BULLETIN DE LA S. M. F.

THOMAS DELZANT

Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment

Bulletin de la S. M. F., tome 116, nº 3 (1988), p. 315-339

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_3_315_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 315–339.

HAMILTONIENS PÉRIODIQUES ET IMAGES CONVEXES DE L'APPLICATION MOMENT

PAR

THOMAS DELZANT (*)

RÉSUMÉ. — On montre que, dans certaines conditions, l'image de l'application moment de l'action d'un tore dans une variété symplectique (qui est un polyèdre convexe d'après un théorème de Atiyah, Guillemin et Sternberg) détermine complètement cette variété.

ABSTRACT. — We show that, under certain assumptions, the image of the momentum mapping of the action of a torus on a symplectic manifold (which is a convex polyedron by a theorem of Atiyah, Guillemin and Sternberg) completely determines the manifold.

Introduction

Dans [F], FRANKEL a montré qu'un hamiltonien périodique de période 1 dans une variété symplectique est une fonction non dégénérée au sens de Bott. Dans le premier paragraphe, on utilise cette propriété pour montrer qu'une variété symplectique munie d'une telle fonction est un espace projectif complexe si celle-ci n'a que deux valeurs critiques dont l'une est non dégénérée. D'autre part ATIYAH, GUILLEMIN et STERNBERG ([A_1], [G–S]) ont montré que l'image de l'application moment de l'action d'un tore dans une variété symplectique compacte est un polyèdre convexe. On voit, au deuxième paragraphe, que quand le tore est de dimension moitié de celle de la variété, et que son action est effective, le polyèdre caractérise la variété. On donne aussi (troisième paragraphe) une condition nécessaire et suffisante portant sur la géométrie d'un polyèdre convexe pour qu'il soit réalisable par une telle application moment. On montre enfin (dernier paragraphe) qu'on connaît alors "toutes" les formes symplectiques invariantes sur la variété considérée.

(*) Texte reçu le 10 décembre 1986.

T. DELZANT, Université Louis Pasteur, Département de Mathématiques, 7, rue René-Descartes, 67000 Strasbourg, France.

Remerciements. — Je tiens à remercier tout particulièrement Michèle AUDIN qui a suivi ce travail avec beaucoup d'attention; sans ses nombreux conseils, il n'aurait pas abouti; mais aussi A. FATHI et F. LAUDENBACH qui m'ont expliqué comment améliorer les conclusions des THÉORÈMES 1.2 et 2.1.

1. Hamiltoniens périodiques

Soit (M, σ) une variété symplectique compacte et connexe et H une fonction sur M. On lui associe son gradient symplectique $X(H)$ par la formule :

$$i(X(H))\sigma = dH.$$

Clairement, les points critiques de H sont les points fixes du flot de $X(H)$. Supposons que ce flot soit périodique de période 1; il engendre une action d'un cercle, donc les points critiques de H s'organisent en sous-variétés.

Plus précisément, si x_0 est un point fixe de cette action, on peut au voisinage de ce point, linéariser simultanément la forme symplectique et l'action du cercle : c'est le lemme de Darboux équivariant de WEINSTEIN $[W_1]$.

Mais les actions linéaires symplectiques du cercle dans $\mathbb{C}^n$ sont données par la formule :

$$e^{2i\pi\theta}(z_1, \ldots, z_n) = (e^{2i\pi a_1\theta} z_1, \ldots, e^{2i\pi a_k\theta} z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n),$$

où les a_i, avec $1 \leq i \leq k$, sont k entiers non nuls.

En calculant le hamiltonien correspondant on obtient :

THÉORÈME 1.1 (FRANKEL [F]; ARMS, MARSDEN, MONCRIEF [A-M-M]).
a) *Au voisinage de x_0, H s'écrit dans une carte de Darboux*

$$H(z_1, \ldots, z_n) = H(x_0) + \pi \sum_{1 \leq i \leq k} a_i |z_i|^2.$$

b) *H est une fonction non dégénérée au sens de Bott dont les variétés critiques sont des sous-variétés symplectiques d'indice pair.*

L'assertion b) signifie que les points critiques de H s'organisent en sous-variétés au voisinage desquelles H s'écrit comme une forme quadratique dans le fibré normal. Ici, ce sont des sous-variétés symplectiques, leurs fibrés normaux sont des fibrés vectoriels complexes et H s'écrit comme une forme hermitienne dans ces fibrés.

Remarquons, avec ATIYAH $[A_1]$, GUILLEMIN et STERNBERG [G–S], que b) implique que les variétés de niveau de H sont connexes.

Exemple. — On considère l'action du cercle dans $P^n(\mathbb{C})$ définie par :

$$e^{2i\pi\theta}\Big[z_0 : z_1 : \cdots : z_n\Big] = \big[e^{2i\pi\theta}z_0 : z_1 : \cdots : z_n\big].$$

Quand on munit $P^n(\mathbb{C})$ de sa structure symplectique (kæhlerienne) canonique σ_0, on voit que cette action correspond au hamiltonien $H = |z_0|^2/\sum |z_i|^2$.

Les variétés critiques sont d'une part, l'hyperplan à l'infini ($z_0 = 0$), d'autre part le point critique non dégénéré $[1 : 0 : \cdots : 0]$.

D'ailleurs, on a la version suivante du théorème de Reeb [R] qui dit qu'une variété compacte munie d'une fonction de Morse n'ayant que deux points critiques est homéomorphe à une sphère :

Théorème 1.2. — *Soit (M, σ) une variété symplectique compacte et H un hamiltonien périodique de période 1 dans M. Si H n'a que deux valeurs critiques dont l'une est non dégénérée (au sens usuel), alors M est isomorphe à $(P^n(\mathbb{C}), \lambda\sigma_0)$ pour un certain λ.*

Preuve. — On peut supposer $\dim(M) \geq 4$. Posons $H(M) = [0, \lambda]$. Pour fixer les idées, disons que $H^{-1}(\lambda)$ est le point critique non dégénéré x_0. La variété critique $H^{-1}(0)$ est de dimension au moins 2, sinon M est une sphère, ce qui est impossible puisque M est symplectique; montrons que celle-ci est de codimension 2.

Comme H n'a aucunes valeurs critiques entre 0 et λ, la variété $H^{-1}(\epsilon)$ est une sphère. Comme H se comporte au voisinage de $H^{-1}(0)$ comme une forme quadratique non dégénérée dans son fibré normal, $H^{-1}(\epsilon)$ est le fibré en sphères de ce fibré normal. Ecrivons la suite exacte d'homotopie des fibrés de la fibration

$$S^{2n-1} = H^{-1}(\epsilon) \xrightarrow{S^{2k-1}} H^{-1}(0).$$

Cela donne les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 = \pi_1\big(S^{2n-1}\big) &\longrightarrow \pi_1\big(H^{-1}(0)\big) \longrightarrow 0, \\ 0 = \pi_2\big(S^{2n-1}\big) &\longrightarrow \pi_2\big(H^{-1}(0)\big) \longrightarrow \pi_1\big(S^{2k-1}\big). \end{aligned}$$

La première montre que $H^{-1}(0)$ est simplement connexe; comme $H^{-1}(0)$ est une variété symplectique, $\pi_2(H^{-1}(0))$ est non nul et la deuxième montre que $k = 1$, ce qu'il fallait voir.

En particulier, le Théorème 1.1 assure qu'au voisinage d'un point de $H^{-1}(0)$, il existe une carte de Darboux dans laquelle H s'écrit :

$$H\big(z_1, \ldots, z_n\big) = \pi a |z_1|^2.$$

Le nombre $1/a$ désigne la plus petite période positive de $X(H)$ au voisinage de $H^{-1}(0)$. En intégrant le gradient de H pour une métrique riemannienne invariante, on voit que ce nombre désigne aussi la plus petite période positive de tous les points de $H^{-1}]0,\lambda[$. Quitte à diviser par a, on peut supposer qu'elle est égale à 1. En linéarisant l'action de $X(H)$ au voisinage de $H^{-1}(0)$ (c'est le lemme de Darboux relatif équivariant de WEINSTEIN [W_1]), on voit que cette variété critique est la variété quotient de $H^{-1}(\epsilon)$ par le flot de $X(H)$. C'est donc aussi le quotient de $H^{-1}(\lambda-\epsilon)$ par l'action de ce cercle.

On applique une nouvelle fois le THÉORÈME 1.1 au voisinage de $H^{-1}(\lambda)$: comme la plus petite période positive de tous les points de ce voisinage est 1, dans une carte de Darboux au voisinage de x_0, H s'écrit :

$$H(z_1,\ldots,z_n) = \lambda - \sum |z_i|^2.$$

Donc $H^{-1}(0)$ est difféomorphe à $P^{n-1}(\mathbb{C})$.

Comme le fibré en sphères de son fibré normal est une sphère, celui-ci est isomorphe au fibré tautologique de $P^{n-1}(\mathbb{C})$. M est alors obtenue en recollant un disque sur le fibré en boules du fibré tautologique de $P^{n-1}(\mathbb{C})$ et est donc homéomorphe à $P^n(\mathbb{C})$.

