BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DEHEUVELS

Homologie des ensembles ordonnés et des espaces topologiques

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 261-321

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__261_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 261 à 321.

HOMOLOGIE DES ENSEMBLES ORDONNÉS ET DES ESPACES TOPOLOGIQUES

PAR

René DEHEUVELS

(Lille).

à M. Marston Morse
en hommage de ma profonde admiration.

Introduction. — Cette étude est le développement d'une Note [3] et des conférences données aux Séminaires de M. Morse (Princeton, février 1960) et P. Dubreil [4] (mai 1961).

La nature de l'homologie et de la cohomologie des espaces topologiques a été, depuis la fondation de la Topologie algébrique, l'objet de nombreux travaux (citons, parmi les plus récents : [1], [2], [6], [8], [9], [10], [11] de la bibliographie). Le fait que, jusqu'à présent, aucun traitement convenable de l'homologie (« de Čech ») n'avait pu être donnée, montre bien l'insuffisance des concepts qui étaient employés.

Notre but était d'obtenir un tel traitement et, plus généralement, de définir de façon satisfaisante l'homologie et la cohomologie à coefficients dans un préfaisceau ou un antifaisceau sur une catégorie abélienne $\mathcal{C}$. Ces définitions sont données aux paragraphes 14 et 15 et nous y utilisons la notion d'hyperdérivés d'un foncteur composé (§ 13).

Dans le cas d'un espace métrique compact (§ 14.2) et de coefficients constants nous retrouvons l'homologie de Steenrod [12], et rectifions l'homologie de Vietoris [13].

Pour définir les foncteurs d'homologie et de cohomologie dans la catégorie des espaces topologiques, nous avons été amené à considérer systématiquement la catégorie des ensembles ordonnés, et la majeure partie de ce Mémoire est ainsi consacrée à l'exposé d'une théorie de l'homologie et de la cohomologie, « à coefficients », des ensembles ordonnés.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné, et si à chaque élément $a \in \mathcal{E}$ on attache un objet $A(a)$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ et à chaque couple ordonné $a \prec b$ un morphisme $p_{ab}: A(a) \to A(b)$, tels que si $a \prec b \prec c$, $p_{ac} = p_{bc} \circ p_{ab}$, on forme un « système covariant de coefficients » analogue à un préfaisceau (ou à un antifaisceau) sur les ouverts d'un espace topologique. Pour ces coefficients A l'analogue des sections d'un préfaisceau est noté ΓA : si par exemple les $A(a)$ sont des ensembles, un élément de ΓA est un ensemble cohérent formé, pour chaque $a \in \mathcal{E}$ d'un élément σ_a de telle sorte que si $a \prec b$, $\sigma_b = p_{ab}\sigma_a$. On voit donc que si $\mathcal{E}$ est fitrant à gauche, le « foncteur sections » Γ (§ 4) n'est autre que la limite inverse.

La cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans un faisceau est définie par les dérivées à droite $r^n\Gamma$ du foncteur sections Γ. Nous définissons d'une façon analogue la *cohomologie d'un ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ relativement à un système de coefficients A par

$$H^n(\mathcal{E}; A) = (r^n\Gamma)A.$$

Dualement, un foncteur cosections L est défini au paragraphe 4, et l'*homologie de* $\mathcal{E}$ relativement à A est définie par

$$H_n(\mathcal{E}; A) = (l_n\mathrm{L})A.$$

Lorsque $\mathcal{E}$ est filtrant à droite, L n'est autre que la limite directe.

Or, à un ensemble ordonné correspond trivialement un schéma simplicial ordonné, en prenant pour simplexes ordonnés les $(n+1)$-uples ordonnés $a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n$, et à un schéma simplicial correspond un ensemble ordonné par la relation d'inclusion entre simplexes. Nous prouvons au paragraphe 11 que dans ces deux correspondances l'homologie relativement à un système contravariant de coefficients et la cohomologie relativement à un système covariant de coefficients se conservent. On ne sait, en effet, définir sur un schéma simplicial, à l'aide de la formation usuelle du bord des simplexes, ni l'homologie relativement à un système covariant, ni la cohomologie relativement à un système contravariant, alors que *ces définitions sont naturelles pour un ensemble ordonné*. La correspondance entre schéma simplicial et ensemble ordonné permet donc d'obtenir ces définitions.

Ces propriétés, jointes au fait que l'homologie et la cohomologie d'un ensemble ordonné s'obtiennent par dérivations de foncteurs, *ce qui permet l'usage des techniques de l'algèbre homologique*, montrent l'incontestable avantage de l'emploi des ensembles ordonnés sur les traditionnels schémas simpliciaux.

Il s'y ajoute l'existence d'un type très important de relation entre ensembles ordonnés, sans analogue dans le cas simplicial : celle d'« ordre » d'un ensemble ordonné dans un autre (§ 2), qui détermine tous les morphismes canoniques (*cf.* § 7, 10.5, 10.6, 13.3, 13.4, 14, 15 et 16).

D'autre part, à tout ensemble muni d'une structure algébrique correspond un ensemble ordonné : sous-groupe d'un groupe, familles d'idéaux d'un anneau, sous-variétés d'une variété algébrique, etc., dont l'étude est essentielle pour la connaissance de la structure donnée.

L'introduction de l'homologie et de la cohomologie d'un ensemble ordonné offre donc aux méthodes homologiques un nouveau champ d'application.

