

HILBERTS SATZ ÜBER FLÄCHEN KONSTANTER NEGATIVER KRÜMMUNG.

VON

LUDWIG BIEBERBACH

in BERLIN.

Im zweiten Bande der »Transactions of the American mathematical society« hat HILBERT seinen Beweis für den bereits von KLEIN¹ vermuteten Satz veröffentlicht, wonach die hyperbolische nichteuklidische ebene Geometrie sich nicht als Ganzes auf einer Fläche des dreidimensionalen Euklidischen Raumes verwirklichen lässt. An den Hilbertschen Beweis schliessen sich verschiedene Versuche von Verbesserungen und Vereinfachungen an, auf die ich nachher noch zu sprechen komme. Der unmittelbare Anlass meiner Darlegungen ist eine Arbeit von LIEBMAN im Band 22 der Mathematischen Zeitschrift, auf die ich gleichfalls später näher eingehen werde.

In präziser Fassung lautet der von Hilbert etwas unbestimmt ausgesprochene Satz: *Es gibt keine Fläche des dreidimensionalen Euklidischen Raums, die in endlicher auf der Fläche gemessener Entfernung frei von Singularitäten ist und auf der durch den umgebenden Euklidischen Raum die hyperbolische Massbestimmung induziert wird.* Es sollen sich also mit anderen Worten alle Linien der Fläche zu beliebig grossen Längen auf der Fläche verfolgen lassen. Frei von Singularitäten aber nenne ich eine Fläche, wenn sie in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte regulär ist, d. h. wenn der Vektor $\xi(u, v)$ der Flächenpunkte samt den Ableitungen der drei ersten Ordnungen bei passender Wahl der Parameter in der Umgebung der betreffenden Stelle eindeutig und stetig erklärt ist, und wenn daselbst überdies $\xi_u \times \xi_v \neq 0$ ist.² Bekanntlich besitzt die hyperbolische Mass-

¹ 1871 Vergl. Ges. Abh. I. S. 249.

² So bezeichnen wir das vektorielle Produkt von ξ_u und ξ_v .

bestimmung konstantes negatives Gauss'sches Krümmungsmass K . Auf derartige Flächen beschränkt sich also die weitere Betrachtung. Es handelt sich dann darum, zu beweisen, dass es im dreidimensionalen Euklidischen Raum keine Fläche konstanter negativer Krümmung gibt, die in endlicher auf der Fläche gemessener Entfernung frei von Singularitäten ist.

Der Beweis wird indirekt geführt. Ich nehme also an, es gäbe eine Fläche F der angegebenen Beschaffenheit. Ich betrachte neben der Fläche ihre universelle Überlagerungsfläche F' . Diese kann man folgendermassen erhalten: Ich gehe von irgend einer geodätischen Linie der Fläche aus, wähle auf ihr die von irgend einem ihrer Punkte aus gezählte Bogenlänge als Parameter s , den ich in beiden Richtungen, also von $-\infty$ bis $+\infty$, verfolge. Mögen auch zu verschiedenen s -Werten die gleichen Punkte von F' gehören, so sollen doch auf der Überlagerungsfläche F' zu verschiedenen s auch verschiedene Punkte gehören. In jedem Punkte s bringe ich ausserdem die zu der eben benutzten orthogonale geodätische Linie an, längs welcher ich die Bogenlänge t als Parameter wähle. $t=0$ möge die zuerst verwendete geodätische Linie sein. Zwei dieser geodätischen Linien können sich auf der Fläche nicht treffen und zugleich mit dem zwischen ihren Fusspunkten gelegenen Bogen von $t=0$ ein einfachzusammenhängendes Flächenstück begrenzen. Denn sonst gäbe es ein geodätisches Dreieck, dessen Winkelsumme π oder grösser als π wäre. Unter einem Punkt der Überlagerungsfläche verstehe ich nun ein Wertepaar (s, t) . Verschiedene Wertepaare liefern verschiedene Punkte. In der Umgebung einer jeden ihrer Stellen ist dann die Überlagerungsfläche umkehrbar eindeutig und stetig auf die Umgebung einer Stelle der Fläche F' bezogen. Ich will überdies noch bemerken, dass so auch die ganze F auf die Überlagerungsfläche bezogen erscheint, denn bekanntlich erhält bei dieser Wahl der Koordinaten das Linienelement der Fläche die Gestalt $s'^2 + G(s)t'^2$. Wäre nun ein Punkt P der Fläche F bei unserer Konstruktion unbedeckt geblieben, so verbinde man den Ursprung O : ($s=0, t=0$) mit dem Punkte P durch irgendeine stetige rektifizierbare Kurve γ und wähle auf ihr den Punkt Q so, dass das Linienstück vom Ursprung bis zu Q hin bei der Konstruktion bedeckt wird, während jenseits Q beliebig nahe dabei unbedeckte Punkte liegen. Nun ist aber die Länge der Kurve OQ_1 , wie aus der Form des Linienelementes sofort folgt, grösser oder gleich s_{Q_1} , wenn wir mit Q_1 irgendeinen vor Q auf der Linie OQ gelegenen Punkt und mit s_{Q_1} die s -Koordinate bezeichnen, die er auf F' besitzt. Es sei nun s_Q ein Wert, derart, dass beliebig nahe bei demselben s -Koordinaten von Punkten Q_1 aus beliebiger Nähe von Q