Suivant une idée d' A. FATHI, nous allons montrer que M est difféomorphe à $P^n(\mathbb{C})$.

Ce qui précède montre qu'il existe un difféormorphisme de $H^{-1}[\epsilon,\lambda]$ dans la boule unité de $\mathbb{C}^n \subset P^n(\mathbb{C})$ équivariant pour l'action diagonale du cercle et qui envoie $H^{-1}(\epsilon)$ sur la sphère unité, qui est aussi le fibré en cercles du fibré normal de la droite à l'infini $P^{n-1}(\mathbb{C}) \subset P^n(\mathbb{C})$. D'autre part, il existe un difféomorphisme de $H^{-1}[0,\epsilon]$ sur le fibré en boules de ce fibré vectoriel équivariant pour l'action linéaire (fibre à fibre) du cercle. Pour montrer que M est difféomorphe à $P^n(\mathbb{C})$, il suffit de prolonger à $H^{-1}[0,\epsilon]$ le difféomorphisme de $H^{-1}(\epsilon)$ vers S^{2n-1}. Or celui-ci est équivariant pour l'action du cercle et tout difféomorphisme de S^{2n-1} équivariant pour l'action du cercle se prolonge par homogénéité en un difféomorphisme du fibré tautologique de $P^{n-1}(\mathbb{C})$.

Montrons aussi la conclusion "isomorphe"; elle m'a été signalée par A. WEINSTEIN et J. DUISTERMAAT.

Remarquons d'abord que la structure symplectique α_0 qui équipe $H^{-1}(0)$, c'est-à-dire $P^{n-1}(\mathbb{C})$, est la structure standard; en effet, considérons la variété quotient $H^{-1}[0,\lambda-\epsilon]/S^1$: ce qui précède montre qu'elle est difféomorphe à $P^{n-1}(\mathbb{C}) \times [0,\lambda-\epsilon]$, la seconde projection étant la fonction H. Soit α_t, pour $t \in [0,\lambda[$, la structure symplectique de la variété symplectique réduite $H^{-1}(t)/S^1 = P^{n-1}(\mathbb{C})$: pour t proche de λ, le THÉORÈME 1.1 montre que, si σ_0 désigne la structure standard de $P^{n-1}(\mathbb{C})$, on a $\alpha_t = (\lambda - t)\sigma_0$. D'autre part, un théorème de DUISTERMAAT et HECKMANN [D–H] montre que pour tout t de $[0,1[$ la classe de cohomologie de α_t, soit $[\alpha_t]$, est donnée par $[\alpha_t] = (\lambda - t)[\sigma_0]$; on peut donc joindre α_0 à $\lambda\sigma_0$ par un chemin de formes symplectiques ayant toutes même classe de cohomologie $((\lambda/\lambda - t)\alpha_t,\ t \in [0, \lambda - \epsilon])$; d'après un célèbre théorème de MOSER et WEINSTEIN [W], α_0 est isomorphe à $\lambda\sigma_0$.

Choisissons maintenant un difféomorphisme φ entre la variété considérée et $(P^n(\mathbb{C}), \lambda\sigma_0)$ de sorte que φ soit S^1-équivariant et conserve H. Il s'agit de montrer que $\sigma' = \varphi^*\sigma$ est isomorphe à σ_0. Evidemment, on peut supposer que σ' et σ_0 coïncident au voisinage de $H^{-1}(\lambda)$; l'argument précédent montre que pour chaque variété symplectique réduite $H^{-1}(t)/S^1$, avec $t \in [0, \lambda - \epsilon]$, les deux structures symplectiques réduites α_t et β_t sont joignables par un chemin $\gamma_{t,u}$ de formes symplectiques cohomologues. Comme pour $t \geq \lambda - 2\epsilon$ on peut supposer $\alpha_t = \beta_t$ la méthode du petit chemin de Moser montre l'existence sur $P^{n-1}(C) \times [0, \lambda - \epsilon]$ d'un champ de vecteurs dépendant du temps, nul sur $t \geq \lambda - 2\epsilon$, tangent aux $P^{n-1}(\mathbb{C}) \times \{t\}$, dont le flot à l'instant 1 transforme α_t en β_t pour tout t. Grâce à l'emploi d'une connexion, on remonte ce champ à $H^{-1}[0, \lambda - \epsilon]$ et on le prolonge par 0 sur $H^{-1}]\lambda - \epsilon, \lambda]$; alors la valeur à l'instant 1 du flot obtenu, soit ψ, transforme σ' en σ_0 : en effet, *en restriction à* $H = t$, on a,

$$\psi^*\sigma' = \psi^*\pi^*\alpha_t = \pi^*\psi^*\alpha_t = \pi^*\beta_t = \sigma_0.$$

Ainsi $\psi^*\sigma' - \sigma_0$ est une 2-forme nulle sur toutes les sous-variétés de codimension 1 $H = t$. Soit $\gamma_t = t\psi^*\sigma' + (1-t)\sigma_0$; c'est une 2-forme fermée montrons qu'elle est non-dégénérée. Ceci en clair en $H^{-1}(\lambda)$ et le long de $H^{-1}(0)$; soit x un point de $H^{-1}]0, \lambda[$, le noyau de cette forme restreinte à l'espace tangent à $H = t$ en x est engendré par un vecteur proportionnel au champ fondamental de l'action du cercle $d/d\theta$, or $i(d/d\theta)\gamma_t = dH$ est non nul, donc γ_t est non-dégénérée; en appliquant une nouvelle fois le théorème de Moser, on obtient la conclusion désirée.

2. Images convexes de l'application moment

Notations. — On désigne par (M, σ) une variété symplectique compacte et connexe, T un tore, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{t}^*$ son dual.

On suppose donnée une action de T dans M qui conserve la forme symplectique. Pour X appartenant à $\mathfrak{t}$ le champ fondamental associé à X est le champ de vecteurs sur M dont le flot est le groupe à un paramètre $\exp uX$.

On rappelle alors la définition suivante :

Définition (SOURIAU [S]). — On dit que l'action de T dans M est *hamiltonienne* si pour tout X de $\mathfrak{t}$, le champ fondamental associé à X est hamiltonien. Il existe alors une application appelée *moment* J de M dans $\mathfrak{t}^*$ telle que, pour tout X de $\mathfrak{t}$, la fonction $X \circ J$ soit un hamiltonien de ce champ.

Remarques.

1. Le moment est défini à une constante additive près. De plus, si M est simplement connexe et est munie d'une action "symplectique" d'un tore, il existe une application moment associée à cette action.

2. Soit $\{\,,\}$ le crochet de Poisson sur M. Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{t}$, alors $\{X \circ J, Y \circ J\}$ est un hamiltonien du champ fondamental associé à $[X, Y]$, c'est-à-dire 0 : cette fonction est donc constante. Mais en un point où $X \circ J$ est maximum, $d(X \circ J)$ est nul donc $\{X \circ J, Y \circ J\}$ est nul; par suite cette fonction est identiquement nulle. Cela signifie en particulier que toutes les orbites de T sont isotropes et que J est constant le long de celles-ci.

Le théorème le plus spectaculaire concernant l'application moment est le suivant :

THÉORÈME (ATIYAH, GUILLEMIN et STERNBERG [A_1] [G–S]).
$J(M)$ est un polyèdre convexe.

Le but principal de cette partie est de montrer :

THÉORÈME 2.1. — *Soient M_1 et M_2 deux variétés symplectiques de dimension $2n$ et T un tore de dimension n agissant dans ces deux variétés par des actions hamiltoniennes effectives; soient J_i les moments correspondant. Si $J_1(M_1) = J_2(M_2)$, il existe un difféomorphisme symplectique (*) T-équivariant φ de M_1 sur M_2 faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2 \\ {\scriptstyle J_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_2} \\ J_1(M_1) & \overset{\mathrm{Id}}{=} & J_2(M_2) \end{array}$$

Remarque. — Dans [De] n'apparaît que la conclusion "homéomorphe"; l'idée de la preuve de "difféomorphe" revient à F. LAUDENBACH.

La démonstration du THÉORÈME 2.1 repose sur le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 2′ d'ATIYAH [A_1] quand on suppose les variétés kæhlériennes (ce que je ne ferai pas).

(*) Nous ne verrons la conclusion "symplectique" qu'à la PROPOSITION 4.1.

LEMME 2.2. — *Soit (M, σ) une variété symplectique de dimension $2n$ et J l'application moment d'une action effective du tore T^n dans M. Alors :*

- *J est une application quotient de l'action du tore;*
- *pour tout μ de $J(M)$, la variété $J^{-1}(\mu)$ est un tore de dimension égale à celle de la face de $J(M)$ contenant μ;*
- *le groupe d'isotropie d'un point de M est le groupe connexe dont l'algèbre de Lie est l'annulateur dans $\mathfrak{t}$ de la face contenant l'image par J de ce point.*

Preuve du Lemme. — Dans toute cette partie, on suppose donnée une action hamiltonienne effective du tore T^n dans une variété symplectique de dimension $2n$, et on note J son moment.

