных теорий гомологий

$$(MBr_n)_q(X) \to H_q(X, \mathbb{Z}/p)$$

сюръективен для $q \leqslant 2[n/2]+1$.

Для нечетных простых Р. Л. Коэн [91] доказал следующий факт.

Теорема 13.6. *Для $p>2$ MBr_{kp} $(k \not\equiv 0 \mod p)$ гомотопически p-эквивалентен $(p-2)k$-й надстройке над спектром Брауна–Джитлера $S^{(p-2)k}B([k/p],p)$. Если морфизм*

$$s_k\colon MBr_{kp} \to K(\mathbb{Z}/p, (p-2)k)$$

представляет образующую когомологий MBr_{kp} как модуля над алгеброй Стинрода, а X – любой CW-комплекс, то соответствующий морфизм обобщенных теорий гомологий

$$MBr(C_{kp})_{q+(p-2)k}(X) \to H_q(X, \mathbb{Z}/p)$$

сюръективен для

$$q \leqslant \begin{cases} 2p([k/p]+1)-1, & \text{если } k \not\equiv 0 \mod p, \\ 2k-1, & \text{если } k \equiv 0 \mod p. \end{cases}$$

Пусть Λ_p есть Λ-алгебра по модулю p, описанная в [93]. Таким образом, Λ_2 есть градуированная $\mathbb{Z}/2$-алгебра, порожденная элементами λ_i степени i для $i \geqslant 0$, подчиненными определенным соотношениям. Если p нечетно, Λ_p есть градуированная $\mathbb{Z}/p$-алгебра, порожденная элементами λ_{i-1} степени $2i(p-1)-1$ для $i \geqslant 1$ и элементами μ_{i-1} степени $2i(p-1)$ для $i \geqslant 0$, также подчиненными определенным соотношениям. Пусть J_k есть левый идеал алгебры Λ_p, порожденный $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$, если $p=2$, и $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}, \mu_{-1}, \dots, \mu_{k-1}$, если p нечетно. Тогда из результатов работ [91], [93] получаем следующие факты.

Следствие 13.3. *2-локализация гомотопической группы $\pi_q(MBr_n)$ изоморфна $(\Lambda_2/J_{[n/2]})_q$ при $q < 2[n/2]$; p-локализация гомотопической группы $\pi_q(MBr(C_{kp}))$, $k \not\equiv 0 \bmod p$, изоморфна $(\Lambda_p/J_{[k/p]})_{q-(p-2)k}$ при $q < p(2[k/p]+k+2) - 2(k+1)$.*

§ 14. Косы, монополи и пространства рациональных функций

Пусть Rat_k есть пространство рациональных функций (степени k)

$$f\colon S^2 \to S^2,$$

нормализованных предположением, что f имеет k полюсов и $f(\infty)=0$. Такая функция $f(z)$ может быть записана единственным образом в виде

$$f(z) = \frac{a_1 z^{k-1} + \dots + a_k}{z^k + b_1 z^k + \dots + b_k} = \frac{h(z)}{m(z)},$$

где полиномы $h(z)$ и $m(z)$ не имеют общих корней. Ф. Р. Коэн, Р. Л. Коэн, Б. М. Манн и Р. Дж. Мильграм доказали следующий факт [44].

Теорема 14.1. *Пространство Rat_k стабильно гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству группы кос из $2k$ нитей Br_{2k}:*

$$\mathrm{Rat}_k \simeq_S BBr_{2k}.$$

Это означает, что существует гомотопическая эквивалентность между итерированными надстройками этих пространств

$$\Sigma^N \mathrm{Rat}_k \simeq \Sigma^N BBr_{2k}$$

для достаточно больших N.

Пусть $\mathfrak{su}(2)$ есть алгебра Ли группы Ли $SU(2)$. Обозначим через A связность на тривиальном $SU(2)$-расслоении над $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 \times SU(2)$, через φ – $\mathfrak{su}(2)$-значную функцию на $\mathbb{R}^3$. Пространство $\mathscr{A}$ пар (A,φ), имеющих конечную энергию и удовлетворяющих условию

$$1 - |\varphi| \in L^6(\mathbb{R}^3),$$

рассматривалось в [94] и [46] в связи с уравнениями Янга–Миллса–Хиггса. К. Г. Таубс доказал следующий факт [94].

Теорема 14.2. *Существует гомотопическая эквивалентность*

$$I\colon \Omega^2 S^2 \to \mathscr{A}.$$

Пусть $\mathscr{G}$ есть группа *калибровочных преобразований*:

$$\mathscr{G} = \mathrm{Map}_0\big(\mathbb{R}^3, SU(2)\big),$$

где Map_0 означает отображения

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to SU(2),$$

удовлетворяющие условию

$$\lim_{t\to\infty} g(t,0,0) = (1,0,0).$$

Группа $\mathscr{G}$ стягиваема. Она действует на $\mathscr{A}$, определяя фактор-пространство

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}/\mathscr{G}.$$

Пространство $\mathscr{A}$ есть пространство главного расслоения со слоем $\mathscr{G}$. Поскольку $\mathscr{G}$ стягиваема, заключаем, что проекция

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

есть гомотопическая эквивалентность.