liegen. s_Q ist die nach Voraussetzung endliche obere Grenze der s_Q . Dann grenze man um s_Q auf $t=0$ irgendeine Umgebung ab und lege durch ihre Punkte die zu $t=0$ orthogonalen geodätischen Linien. Diese bedecken eine Umgebung von Q vollständig, sodass die durch Q gezogene Linie γ noch ein Stück über Q hinaus von den Kurven unserer Konstruktion überdeckt erscheint. Die Überlagerungsfläche ist also eine in endlicher auf der Fläche gemessener Entfernung singularitätenfreie Fläche, die vermitteltst der Koordinaten s, t umkehrbar eindeutig und stetig auf die s, t -Ebene abgebildet erscheint. Auf diese Ebene ist auch die Fläche F in der Umgebung einer jeden ihrer Stellen umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet, aber im Grossen braucht diese Abbildung nicht umkehrbar eindeutig zu sein.

Wir betrachten nun die *Asymptotenlinien* der Fläche.

$$Ls'^2 + 2Ms't' + Nt'^2 = 0$$

ist ihre Differentialgleichung, wenn die linke Seite die zweite Fundamentalform bedeutet. Da $K < 0$ ist, so werden dadurch jedem Punkt von F und damit auch von F' zwei von einander verschiedene Linienelemente¹, die Asymptotenrichtungen, zugeordnet. Damit sind auch jedem Punkte der s, t -Ebene zwei Richtungen zugeordnet. Man kann sie durch Auflösung der Differentialgleichung je nach dem Vorzeichen der dabei vorkommenden Wurzel auf zwei getrennte Richtungsfelder verteilen, denn die s, t -Ebene ist ein einfach zusammenhängender Bereich. Da nach unseren über die Fläche gemachten Voraussetzungen für beide Differentialgleichungen die Lipschitzsche Bedingung erfüllt ist, so haben wir in der s, t -Ebene zwei Scharen von Asymptotenlinien. Durch jeden Punkt geht eine Kurve einer jeden Schar. Jede Asymptotenlinie kann man nach beiden Richtungen für beliebig grosse Werte der Bogenlänge verfolgen und es gilt, wenn τ diese Bogenlänge bedeutet,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} (s^2 + t^2) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (s^2 + t^2) = \infty.$$

Dies folgt aus den Sätzen von BENDIXSON², da im Endlichen der s, t -Ebene keine singulären Stellen der Fläche und damit auch der Differentialgleichung der Asymptotenlinien liegen.

¹ Ich gebrauche in dieser Arbeit das Wort »Linienelement« stets im Lieschen Sinn, während ich statt Linienelement der Fläche stets »erste Fundamentalform« sagen werde.

² Vergl. Acta math. Bd. 24 oder BIEBERBACH: Theorie der Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin 1926.

Aber noch mehr. *Je zwei zu verschiedenen Scharen gehörige Asymptotenlinien schneiden sich in genau einem Punkt.* Ich zeige zuerst, dass sie sich in *höchstens* einem Punkte schneiden. Wäre dem nicht so, so gäbe es einen Bereich der s, t -Ebene, begrenzt von je einem Bogen zweier zu verschiedenen Scharen gehörigen Asymptotenlinien. Ich betrachte zuerst den Fall, wo man bei Fortsetzung der Asymptotentiniengbogen über die Ecken A und B des Zweiecks hinaus *nicht* in dessen Inneres eintritt. Man lege durch die Punkte des einen Bogens die Asymptotenlinien der anderen Schar. (Fig. 1.) Da diese den anderen Bogen nicht treffen können und auch nach dem eben Gesagten nicht ständig in dem Zweieck verlaufen können, so müssen sie ein zweites Mal den ersten

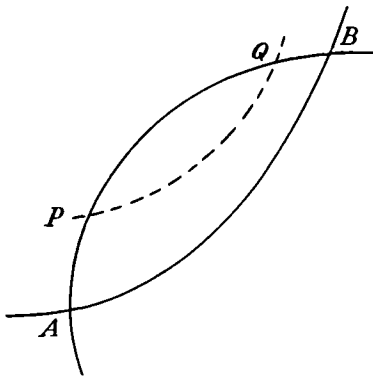


Fig. 1.

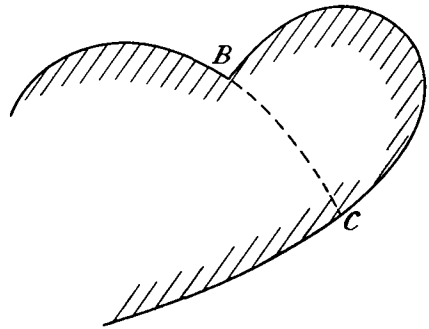


Fig. 2.

Bogen durchsetzen. Lässt man also einen Punkt P von dem einen Endpunkt A zum anderen Endpunkt B eines Bogens wandern, so wandert gleichzeitig der zunächst folgende Treffpunkt Q von B nach A . Die beiden Punkte P und Q laufen aufeinander zu und müssen irgendwo zusammentreffen. Im Treffpunkt müsste dann aber eine Berührung zweier zu verschiedenen Scharen gehörigen Asymptotenlinien erfolgen, was wegen $K < 0$ unmöglich ist.

Ich betrachte zweitens den Fall, wo bei Fortsetzung der Asymptotenlinien über wenigstens eine Ecke B des Zweiecks ein Eintritt in sein Inneres erfolgt. Dann muss man bei Fortsetzung des ins Innere eintretenden Bogens den anderen Bogen ein zweites mal von innen nach aussen durchsetzen, in einem Punkte C . (Fig. 2.) Der dabei durchlaufene Bogen BC zusammen mit dem Bogen BC der anderen Asymptotenlinie liefert nun ein Zweieck der zuerst besprochenen Art, sodass wir wie vorhin weiter schliessen können. Also können sich zwei zu

verschiedenen Scharen gehörige Asymptotenlinien in höchstens einem Punkte schneiden. Man kann natürlich in noch mannigfacher anderer Weise unsere Behauptung erhärten.

Ich zeige weiter, dass sie sich in *mindestens* einem Punkte schneiden. Dies beruht auf der Form, welche das Linienelement in genügend kleiner Umgebung einer beliebigen Stelle annimmt, wenn man die Asymptotenlinien als Parameterlinien wählt. Bekanntlich sieht dann das Linienelement so aus:

$$\sigma'^2 + 2F\sigma'\tau' + \tau'^2$$

und die Parameter σ und τ sind die Bogenlängen der Asymptotenlinien. Machen wir nun folgende Konstruktion: Ich gehe von den beiden Asymptotenlinien durch einen Punkt O der s, t -Ebene aus und lege durch jeden ihrer Punkte die Asymptotenlinie der anderen Schar. Damit bekommt man durch jeden Punkt der s, t -Ebene aus jeder Schar von Asymptotenlinien eine. Denn gäbe es einen Punkt P der Ebene, für den das nicht zutrifft, so verbinde man ihn mit O durch eine stetige Kurve und betrachte einen Punkt Q von OP derart, dass für jeden Punkt von OQ die Behauptung stimmt, während sie jenseits von Q in beliebiger Nähe von Q und vielleicht auch für Q selbst nicht mehr richtig ist. Dann betrachte man eine Umgebung von Q derart, dass sie von den Asymptotenlinien lückenlos bedeckt wird und dass sich darin je zwei in gerade einem Punkte schneiden. Dies ist nach dem im Kleinen bekannten Verhalten der Asymptotenlinien richtig. Nun betrachte man einen Punkt Q_0 dieser Umgebung, der auf OQ vor Q liegt. Die durch ihn hindurchgehenden Asymptotenlinien treffen nach der Wahl von Q die durch O gehenden Asymptotenlinien in zwei Punkten $Q_0^{(1)}$ und $Q_0^{(2)}$. Man betrachte ferner die Asymptotenlinien, die zwischen Q_0 und Q in Punkten Q_i die Linie OP treffen. Diese treffen sowohl die Asymptotenlinien durch Q_0 (in $\bar{Q}_i^{(1)}$ und $\bar{Q}_i^{(2)}$) wie die durch O in $Q_i^{(1)}$ und $Q_i^{(2)}$ und schneiden auf beiden jeweils gleichlange und »gleichgerichtete«¹ Stücke ab: $Q_0\bar{Q}_i^{(1)} = Q_0^{(1)}Q_i^{(1)}$ und $Q_0\bar{Q}_i^{(2)} = Q_0^{(2)}Q_i^{(2)}$ (vergl. Figur 3).

Dies ist jedenfalls für gewisse Umgebungen der durch Q_0 gehenden Asymptotenlinien richtig, weil zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung gehört, in der man das Linienelement auf die angegebene Gestalt bringen kann. Eine $Q_0\bar{Q}^{(1)}$ zwischen Q_0 und $\bar{Q}^{(1)}$ genügend nahe bei Q_0 treffende Asymptotenlinie schneidet also auf allen $Q_0Q_0^{(1)}$ treffenden Asymptotenlinien gleichlange Stücke ab. Wäre

¹ D. h. Stücke mit gleicher σ - bzw. τ -Differenz.

dies nicht für alle $Q_0 \bar{Q}^{(1)}$ treffenden Asymptotenlinien richtig, so wähle man auf der Q_0 mit $\bar{Q}^{(1)}$ verbundenen Asymptotenlinie einen Punkt P derart, dass zwischen Q_0 und P die Behauptung stimmt, dass aber für P selbst oder in beliebiger Nähe von P auf der anderen Seite Asymptotenlinien sich befinden, für die die Behauptung nicht stimmt. Die durch P gehende Asymptotenlinie trifft die durch O gehende in einem Punkt $P^{(1)}$ derart, dass die Längen Q_0P und $Q_0^{(1)}P^{(1)}$ gleich sind und schneidet auf allen zwischen Q_0 und $Q_0^{(1)}$ diese Linie treffenden Asymptotenlinien gleichlange Stücke ab. Trägt man nämlich auf allen diesen Asymptotenlinien die Länge Q_0P ab, in Richtung wachsender σ , so machen die End-

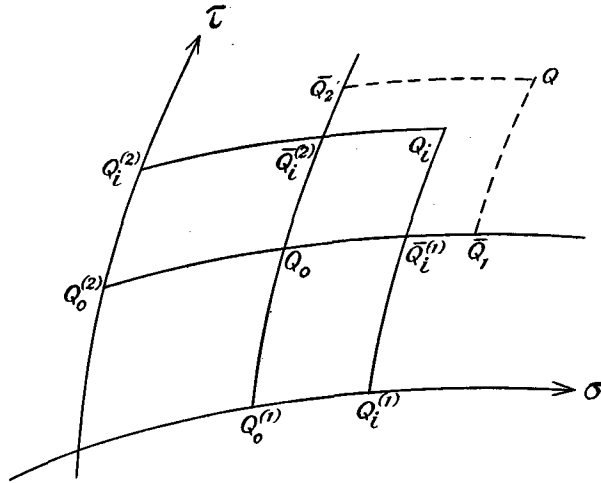


Fig. 3.

punkte eine Asymptotenlinie aus. Man erkennt dies, indem man wieder die Umgebungen der Punkte der entstandenen Linie $PP^{(1)}$ betrachtet und in diesen Umgebungen sich das Netz der Asymptotenlinien ansieht. Gleichzeitig lehrt diese Betrachtung, dass auch für alle in einer Umgebung von P die Linie $Q_0 \bar{Q}^{(1)}$ treffenden Asymptotenlinien die Behauptung richtig ist. Insbesondere gilt sie somit auch noch für die durch $\bar{Q}^{(1)}$ und für die durch die Punkte einer gewissen Umgebung von $\bar{Q}^{(1)}$ gehenden Asymptotenlinien entgegen unserer Annahme. Also werden die durch O gehenden Asymptotenlinien von den durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehenden Asymptotenlinien getroffen, und da man den Punkt O beliebig wählen kann, so treffen sich je zwei Asymptotenlinien verschiedener Scharen in genau einem Punkt. Man kann daher die Para-

meter σ und τ in der ganzen Ebene als Koordinaten verwenden und somit für die ganze Ebene das Linienelement auf die Form

$$\sigma'^2 + 2 F \sigma' \tau' + \tau'^2$$

bringen.

Der Hilbertsche Beweisgedanke für den Satz läuft nun darauf hinaus, unter Verwendung der beiden jetzt gewonnenen Formen des Linienelementes die *Curvatura Integra* zu berechnen. Setzt man nämlich $F=2 \cos \omega$, wo $\omega (0 < \omega < \pi)$ den Winkel der Asymptotenlinien bedeutet, so wird nach den Fundamentalgleichungen der Flächentheorie

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial \sigma \partial \tau} = \sin \omega \cdot K.$$

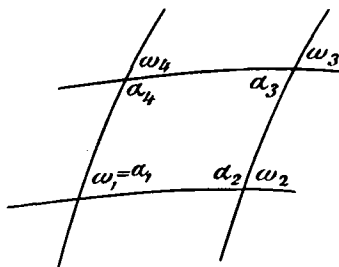


Fig. 4.

Nun ist aber für ein von den Asymptotenlinien $\sigma = \pm \alpha$ und $\tau = \pm \alpha$ begrenztes Viereck (Fig. 4)

$$\begin{aligned} \iint K df &= \iint K \sin \omega d\sigma d\tau = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi. \end{aligned}$$

Daher ist der absolute Betrag der *Curvatura integra* eines beliebig grossen im Endlichen gelegenen Stückes der Fläche nicht grösser als 2π .

Unter Verwendung der ersten Gestalt unseres Linienelementes

$$s'^2 + G(s) t'^2$$

kann man aber zeigen, dass die *Curvatura integra* eines hinreichend grossen Flächenstückes einen absoluten Betrag grösser als 2π besitzen muss, denn man findet

$$\sqrt{G} = \frac{e^{+V-K \cdot s} + e^{-V-K \cdot s}}{2}, \quad K = -\frac{1}{2} \frac{\partial G_s}{\sqrt{G} \partial s \sqrt{G}}.$$

Also wird für ein von den Parameterlinien $s = \pm a$ und $t = \pm a$ begrenztes Viereck

$$\begin{aligned} \iint K df &= \iint K \sqrt{G} ds dt = - \iint \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial s^2} ds dt \\ &= -\sqrt{-K} \cdot 2a (e^{+V-K \cdot a} - e^{-V-K \cdot a}) \end{aligned}$$

und dies wird für hinreichend grosse a absolutgenommen beliebig gross.