Soit X un élément de l'algèbre de Lie du tore; on note $T(X)$ le tore adhérence du sous-groupe à un paramètre engendré par X. Les points critiques de $X \circ J$ sont les points fixes sous l'action de $T(X)$. Par un raisonnement analogue à celui de la preuve du THÉORÈME 1.1, on voit que ceux-ci s'organisent en sous-variétés symplectiques. Plus généralement, si K désigne un sous-groupe fermé du tore, l'ensemble des points fixés par K dans M est une union finie de sous-variétés.

Comme l'ensemble des sous-groupes fermés du tore est dénombrable, et comme l'action de T^n est effective, on en déduit que cette action est libre sur une partie dense (nécessairement ouverte).

On a alors besoin des lemmes suivants :

LEMME 2.3 (ARMS, MARDSEN, MONCRIEF [A–M–M]). — *L'annulateur dans $\mathfrak{t}$ de l'image de la différentielle de J en un point est l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de ce point.*

En particulier, si le groupe d'isotropie d'un point est de dimension d son image appartient à une face de dimension au moins $n-d$ du polyèdre $J(M)$.

LEMME 2.4. — *Le rang de J en un point est la dimension de la face (ouverte) contenant l'image de ce point.*

Preuve. — Soit x un point critique de J et $n-d$ le rang de J en x. La dimension du groupe d'isotropie K de x est d.

Choisissons X dans $\mathfrak{t}$ tel que le sous-groupe à un paramètre engendré par X soit dense dans la composante neutre K^0 de K. Considérons la variété critique V de $X \circ J$ passant en x. Comme V contient l'orbite de x (J est équivariant), sa dimension est au moins $2(n-d)$, puisque l'orbite est une sous-variété isotrope de cette variété symplectique.

Appliquons le lemme de Darboux équivariant de WEINSTEIN [W_1] au tore K^0 au voisinage de x : on peut linéariser cette action au voisinage de x.

Dans la linéarisation, V est transformée en l'espace vectoriel symplectique F des points laissés fixes par la représentation linéaire d'isotropie. Cette représentation est donc un morphisme :

$$\rho : K^0 \longrightarrow \mathrm{Sp}(\mathrm{Orth\ F}).$$

Comme l'ensemble des points où l'action de T est libre est dense, il en va de même pour K^0 et ρ est donc injective. En particulier dim(Orth F) est au moins $2d$ donc dim(Orth F) est exactement égale à $2d$ et ρ est un isomorphisme sur un tore maximal de Sp(Orth F).

Dans des coordonnées adaptées on peut décrire l'action de $K^0 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ par :

$$(\theta_1, \ldots, \theta_d) \cdot (z_1, \ldots, z_d, \ldots, z_n) = (\theta_1 z_1, \ldots, \theta_d z_d, \ldots, z_n).$$

Son moment est :

$$J(z_1, \ldots, z_d, \ldots, z_n) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} + \tfrac{1}{2}(|z_1|^2, \ldots, |z_d|^2).$$

En particulier il existe d vecteurs linéairement indépendants $X_1, \ldots, X_d$ de l'algèbre de Lie de K (et donc de T) pour lesquels $X_i \circ J$ admettent des maxima locaux en x. Or on sait qu'un maximum local de $X \circ J$ est en fait un maximum global de cette fonction (ce fait est un des points essentiels de la preuve du théorème de Atiyah, Guillemin et Sternberg). Ainsi $J(x)$ appartient à l'intersection de d hyperplans d'appui de $J(M)$. Comme ces hyperplans d'appui sont linéairement indépendants, la face contenant $J(x)$ est de dimension au plus $n - d$. D'après ce qui précède, elle est au moins de dimension $n - d$, ce qu'il fallait voir.

De la démonstration du lemme précédent, il résulte que l'image réciproque de toute i-face F_i de $J(M)$ par J est une sous-variété symplectique de dimension $2i$ et que J est une fibration triviale de $J^{-1}(\mathrm{int}(F_i))$ sur $\mathrm{int}(F_i)$.

D'après Atiyah, Guillemin et Sternberg, pour tout μ de $J(M)$, la variété $J^{-1}(\mu)$ est connexe. Pour des questions de dimension, c'est nécessairement une orbite.

Comme J est une fibration triviale de $J^{-1}(\mathrm{int}(F_i))$ vers $\mathrm{int}(F_i)$, le groupe d'isotropie des points de $J^{-1}(\mathrm{int}(F_i))$ est constant. Pour calculer ce groupe, plaçons-nous au voisinage d'un sommet de cette face (qui est aussi un sommet de $J(M)$).

Comme l'image réciproque de ce point est un point fixe x de l'action du tore, on peut choisir des coordonnées locales au voisinage de x dans lesquelles J s'écrit :

$$J(z_1,\dots,z_n) = \alpha + \tfrac{1}{2}\big(|z_1|^2,\dots,|z_n|^2\big).$$

La face F_i étant $x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$.

On voit ainsi que le groupe d'isotropie des points de $J^{-1}(\mathrm{int}(F_i))$ est connexe et que c'est le groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est l'annulateur de F_i.

Ceci achève de prouver le LEMME 2.2. Remarquons que cette démonstration montre aussi que le polyèdre vérifie la propriété suivante :

(*) $\left\{\begin{array}{l}\textit{De chaque sommet partent } n \textit{ arêtes engendrées par une} \\ \mathbb{Z}\textit{-base du réseau des entiers.}\end{array}\right.$

Exemple. — Le triangle $((0,0)\,;\,(1,2)\,;\,(2,1))$ n'est pas l'image de l'application moment de l'action effective de T^2 dans une variété symplectique de dimension 4, bien qu'il soit aisé de construire une action hamiltonienne de T^2 dans $P^2(\mathbb{C})$ dont l'image du moment est justement ce triangle mais pour laquelle tous les points ont un groupe d'isotropie non trivial.

Soit μ un point de $J(M)$; son image réciproque est une orbite isotrope. Le groupe d'isotropie des points de $J^{-1}(\mu)$ est facteur direct, donc cette sous-variété est à fibré normal trivial. Or on sait (WEINSTEIN $[W_1]$) que le fibré normal symplectique d'une sous-variété isotrope caractérise (à symplectomorphisme près) le voisinage de celle-ci. Ici, il est trivial car l'action d'un tore supplémentaire au groupe d'isotropie (qui fournit une trivialisation du fibré normal) est symplectique. Si F désigne une face quelconque de $J(M)$, l'intérieur de F étant convexe, J est une fibration triviale de $\Omega_F = J^{-1}(\mathrm{int}\,F)$ vers $\mathrm{int}\,F$ et Ω_F est un rétracte par déformation de $J^{-1}(\mu)$; c'est donc une sous-variété symplectique de M à fibré normal trivial. Une version équivariante semi-locale au voisinage de Ω_F du théorème de Darboux montre alors le lemme suivant :

LEMME 2.5. — *Soit $B(\epsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ϵ de $\mathbb{C}$ et K un convexe ouvert relativement compact dans l'intérieur de F.*

On munit $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times B(\epsilon)^{n-i}$ de la forme symplectique :

$$\sigma = \sum_{1\le j\le i} d\alpha_j \wedge da_j + \sum_{i+1\le k\le n} dx_k \wedge dy_k$$

(les α sont les coordonnées sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les a celles sur F, les $z = x + iy$ celles sur $B(\epsilon)$).

Il existe un isomorphisme symplectique d'un voisinage de l'image réciproque de K sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times B(\epsilon)^{n-i}$ transformant l'action de T en l'action de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ définie par

$$(\theta_1,\dots,\theta_n)\cdot(\alpha_1,\dots,\alpha_i\,;\ a_1,\dots,a_i\,;\ z_{i+1},\dots,z_n) = \\ (\alpha_1+\theta_1,\dots,\alpha_i+\theta_i\,;\ a_1,\dots,a_i\,;\ e^{2i\pi\theta_{i+1}}z_{i+1},\dots,e^{2i\pi\theta_n}z_n).$$

Son moment étant :

$$J(\alpha_1,\dots,\alpha_i\,;\ a_1,\dots,a_i\,;\ z_{i+1},\dots,z_n) = \\ \mu + (a_1,\dots,a_i\,;\ |z_{i+1}|^2,\dots,|z_n|^2).$$

Notons $S^{2n-2i-1}(\epsilon)$ le bord de la boule $B(\epsilon)^{n-i}$ et conservons les notations du lemme précédent. Nous avons :

LEMME 2.6. — *Soit φ un difféomorphisme de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times S(\epsilon)^{2n-2i-1}$ conservant l'application J et commutant à l'action du tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$, alors φ se prolonge à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times B(\epsilon)^{n-i}$ en un difféomorphisme vérifiant la même propriété.*

Preuve du LEMME 2.6. — Soit φ un tel difféomorphisme; on peut écrire

$$\varphi(\alpha,a\,;\ z_1,\dots,z_{n-i}) = (\alpha+\alpha_0,a\,;\ \varphi_1,\dots,\varphi_{n-i})$$

avec $|z_j|^2 = |\varphi_j|^2$ et

$$\varphi_j(\alpha,a\,;\ \theta_1 z_1,\dots,\theta_{n-i}z_{n-i}) = \theta_1\varphi_j(\alpha,a\,;\ z_1,\dots,z_{n-i}).$$

On considère a et α comme des paramètres et on restreint ces fonctions à $S^{n-i-1} = \mathrm{Re}(S^{2n-2i-1})$; étudions en particulier φ_1. Cette fonction vérifie :

$$|\varphi_1(\alpha,a\,;\ x_1,\dots,x_{n-i})|^2 = x_1^2,$$
$$\varphi_1(\alpha,a\,;\ -x_1,\dots,x_{n-i}) = -\varphi_1.$$

La fonction θ définie par

$$x_1\theta(\alpha,a\,;\ x_1,\dots,x_{n-i}) = \varphi_1(\alpha,a\,;\ x_1,\dots,x_{n-i})$$

est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$, de S^{n-i-1} à valeurs dans S^1, et qui est paire par rapport à toutes les coordonnées. D'après le théorème de Whitney qui dit qu'une fonction paire est de la forme $g(x^2)$, on en déduit l'existence d'une fonction η de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage du simplexe $\Sigma X_k = 1$, $X_k \geq 0$ et à valeurs dans S^1 telle que l'on ait :

$$\theta(\alpha,a\,;\ x_1,\dots,x_{n-i}) = \eta(\alpha,a\,;\ x_1^2,\dots,x_{n-i}^2).$$

On peut "relever η à travers l'exponentielle", de sorte qu'il existe une fonction t_1, de classe C^∞, pour laquelle on a :

$$\varphi_1(\alpha, a\,;\ x_1, \ldots, x_{n-i}) = x_1 \exp\bigl(it_1(\alpha, a\,;\ x_1^2, \ldots, x_{n-i}^2)\bigr).$$

Compte tenu des propriétés de φ, on a :

$$\varphi_1(\alpha, a\,;\ z_1, \ldots, z_{n-i}) = z_1 \exp\Bigl(it_1\bigl(\alpha, a\,;\ |z_1^2|, \ldots, |z_{n-i}^2|\bigr)\Bigr).$$

On prolonge alors φ_1 grâce à cette formule après avoir prolongé t_1 ; on fait de même avec les autres φ_j et on voit ainsi qu'on peut prolonger φ à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times B(\epsilon)^{n-i}$ en un difféomorphisme vérifiant la propriété requise.

Preuve du THÉORÈME 2.1.

Pour construire un difféomorphisme de M_1 sur M_2 équivariant pour l'action du tore et compatible avec les applications moment, on découpe le polyèdre $C = J_i(M_i)$ en une réunion d'ouverts $\Omega_{i,j}$, où $0 \leq i \leq n$ et j décrit l'ensemble des faces de dimension i de C, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\Omega_{i,j} \cap j$ est relativement compact dans l'intérieur de la face notée j, et, au-dessus de $\Omega_{i,j}$, on a dans M_1 et M_2 des coordonnées "actions-angles" comme au LEMME 2.5.
- La réunion des $\Omega_{i,j}$ est C et $\Omega_{i,j} \cap \Omega_{i,k} = \emptyset$ si j est différent de k.
- $\Omega_{i,j} \cap (\bigcup_{a>i} \Omega_{a,b})$ contient $J((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times K \times S(\epsilon)^{2n-2i-1})$ dans les notations du lemme précédent.

Le LEMME 2.5 montre que $J_1^{-1}(\Omega_{i,j})$ est difféomorphe à $J_2^{-1}(\Omega_{i,j})$ par un difféomorphisme équivariant transformant J_1 en J_2. D'autre part le LEMME 2.6 montre que la donnée d'un tel difféomorphisme au-dessus de la réunion, pour $i \geq a$, des $\Omega_{i,j}$ permet de construire un difféomorphisme vérifiant la même propriété au-dessus de la réunion des $\Omega_{i,j}$ pour $i \geq a-1$: il suffit de restreindre celui qu'on connaît au complémentaire de la réunion des $\Omega_{a-1,j}$ et de le prolonger à chaque $\Omega_{a-1,j}$ grâce au LEMME 2.6.

3. Exemples

Compte-tenu du THÉORÈME 2.1, on va voir qu'on connaît tous les exemples de variétés symplectiques de dimension $2n$ sur lesquelles agit le tore de dimension n par une action hamiltonienne effective. Il suffit évidemment de trouver tous les polyèdres convexes de $(\mathbb{R}^n)^*$ image d'une telle application moment. Nous verrons dans ce paragraphe que la condition (*) du chapitre précédent (de chaque sommet partent n

arêtes engendrées par une $\mathbb{Z}$-base du réseau des entiers) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polyèdre convexe soit "réalisable" par une telle application.

Pour construire une telle variété à partir d'un polyèdre C, on a deux méthodes :

La première, due à ATIYAH [A_2], fonctionne pour les polyèdres à sommets entiers (et leurs homothétiques) : elle consiste à construire une action du tore dans un espace projectif de grande dimension dont l'image par l'application moment est C, et à obtenir la variété cherchée comme adhérence de l'orbite d'un point sous l'action du tore complexifiée; la condition (*) permet de choisir l'action de sorte que l'objet considéré soit une variété projective lisse : c'est alors une *variété torique* (pour plus de précisions sur les variétés toriques, voir TEISSIER [T], DANILOV [Da], et l'appendice).

La seconde méthode, que je vais décrire ici, consiste à obtenir la variété cherchée par réduction symplectique. Son intérêt est de montrer que tous les polyèdres convexes vérifiant (*) sont des images d'application moment (les variétés obtenues sont des variétés toriques, mais avec des formes symplectiques dont les classes de cohomologie ne sont pas forcément entières).

1. Préliminaires. — Dans la suite on suppose toujours donnée une action effective du tore T^n dans une variété symplectique (M, σ) de dimension $2n$ et on note J son moment.

Commençons par quelques remarques liant la (co)-homologie de M et la géométrie du polyèdre $C = J(M)$.

Remarque 1 (voir FRANKEL [F]).

Soit X le générateur d'un sous-groupe à un paramètre dense dans le tore; $X \circ J$ est une fonction de Morse dans M dont les points critiques sont les images réciproques des sommets de C.

Si α est un sommet de C, l'indice de $J^{-1}(\alpha)$ est le double du nombre d'arêtes de C issues de α situées en-dessous de l'hyperplan $X = X(\alpha)$ (relativement à l'orientation donnée par X).

Comme tous les points critiques de $X \circ J$ sont d'indice pair, c'est une fonction de Morse parfaite, c'est-à-dire que le i-ème nombre de Betti de M est le nombre de points critiques d'indice i (voir MILNOR [Mi]). En particulier tous les nombres de Betti d'ordre impair de M sont nuls. De plus cette propriété montre que M est simplement connexe. Enfin la caractéristique d'Euler de M est le nombre de sommets de $J(M)$.

Le choix d'une métrique riemannienne invariante montre aussi que le deuxième groupe d'homologie de M est engendré par les images réciproques des arêtes issues des sommets correspondant aux points critiques d'indice 2 : ce sont en effet les nappes de gradient descendantes des points critiques d'indice 2 de $X \circ J$. On verra d'ailleurs que le deuxième nombre de Betti de M est égal à la différence du nombre de faces de codimension un de C et de la dimension du tore.

La proprosition suivante peut être déduite d'un théorème général de GUILLEMIN et STERNBERG quand on suppose (ce que je ne ferai pas) que l'action du tore sur M est pré-quantifiable. (Voir [G–S]).

PROPOSITION 3.1. — *La forme symplectique est entière si, et seulement si, la différence entre deux sommets de C est un point entier.*

Prouvons le sens direct. Clairement il suffit de vérifier l'assertion pour deux sommets d'une même arête. Comme l'image réciproque d'une arête est une sphère, on remarque qu'il suffit de le vérifier pour une action du cercle sur S^2 qui conserve la forme volume. Posons $J(S^2) = [a, b]$; l'application J est une fibration principale en dehors des points $J^{-1}(a)$ et $J^{-1}(b)$. Cela permet de choisir une application :

$$\theta : J^{-1}]a, b[\longrightarrow S^1$$

équivariante pour l'action du cercle. Comme (θ, J) forment un système de coordonnées, on peut écrire $\sigma = f(\theta, J)\, d\theta\, dJ$. Comme J est le moment de l'action du cercle, f est constante égale à 1. Comme σ est entière, $(J(b) - J(a)) \int d\theta$ est entier, ce qu'il fallait voir.

La réciproque résulte du même calcul, compte tenu du fait que les images réciproques des arêtes engendrent le deuxième groupe d'homologie de M.

Remarquons que ce calcul est le cas le plus simple d'un théorème de DUISTERMAAT et HECKMANN [D–H] qui calcule l'image directe de la mesure de Liouville par l'application moment.

Remarque 2.

Dans $\mathbb{R}^n$ on peut définir sur toutes les droites engendrées par un vecteur entier une notion de longueur invariante par l'action de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$: il suffit de dire que la longueur d'un vecteur entier est le pgcd de ses coordonnées. Le calcul précédent dit que pour toute arête [A,B] on a $|\int_{J^{-1}[A,B]} \sigma| = |AB|$.