Следствие 14.1. *Существует естественная гомотопическая эквивалентность*

$$\mathscr{B} \to \Omega^2 S^2.$$

Теорема 14.2 и следствие 14.1 означают, что пространства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ состоят из компонент связности, заиндексованных целыми числами $\mathbb{Z}$:

$$\mathscr{A}_k \simeq \mathscr{B}_k \to \Omega^2_k S^2.$$

Это число k называется *зарядом* пары (A,φ).

Пусть $\mathscr{M}_k$ есть пространство модулей отмеченных $SU(2)$-монополей в $\mathbb{R}^3$ заряда k (определения см., например, в [95]). Оно является подпространством в $\mathscr{B}_k$:

$$\mathscr{M}_k \subset \mathscr{B}_k.$$

Пространство $\mathscr{M}_k$ есть гладкое многообразие размерности $4k$ и $\mathscr{M}_1 = S^1 \times \mathbb{R}^3$.

К. Г. Таубс доказал также следующую теорему [94].

Теорема 14.3. *Вложение $i\colon \mathscr{M}_k \to \mathscr{B}_k$ является асимптотической гомотопической эквивалентностью, что означает, что существует функция $q(k)$, для которой*

$$\lim_{k\to\infty} q(k) = \infty,$$

и отображение i индуцирует изоморфизм гомотопических групп π_q при $q \leqslant q(k)$.

Таким образом, пространство $\mathscr{M}_k$ есть конечномерная гомотопическая аппроксимация пространства $\Omega^2_k S^2$, а в § 8 мы замечали, что конфигурационное пространство $B(\mathbb{R}^2, k)$ есть конечномерная гомологическая аппроксимация того же пространства.

С. К. Дональдсон установил следующую связь между пространствами $\mathscr{M}_k$ и Rat_k (см. [45]).

Теорема 14.4. *Многообразие $\mathscr{M}_k$ диффеоморфно Rat_k:*

$$\mathscr{M}_k \cong \mathrm{Rat}_k\,.$$

Теоремы 14.1 и 14.4 означают, что три пространства: пространство монополей $\mathscr{M}_k$, пространство рациональных функций Rat_k и классифицирующее пространство группы кос из $2k$ нитей BBr_{2k}, имеют те же самые обобщенные гомологии и когомологии:

$$h^*(\mathscr{M}_k) \cong h^*(BBr_{2k}),$$
$$h^*(\mathrm{Rat_k}) \cong h^*(BBr_{2k})$$

для любой теории $h^*(\,\cdot\,)$.

Теперь пусть Rat^0_k есть подпространство пространства Rat_k, состоящее из рациональных функций с k различными простыми полюсами. Если $f \in \mathrm{Rat}^0_k$, то она может быть записана в виде

$$f = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{z_i - b_i}\,,$$

где b_i – различные комплексные числа, а a_i – ненулевые комплексные числа. Следовательно,

$$\mathrm{Rat}^0_k = F(\mathbb{C}, k) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{C}^*)^k,$$

где $\mathbb{C}^*$ есть пространство ненулевых комплексных чисел. Симметрическая группа действует на обоих пространствах $F(\mathbb{C}, k)$ и $(\mathbb{C}^*)^k$ перестановками. Отсюда следует, что Rat^0_k есть классифицирующее пространство группы Rb_k *ленточных*, или *оснащенных*, кос, являющейся сплетением $Rb_k = Br_k \int \mathbb{Z}$. Группа Rb_k, естественным образом, является подгруппой группы Br_{2k}. Вложение

$$Rb_k \to Br_{2k} \tag{14.1}$$

задается процессом "кабелирования", описываемым следующим образом. Возьмем k пар нитей и перекрутим i-ю пару n_i раз. Затем сплетем эти k пар в соответствии с косой $b \in Br_k$. Это дает косу из $2k$ нитей, и отображение, переводящее $(b; n_1, \dots, n_k)$ в полученную косу, есть необходимое вложение (14.1).

Таким образом, имеются два следующих отображения из пространства $BRb_k = \mathrm{Rat}_k^0$:

$$\phi\colon BRb_k \to Bbr_{2k},$$
$$\psi\colon \mathrm{Rat}_k^0 \to \mathrm{Rat}_k = \mathscr{M}_k.$$

Р.Л. Коэн и Дж.Д.С. Джонс описали индуцированное отображение в обобщенных когомологиях [46].