Les trois derniers paragraphes consacrés à l'homologie et la cohomologie des espaces topologiques ne vont guère au-delà des définitions. Une suite au présent travail étudiera les produits, la dualité entre homologie et cohomologie et les relations entre nos définitions et la théorie de l'homologie à coefficients dans un faisceau sur un espace localement compact de Borel et Moore. Mentionnons simplement le fait que les « chaînes » de Borel-Moore analogues aux courants de de Rham) sont des formes linéaires sur les cochaînes à supports compacts et sont donc des « chaînes infinies » contrairement aux chaînes introduites ici.

Nous avons également laissé au lecteur le soin d'expliciter les innombrables suites spectrales qui prennent naissance dans le cas particulier où l'on compose un foncteur avec une limite directe ou inverse.

1. Catégories $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{C}^*(\mathcal{E})$. — Soit $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné. On peut considérer ses éléments : a, b, ... comme les objets d'une catégorie (*cf.* [7], [8]) dont les morphismes sont les relations d'ordre :

$$\mathrm{Hom}(a, b) \text{ est formé de l'élément unique } \prec \text{ si } a \prec b,$$
$$\mathrm{Hom}(a, b) = \emptyset \quad \text{si} \quad a \not\prec b.$$

Nous désignerons par $\mathcal{E}^*$ l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de la relation d'ordre opposée, par $\mathcal{C}^*$ la catégorie duale de $\mathcal{C}$ ([8]).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque. Désignons par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, [resp. $\mathcal{C}^*(\mathcal{E})$], la catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants (resp. contravariants) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}$, et les morphismes les transformations naturelles de foncteurs.

Un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ consiste donc en la donnée, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, d'un objet $A(a) \in \mathcal{C}$ et pour chaque couple ordonné $a \prec b$ d'un morphisme $p_{ab}: A(a) \to A(b)$ de telle sorte que, si $a \prec b \prec c$:

$$p_{ab} = p_{bc} \circ p_{ab}.$$

Un morphisme f de A dans B, *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ consiste en la donnée, pour chaque $a \in \mathcal{E}$ d'un morphisme $f_a: A(a) \to B(a)$, de telle sorte que, pour tout couple ordonné $a \prec b$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(a) & \xrightarrow{p_{ab}} & A(b) \\ \downarrow{\scriptstyle f_a} & & \downarrow{\scriptstyle f_b} \\ B(a) & \xrightarrow[q_{ab}]{} & B(b) \end{array}$$

soit commutatif :

$$f_b p_{ab} = q_{ab} f_a.$$

Par exemple, si $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X, ordonné par $O_1 \prec O_2 \Leftrightarrow O_1 \supset O_2$, $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ est la catégorie des *préfaisceaux* sur X, $\mathcal{C}^*(\mathcal{O})$ la catégorie des antifaisceaux sur X, à valeurs dans $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 1.1. — *Si $\mathcal{C}$ est abélienne (cf. [7], [8]), $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est abélienne.*

PREUVE. — L'objet nul de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ s'obtient évidemment en prenant, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, l'objet nul de $\mathcal{C}$, un morphisme nul, en prenant, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, un morphisme nul dans $\mathcal{C}$.

Si f et g sont deux morphismes de A dans B, la collection des $(f_a + g_a)$ définit un morphisme $f+g$; pour cette addition, $\mathrm{Hom}(A;B)$ est un groupe abélien, et la composition des morphismes est bilinéaire

Si f est un morphisme de A dans B, on vérifie immédiatement que les $\mathrm{Ker} f_a$ forment avec les restrictions des p_{ab} un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, le *noyau* $\mathrm{Ker} f$ de f. De même, les $\mathrm{Coker} f_a$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, le *conoyau* $\mathrm{Coker} f$. $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Coker} f$ satisfont aux propriétés voulues ([7], p. 13).

Il en résulte que f est un *monomorphisme* de A dans B, A, $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, si et seulement si tous les f_a sont des monomorphismes, un *épimorphisme*, si et seulement si tous les f_a sont des épimorphismes.

Si J est un ensemble d'indices tel que, pour toute famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexés sur J, leur somme directe existe, alors, pour toute famille d'objets A_j, $j \in J$, de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, la somme directe $\bigoplus_{j \in J} A_j$ existe et est définie par

$$\Big(\bigoplus_{j \in J} A_j\Big)(a) = \bigoplus_{j \in J} A_j(a), \qquad p_{ab} = \bigoplus_{j \in J} p^j_{ab}.$$

Propriété analogue pour le produit.

Nous appellerons, pour éviter des répétitions, objet *élémentaire* de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ en $a \in \mathcal{E}$, un objet $E^a = \{E^a(c), q_{cd}\}$ tel que :

1° q_{cd} soit un isomorphisme si $c \prec d \prec a$ [donc $E_a(c)$ est « constant et égal à $E^a(a)$ », si $c \prec a$];

2° $E^a(c)$ soit l'objet nul si $c \not\prec a$.

Dualement, un objet *coélémentaire* de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ en $a \in \mathcal{E}$ est un objet $E_a = \{E_a(c), r_{cd}\}$ tel que

1° r_{cd} soit un isomorphisme si $a \prec c \prec d$;

2° $E_a(c)$ soit l'objet nul si $a \not\prec c$.

Si $A = \{A(c), p_{cd}\}$ est un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, chaque $a \in \mathcal{E}$ fait correspondre à A :

1° l'objet élémentaire A^a tel que $A^a(a) = A(a)$, et un *morphisme canonique f de A dans A^a* défini par $f_b = p_{ba}$ si $b \prec a$ [de $A(b)$ dans $A^a(b) = A(a)$] et $f_b = 0$ si $b \not\prec a$;

2° l'objet coélémentaire A_a tel que $A_a(a) = A(a)$, et un *morphisme canonique g de A_a dans A* défini par $g_b = p_{ba}$ si $a \prec b$, et $g_b = 0$, si $a \not\prec b$.

La proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 1.2. — *Si E^a est un objet élémentaire, $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$,*

$$\operatorname{Hom}(B; E^a) = \operatorname{Hom}(B(a); E^a(a)).$$

Si E_a est un objet coélémentaire,

$$\operatorname{Hom}(E_a; B) = \operatorname{Hom}(E_a(a); B(a)).$$

Il en résulte qu'un objet élémentaire E^a est un *injectif* de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ si et seulement si $E^a(a)$ est un injectif de $\mathcal{C}$, et qu'un objet coélémentaire E_a est un projectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, si et seulement si $E_a(a)$ est un *projectif* de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 1.3. — *Si dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, le produit direct d'une famille quelconque d'objets existe, et si tout objet se plonge dans un objet injectif, alors tout objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ se plonge dans un objet injectif, produit direct d'objets injectifs élémentaires.*

PREUVE. — Soient $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ et, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, $J(a)$ un objet injectif de $\mathcal{C}$ contenant $A(a)$, J^a l'objet élémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ défini par $J^a(a) = J(a)$. J^a est injectif. $I = \prod_{a \in \mathcal{E}} J^a$ est donc également un injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Le produit j des morphismes canoniques $j^a : A \to A^a \to J^a$, de A dans I est un monomorphisme puisque chaque $b \in \mathcal{E}$,

$$A(b) \to \prod_{a \in \mathcal{E}} J^a(b) = \prod_{\substack{a \in \mathcal{E} \\ b < a}} J(a),$$

est un monomorphisme.

Dualement :

PROPOSITION 1.4. — *Si dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, la somme directe d'une famille quelconque d'objets existe et si tout objet est image d'un objet projectif, alors tout objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est image d'un objet projectif, somme directe d'objets projectifs coélémentaires.*

PREUVE. — Soient $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, et pour chaque $a \in \mathcal{E}$, $Q(a)$ un objet projectif de $\mathcal{C}$ d'image $A(a)$, Q^a l'objet coélémentaire défini par $Q^a(a) = Q(a)$. $P = \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} Q^a$ est un objet projectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ d'image A.

2. Opérations dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. — Un foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ induit un foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}'(\mathcal{E})$ par

$$A = \{A(a), p_{ab}\} \to \{FA(a), Fp_{ab}\}.$$

Un foncteur contravariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ induit un foncteur contravariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}'(\mathcal{E}^*)$. Il en est ainsi par exemple du foncteur Λ de la catégorie $\mathcal{L}_g$ des Λ-modules à gauche, dans la catégorie $\mathcal{L}_d$ des Λ-modules à droite (Λ, anneau unitaire)

$$\Lambda = \mathrm{Hom}_Z(\ \ ;\ T) \qquad (T = \text{groupe des réels mod } 1).$$

Ce foncteur est exact et induit un foncteur exact de $\mathcal{L}_g(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{L}_d(\mathcal{E}^*)$. Les définitions analogues pour les multifoncteurs s'établissent sans difficulté, par exemple celle du produit tensoriel d'un objet de $\mathcal{L}_g(\mathcal{E})$ et d'un objet de $\mathcal{L}_d(\mathcal{E})$: c'est un objet de $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{J}$ est la catégorie des J-modules, J centre de Λ.

Soient $\mathfrak{A}$ la catégorie des anneaux unitaires et des homomorphismes unitaires, et $A = \{A(a), r_{ab}\} \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$. Définissons la catégorie $\mathfrak{M}_A$ des A-modules : un objet de $\mathfrak{M}_A$ est la donnée, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, d'un $A(a)$-module $M(a)$, et, pour chaque couple ordonné $a \prec b$, d'un homomorphisme p_{ab} de $M(a)$ dans $M(b)$ compatible avec les opérations de $A(a)$ et $A(b)$, c'est-à-dire tel que, si $\alpha(a) \in A(a)$, $m(a) \in M(a)$:

$$p_{ab}[\alpha(a) . m(a)] = [r_{ab}\alpha(a)] . p_{ab} m(a).$$

Ces définitions généralisent naturellement celles de préfaisceaux d'anneaux et de préfaisceaux de modules sur un préfaisceau d'anneaux.

Appelons *ordre* ρ (*cf.* [5], chap. I) *de l'ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ *dans l'ensemble ordonné* $\mathcal{E}'$, une relation d'ordre sur la réunion $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ induisant les relations d'ordres données sur $\mathcal{E}$ et sur $\mathcal{E}'$ et telle que les seules relations d'ordre entre un élément de $\mathcal{E}$ et un élément de $\mathcal{E}'$ soient du type $a \prec a'$ (on ne considère *aucune* relation du type $a' \prec a$!). Lorsqu'il y a lieu de considérer des ensembles non disjoints, *il est nécessaire de distinguer* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$. L'ordre canonique de $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$, si $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ ou si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, par exemple, exclut les relations d'ordre du type $a' \prec a$, $a' \in \mathcal{E}'$, $a \in \mathcal{E}$.