Remarque 3.

Une conséquence amusante du théorème de Atiyah, Guillemin et Sternberg est que l'image de l'application moment d'une action d'un tore dans une variété symplectique M ne dépend (à translation près) que de la classe de cohomologie de la forme symplectique (invariante).

Soient en effet deux formes symplectiques invariantes σ et σ' cohomologues. On peut choisir une primitive invariante η de $\sigma' - \sigma$. Soit λ la fonction définie sur M à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie du tore par $\langle X, \lambda(x)\rangle = (i(X)\eta)(x)$. Pour moment de σ' on peut choisir $J' = J+\lambda$. Comme $\lambda(x)$ est nul si x est un point fixe et que $J(M)$ (*resp.* $J'(M)$) est l'enveloppe convexe de l'image par J (*resp.* J') des points fixes, on a bien $J(M) = J'(M)$.

2. Variétés symplectiques réduites. — Soit C un polyèdre convexe de $(\mathbb{R}^n)^*$ vérifiant la condition (*).

Notons $F_1, \dots F_k$ les faces de codimension 1 de C. Pour chaque i on peut choisir un vecteur entier de $\mathbb{R}^n$, soit u_i, dont le pgcd des coordonnées est 1 et une constante λ_i tels que

$$F_i = C \cap \big(u_i(x) = \lambda_i\big) \quad \text{et} \quad C = \bigcap \big(u_i(x) \geq \lambda_i\big).$$

Soit π la projection de $\mathbb{R}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ qui envoie le i-ème vecteur de la base canonique sur u_i. Sa transposée π^* envoie $(\mathbb{R}^n)^*$ dans $(\mathbb{R}^k)^*$ et, par construction même, $\pi^*(C)$ est l'intersection de $\pi^*(\mathbb{R}^n)^*$ avec le cône K défini par :

$$K = \bigcap \big\{x_i \geq \lambda_i\big\}.$$

Comme π est à coefficients entiers, elle définit un morphisme, toujours noté π, de T^k dans T^n.

Comme les u_i engendrent $\mathbb{R}^n$,l'application π est surjective. Considérons l'action diagonale de T^k dans $\mathbb{C}^k$; celle-ci est hamiltonienne et on peut choisir son moment comme étant :

$$J(z_1, \dots, z_k) = \big(\lambda_1, \dots, \lambda_k\big) + \tfrac{1}{2}\big(|z_1|^2, \dots, |z_k|^2\big).$$

Ainsi, $J(\mathbb{C}^k)$ est K. On restreint cette action au noyau N de π. Notons $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N et i son injection dans $\mathbb{R}^k$. Le moment de l'action de N est $J_1 = i^* \circ J$. Comme J est propre, $J_1^{-1}(0)$, qui est $J^{-1}(\pi^*(C))$, est compact.

Montrons que l'action de N est libre sur $J_1^{-1}(0)$.

Soient p un point de $J_1^{-1}(0)$ et $i_1, \dots, i_r$ les indices des coordonnées nulles de p. Par construction même, l'intersection des hyperplans d'appuis $u_{i1} = \lambda_{i_1}, \dots, u_{i_r} = \lambda_{i_r}$ de C est non vide (et rencontre C) puisque son image par π^* contient $J(p)$. Soit α un sommet de C contenant tous ces hyperplans. L'hypothèse (*) montre qu'on peut choisir des indices $i_{r+1}, \dots, i_n$ tels que $u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ forment une $\mathbb{Z}$-base du réseau des entiers.

Quitte à renuméroter les coordonnées, l'application π s'écrit matriciellement :

$$\pi = \big(\mathrm{Id}_n, u_{n+1}, \dots, u_k\big).$$

On peut alors paramétrer le noyau de π par

$$\begin{aligned} T^{n-k} &\longrightarrow N \subset T^n \\ (\theta_{n+1}, \dots, \theta_k) &\mapsto \big(-(u_{n+1}, \dots, u_k)\big(\begin{smallmatrix}\theta_{n+1}\\ \theta_k\end{smallmatrix}\big), \theta_{n+1}, \dots, \theta_k\big). \end{aligned}$$

Par construction même, si $i \geq n+1$, la i-ème coordonnée de p est non nulle donc p n'a pas de groupe d'isotropie sous l'action de N.

En particulier, J_1 est une submersion le long de $J_1^{-1}(0)$ qui est une variété compacte. Cette variété est d'ailleurs connexe car les fibres de J sont connexes et $J_1^{-1}(0)$ est $J^{-1}(\pi^*(C))$.

On applique alors le célèbre principe de réduction symplectique de MARSDEN et WEINSTEIN (voir [A–M]) :

Considérons la variété M quotient de $J_1^{-1}(0)$ par l'action de N. Celle-ci est munie d'une forme symplectique qui est l'unique forme dont l'image réciproque par la projection canonique est la restriction à $J_1^{-1}(0)$ de celle de $\mathbb{C}^k$.

Comme N commute à T^k, l'action de ce tore passe au quotient ainsi que son moment J. Par construction même, cette action passe au quotient (à travers π) en une action de T^n sur M. Comme l'image du moment de l'action de T^k sur M est $\pi^*(C)$, celle du moment de l'action de T^n sur M est C.

Montrons que cette action est génériquement libre : si $J(z_1, \dots, z_k)$ est dans l'intérieur de $\pi^*(C)$ tous les z_i sont non nuls donc l'action de T^k est libre en ce point donc l'action de T^n est libre en l'image de ce point.

On a ainsi construit une variété symplectique (M, σ) de dimension $2n$ munie d'une action hamiltonienne génériquement libre du tore de dimension n et dont l'image du moment est C.

Considérons l'ouvert Ω des points de $H^2(M, \mathbb{R})$ qui sont des classes de cohomologie de formes symplectiques invariantes. En nous servant d'un théorème de DUISTERMAAT et HECKMANN ([D–H]) nous allons montrer :

PROPOSITION 3.2. — *La composante connexe de Ω contenant $[\sigma]$ est un cône convexe (ouvert).*

Preuve. — Dans la construction précédente, on renormalise J (et J_1) de sorte que $J(0)$ soit 0.

Pour $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k$, on considère le polyèdre $C(\mu)$ d'équations :

$$u_1 \geq \mu_1, \dots, \; u_k \geq \mu_k.$$

On voit que $\pi^*(C(\mu))$ est l'intersection de $\pi^*(\mathbb{R}^n)$ avec le cône défini par :

$$x_1 \geq \mu_1, \ldots, \; x_k \geq \mu_k.$$

En particulier on voit que si $i^*(\mu) = i^*(\mu')$, le polyèdre $C(\mu)$ est un translaté de $C(\mu')$.

Remarquons que si $C(\mu)$ est non vide il est compact : en effet si $f_1, \ldots, f_\ell$ désignent ℓ formes linéaires sur $\mathbb{R}^p$, pour que le polyèdre définit par :

$$x_1 \geq a_1, \ldots, \; x_p \geq a_p \, ; \quad f_1 \leq b_1, \ldots, \; f_\ell \leq b_\ell$$

soit compact, il faut et il suffit qu'il soit non vide et qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients positifs des f_i qui soit une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des coordonnées.

Donc $J_1^{-1}(i^*(\mu)) = J^{-1}(\pi^*(C(\mu))$ est vide ou compact et J_1 est propre.

Considérons l'ensemble S des sommets de $C(= C(\lambda))$. Pour chaque sommet s on regarde l'ensemble des hyperplans d'appui de C en s. Il y en a n, soient $I(s) = \{i_{1,s}, \ldots, i_{n,s}\}$ les indices des formes linéaires correspondantes : u_α, pour $\alpha \in I(s)$, est une base du réseau des entiers.

Pour chaque μ de $\mathbb{R}^k$, on considère les points $A(s,\mu)$ définis par :

$$\forall \, i \in I(s), \qquad u_i\big(A(s,\mu)\big) = \mu_i.$$

Les $A(s,\mu)$ dépendent linéairement de μ. Pour que $C(\mu)$ soit l'enveloppe convexe des $A(s,\mu)$, il faut et il suffit, d'après le théorème de Krein–Milman, que :

$$\forall \, i, \; \forall \, s, \qquad u_i\big(A(s,\mu)\big) \geq \mu_i.$$

Ainsi l'ensemble des μ pour lesquels $C(\mu)$ est l'enveloppe convexe des $A(s,\mu)$ est un cône convexe fermé P dont le bord est constitué des μ pour lesquels il existe un couple (i,s) avec i n'appartenant pas à $I(s)$ et $u_i(A(s,\mu)) = \mu_i$: par $A(s,\mu)$ "passent" alors $n+1$ hyperplans d'appui et $C(\mu)$ a (au moins) un sommet de moins que $C(\lambda)$.

La démonstration précédente montre que :

- si μ est dans $\mathrm{int}(P)$, $i^*(\mu)$ est une valeur régulière de J_1 ;
- si μ est dans $\partial(P)$, $i^*(\mu)$ est une valeur critique de J_1 (sinon on pourrait former la variété symplectique réduite $J_1^{-1}(i^*(\mu))/N$ dont l'image par le moment serait $C(\mu)$ ce qui est impossible car ce polyèdre a un sommet de moins que $C(\lambda)$ et le nombre de sommets est la caractéristique d'Euler de $J(M)$.