Теорема 14.5. *Для любой обобщенной теории когомологий* $h^*(\,\cdot\,)$ *отображения*

$$\phi^*\colon h^*(BBr_{2k}) \to h^*(BRb_k),$$
$$\psi^*\colon h^*(\mathscr{M}_k) \to h^*(BRb_k)$$

оба инъективны и имеют один и тот же образ. Следовательно, имеется естественный изоморфизм

$$(\phi^*)^{-1}\psi^*\colon h^*(\mathscr{M}_k) \to h^*(BBr_{2k}).$$

Для пары $c = (A, \varphi) \in \mathscr{A}$ имеется вещественный оператор Дирака δ_c. К.Г. Таубс доказал, что этот оператор расширяется до Фредгольмова оператора в подходящих пространствах Соболева [94]. Более того, если две пары c_1 и c_2 калибровочно эквивалентны, то операторы δ_{c_1} и δ_{c_2} изоморфны. Таким образом, мы получаем семейство операторов, параметризованное точками $c \in \mathscr{B}$. К.Г. Таубс доказал, что это семейство непрерывно, и, следовательно, определено индексное расслоение

$$\mathrm{ind}(\delta) \in KO^0(\mathscr{B}).$$

Отображение (13.1)

$$\Omega^2 S^2 \to \mathbb{Z} \times BO$$

задает элемент $\gamma \in KO^0(\Omega^2 S^2)$ с соответствующими компонентами $\gamma_k \in KO^0(\Omega_k^2 S^2)$.

Теорема 14.6 [46]. *При естественном изоморфизме* $KO^0(\mathscr{B}_k)$ *и* $KO^0(\Omega_k^2 S^2)$ *индексное расслоение* $\mathrm{ind}(\delta)$ *отождествляется с* γ_k:

$$KO^0(\mathscr{B}_k) \cong KO^0(\Omega_k^2 S^2),$$
$$\mathrm{ind}(\delta) \leftrightarrow \gamma_k.$$

Пусть $\pi_k\colon Rb_k \to O_k$ есть композиция

$$Rb_k = Br_k \int \mathbb{Z} \to \Sigma_k \int \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow O_k,$$

где первое отображение индуцировано двумя эпиморфизмами: $Br_k \to \Sigma_k$ и $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$, а второе является каноническим вложением $\Sigma_k \int \mathbb{Z}/2$ как группы Кокстера C_k в O_k. Это представление определяет расслоение, которое мы будем обозначать также через π_k. Это расслоение может быть описано следующим образом. Пусть H есть пространство вещественного расслоения Хопфа над $\mathbb{C}^* = \mathbb{R} \times S^1$, тогда π_k есть расслоение

$$F(\mathbb{C}, k) \times_{\Sigma_k} (H)^k \to F(\mathbb{C}, k) \times_{\Sigma_k} (\mathbb{C}^*)^k.$$

Расслоение π_k имеет такое наглядное описание: его слой над конфигурацией из k точек – это пространство всех $\mathbb{R}$-значных функций на этом множестве.

Предположим, что $c \in \mathscr{M}_k$, тогда индексное расслоение $\mathrm{ind}(\delta)$ определено над пространством монополей $\mathscr{M}_k$.

Теорема 14.7. *Образ индексного расслоения* $\operatorname{ind}(\delta)$ *при отображении* ψ^* *совпадает с расслоением, индуцированным отображением* π_k:

$$\psi^*\bigl(\operatorname{ind}(\delta)\bigr) = \pi_k \in KO^0(BRb_k).$$

Доказательство этой теоремы было дано в [47]. Для $k = 1$ $\mathscr{M}_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1$ и $\operatorname{ind}(\delta)$ есть нетривиальное линейное расслоение над $\mathscr{M}_1$, т.е. вещественное линейное расслоение Хопфа над окружностью S^1.

Пусть $q\colon Rb_k \to Br_k$ есть канонический гомоморфизм факторизации. Отображение

$$i^0\colon KO^0(BBr_{2k}) \to KO^0(BBr_k),$$

индуцированное вложением $i\colon Br_k \hookrightarrow Br_{2k}$, расщепляется. Более точно, доказан следующий факт [46].

Предложение 14.1. *Имеется естественное отображение*

$$\alpha\colon KO^0(BBr_k) \to KO^0(BBr_{2k})$$

такое, что

i) $i^0\alpha = 1$,
ii) $j^0\alpha = q^0$.

Пусть $\rho_k\colon Br_k \to O_k$ есть представление через перестановки. Отображение α позволяет охарактеризовать индексное расслоение над $\mathscr{M}_k$ [46].

Теорема 14.8. *Используя естественный изоморфизм* $KO^0(\mathscr{M}_k)$ *и* $KO^0(BBr_{2k})$, *индексное расслоение* $\operatorname{ind}(\delta)$ *может быть отождествлено с* $\rho_{2k} - \alpha(\rho_{2k})$:

$$\begin{gathered} KO^0(\mathscr{M}_k) \cong KO^0(BBr_{2k}),\\ \operatorname{ind}(\delta) \leftrightarrow \rho_{2k} - \alpha(\rho_{2k}). \end{gathered}$$

Дополнение. Категории и пространства петель

Здесь мы собрали некоторые понятия и факты, которые могут быть полезны при чтении основного текста обзора. Очень хорошими ссылками являются работы Ф. Адамса [66] и П. Мэя [96].

Вспомним [56], что *моноидальная* (или *тензорная*) *категория* $\mathscr{V} = (\mathscr{V}, \otimes, I, a, l, r)$ состоит из категории $\mathscr{V}$, функтора $\otimes\colon \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, называемого *произведением* (или *тензорным произведением*), объекта $I \in \mathscr{V}$, называемого *единичным объектом*, и естественных эквивалентностей

$$\begin{gathered} a = a_{A,B,C}\colon (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C),\\ l = l_A\colon I \otimes A, \qquad r = r_A\colon A \otimes IA, \end{gathered}$$

называемых *ассоциативностью*, *левой единицей* и *правой единицей* соответственно, таких что для любых объектов $A, B, C, D \in \mathscr{V}$ следующие две диаграммы, называемые *пятиугольником ассоциативности* и *треугольником для единицы*, коммутируют:

$$\begin{array}{ccc}
 & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) & \\
[\text{redacted}] & & [\text{redacted}] \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
a\otimes [\text{redacted}] & & [\text{redacted}]\otimes a \\
 (A\otimes(B\otimes C))\otimes D & \xrightarrow{a} & A\otimes((B\otimes C)\otimes D)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A\otimes I)\otimes B & \xrightarrow{a} & A\otimes(I\otimes B) \\
1\otimes [\text{redacted}] & & [\text{redacted}]\otimes l \\
 & A\otimes B &
\end{array}$$

Тензорная категория называется *строгой*, когда все морфизмы $a_{A,B,C}$, l_A, r_A являются тождественными.

Заплетение (англ. – braiding) в моноидальной категории $\mathscr{V}$ состоит из семейства естественных эквивалентностей

$$c = c_{A,B} \colon (A\otimes B) \xrightarrow{\sim} B\otimes A$$

в $\mathscr{V}$ таких, что две диаграммы (B1) и (B2) коммутируют:

(B1)
$$\begin{array}{ccc}
(B\otimes A)\otimes C & \xrightarrow{a} & B\otimes(A\otimes C) \\
c\otimes [\text{redacted}] & & [\text{redacted}]\, B\otimes c \\
(A\otimes B)\otimes C & & B\otimes(C\otimes A) \\
[\text{redacted}] & & [\text{redacted}]\, a \\
A\otimes(B\otimes C) & \xrightarrow{c} & (B\otimes C)\otimes A
\end{array}$$

(B2)
$$\begin{array}{ccc}
A\otimes(C\otimes B) & \xrightarrow{a^{-1}} & (A\otimes C)\otimes B \\
A\otimes [\text{redacted}] & & [\text{redacted}]\, c\otimes B \\
A\otimes(B\otimes C) & & (C\otimes A)\otimes B)) \\
[\text{redacted}] & & [\text{redacted}] \\
(A\otimes B)\otimes C & \xrightarrow{c} & C\otimes(A\otimes B)
\end{array}$$

Если c – заплетение, то таковым же будет и c', заданное по формуле $c' = c^{-1}_{A,B}$. *Симметрией* называется заплетение, для которого $c = c'$.

Моноидальная категория с заплетением (англ. – *braided monoidal category*) или просто *категория с заплетением*, есть пара $(\mathscr{V}, c)$, состоящая из моноидальной категории и заплетения.

Симметрическая моноидальная категория есть пара $(\mathscr{V}, s)$, состоящая из моноидальной категории и симметрии. *Пермутативная категория* есть строгая симметрическая моноидальная категория.

Примеры моноидальных категорий с заплетением и симметрических моноидальных категорий имеются в основном тексте обзора. Главным примером моноидальной категории с заплетением является категория, образованная группами кос $\mathscr{B}$. Следующая система элементов:

$$\sigma_m \dots \sigma_1 \sigma_{m+1} \dots \sigma_2 \dots \sigma_{n+m-1} \dots \sigma_n \in Br_{m+n},$$

определяет заплетение c в $\mathscr{B}$. Графически такой элемент изображен на рис. Д.1.

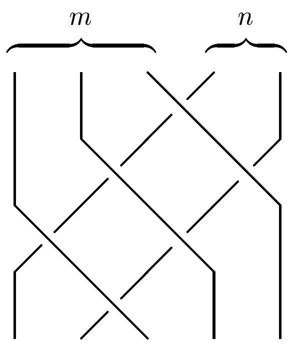


Рис. Д.1

Пусть $\mathscr{P}(T)$ обозначает множество подмножеств множества T, а $\mathbf{n}$ обозначает множество $\{1, 2, \dots, n\}$. Г. Сегал [71] определяет Γ как категорию всех конечных множеств, морфизмами которой из S в T

$$S \to T$$

являются отображения

$$\theta\colon S \to \mathscr{P}(T)$$

такие, что $\theta(\alpha)$ и $\theta(\beta)$ не пересекаются, если $\alpha \neq \beta$. Композиция $\theta\colon S \to \mathscr{P}(T)$ и $\phi\colon T \to \mathscr{P}(U)$ есть

$$\psi\colon S \to \mathscr{P}(U),$$

где $\psi(\alpha) = \bigcup_{\beta\in\theta(\alpha)} \psi(\beta)$.

Γ-*категорией* называется контравариантный функтор $\mathscr{E}$ из Γ в категории такой, что

(i) $\mathscr{E}(\mathbf{0})$ эквивалентно категории с одним объектом и одним морфизмом;

(ii) для каждого n функтор

$$p_n\colon \mathscr{E}(\mathbf{n}) \to \underbrace{\mathscr{E}(\mathbf{1}) \times \cdots \times \mathscr{E}(\mathbf{1})}_{n \text{ раз}},$$

индуцированный морфизмом $i_k\colon \mathbf{1} \to \mathbf{n}$ в Γ, где $i_k(1) = k \subset \mathbf{n}$, является эквивалентностью категорий.

Мы определяем *спектр* E как последовательность пространств E_i, гомеоморфных пространству петель ΩE_{i+1}. Отображениями спектров являются последовательности $f_i\colon D_i \to E_i$ такие, что f_i согласуется с Ωf_{i+1} при помощи указанного семейства гомеоморфизмов. Пространства, имеющие гомотопический тип некоторого пространства E_0 из гомотопического класса некоторого f_0, называются *бесконечно кратными пространствами петель* и *бесконечно кратными петлевыми отображениями.*

Имеется функтор стабилизации Q из пространств в пространства, определенный по формуле

$$QX = \lim_{\to} \Omega^j S^j X, \qquad \pi_n QX = \pi_n^S X,$$

где S есть функтор надстройки, а $\pi_*^S X$ – стабильные гомотопические группы пространства X. Имеется также функтор стабилизации Q_∞ из пространств в спектры, определенный по формуле

$$(Q_\infty X)_i = QS^i X = \varinjlim \Omega^j S^{i+j} X.$$

Поскольку $E_0 \cong \Omega^n E_n$, это дает n различных координат, которые могут быть использованы для определения произведения, и все эти произведения между собой гомотопны. Таким образом, возникает пространство произведений, пространство трехкратных произведений $E_0 \times E_0 \times E_0 \to E_0$, и т. д. В этих пространствах закодирована внутренняя структура E_0, происходящая из E_i. Подходящий формализм выражен в понятии операды. *Операда* $\mathscr{C}$ состоит из пространств $\mathscr{C}(j)$, $j \geqslant 0$, которые надо мыслить как пространства j-арных операций, $\mathscr{C}(0)$ есть точка, $\mathscr{C}(1)$ содержит единичный элемент 1. Имеется правое действие симметрической группы Σ_j на пространстве $\mathscr{C}(j)$, $j \geqslant 0$, и имеются отображения

$$\gamma\colon \mathscr{C}(k) \times \mathscr{C}(j_1) \times \cdots \times \mathscr{C}(j_k) \to \mathscr{C}(j_1 + \cdots + j_k).$$

Введенные объекты подчинены некоторому числу аксиом, которые можно найти в [88].

Действие θ операды $\mathscr{C}$ на пространстве X состоит из Σ_j-эквивариантных отображений

$$\mathscr{C}(j) \times X^j \to X,$$

где слева Σ_j действует по диагонали, а справа тривиальным образом. Эти отображения также подчинены некоторым естественным аксиомам [88]. Отображение θ_0 является вложением базисной точки в X. Единица $1 \in \mathscr{C}(1)$ определяет тождественное отображение пространства X. Эквивариантность отображения θ_j согласована с перестановками переменных, а отображения γ связаны с композицией. Пара (X, θ), состоящая из пространства и действия операды $\mathscr{C}$ на нем, называется *$\mathscr{C}$-пространством.*

Пунктированное отображение $f\colon X \to X'$ между двумя $\mathscr{C}$-пространствами (X,θ) и (X',θ') называется *$\mathscr{C}$-отображением*, если оно коммутирует с действием операд.

Операда $\mathscr{C}$ называется *E_∞-операдой*, если каждое пространство $\mathscr{C}(j)$ стягиваемо согласовано со свободным Σ_j-действием. *E_∞-пространством* называется $\mathscr{C}$-пространство, где $\mathscr{C}$ есть любая E_∞-операда, и $\mathscr{C}$-отображение называется *E_∞-отображением* в этом случае.

Γ-*пространство* есть контравариантный функтор A из Γ в топологические пространства такой, что:

(i) $A(\mathbf{0})$ стягиваемо;

(ii) для любого n отображение

$$p_n\colon A(\mathbf{n}) \to \underbrace{A(\mathbf{1}) \times \cdots \times A(\mathbf{1})}_{n \text{ раз}},$$

индуцированное отображениями $i_k\colon \mathbf{1} \to \mathbf{n}$ в Γ, где $i_k(1) = k \subset \mathbf{n}$, является гомотопической эквивалентностью.

Умножение на Γ-пространстве A есть контравариантный функтор $\hat{A}$ из $\Gamma \times \Gamma$ в топологические пространства вместе с естественными преобразованиями

$$i_1\colon \hat{A}(S,T) \to A(S), \qquad i_2\colon \hat{A}(S,T) \to A(T),$$
$$m\colon \hat{A}(S,T) \to A(S \times T),$$

функториальными по S и T в Γ, и такой, что отображение

$$i_1 \times i_2\colon \hat{A}(S,T) \to A(S) \times A(T)$$

есть гомотопическая эквивалентность.