Exemples :

a. Si $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ sont deux parties d'un même ensemble ordonné $\mathcal{E}$, la relation d'ordre dans $\mathcal{E}$ détermine un ordre de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}''$ et un ordre de $\mathcal{E}''$ dans $\mathcal{E}'$.

b. Une application croissante f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ détermine un ordre f_0 de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ par $a \prec a'$ si $f(a) \prec a'$, et un ordre f'_0 de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ par $a' \prec a \Leftrightarrow a' \prec f(a)$.

c. L'addition d'un premier élément x à $\mathcal{E}$ détermine un ordre de x dans $\mathcal{E}$.

d. Une application quelconque ψ d'un espace topologique X dans un autre X' détermine un ordre de l'ensemble ordonné des ouverts de X' : $\mathcal{O}'$, dans celui $\mathcal{O}$ de X par $O' \prec O \Leftrightarrow O' \supset \psi O$. L'application de X sur un point x revient donc à *ajouter un premier élément x à $\mathcal{O}$*. Mais l'addition d'un dernier élément à $\mathcal{O}$, naturelle du point de vue des ensembles ordonnés, ne se décrit pas par une application ponctuelle.

Un morphisme f de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ au-dessus d'un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est tout simplement un objet $C \in \mathcal{C}(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$ qui induit A sur $\mathcal{E}$ et B sur $\mathcal{E}'$.

3. Foncteur « sections » Γ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. — Nous allons donner du foncteur *sections :* Γ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ plusieurs descriptions valables à des degrés divers de généralité, extensions naturelles de la notion de section d'un préfaisceau ou d'un espace fibré [la base étant $\mathcal{E}$, l'« espace fibré » : $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ et la continuité remplacée par les morphismes de définition de A].

3.1. — Supposons que les objets de $\mathcal{C}$ soient des ensembles et appelons *section* de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ toute fonction σ qui, à chaque $a \in \mathcal{E}$ attache un élément $\sigma(a) \in A(a)$ de telle sorte que si $a \prec b$:

$$\sigma(b) = p_{ab}\sigma(a).$$

Soit ΓA *l'ensemble des sections.* C'est un sous-ensemble de l'ensemble $\prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)$ des fonctions arbitraires de $\mathcal{E}$ dans A.

On est assuré que ΓA est un objet de $\mathcal{C}$ dans tous les cas usuels. C'est évident si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens, on définit naturellement sur ΓA une addition par addition des composantes $(\sigma + \sigma')(a) = \sigma(a) + \sigma'(a)$, qui fait de ΓA un groupe abélien. Raisonnement analogue si $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules sur un anneau, des anneaux unitaires, etc.

L'application qui, à chaque section σ, fait correspondre sa composante $\sigma(a) \in A(a)$ est un morphisme (dans $\mathcal{C}$) : de ΓA dans $A(a)$ tel que si $a \prec b : p^b = p_{ab} \cdot p^a$.

Si f est un morphisme $A \to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'image par f d'une section σ de A est une section $f\sigma$ de B. Cette application définit un *morphisme* $\Gamma f : \Gamma A \to \Gamma B$ tel que, pour chaque $a \in \mathcal{E}$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma A \arrow[r, "p^a"] \arrow[d, "\Gamma f"'] & A(a) \arrow[d, "f_a"] \\
\Gamma B \arrow[r, "q^a"] & B(a)
\end{tikzcd}$$

3.2. — **Autre version de la définition de Γ dans la catégorie** $\mathcal{M}_A$ des A-modules sur $\mathcal{E}$ (*cf.* § 2) : si $M \in \mathcal{M}_A$, soit $\Gamma M = \mathrm{Hom}_A(A ; M)$ et si

$f:M \to N$ est un morphisme dans $\mathfrak{M}_A$, soit Γf le morphisme canonique $\Gamma M \to \Gamma N$ induit par f.

Cette définition coïncide avec la précédente : en effet, un A homomorphisme de A dans M est entièrement déterminé par l'image de la section unité de A, qui est une section arbitraire de M.

3.3. — De la même façon qu'on peut considérer l'ensemble des sections d'un faisceau sur un espace topologique X comme l'image directe du faisceau par l'*application de X sur un point x* (qui revient, comme nous l'avons vu au paragraphe 2, à l'addition d'un premier élément à l'ensemble ordonné des ouverts $\mathcal{O}$ de X), nous allons considérer le foncteur sections sur $\mathcal{E}$ comme le foncteur *image inverse par l'ordre ξ du point x dans $\mathcal{E}$*. $\xi : x \prec \mathcal{E}$, où x est un premier élément ajouté à $\mathcal{E}$ (§ 2).

Comme $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}$, un morphisme de $S \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(x)$ dans $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ au-dessus de ξ, est un élément h de $\prod_{a \in \mathcal{E}} \operatorname{Hom}(S; A(a))$ tel que $h_b = p_{ab} . h_a$, pour tous les couples ordonnés $a \prec b$.

Définition. — *Soit $\xi : x \prec \mathcal{E}$, un premier élément de $\mathcal{E}$. Appelons* foncteur sections Γ *ou* foncteur image inverse par ξ, *un foncteur qui fait correspondre :*

à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, un objet de $\mathcal{C}$, noté ΓA ou $\overset{-1}{\xi} A$: objet des sections de A, *et un morphisme p_A au-dessus de $\xi : \Gamma A \to A$* (§ 2);

à chaque morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, un morphisme Γf ou $\overset{-1}{\xi} f : \Gamma A \to \Gamma B$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overset{-1}{\xi} A = \Gamma A & \xrightarrow{p_A} & A \\ {\scriptstyle \overset{-1}{\xi} f = \Gamma f} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ \overset{-1}{\xi} B = \Gamma B & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

soit commutatif, de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée ;

Tout morphisme $S \to A$ de $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ au-dessus de ξ a une factorisation unique par p_A : $S \to \Gamma A \to A$, autrement dit, le morphisme induit par p_A :

$$\operatorname{Hom}(S; \Gamma A) \equiv \operatorname{Hom}\left(S; \overset{-1}{\xi} A\right) \xrightarrow{p_A} \prod_{a \in \mathcal{E}} \operatorname{Hom}(S; A(a))$$

est un monomorphisme dont l'image soit exactement formée des morphismes de S dans A au-dessus de ξ :

$$\operatorname{Hom}_\xi(S; A) = \operatorname{Hom}\left(S; \overset{-1}{\xi} A\right).$$

Il est clair que si un tel foncteur existe, il est unique à un automorphisme près de $\mathcal{C}$, et que si E^a est un objet élémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, nécessairement $\Gamma E^a = E^a(a)$.

Dans le cas où les objets de $\mathcal{C}$ sont des ensembles, éventuellement munis d'une structure algébrique, le foncteur Γ défini dans 3.1 satisfait, par construction, à la définition ci-dessus.

Remarquons alors que si $\mathrm{Hom}(S; A)$, $S \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, désigne l'objet de $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ ($\mathfrak{X}$ catégorie des ensembles), formé des $\mathrm{Hom}(S; A(a))$ et des applications induites par les p_{ab}, Γ existant pour $\mathfrak{X}$, l'existence de Γ pour $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ revient à l'égalité fonctorielle

$$\Gamma \mathrm{Hom}(S; A) = \mathrm{Hom}(S; \Gamma A).$$

Nous allons, sans faire d'hypothèse *sur les objets* de $\mathcal{C}$, démontrer l'existence de Γ pour $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne avec produits.

Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ *additive*, et soit, pour tout couple ordonné $(a \prec b)$ de $\mathcal{E}$: $A(a, b) = A(b)$. On peut alors interpréter simplement les conditions que doit vérifier h, en posant

$$\partial_s : \prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S; A(a)) \xrightarrow{\partial_s} \prod_{\substack{a, b \\ a \prec b}} \mathrm{Hom}(S; A(a, b)),$$

$$(\partial_s h)_{a,b} = h_b - p_{ab} h_a,$$

h définit un morphisme de S dans A si et seulement si $\partial_s h = 0$.

Si les produits existent dans $\mathcal{C}$, on a

$$\prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(S; A(a)) = \mathrm{Hom}\Big(S; \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)\Big)$$
$$\xrightarrow{\partial_s} \mathrm{Hom}\Big(S; \prod_{\substack{a, b \\ a \prec b}} A(a, b)\Big) = \prod_{\substack{a, b \\ a \prec b}} \mathrm{Hom}(S; A(a, b)),$$

∂_s est induit par un morphisme ∂ indépendant de S :

$$\prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \xrightarrow{\partial} \prod_{\substack{a, b \\ a \prec b}} A(a, b)$$

ainsi défini : ∂ est le produit des morphismes $\partial_{a,b}$, où $\partial_{a,b}$ est la « composante » de ∂ appliquée dans $A(a, b)$:

$$\partial_{a,b} = 1_{A(b)} - p_{ab} \cdot 1_{A(a)}, \qquad \partial = \prod_{a \prec b} \partial_{a,b},$$

autrement dit $\partial_{a,b}$ est nul sur tous les $A(c)$, $c \in \mathcal{E}$ sauf sur $A(b)$ où il est l'identité sur $A(a, b) = A(b)$ et sur $A(a)$ où il est $-p_{ab}$.

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, définissons $\Gamma A = \operatorname{Ker} \delta$:

$$0 \to \Gamma A \to \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \xrightarrow{\delta} \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} A(a, b,)$$

est exacte.

Il en résulte que la suite

$$0 \to \operatorname{Hom}(S; \Gamma A) \to \operatorname{Hom}\Bigl(S; \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)\Bigr) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Hom}\Bigl(S; \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} A(a, b)\Bigr)$$

est aussi exacte. Donc un élément $h \in \operatorname{Hom}\Bigl(S; \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)\Bigr)$ est un morphisme de S dans A si et seulement s'il se laisse factoriser par ΓA :

$$h \in \operatorname{Ker} \delta \iff h \in \operatorname{Hom}(S; \Gamma A).$$

Soient p_A le morphisme canonique de ΓA dans A que définit l'inclusion $\Gamma A \to \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a)$, et, si f est un morphisme $A \to B$, Γf le morphisme canonique

$$\Gamma A = \operatorname{Ker} \delta^A \to \operatorname{Ker} \delta^B = \Gamma B$$

déterminé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) & \xrightarrow{\delta^A} & \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} A(a, b) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi f} \\
\prod_{a \in \mathcal{E}} B(a) & \xrightarrow{\delta^B} & \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} B(a, b).
\end{array}$$

Les conditions de la définition du foncteur sections sont vérifiées, et l'on a démontré :

PROPOSITION 3. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits quelconques. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné, il existe sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ un foncteur sections Γ (définition ci-dessus). Ce foncteur Γ est additif et exact à gauche (comme on le vérifie immédiatement).*

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ([8], p. 137 de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens, le morphisme δ défini ci-dessus est l'homomorphisme

$$\alpha \in \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) : \quad (\delta\alpha)_{a,b} = \alpha(b) - p_{ab}\,\alpha(a).$$

3.4. Quatrième définition de Γ. — Nous supposerons maintenant que $\mathcal{C}$ est une *catégorie abélienne avec produits dont tout objet se plonge dans un objet injectif*. Considérons la catégorie $\mathcal{C}(x\cup\mathcal{E})$, $(x\cup\mathcal{E})$ représente $\mathcal{E}$ auquel on a ajouté un premier élément x), et le foncteur $\mathcal{C}(x\cup\mathcal{E})\to\mathcal{C}$ que nous noterons

$$A\in\mathcal{C}(x\cup\mathcal{E}) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Im}\left[A(x)\to\prod_{a\in\mathcal{E}}A(a)\right]=\mathrm{Im}\,A\in\mathcal{C},$$

$$\varphi : A\to B \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Im}\,\varphi : \mathrm{Im}\,A\to\mathrm{Im}\,B.$$

On peut construire les dérivées à droite $r^n\mathrm{Im}$, $n\geqq 0$, d'après la proposition 1.3. Par composition avec le foncteur de restriction $\mathcal{C}(x\cup\mathcal{E})\to\mathcal{C}(\mathcal{E})$ Γ (défini par 3.3) devient un foncteur $\mathcal{C}(x\cup\mathcal{E})\to\mathcal{C}$. Nous allons prouver que

$$r^n\Gamma=r^n\mathrm{Im},\qquad n\geqq 0$$

et en particulier

$$\Gamma=r^0\,\mathrm{Im}.$$

L'inclusion canonique $\mathrm{Im}\,A\subset\Gamma A$ est une transformation naturelle de foncteurs

$$\mathrm{Im}\,A\to\Gamma A,\qquad \mathrm{Im}\,\varphi\to\Gamma\varphi : \quad \mathrm{Im}\,\varphi=\Gamma\varphi\,|\,\mathrm{Im}\,A.$$

Or, sur un objet élémentaire (§ 2) de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, A^a, Im et Γ coïncident :

$$\mathrm{Im}\,A^a=\Gamma A^a=A^a(a).$$

De plus, si $\{A_j, j\in J\}$ est une famille d'objets de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$,

$$\mathrm{Im}\prod_j A_j=\prod_j\mathrm{Im}\,A_j \qquad\text{et}\qquad \Gamma\prod_j A_j=\prod_j\Gamma A_j.$$

Donc, Im et Γ coïncident sur les produits d'injectifs élémentaires de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, donc sur une résolution injective de A au moyen de tels objets. Donc, $r^p\Gamma=r^p\mathrm{Im}$, $r\geqq 0$.

Comme Γ est exact à gauche, $r^0\Gamma=\Gamma=r^0\mathrm{Im}$. Il en résulte que les $r^n\mathrm{Im}=r^n\Gamma$, $n\geqq 0$, sont en fait définis sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ce qui était évident *a priori* sur l'image par Im d'une résolution de A par des produits d'injectifs élémentaires.

Remarque. — On vérifie aisément que les dérivées à gauche de Im sont nuls (lorsqce $\mathcal{C}$ satisfait aussi aux hypothèses de la proposition 1.4).

3.5. — Donnons une dernière version de la définition de Γ lorsque $\mathcal{E}$ est un treillis, qui ne sera rien d'autre que l'habituelle définition des cocycles de Čech de degré 0. Supposons pour simplifier que $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, sous-catégorie des groupes abéliens : se donner une section σ de $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$ revient à se donner un élément $\sigma(a)$ de chaque $A(a)$, de telle sorte que ces éléments « se raccordent » sur les intersections.

Autrement dit, on doit avoir dans $A(a\cap b)$:

$$p_{a,a\cap b}\sigma(a)=p_{b,a\cap b}\sigma(b).$$

En effet, si σ est une section de A, ces deux éléments de $A(a\cap b)$ sont tous deux égaux à $\sigma(a\cap b)$, et réciproquement, si toutes ces égalités sont vérifiées, on a, en particulier lorsque $a\succ b$, $b=a\cap b$ et $p_{a,b}\sigma(a)=\sigma(b)$.

Donc

$$\Gamma A=\operatorname{Ker}\left[\prod_a A(a)\xrightarrow{\check{\delta}}\prod_{a,b}A(a\cap b)\right],$$

avec

$$(\check{\delta}\sigma)(a\cap b)=p_{a,a\cap b}\sigma(a)-p_{b,a\cap b}\sigma(b).$$

La restriction de $\check{\delta}$ à $\prod_{a,b} A(a,b)$ (*cf.* 4.3) qui est plongé dans $\prod_{\substack{a,b\\ a\prec b}} A(a\cap b)$ coïncide avec δ.

4. Foncteur « cosections » L sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. — Nous allons définir dualement un foncteur *cosections L* sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

4.1. — Considérons l'ordre de $\mathcal{E}$ dans un point y, obtenu en ajoutant un dernier élément y à $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}\cup y$. Comme $\mathcal{C}(y)=\mathcal{C}$, un morphisme k de $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $S\in\mathcal{C}(y)$ est un élément k de $\prod_{a\in\mathcal{E}}\operatorname{Hom}(A(a);S)$ tel que $k_b.p_{ab}=k_a$.

