氏　　　名　植田一石（うえだかずし）
学位(専攻分野)　博士(理学)
学位記番号　理博第2963号
学位授与の日付　平成18年3月23日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻　理学研究科数学・数理解析専攻

学位論文題目　Homological Mirror Symmetry for Toric del Pezzo Surfaces
（トーリックdel Pezzo曲面に対するホモロジー的ミラー対称性）

論文調査委員　（主査）助教授 河合俊哉　教授 齋藤恭司　教授 柏原正樹

論文内容の要旨

ミラー対称性（予想）とは超弦理論に由来する未だ全容が解明されていない数学的な現象であり，ある多様体の複素幾何学と別の多様体（ミラー多様体）のシンプレクティック幾何学の間に親密な関係があることを指す。元来はあるCalabi-Yau多様体とそのミラー多様体である別のCalabi-Yau多様体の間に発見されたものであるが，トーリックFano多様体の場合にも「代数的トーラスとその上の正則関数の組」を「ミラー多様体」として適宜選べばミラー対称性が成立すると予想されている。ミラー対称性には様々なバージョンが存在するが，Kontsevichは1994年にホモロジー的ミラー対称性予想というものを提唱した。これは，複素幾何学側では連接層の導来圏，シンプレクティック幾何学側では深谷圏（の導来圏）を考え，両者が三角圏として同値であることを主張するものである。本論文はトーリックdel Pezzo曲面（＝2次元トーリックFano多様体）の場合にホモロジー的ミラー対称性を証明したものである。

$N=\mathbb{Z}^2$，$N_{\mathbb{R}}=N\otimes\mathbb{R}$と置き，$X$を$N_{\mathbb{R}}$の扇$\Sigma$から決まるトーリックdel Pezzo曲面とする。Σの一次元錐の原始的な生成元の集合の凸包をNewton多角形に持つ一般の2変数Laurent多項式Wを一つ選んで固定する。Wは$(\mathbb{C}^{\times})^2=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[N]$から$\mathbb{C}$への正則関数を定める。Seidelの仕事により対象がWの消滅サイクルで，射がそれらの間のFloerホモロジーであるようなA_∞圏$\overrightarrow{\mathfrak{Fuk}}\,W$が定まり，さらにtwisted complexを考えることで，その導来圏$D^b\overrightarrow{\mathfrak{Fuk}}\,W$を構成することができる。一方，$X$は代数多様体なので，連接層の導来圏$D^b\mathrm{coh}X$が定まる。

<u>定理</u>トーリックdel Pezzo曲面Xとそのミラー$((\mathbb{C}^{\times})^2, W)$に対して，三角圏の同値

$$D^b\mathrm{coh}X\cong D^b\overrightarrow{\mathfrak{Fuk}}\,W$$

が存在する。

証明の要点は以下の通りである。左辺においてはXが射影平面の点を中心とした爆裂を繰り返して得られことに注意して，Beilinsonによる射影平面上の連接層の導来圏の生成元に関する結果と，Orlovによる爆裂による導来圏の振る舞いに関する結果を組み合わせ，生成元を見つける。それらの間の射の計算は連接層のコホモロジーの計算に帰着する。右辺は，定義より消滅サイクルで生成されており，それらの間のFloerホモロジーの計算はWのファイバーが実2次元である特殊事情から具体的に三角形の張り方を調べることによって実行できる。両辺の生成元の間に対応をつけ，それらの間の射の構造を具体的に比較することにより証明が完成する。

論文審査の結果の要旨

ミラー対称性とは一般にある多様体と別の「ミラー多様体」との間のフーリエ変換のような現象を指すが，元々は多様体としてカラビ-ヤウ多様体の場合に発見され，その場合にはミラー多様体はまた別のカラビ-ヤウ多様体になる。トーリッ

クファノ多様体の場合には「ミラー多様体」として「代数的トーラスとそのアフィン直線へのファイバー構造（射影をWと記す）の組」をとればよく，Wはファノ多様体の記述に用いたトーリック幾何のデータから容易に定まることが以前より良く知られている。

Kontsevichにより提唱されたホモロジー的ミラー対称性予想とはある複素多様体の連接層の導来圏とそのミラー多様体に対して定まる深谷圏との間に三角圏としての同値関係が存在すると主張するものであった。この予想を具体例で検証しようとすると二つの三角圏の明示的記述が必要となる。連接層の導来圏の構造を決めることは代数的問題であり，多くの場合に具体的結果が知られている。より困難なのは深谷圏の記述でありそのためにはフレアーホモロジーとその積構造を知る必要がある。これは擬正則円盤の数え上げ問題となり一般には難しい問題である。しかし，予想への試みや成功例は既にいくつかある。P. Seidelはトーリックファノ多様体の場合のホモロジー的ミラー対称性予想の証明のための数学的枠組みを整備し，具体的に射影曲面の場合に証明を与えた。射影平面上の連接層の導来圏に関してはBeilinsonによる結果が知られており，何も苦労は要しない。深谷圏の方も，実はこの場合Wのファイバーが複素1次元となり，擬正則円盤の数え上げ問題は三角形の張り方をみるだけでよく劇的に簡単になってしまう。その後，P. Seidelは4次曲面としてのK3曲面に対してホモロジー的ミラー対称性予想の検証を行っているがこの場合はもっと事情が複雑である。

植田氏の結果はトーリック曲面である射影曲面の3点爆裂に対してP. Seidelによる射影曲面の場合と同様な考察を遂行して予想を証明したものである。連接層の導来圏の構造に関してはBeilinsonの結果に加えて爆裂による導来圏の振る舞いに関するOrlovの結果を使っており，容易である。深谷圏側ではやはりWのファイバーが複素1次元で三角形の張り方をみるだけでよいことが効いている。以上より明らかなように本論文の結果が非常に斬新である訳ではない。また，証明の過程において，非常に独創的なアイデアが現れているという訳でもない。しかしながら，ホモロジー的ミラー対称性の理解には多くのことが絡み合い，また具体例による検証はまだ十分豊富になされているとは言い難い。さらに，本論文のような具体的な計算においては，多くの手間を必要とするので，これらをまとめあげて最終的な結果に到達するには努力と力量が必要であったことは間違いない。

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた。