

HOMOGENEOUS CONTACT COMPACT MANIFOLDS AND HOMOGENEOUS SYMPLECTIC
MANIFOLDS

Antonio Diaz Miranda, Agustí Reventós

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract: A homogeneous contact compact manifold can be considered as the total space of a principal circle bundle over a simply connected homogeneous symplectic manifold whose fundamental form determines an integral cohomology class. A similar result but assuming the contact manifold to be simply connected was given by Boothby and Wang. The proof we give here is independent of that of Boothby and Wang. We also prove that if a Lie group acts transitively on a symplectic manifold of integral class by diffeomorphism of the symplectic structure, there is a Lie group acting transitively on the total space of the bundle obtained from the symplectic form (Kobayashi's method) by diffeomorphisms of the contact structure. (The contact form is the correspondent connection form).

Resumen: Una variedad de contacto (M, ω) se llama homogénea si existe un grupo de Lie que actúa efectiva y transitivamente sobre M como grupo de difeomorfismos que dejan ω invariante. Si M es compacta, es el espacio total de un fibrado principal de grupo S^1 sobre una variedad simpléctica (B, Ω) . Además la clase de cohomología determinada por $\Omega, [\Omega] \in H^2(B, \mathbb{R})$, es entera. (Boothby and Wang, On contact manifolds. Annals of Math. 68(1958), 721-734).

Tenemos así un procedimiento para obtener variedades (homogéneas) simplécticas de clase entera a partir de variedades de contacto homogéneas. Nos restringimos al caso compacto. No obstante, a partir de la variedad simpléctica obtenida (B, Ω) no podemos "recuperar" la variedad de contacto inicial, puesto que si $H^2(B, \mathbb{R})$ tiene torsión pueden existir fibrados distintos con la misma clase característica real $[\Omega]$.

Por tanto no podremos decidir si el fibrado obtenido a partir de Ω por el método de Weil es isomorfo al inicial.

En este trabajo demostraremos que la variedad base de la fibración de una variedad homogénea de contacto compacta, es automáticamente simplemente conexa. Con ello $H^2(B, \mathbb{R})$ no tendrá torsión y la clase característica real determinará completamente el fibrado (salvo isomorfismos). "Grosso modo," ello nos dará una "biyección" entre variedades de contacto homogéneas compactas y variedades simplécticas homogéneas, de clase de cohomología entera, compactas y simplemente conexas.

Concretamente probaremos los siguientes resultados

Teorema 1. Sea (B, Ω) una variedad simpléctica. Las siguientes condiciones son equivalentes

- 1) (B, Ω) es un espacio homogéneo fuertemente simpléctico y compacto
- 2) (B, Ω) es un espacio homogéneo simpléctico, compacto y simplemente conexo.
- 3) es una órbita coadjunta de un grupo de Lie semisimple compacto (salvo isomorfismo simpléctico)
- 4) (B, Ω) es un espacio homogéneo simpléctico compacto con grupo fundamental finito

Recordemos brevemente que un espacio homogéneo simpléctico (B, Ω) para un grupo de Lie G de álgebra de Lie \mathfrak{g} , se llama fuertemente simpléctico si para cada $X \in \mathfrak{g}$ la 1-forma $i_{X_B} \Omega$, donde X_B es el campo generado sobre B por X , es exacta.

A partir de este resultado podremos asegurar que la base del fibrado obtenido a partir de una variedad de contacto homogénea, es (homogénea) simpléctica de clase entera y simplemente conexa. También nos permite dar el siguiente resultado.

Teorema 2. El grupo fundamental de una variedad de contacto homogénea compacta es abeliano finito.

En lo que sigue, consideraremos dos variedades de contacto (M, ω) y (M', ω') equivalentes si existe un difeomorfismo $f: M \rightarrow M'$ y una constante positiva k tal que $f^*\omega' = k\omega$.

Llamemos K al conjunto de las variedades de contacto homogéneas compactas, módulo la anterior relación de equivalencia. Llamemos H al conjunto de variedades homogéneas simplécticas, con clase entera, compactas y simplemente conexas (módulo isomorfismos simplécticos).

Denotemos por $[M, \omega]$ la clase de (M, ω) en K y por $[B, \Omega]$ la clase de (B, Ω) en H . Los comentarios anteriores nos permiten definir $\phi : K \rightarrow H$ por $\phi([M, \omega]) = [B, \Omega]$ donde (B, Ω) es la base de la fibración obtenida a partir de (M, ω) .

Obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3: ϕ está bien definida, es inyectiva y exhaustiva.

Notemos que la inyectividad nos proporciona un teorema de unicidad para fibrados con conexión y la exhaustividad nos da un procedimiento para construir todas las variedades de contacto homogéneas compactas.