Remarquons aussi que le bord de $i^*(P)$ est $i^*(\partial(P))$ puisque si $i^*(\mu) = i^*(\mu')$, le polyèdre $C(\mu)$ est un translaté de $C(\mu')$.

En conlusion, la composante connexe de l'ouvert des valeurs régulières de J_1 contenant $i^*(\lambda)$ est $i^*(\mathrm{int}(P))$ qui est un cône convexe ouvert de $\mathfrak{n}^*$

soit Ω'. L'application J_1 est une fibration triviale au-dessus de Ω' et passe au quotient en une fibration triviale à fibre type $M : J_1^{-1}(\Omega')/N \to \Omega'$.

On peut alors considérer, avec DUISTERMAAT et HECKMANN [D–H], l'application ℓ de Ω' à valeurs dans $H^2(M, R)$ qui à μ associe la classe de cohomologie de la structure symplectique réduite sur $J_1^{-1}(\mu)/N$. D'après ces auteurs, ℓ est la restriction à Ω' d'une application linéaire (toujours notée ℓ) de $\mathfrak{n}^*$ dans $H^2(M, \mathbb{R})$.

Montrons que la PROPOSITION 3.2 résulte du lemme suivant :

LEMME. — *ℓ est un isomorphisme.*

En effet $\ell(i^*(\mathrm{int}(P))$ est alors un cône convexe ouvert de $H^2(M, \mathbb{R})$ inclus dans Ω. De plus si a est dans $\partial(\ell(i^*(\mathrm{int}\, P))) = \ell(\partial(i^*(\mathrm{int}\, P)))$ montrons que a n'est pas dans Ω. Sinon, il existe une forme symplectique invariante α dont la classe de cohomologie est a. On peut trouver une suite de formes symplectiques α_n invariantes qui convergent vers α et dont les classes de cohomologie sont dans $\ell(i^*(\mathrm{int}\, P))$. Soient C_n les images des applications moment associées aux α_n et C celle de α. A translation près, les C_n ne dépendent que des classes des α_n et convergent vers C (*Remarque* 3). En inversant ℓ on voit alors que C a un sommet de moins que $J(M)$ ce qui est impossible.

Preuve du Lemme. — Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $\exp tX$ soit dense dans le tore. Comme à la *Remarque* 1 considérons $X \circ J$ comme fonction de Morse sur M. Un sommet α de C correspond à un point critique d'indice 2 si, et seulement si, il y a une seule arête issue de α située en-dessous de l'hyperplan $X = X(\alpha)$.

Soit m le point de C où X est minimum. Considérons les faces de codimension 1 ne passant pas par m, soient F_i pour $1 \leq i \leq n - k$. Pour chaque i considérons le sommet α_i où X restreint à F_i atteint son minimum : ces sommets correspondent à des points critiques d'indice 2 et on obtient ainsi tous ces points critiques une fois et une seule. On voit ainsi que le deuxième nombre de Betti de M est $k - n$, c'est-à-dire la dimension de $\mathfrak{n}^*$.

Soient A_i, avec $1 \leq i \leq k-n$, les arêtes descendant des α_i ; leurs images réciproques sont des sphères S_i. On convient de les orienter en disant que $\int_{S_i} \sigma$ est positif, et ces sphères forment une base de $H_2(M, \mathbb{Z})$. On suppose aussi les α_i numérotés de sorte que :

$$X(\alpha_1) \geq X(\alpha_2) \geq \cdots \geq X(\alpha_{k-n}).$$

On renumérote aussi les formes linéaires u_i de sorte que F_i soit l'intersection de C et de l'hyperplan $u_i = \lambda_i$.

Soit (S_i^*), avec $1 \leq i \leq n - k$, la base duale de S_i. Considérons $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-n})$ un paramètre suffisamment petit. Le polyèdre $C(\epsilon)$

défini par :

$$\begin{array}{ll} u_1 \geq \lambda_1 + \epsilon_1, \dots, u_{k-n} \geq \lambda_{k-n} + \epsilon_{k-n} & \text{pour } i \leq k-n, \\ u_i \geq \lambda_i & \text{pour } k-n+1 \leq i \leq n, \end{array}$$

est l'image par l'application moment de M pour une forme symplectique $\sigma(\epsilon)$.

Comme en changeant l'hyperplan d'appui $u_i = \lambda_i$ en $u_i = \lambda_i + \epsilon_i$ on n'a changé que la longueur des arêtes descendant des sommets situés au-dessus de α_i et celle de A_i d'un paramètre ϵ_i, on en déduit que :

$$\int_{A_1} \sigma(\epsilon) - \sigma = \epsilon_1 + f_{1,2}(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{k-n}) + \cdots + f_{1,n-k}(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{k-n}),$$
$$\int_{A_2} \sigma(\epsilon) - \sigma = \epsilon_2 + f_{2,3}(\epsilon_3, \dots, \epsilon_{k-n}) + \cdots + f_{2,n-k}(\epsilon_3, \dots, \epsilon_{k-n}),$$
$$\dots$$
$$\int_{A} \sigma(\epsilon) - \sigma = \epsilon_n .$$

La matrice de l'application $\ell : \epsilon \to [\sigma(\epsilon)]$ est donc triangulaire avec des 1 sur la diagonale et ℓ est un isomorphisme.

4. Classification des formes symplectiques

Le but de ce paragraphe est classer les formes symplectiques T^n-invariantes sur les variétés symplectiques de dimension $2n$ munies d'une action hamiltonienne effective du tore T^n. Nous allons montrer :

PROPOSITION 4.1. — *Si (M, σ) est une variété symplectique compacte de dimension $2n$ munie d'une action hamiltonienne du tore de dimension n effective, alors l'ensemble des classes de cohomologie que l'on peut représenter par des formes symplectiques invariantes est une réunion de cônes convexes ouverts disjoints. De plus si J désigne le moment associé à σ, l'ensemble des formes symplectiques invariantes cohomologues à σ s'identifie par J^* à l'ensemble des 2-formes fermées (*) sur $J(M)$.*

Pour prouver ceci, on peut, grâce au paragraphe 2 supposer que M est la variété construite au paragraphe précédent à partir du polyèdre $J(M)$; on note σ_0 la forme symplectique qui l'équipe. A priori, σ et σ_0 ont même moment, mais sont deux formes distinctes. Il s'agit en fait de montrer que

(*) On dit qu'une k-forme sur un polyèdre C de $\mathbb{R}^n$ est fermée si elle est la restriction à C d'une k-forme sur $\mathbb{R}^n$ dont la différentielle extérieure est nulle sur l'intérieur de C.

$\sigma - \sigma_0 = J^*\alpha$ et que les formes $\sigma_0 + tJ^*\alpha$ sont toutes symplectiques et cohomologues. Il en résultera que σ_0 et σ sont isomorphes (ce qui achèvera de prouver 2.1) et la première partie de l'énoncé sera alors une conséquence immédiate de 3.2.

Un cas particulier où les propriétés de convexité de l'application moment deviennent encore plus intéressantes, a été étudié par DUISTERMAAT [Du] : c'est celui où en plus de la donnée d'une action hamiltonienne du tore dans M, on suppose qu'il existe une involution antisymplectique (c'est-à-dire $\tau^*\sigma_0 = -\sigma_0$) qui renverse l'action du tore. Le théorème le plus remarquable de [Du] est que, si L désigne la sous-variété lagrangienne des points fixes de τ, si L est non vide, alors son image par l'application moment est égale à celle de M, et en particulier est convexe. Remarquons d'abord que les exemples construits au paragraphe précédent possèdent une telle involution : la conjugaison de $\mathbb{C}^k$ passe au quotient dans la variété considérée en une involution qui vérifie la condition requise; L est alors la partie réelle de M en un sens évident. Remarquons aussi que si α est un point fixe de l'action du tore, c'est aussi un point fixe de τ (en effet, $J \circ \tau = J$ et la fibre de $J(\alpha)$ est réduite à α), ce qui permet d'appliquer en toute généralité les résultats de [Du], grâce auxquels nous pouvons affirmer :

LEMME 4.4. — *Soit $B(\epsilon)$ la boule de centre 0 et de rayon ϵ de $\mathbb{C}$. On munit $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times]-\epsilon, \epsilon[^i \times B(\epsilon)^{n-i}$ de la forme symplectique*

$$\sigma = \sum_{1 \le j \le i} d\alpha_j \wedge da_j + \sum_{i+1 \le k \le n} dx_k \wedge dy_k$$

(les α sont les coordonnées sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les a celles sur $]-\epsilon, \epsilon[$, les $z = x + iy$ celles sur $B(\epsilon)$).