По аналогии со случаями моноидов или групп может быть определено классифицирующее пространство категории $\mathscr{C}$ (см., например, [66]). Мы обозначаем его через $|\mathscr{C}|$. Для Γ-категории $\mathscr{E}$ функтор

$$S \to |\mathscr{E}(S)|$$

обозначается через $|\mathscr{E}|$. Г. Сегал [71] доказал, что если $\mathscr{E}$ есть Γ-категория, то $|\mathscr{E}|$ есть Γ-пространство.

Операда кубиков $\mathscr{C}_n$ определяется для каждого n следующим образом. Пусть $\mathscr{C}_n(j)$ есть пространство линейных вложений (“кубиков”) $I^n \to I^n$ с параллельными осями. Пространства $\mathscr{C}_n(j)$ составляют операду кубиков $\mathscr{C}_n$, являющуюся подоперадой $\mathscr{C}_{n+1}$. Прямой предел есть операда $\mathscr{C}_\infty$. Пространство $\mathscr{C}_n(j)$ является Σ_j-эквивариантно эквивалентным конфигурационному пространству наборов из j различных точек в $\mathbb{R}^n$ и является $(n-2)$-связным, следовательно, $\mathscr{C}_\infty$ есть E_∞-операда. Отображение дополнения кубиков в базисную точку определяет естественное действие операды кубиков $\mathscr{C}_n$ на n-кратных пространствах петель. Принцип распознавания утверждает, что обратное также верно. Чтобы сформулировать это более точно, нам понадобится понятие группового пополнения. Для H-пространства X *групповое* *пополнение* есть H-отображение $g\colon X \to Z$ такое, что $\pi_0 Z$ есть группа и индуцированный гомоморфизм в гомологиях

$$g_*\colon H_*(X;k) \to H_*(Z;k)$$

является $\mathbb{Z}[\pi_0 X]$-локализацией понтрягинского кольца $H_*(X;k)$ для любого коммутативного кольца коэффициентов k. Если $\mathbb{Z}[\pi_0 X]$ само является группой, то g есть эквивалентность.

Принцип распознавания утверждает, что если X есть E_∞-пространство, то имеется спектр $\mathbf{B}X = \{B_i X\}$ и E_∞-отображение $\iota\colon X \to B_0 X$, являющееся групповым пополнением. Конструкция П. Мэя [88] основана на операдной технике. Аналогично, Г. Сегал [71] для каждого Г-пространства A строит спектр, который мультипликативен, если Г-пространство A было с умножением.

Первая часть следующей теоремы была доказана П. Мэем [67], а вторая - Р. В. Томасоном [97].

Теорема Д.1. *Классифицирующее пространство симметрической моноидальной категории становится бесконечнократным пространством петель после применения плюс-конструкции Квиллена и все бесконечнократные пространства петель получаются таким способом.*

Модифицируя доказательство П. Мэя [67] и доказательство Р. В. Томасона [97] теоремы Д.1 на случай категории с заплетением, можно доказать аналогичный факт в этом случае. Это сделано З. Федоровичем [98].

Теорема Д.2. *Классифицирующее пространство моноидальной категории с заплетением становится двукратным пространством петель после применения плюс-конструкции Квиллена, и все двукратные пространства петель получаются таким способом. Функторы, сохраняющие заплетение, индуцируют двукратно петлевые отображения плюс-конструкций классифицирующих пространств соответствующих категорий.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
[2] Hurwitz A. Über Riemannische Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. V. 39. P. 1–61.
[3] Fricke R., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Bd. I. Gruppentheoretischen Grundlagen. Leipzig: Teubner, 1897. (New York: Johnson Repr. Corp., 1965.)
[4] Artin E. Theory of braids // Ann. Math. 1947. V. 48. №1. P. 101–126.
[5] Markoff A. A. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe // Math. Sb. 1936. V. 16. P. 73–78.
[6] Birman J. S. Braids, Links, and Mapping Class Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975. (Ann. of Math. Stud. V. 82.)
[7] Jones V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. of Math. 1987. V. 126. P. 335–388.
[8] Turaev V. G. The Yang–Baxter equation and invariants of links // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 527–553.
[9] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.