Der hier gegebene Beweis ist eigentlich nur eine jeden Schritt genau auseinandersetzen- de Wiedergabe des Hilbertschen Beweises, den ich im Gegensatz zu Liebmann für vollkommen einwandfrei halte. Die Darstellung ist gegenüber der Hilbertschen durch Verwendung der Überlagerungsfläche vereinfacht. Diese hat zuerst GOURSAT herangezogen, freilich ohne die Vereinfachungen auseinanderzusetzen, die durch ihre Verwendung der Hilbertsche Beweis erfahren kann. Auch LIEBMANN benutzt die Überlagerungsfläche. Sein Beweis ist aber deshalb misslungen, weil er gerade an der Stelle, wo er Hilbert angriff, einen Fehler begeht. Liebmann ist nämlich der Ansicht, dass jede isogonale Trajektorie einer Kurvenschar S jede Kurve dieser Schar treffe, falls durch jeden Punkt der Ebene genau eine Kurve der Schar S geht.

HOLMGREN hat, wenn man Blaschke¹ glauben soll, einen topologiefreien Beweis gegeben, aber ich sehe nicht, wie man seinen Beweis verstehen will, wenn man nicht weiss, dass je zwei Asymptotenlinien sich schneiden. Und das ist gerade die Stelle, wo Hilberts etwas knappe Darlegungen unverstanden geblieben sind. Goursats Beweis beruht auf demselben Grundgedanken wie der Hilbertsche, nur wird die Untersuchung des topologischen Charakters des Netzes der Asymptotenlinien auf andere wie ich glaube kompliziertere Weise geführt.

LIEBMANN stellt auch Behauptungen über die Realisierung anders als konstant gekrümmter Flächenstücke im dreidimensionalen Euklidischen Raum auf. Sein Beweis ist durch den eben erwähnten Fehler schon hinfällig, ist aber zum Überfluss noch mit einem zweiten Fehler behaftet, der darin liegt, dass Liebmann eine notwendig zu erbringende Abschätzung dadurch als geleistet ansieht, dass er die abzuschätzenden Integrale durch einen Buchstaben bezeichnet.

¹ Man vergl. dessen Differentialgeometrie.

Zum Schluss möchte ich über diese Realisierungsfragen noch ein paar Worte anfügen. Zunächst ist man versucht, den Hilbertschen Beweis, der wesentlich auf der Tschebyschefschen Form des Linienelementes beruht, dadurch zu verallgemeinern, dass man versucht, das Linienelement einer im endlichen singularitätenfreien Fläche stets auf diese Form zu bringen. Dann würde nämlich genau dieselbe Relation wie früher zwischen Krümmungsmass und Netzwinkel bestehen und es würde sich wieder ergeben, dass der absolute Betrag der Totalkrümmung $\leq 2\pi$ sein muss, dass also das sphärische Abbild nicht mehr als eine halbe Kugel bedecken kann. Aber es zeigt sich, dass nicht alle im endlichen singularitätenfreien Flächen negativer Krümmung mit Tschebyschefschen Netzen bedeckt werden können. Das einfachste Beispiel dafür ist das einschalige Hyperboloid, denn falls dasselbe als Ganzes mit einem Tschebyschefnetz versehen werden könnte, so wäre dies auch für die Überlagerungsfläche desselben möglich. Die Totalkrümmung derselben ist aber unendlich gross und daher kann sie nicht mit einem Tschebyschefnetz bedeckt werden. Dies ist also auch bei dem Hyperboloid selbst unmöglich, auch wenn es so weit geöffnet ist, dass seine Totalkrümmung absolut genommen $< 2\pi$ ausfällt. Die Theorie der Minimalflächen liefert weiter Beispiele dafür, dass auch einfach zusammenhängende singularitätenfreie Flächen jeden beliebigen endlichen negativen Wert der Totalkrümmung besitzen können. Für die Bedeckbarkeit einer im Endlichen singularitätenfreien Fläche ist somit notwendig, dass sie einfachzusammenhängend ist und eine Curvatura integra besitzt, deren Betrag 2π nicht übertrifft.