DÉFINITION. — *Soit $\eta:\mathcal{E}\prec y$ un dernier élément de $\mathcal{E}$. Appelons* foncteur cosections L, *ou* foncteur image directe par η, un *foncteur qui fait correspondre :*

à chaque objet $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, un objet de $\mathcal{C}$ noté LA *ou ηA :* objet des cosections *de A, et un morphisme p^A au-dessus de $\eta:A\to \mathrm{L}A=\eta A$* (§ 2);

à chaque morphisme $f:A\to B$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, un morphisme Lf *ou $\eta f:\mathrm{L}A\to\mathrm{L}B$ dans $\mathcal{C}$, tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p^A} & \mathrm{L}A=\eta A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}f=\eta f} \\ B & \xrightarrow{p^B} & \mathrm{L}B=\eta B \end{array}$$

soit commutatif, de telle sorte que la condition suivante soit vérifiée :

Tout morphisme $A\to S$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(y)=\mathcal{C}$, au-dessus de η a une factorisation unique par p^A : $A\to\mathrm{L}A\to S$, autrement dit, le morphisme induit par p^A :

$$\operatorname{Hom}(\mathrm{L}A;S)\equiv\operatorname{Hom}(\eta A;S)\xrightarrow{p^A}\prod_{a\in\mathcal{E}}\operatorname{Hom}(A(a);S)$$

est un monomorphisme dont l'image soit exactement formée des morphismes de A dans S au-dessus de η :

$$\mathrm{Hom}_\eta(A\,;\,S) = \mathrm{Hom}(\eta A\,;\,S).$$

Un tel foncteur, s'il existe, est unique à un automorphisme près de $\mathcal{C}$, et si E_a est un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: $\mathrm{L}E_a = E_a(a)$. Remarquons que l'existence de L revient à l'égalité fonctorielle (*cf.* § 4.3)

$$\Gamma\,\mathrm{Hom}(A\,;\,S) = \mathrm{Hom}(\mathrm{L}A\,;\,S).$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 4. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes, et $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné. Il existe sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ un foncteur cosections* L (*définition ci-dessus*). *Ce foncteur* L *est additif et exact à droite.*

Preuve. — Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ additive, et soit, pour tout couple ordonné $a \prec b$ de $\mathcal{E}$: $A^\star(a, b) = \mathrm{A}(a)$. On peut alors interpréter simplement les conditions que doit vérifier k en posant

$$\delta^\star : \quad \prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\,;\,S) \xrightarrow{\delta^\star_S} \prod_{\substack{a,\,b\\ a\prec b}} \mathrm{Hom}(A^\star(a, b)\,;\,S),$$

$$(\delta^\star_S k)_{a,b} = k_b\cdot p_{ab} - k_a,$$

k définit un morphisme de A dans S si et seulement si $\delta^\star_S k = 0$. Si les sommes directes existent dans $\mathcal{C}$, on a

$$\prod_{a\in\mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a)\,;\,S) = \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)\,;\,S\Big) \xrightarrow{\delta^\star_s} \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\substack{a,\,b\\ a\prec b}} A^\star(a, b)\,;\,S\Big)$$
$$= \prod_{\substack{a,\,b\\ a\prec b}} \mathrm{Hom}(A^\star(a, b)\,;\,S),$$

$\delta^\star_s$ est induit par un morphisme ∂ indépendant de S :

$$\bigoplus_{\substack{a,\,b\\ a\prec b}} A^\star(a, b) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)$$

ainsi défini : ∂ est la somme des morphismes $\partial_{a,b}$ où $\partial_{a,b}$ est la « composante » de ∂ induite sur $A^\star(a, b)$:

$$\partial_{a,b} = 1_{A(b)}\cdot p_{ab} - 1_{A(a)}, \qquad \partial = \bigoplus \partial_{a,b}$$

autrement dit, $\partial_{a,b}$ applique $A^\star(a, b)$ dans $A(b) \oplus A(a) \subset \bigoplus_{a\in\mathcal{E}} A(a)$ par p_{ab} dans $A(b)$ et moins l'identité dans $A(a)$.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ([8], p. 137) de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens, si $\alpha(a, b) \in A^\star(a, b)$:

$$\partial \alpha(a, b) = p_{ab}\alpha(a, b) - \alpha(a, b).$$

Si la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne, définissons

$$\mathrm{L}A = \mathrm{Coker}\, \partial :$$

la suite

$$\bigoplus_{\substack{a, b \\ a \prec b}} A^\star(a, b) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) \to \mathrm{L}A \to 0$$

est exacte. Il en résulte que la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{L}A ; S) \to \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) ; S\Big) \xleftarrow{\partial^\star} \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\substack{a, b \\ a \prec b}} A^\star(a, b) ; S\Big)$$

est aussi exacte. Donc un élément

$$k \in \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) ; S\Big) = \prod_{a \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}(A(a) ; S)$$

est un morphisme de A dans S si et seulement s'il se laisse factoriser par $\mathrm{L}A$:

$$k \in \mathrm{Ker}\, \partial^\star \iff k \in \mathrm{Hom}(\mathrm{L}A ; S).$$

A un morphisme $f : A \to B$, la suite exacte précédente fait correspondre un morphisme $\mathrm{L}f : \mathrm{L}A \to \mathrm{L}B$. L est donc un foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$, et l'on vérifie aisément que L est *exact à droite*. On a de plus :

$$\mathrm{L} \bigoplus_j A_j = \bigoplus_j \mathrm{L}A_j.$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie des groupes abéliens, on peut donner de $\mathrm{L}A$ une définition directe duale de celle de 3.1 :

$\mathrm{L}A$ *est le quotient de* $\bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a)$ *par le sous-groupe engendré par les* $\alpha(a) - p_{ab}\alpha(a)$ [où $\alpha(a) \in A(a)$].