[10] Fox R., Neuwirth L. The braid groups // Math. Scand. 1962. V. 10. №1. P. 119–126.
[11] Fadell E., Neuwirth L. Configuration spaces // Math. Scand. 1962. V. 10. №1. P. 111–118.
[12] Арнольд В. И. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций // Труды ММО. 1970. Т. 21. С. 27–46.
[13] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
[14] Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду) // Математика (сб. переводов). 1974. Т. 18. №3. С. 46–59.
[15] Sossinsky A. B. Preparation theorems for isotopy invariants of links in 3-manifolds // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1510. P. 354–362.
[16] Schechtman V. V., Varchenko A. N. Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology // Invent. Math. 1991. V. 106. P. 139–194.
[17] Lambropoulou S. Solid torus links and Hecke algebras of type B // Proc. Conference on Quantum Topology / ed. D.N. Yetter. Singapore: World Scientific Press, 1993. P. 225–245.
[18] Вершинин В. В. Инварианты Васильева и косы с особенностями // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 141–142.
[19] Vershinin V. V. On Vassiliev invariants for links in handlebodies // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7. №5. P. 701–712.
[20] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Труды МИАН. 1945. Т. 16.
[21] Baez J. C. Link invariants of finite type and perturbation theory // Lett. Math. Phys. 1992. V. 26. P. 43–51.
[22] Birman J. S. New points of view in knot theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 28. №2. P. 253–387.
[23] Fenn R., Rimányi R., Rourke C. Some remarks on the braid-permutation group // Topics in Knot Theory. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. P. 57–68.
[24] Fenn R., Rimányi R., Rourke C. The braid-permutation group // Topology. 1997. V. 36. №1. P. 123–135.
[25] Арнольд В. И. Топологические инварианты алгебраических функций. II // Функцион. анализ и его прил. 1970. Т. 4. №2. С. 1–9.
[26] Арнольд В. И. Кольцо когомологий группы крашеных кос // Матем. заметки. 1969. Т. 5. №2. С. 227–231.
[27] Фукс Д. Б. Когомологии групп кос mod 2 // Функцион. анализ и его прил. 1970. Т. 4. №2. С. 62–75.
[28] Cohen F. Cohomology of braid spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. №4. P. 763–766.
[29] Cohen F. Homology of $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ and $C_{n+1}X$, $n > 0$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. №6. P. 1236–1241.
[30] Cohen F. Braid orientations and bundles with flat connections // Invent. Math. 1978. V. 46. P. 99–110.
[31] Cohen F. Artin's braid groups, classical homotopy theory, and other curiosities // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 167–206.
[32] Cohen F., Lada T., May J. P. The Homology of Iterated Loop Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1976. (Lecture Notes in Math. V. 533.)
[33] Вайнштейн Ф. В. Когомологии групп кос // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №2. С. 72–73.
[34] Горюнов В. В. Когомологии групп кос серий C и D и некоторые стратификации // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №2. С. 76–77.
[35] Горюнов В. В. Когомологии групп кос серий C и D // Труды ММО. 1981. Т. 42. С. 234–242.
[36] Segal G. B. Configuration spaces and iterated loop spaces // Invent. Math. 1973. V. 21. P. 213–221.
[37] Barrat M. G. A Free group functor for stable homotopy // Proc. Sympos. Pure Math. 1971. №22. P. 31–35.

[38] Priddy S. B. On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group // Proc. Sympos. Pure Math. 1971. №22. P. 217–220.

[39] Mahowald M. A new family in π_*^s // Topology. 1977. V. 16. P. 249–254.

[40] Mahowald M. Ring spectra which are Thom complexes // Duke Math. J. 1977. V. 46. №3. P. 549–259.

[41] Salvetti M. Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^N$ // Invent. Math. 1987. V. 88. P. 603–618.

[42] Salvetti M. The homotopy type of Artin groups // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 565–577.

[43] Bullett S. Permutations and braids in cobordism theory // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. №3. P. 517–531.

[44] Cohen F., Cohen R. L., Mann B. M., Milgram R. J. The topology of rational functions and divisors of surfaces // Acta Math. 1991. V. 166. P. 163–221.

[45] Дональдсон С. К. Уравнения Нама и классификация монополей // Монополи. Топологические и вариационные методы. Сб. статей. М.: Мир, 1989. С. 123–159.

[46] Cohen R. L., Jones J. D. S. Representations of braid groups and operators coupled to monopoles // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 1990. V. 150. P. 191–207.

[47] Cohen R. L., Jones J. D. S. Monopoles, braid groups, and the Dirac operators // Comm. Math. Phys. 1993. V. 158. №2. P. 241–266.

[48] Garside F. A. The braid group and other groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1969. V. 20. P. 235–254.

[49] Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика (сб. переводов). 1974. Т. 18. №6. С. 56–79.

[50] Dehornoy P. Groups with a complemented presentation // J. Pure Appl. Algebra. 1997. V. 116. №1–3. P. 115–137.

[51] Dehornoy P. A fast method for comparing braids // Adv. Math. 1997. V. 125. №2. P. 200–235.

[52] Smale S. On the topology of algorithms. I // J. Complexity. 1988. V. 4. №4. P. 81–89.

[53] Васильев В. А. Когомологии групп кос и сложность алгоритмов // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22. №3. С. 15–24.

[54] Sergiescu V. Graphes planaires et présentations des groupes de tresses // Math. Z. 1993. V. 214. P. 477–490.

[55] Лин В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства // Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия 1979. Т. 17. С. 159–227.

[56] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. New York: Springer-Verlag, 1971. (Graduate Texts in Mathematics.)

[57] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.

[58] Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisés // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 273–302.

[59] Брискорн Э. Фундаментальная группа пространства регулярных орбит комплексификации конечной группы, порожденной отражениями // УМН. 1975. Т. 30. №6. С. 147–151.

[60] Chow W.-L. On the algebraical braid group // Ann. of Math. 1948. V. 49. №3. P. 654–658.

[61] Vershinin V. V. Thom spectra of generalized braid groups // Preprint №95/02-2. Nantes: Université de Nantes, 1995.

[62] Scott G. P. Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1970. V. 68. P. 605–617.

[63] Вершинин В. В. О группах кос в телах с ручками // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. №4. С. 755–764.

[64] Fenn R., Keyman E., Rourke C. The Singular Braid Monoid Embeds in a Group. Preprint. Brighton: Univ. of Sussex, 1996.

[65] Segal G. B. Classifying spaces and spectral sequences // Publ. Math. I.H.E.S. 1968. V. 34. P. 105–112.

[66] Адамс Дж. Бесконечнократные пространства петель. М.: Мир, 1982.

[67] May J. P. E_∞ spaces, group completions, and permutative categories // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 1974. V. 11. P. 61–93.

[68] Фукс Д. Б. Квилленизация и бордизмы // Функцион. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №1. С. 36–42.

[69] Waldhausen F. Algebraic K-theory of topological spaces. II // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 356–394.

[70] Hatcher A. Homological stability for automorphism groups of free groups // Comment. Math. Helv. 1995. V. 70. P. 39–62.

[71] Segal G. B. Categories and cohomology theories // Topology. 1974. V. 13. P. 293–312.

[72] Cohen F., Taylor L. On the representation theory associated to the cohomology of configuration spaces // Contemp. Math. 1993. V. 146. P. 91–109.

[73] Ossa E. On the cohomology of configuration spaces // Algebraic Topology: New Trends in Localization and Periodicity (Barcelona Conference on Algebraic Topology, 1994). Basel: Birkhäuser, 1996. P. 353–361.

[74] Голубева В. А., Лексин В. П. Квадратичные соотношения в когомологиях обобщенных крашеных кос и тождества Данкла // Функцион. анализ и его прил. 1996. Т. 30. №2. С. 73–76.

[75] Greenberg P., Sergiescu V. An acyclic extension of the braid group // Comment. Math. Helv.. V. 66. №1. P. 109–138.

[76] Dyer E., Lashof R. Homology of iterated loop spaces // Amer. J. Math. 1962. V. 84. №1. P. 35–88.

[77] Браун К. С. Когомологии групп. М.: Наука, 1982.

[78] Маркарян Н. С. Гомологии групп кос с нетривиальными коэффициентами // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №6. С. 227–231.

[79] Горески М., Макферсон Р. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.

[80] Orlik P., Solomon L. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes // Invent. Math. 1980. V. 56. P. 167–189.

[81] McDuff D. Configuration spaces of positive and negative particles // Topology. 1975. V. 14. P. 91–107.

[82] Bödigheimer C.-F., Cohen F. R., Milgram R. J. Truncated symmetric products and configuration spaces // Math. Z. 1993. V. 214. №2. P. 179–216.

[83] Joyal A., Street R. Braided tensor categories // Adv. Math. 1993. V. 102. P. 20–78.

[84] Вершинин В. В. Обобщения кос с гомологической точки зрения // Алгебра, геометрия, анализ и матем. физика. 10-я Сибирская школа. Новосибирск: ИМ, 1997. С. 40–62.

[85] Peterson F. P., Toda H. On the structure of $H^*(BSF; Z/p)$ // J. Math. Kyoto Univ. 1967. V. 7. P. 113–121.

[86] Cohen F., Vershinin V. V. Thom Spectra which are Wedges of Eilenberg–MacLane Spectra // Fields Inst. Commun. 1998. V. 19. P. 43–65.

[87] Dold A., Lashof R. Principal quasifibrations and fiber homotopy equivalence of bundles // Illinois J. Math. 1959. V. 3. P. 285–305.

[88] Мэй Дж. П. Геометрия итерированных пространств петель. Дополнение к книге: Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопические инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.

[89] Milgram R. J. The bar construction and abelian H-spaces // Illinois J. Math. 1967. V. 11. P. 242–250.

[90] Brown E., Peterson F. The stable decomposition of $\Omega^2 S^{r+2}$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 243. P. 287–298.

[91] Cohen R. L. The geometry of $\Omega^2 S^3$ and braid orientations // Invent. Math. 1979. V. 54. P. 53–67.

[92] Brown E., Gitler S. A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra // Topology. 1973. V. 12. P. 283–295.

[93] Bousfield A., Curtis E., Kan D., Quillen D., Rector D., Schlesinger J. The mod p lower central series and the Adams spectral sequence // Topology. 1966. V. 5. P. 331–342.

[94] Таубс К. Г. Монополи и отображения из S^2 в S^2; топология конфигурационного пространства // Монополи. Топологические и вариационные методы. Сб. статей. М.: Мир, 1989. С. 297–379.

[95] Атья М., Хитчин Н. Геометрия и динамика магнитных монополей. М.: Мир, 1991.

[96] Мэй Дж. П. Теория бесконечнократных пространств петель // УМН. 1981. Т. 36. № 6. С. 137–195.

[97] Thomason R. W. Symmetric monoidal categories model all connective spectra // Theory Appl. Categ. 1995. V. 1. № 5. P. 78–118.

[98] Fiedorowicz Z. Operads and Iterated Monoidal Categories. Preprint. Columbus, OH: Ohio State Univ., 1995.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск

E-mail: `versh@math.nsc.ru`

Поступила в редакцию 19.12.1997