Si μ appartient à une i-face de $J(M)$, et si $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ sont des coordonnées sur le tore telles que, dans ces coordonnées, un voisinage de μ dans $J(M)$ s'écrive :

$$V \cap \big(x_{i+1} \ge \mu_{i+1}, \ldots, x_n \ge \mu_n\big),$$

il existe un isomorphisme symplectique d'un voisinage de l'image réciproque de μ (dans M, σ_0) sur $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^i \times]-\epsilon, \epsilon[^i \times B(\epsilon)^{n-i}$ dans laquelle l'action du tore est définie par :

$$\begin{aligned}(\theta_1, \ldots, \theta_n) \cdot \big(\alpha_1, \ldots, \alpha_i\,;\ a_1, \ldots, a_i\,;\ z_{i+1}, \ldots, z_n\big) &= \\ \big(\alpha_1 + \theta_1, \ldots, \alpha_i + \theta_i\,;\ a_1, \ldots, a_i\,;\ e^{2i\pi\theta i+1} z_{i+1}, \ldots, e^{2i\pi\theta n} z_n\big).\end{aligned}$$

Son moment étant :

$$J(\alpha_1,\ldots,\alpha_i\,;\ a_1,\ldots,a_i\,;\ z_{i+1},\ldots,z_n) = \mu + (a_1,\ldots,a_i\,;\ |z_{i+1}|^2,\ldots,|z_n|^2).$$

De plus l'involution τ s'écrit :

$$\tau(\alpha_1,\ldots,\alpha_i\,;\ a_1,\ldots,a_i\,;\ z_{i+1},\ldots,z_n) = (-\alpha_1,\ldots,-\alpha_i\,;\ a_1,\ldots,a_i\,;\ \bar z_{i+1},\ldots,\bar z_n)$$

et la variété L est

$$\alpha_i = 0 \pmod{\pi}\,;\qquad \mathrm{Im}(z_k) = 0.$$

Preuve. — Compte-tenu du fait que les fibres de J sont des orbites, ce lemme se prouve d'une façon analogue aux lemmes dont se sert DUISTERMAAT dans [Du]; le point important est que d'après [Du] $J(L) = J(M)$, donc L rencontre chaque orbite $J^{-1}(\mu)$ et on prend alors comme "origine" des coordonnées n'importe quel point de $L \cap J^{-1}(\mu)$.

Remarquons que $J(L) = J(M)$ est le quotient de L par le sous-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ du tore. D'ailleurs L est connexe, et au-dessus de l'intérieur de $J(L)$, l'application J est un revêtement trivial à 2^n feuillets dont les adhérences définissent une décomposition cellulaire de L.

La preuve de la PROPOSITION 4.1 repose sur les lemmes suivants. Toujours dans les mêmes hypothèses on a :

LEMME 4.3. — *Si σ' est une forme symplectique invariante, de moment J, pour toute 2-forme fermée α sur $\mathbb{R}^n$, $\sigma' + J^*\alpha$ est encore symplectique. De plus cette forme a même moment que σ' et lui est cohomologue.*

LEMME 4.4. — *Si β est une 2-forme (resp. fermée) sur L, invariante sous l'action de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, il existe une 2-forme (resp. fermée) α sur $J(M)$ telle que $\beta = J^*\alpha$.*

Preuve de 4.1. — Soit β la restriction de σ à L, ce qui précède montre que β s'écrit $J^*\alpha$. La forme $\sigma - J^*\alpha = \sigma'$ est alors une forme symplectique (4.3) sur M dont la restriction à L est nulle. La 2-forme $\sigma_0 - \sigma'$ est invariante fermée, et, pour tout champ fondamental X de l'action du tore $i(X)(\sigma_0 - \sigma')$ est nul (σ_0 a même moment que σ et donc que σ'). On en déduit que sa restriction à l'image réciproque de l'intérieur de $J(M)$ est projetable par J (s'écrit $J^*\beta$); comme sa restriction à L est nulle, c'est qu'elle est nulle sur cet ouvert dense donc $\sigma' = \sigma_0$. On peut alors joindre σ à σ_0 par un chemin de formes symplectiques : $\sigma_0 + tJ^*\alpha$ $t \in [0,1]$; celles-ci sont toutes invariantes et ont même moments ; elles sont donc cohomologues d'après la *Remarque* 2 du paragraphe 3. D'après un théorème de Moser et Weinstein elles sont isomorphes. Ceci prouve 4.1.

Preuve du LEMME 4.3. — Pour voir 4.3, il suffit de voir que $\sigma' + J^*\alpha$ est non dégénérée pour toute 2-forme α. Or, dans les coordonnées du LEMME 2.5 appliqué à σ', si $J(x_0)$ est dans une i-face de $J'(M)$, on a :

$$\begin{aligned}&\big(\sigma' + J^*\alpha\big)(x_0)\big(\in \Lambda^2 T_x^*(M)\big) = \\ &\qquad\qquad \sum d\alpha_i \wedge da_i + \sum dx_j \wedge dy_j + \sum \gamma_{k1} da_k \wedge da_1\end{aligned}$$

qui est clairement non dégénérée.

Preuve du LEMME 4.4. — La conclusion (resp. fermée) est évidente car J est une submersion sur un ouvert dense de L. L'emploi d'une partition de l'unité sur un voisinage ouvert de $J(L)$ montre alors que l'énoncé de 4.7 est en fait local.

Grâce aux coordonnées du LEMME 4.2, on se ramène à prouver la chose suivante :

Soit ω une 2-forme sur $\mathbb{R}^n$ invariante sous l'action de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-i}$ qui consiste à changer le signe des $(n-i)$ dernières coordonnées, alors ω s'écrit $J^*\alpha$, où on a posé :

$$J\big(a_1, \ldots, a_i\,;\, x_{i+1}, \ldots, x_n\big) = \big(a_1, \ldots, a_i\,;\, x_{i+1}^2, \ldots, x_n^2\big).$$

Ceci est une conséquence du théorème de Whitney qui dit que si une fonction est paire, elle s'écrit $g(x^2)$, si elle est impaire, elle s'écrit $xg(x^2)$.

5. Appendice

Le but de cet appendice est de montrer que les variétés construites au paragraphe 3 ne sont autres que les variétés toriques de Demazure. Pour ce faire, je vais rappeler en suivant d'assez près DANILOV [Da] et TEISSIER [Te] comment se fabriquent et se quotientent ces variétés.

Notations. — Soit $\mathbb{T}$ un tore de dimension n, puis $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{t}^*$ son dual, N le réseau de t^* dual à $M = \exp^{-1}(e) \subset \mathfrak{t}$; on note $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\mathbb{T}$.

Un cône convexe polyèdral rationnel σ (ccpr) de $\mathfrak{t}^*$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces $x \geq 0$ avec $x \in M$; on montre alors que $\sigma \cap N$ est de type fini en tant que monoïde. Une *co-face* de σ est un cône contenant σ et dont toutes les faces sont des faces de σ; par exemple $\mathfrak{t}^*$ est toujours une co-face de σ.

a. Variétés toriques affines (complexes).

a1. Soit σ un ccpr; comme $\sigma \cap N$ est de type fini, la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[\sigma \cap N]$ est de type fini, ce qui permet de construire la variété $V_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma \cap N]$ qui est par définition la *variété torique affine* construite sur σ.

a2. *Exemple.* Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{t}$. Soit σ_k le cône de $\mathfrak{t}^*$ défini par $e_1 \geq 0, \ldots, e_k \geq 0$. Si $f_1, \ldots, f_n$ est la base duale de B, alors $\sigma \cap N$ est engendré sur $\mathbb{N}$ par $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, -f_{k+1}, \ldots, f_n, -f_n$. Ainsi $\mathbb{C}[\sigma \cap N]$ est $C[X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, X_{k+1}^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ et V_σ est $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C} - 0)^{n-k}$.

a3. *Remarque.* On montre que les σ_k ainsi construites sont les seules variétés toriques affines lisses, qui nous intéressent plus particulièrement.

a4. Action du tore. Un point de V_σ est un homomorphisme h de $\mathbb{C}[\sigma \cap N]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si θ est dans $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ on pose :

$$\theta \cdot h(X^\alpha) = h(X^\alpha) \cdot \theta^\alpha$$

où $\theta^\alpha = \theta_1^{\alpha_1} \ldots \theta_n^{\alpha_n}$ avec des notations évidentes.

a5. Stratification de V_σ. Si f est une face (fermée) de σ, la variété V_f est une sous-variété torique affine de V_σ grâce à la remarque suivante : si h est un homomorphisme de $\mathbb{C}[f \cap M]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut prolonger h à $\mathbb{C}[\sigma \cap M]$ en disant que $h(X^\alpha)$ est nul si α n'est pas dans f.

Remarquons que si θ est dans $\exp f^0$ (annulateur dans $\mathfrak{t}^*$ de $\exp f$), tous les points de V_f sont fixés par θ; d'ailleurs, il est facile de voir que si $N \subset \mathbb{T}$ est un sous-tore d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$, la variété des points fixés par N (ou $N^{\mathbb{C}}$) est la réunion des V_f où f décrit l'ensemble des faces incluses dans l'annulateur $\mathfrak{n}^0$ de $\mathfrak{n}$.

On peut en fait stratifier V_σ de la façon suivante : on note $\operatorname{int} V_f$ la sous-variété de V_σ des points dont le groupe d'isotropie sous l'action du tore est $\exp f^0$: c'est "l'intérieur" de V_f qui est une orbite sous l'action de $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. On définit ainsi une stratification de V_σ.

a6. Quotient. Soit encore N un sous-tore de $\mathbb{T}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$; il résulte de ce qui précède que l'action de $N^{\mathbb{C}}$ dans V_σ est libre si, et seulement si, toutes les faces de V_σ sont transverses à $\mathfrak{n}^0$ (on dira que V_σ est transverse à $\mathfrak{n}^0$); on peut alors quotienter cette variété par l'action de $N^{\mathbb{C}}$ et on obtient une $\mathbb{T}/N$ variété torique affine définie par le cône $\sigma \cap \mathfrak{n}^0$, où l'on identifie le dual de l'aglèbre de Lie de $\mathbb{T}/N$ à $\mathfrak{n}^0$.

a7. Naturalité. Si $\sigma \subset \sigma'$, $\mathbb{C}[\sigma \cap N] \subset \mathbb{C}[\sigma' \cap N]$ d'où un morphisme de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma' \cap N]$ dans $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma \cap N]$ qui fait de $V_{\sigma'}$ une sous-variété de V_σ. Si de plus σ est d'intérieur non vide et σ' est une co-face de σ, on vérifie que $V_{\sigma'}$ est un ouvert de V_σ, stable pour l'action de $\mathbb{T}$ dans V_σ.

b. Variétés toriques, cas général. — Plutôt que de construire les variétés toriques à partir des éventails de Demazure, et pour simplifier la construction des quotients, on utilise ici les "co-éventails", ce qui revient au même mais permet d'éviter d'avoir à dualiser deux fois. Un co-éventail Γ de $\mathfrak{t}^*$ est la donnée d'une famille finie de ccpr d'intérieur non vide vérifiant les propriétés suivantes :

- si σ est dans Γ toutes les co-faces de σ sont dans Γ,
- si σ et σ' sont dans Γ $\sigma + \sigma'$ est dans Γ et est une co-face de σ et σ'.

b1. Soit Γ un co-éventail, on fabrique la variété torique V_Γ associée à Γ de la façon suivante : si σ et σ' sont dans Γ, $V_{\sigma+\sigma'}$ est un ouvert de V_σ et $V_{\sigma'}$; on décide de recoller ces deux variétés le long de cet ouvert; on décrit ainsi un cocycle qui fabrique la variété V_Γ. Les actions du tore définies dans V_σ et $V_{\sigma'}$ coïncident dans $V_{\sigma+\sigma'}$, ce qui montre qu'elles se recollent en une action de T dans V_Γ tout entier. Evidemment si Γ' est un sous co-éventail de Γ, la variété $V_{\Gamma'}$ est une sous-variété de V_Γ.

b2. Exemple. Un co-éventail décrivant $\mathbb{C}^k$ est le suivant : si I est une partie de $\{1, \ldots, k\}$ on note σ_I le cône $e_i \geq 0$, où $i \in I$ (e_i est une $\mathbb{Z}$-base de N) ; l'ensemble des σ_I est un co-éventail qui décrit $\mathbb{C}^n$.

b3. Quotient. Soit N un sous tore de $\mathbb{T}$ et Γ un co-éventail; on garde les conventions de a6; l'ensemble des points de V_Γ où l'action de N et libre est la sous-variété torique décrite par le co-éventail Γ' constitué des co-faces de Γ transverses à $\mathfrak{n}^0$. On peut alors faire le quotient et on obtient la $\mathbb{T}/N$ variété torique dont le co-éventail est l'ensemble des $\sigma \cap \mathfrak{n}^0$ où σ est dans Γ' (ceci est bien un co-éventail car si σ est transverse à $\mathfrak{n}^0$, $\sigma \cap \mathfrak{n}^0$ est d'intérieur non vide).

c. Variétés toriques associées à un polyèdre convexe.

c1. Considérons un polyèdre convexe compact P dont toutes les faces sont définies par des équations entières $f_i = \lambda_i$, on suppose les f_i choisies de sorte que P soit inclus dans le demi-espace $f_i \geq \lambda_i$. Pour chaque sommet S de P on note $I(S)$ l'ensemble des indices des faces arrivant en S, on suppose qu'il y en a n et que les f_i correspondant forment une $\mathbb{Z}$-base de N.

Pour tout S et toute partie J de $I(S)$ on note $\sigma_{S,J}$ le ccpr $f_i \geq 0$ pour tout i de J; la convexité de P montre que les $\sigma_{S,J}$ forment un co-éventail grâce auquel on fabrique une variété torique qui est la variété torique associée au polyèdre P. Par exemple $P^n(\mathbb{C})$ est la variété torique associée au simplexe standard. Nous allons voir que la variété V_P est la variété construite au troisième paragraphe à partir de P.

c2. V_P comme quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Notons k le nombre de faces de codimension 1 de P et π la projection de $\mathbb{Z}^k$ sur $\mathbb{Z}^n$ qui au i-ème vecteur de base fait correspondre f_i; la projection π définit un morphisme de $\mathbb{T}^k$ dans $\mathbb{T}^n$, dont on note N le noyau.

Soit $\sigma = \{e_{i_1} \geq 0, \dots, e_i \geq 0\}$ l'un des cônes du co-éventail définissant $\mathbb{C}^k$ (exemple b2); σ est transverse à $\mathfrak{n}^0$ si, et seulement si, tous les indices définissant σ appartiennent à un même $I(S)$ pour un certain sommet S, et $\sigma \cap \mathfrak{n}^0$ est alors égal à $\pi^*(\sigma_{S,J})$ où J désigne cet ensemble d'indices. On voit ainsi, grâce à b3 que V_P n'est autre que le quotient de l'ouvert de $\mathbb{C}^k$ où l'action de N est libre par l'action du complexifié de ce tore.

c3. Conclusion. Reprenons les notations du paragraphe 3; nous avions construit une variété par réduction symplectique ($V = H^{-1}(\lambda)/N$); or un point n'a pas de groupe d'isotropie sous l'action de N si, et seulement si, il n'en a pas sous l'action de $N^{\mathbb{C}}$; on voit ainsi que l'orbite de $H^{-1}(\lambda)$ sous l'action de $N^{\mathbb{C}}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^k$ constitué de points n'ayant pas de groupe d'isotropie sous l'action de ce tore; si Ω désigne l'ouvert des points de $\mathbb{C}^k$ n'ayant pas de groupe d'isotropie sous l'action de $N^{\mathbb{C}}$, compte tenu du fait que Ω est de codimension 2, on voit que Ω est connexe, et par suite que Ω est l'orbite de $H^{-1}(\lambda)$ sous l'action de $N^{\mathbb{C}}$: il en résulte que $V = H^{-1}(\lambda)/N = \Omega/N^{\mathbb{C}} = V_P$, ce que nous voulions voir.

BIBLIOGRAPHIE

[A–M] ABRAHAM (R.) and MARSDEN (J.). — *Foundations of mechanics, 2ième édition.* Reading, Benjamin Cummings, 1978.

[A_1] ATIYAH (M.F.). — Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.*, t. **14**, 1982, p. 1–15.

[A_2] ATIYAH (M.F.). — Angular momentum, convex polyedra and algebraic geometry, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. **26**, 1983, p. 121–138.

[A.M.M.] ARMS (J.), MARSDEN (J.) and MONCRIEF (V.). — Symmetry and bifurcation of mommentum mapping, *Comm. Math. Phys.*, t. **78**, 1981, p. 455–478.

[Da] DANILOV (V.I.). — The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys*, **33.2**, 1978, pp. 97–154. — (*Uspekhi Mat. Nauk*, **33.2**, 1978, pp. 85–134).

[De] DELZANT (T.). — *Thèse*, Paris VI, 1986.

[Du] DUISTERMAAT (J.). — Convexity and tightness for restrictions of hamiltonian functions to fixed point of an antisymplectic involution, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **275, t. 1**, 1983, p. 417–429.

[D-H] DUISTERMAAT (J.) and HECKMAN (G.). — On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, *Invent. Math.*, t. **67**, 1982, p. 259–268.

[F] FRANKEL (T.). — Fixed points and torsion on Kaehler manifolds, *Ann. of Math.*, t. **70**, 1959, p. 1–8.

[G-S] GUILLEMIN (V.) and STERNBERG (S.). — Convexity properties of the moment mapping, *Invent. Math.*, t. **67**, 1982, p. 491–513.

[Mi] MILNOR (J.). — *Morse theory*. — Princenton, Ann. of Math. Studies 51, 1968.

[R] REEB (G.). — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.* Paris, Hermann, 1952.

[S] SOURIAU (J.M.). — *Structure des systèmes dynamiques.* — Paris, Dunod, 1970.

[T] TEISSIER (B.). — Variétés toriques et polytopes, *Sém. Bourbaki*, exp. n° **565**, 1980-81.

[W_1] WEINSTEIN (A.). — Lectures on symplectic manifolds, [AMS Reg. Conf. in Math. n° 29], 1977, Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds, *Adv. in Math.*, **6**, 1971, pp. 329–346.