4.2. **Troisième définition de** L (duale de 3.4). — Nous supposerons que $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne avec sommes directes dont tout objet est image d'un objet projectif. Considérons la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{E} \cup y)$, ($\mathcal{E} \cup y$ représente $\mathcal{E}$ auquel on a ajouté un dernier élément y), et le foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{E} \cup y) \to \mathcal{C}$ que nous noterons Coim :

$$A \in \mathcal{C}(\mathcal{E} \cup y) = \mathrm{Im}\Big[\bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a) \to A(y)\Big] = \mathrm{Coim}\, A \in \mathcal{C},$$

$$\varphi : A \to B \Rightarrow \mathrm{Coim}\, \varphi : \mathrm{Coim}\, A \to \mathrm{Coim}\, B.$$

On peut construire les dérivées à gauche l_p Coim d'après la proposition 1.4. Nous allons prouver que, si L est défini par 4.1, le foncteur obtenu sur $\mathcal{C}(\mathcal{E}\cup y)$ en composant L avec le foncteur restriction $\mathcal{C}(\mathcal{E}\cup y)\to\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *coïncide avec* l_0 Coim. On a un épimorphisme canonique $\mathrm{L}A\to\mathrm{Coim}\,A$ qui est une transformation naturelle de foncteurs, et de plus, L et Coim coïncident sur les projectifs sommes directes de projectifs coélémentaires (§ 2). Donc, puisque L est exact à droite :

$$l_0\,\mathrm{Coim}=\mathrm{L}.$$

Il en résulte que les $l_n\,\mathrm{Coim}=l_n\Gamma$, $n\geq 0$ sont en fait des foncteurs définis sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ ce qui était évident *a priori* sur l'image par Coim d'une résolution de A par des sommes directes de projectifs coélémentaires.

4.3. — Donnons enfin une version « de Čech » de la définition de L en supposant que $\mathcal{E}$ est un treillis, et pour simplifier, que la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de celle des groupes abéliens :

$$\begin{cases} \mathrm{L}A=\mathrm{Coker}\left[\bigoplus_{a,b}A(a\cup b)\xrightarrow{\check{\partial}}\bigoplus_{a}A(a)\right],\\ \partial\alpha(a\cup b)=p_{a\cup b,a}\alpha(a\cup b)-p_{a\cup b,b}\alpha(a\cup b).\end{cases}$$

5. **Dualité catégorique.** — Comme au paragraphe 1, désignons par $\mathcal{E}^*$ l'ensemble $\mathcal{E}$ muni de la relation d'ordre opposée et par $\mathcal{C}^*$ la catégorie duale de $\mathcal{C}$.

Soit $\bigstar$ le foncteur (exact, contravariant) qui, à chaque objet A de $\mathcal{C}$, fait correspondre l'objet A^* de $\mathcal{C}^*$, dual de A.

Le foncteur $\bigstar$ s'étend à $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et définit un foncteur

$$\mathcal{C}(\mathcal{E})\to\mathcal{C}^*(\mathcal{E}^*)$$

qui permet ainsi d'identifier $\mathcal{C}^*(\mathcal{E}^*)$ à la catégorie duale de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: $\mathcal{C}(\mathcal{E})^*$.

Si $x\prec\mathcal{E}$ est un premier élément de $\mathcal{E}$, $x^*\prec^*\mathcal{E}^*$ est un dernier élément de $\mathcal{E}^*$, et à tout morphisme $\mathcal{C}(x)\to\mathcal{C}(\mathcal{E})$ le foncteur $\bigstar$ fait correspondre un morphisme $\mathcal{C}^*(x^*)\leftarrow\mathcal{C}^*(\mathcal{E}^*)$.

La caractérisation des foncteurs Γ et L entraîne que, si $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'objet $(\Gamma A)^*\in\mathcal{C}^*$ est identique à l'objet $\mathrm{L}A^*\in\mathcal{C}^*$, autrement dit, le diagramme fonctoriel

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\Gamma} & \mathcal{C}\\ \Big\Downarrow{\scriptstyle\bigstar} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle\bigstar}\\ \mathcal{C}^*(\mathcal{E}^*) & \xrightarrow{\mathrm{L}} & \mathcal{C}^*\end{array}$$

est commutatif :

$$\bigstar\,\Gamma=\mathrm{L}\,\bigstar.$$

De même, si $\mathcal{E} \prec y$ est un dernier élément de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\star \prec^\star y^\star$ est un premier élément de $\mathcal{E}^\star$, et l'on a $(\mathrm{L}A)^\star \equiv \Gamma A^\star$ ou $\bigstar\, \mathrm{L} = \Gamma\, \bigstar$. Le passage à la catégorie duale de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ transforme donc Γ sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, en L sur $\mathcal{C}^\star(\mathcal{E}^\star)$, et L sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, en Γ sur $\mathcal{C}^\star(\mathcal{E}^\star)$. Γ et L sont donc des foncteurs duaux l'un de l'autre.

6. Cas particuliers et exemples.

6.1. L'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ a un premier ou un dernier élément. — La proposition suivante est évidente, vu les définitions des foncteurs Γ et L.

PROPOSITION 6.1. — *Si l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ a un* premier *élément x_0, le foncteur Γ fait correspondre à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'objet $A(x_0) \in \mathcal{C}$, et au morphisme $f : A \to B$, le morphisme $f_{x_0} : A(x_0) \to B(x_0)$. Γ est donc* exact. *Si $\mathcal{E}$ a un* dernier *élément y_0, le foncteur* L *fait correspondre à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'objet $A(y_0) \in \mathcal{C}$, et à $f : A \to B$, $f_{y_0} : A(y_0) \to B(y_0)$.* L *est alors* exact.

6.2. Ordre trivial. — Un ensemble ordonné trivial est un ensemble ordonné dont les seules relations d'ordre sont les identités $a \prec a$. Un élément, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est alors simplement une collection d'objets de $\mathcal{C}$ indexés par $\mathcal{E}$, et

$$\Gamma A = \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a), \qquad \mathrm{L}A = \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a).$$

La propriété d'exactitude de L dans ce cas est l'axiome AB 3 de [8] : une somme directe de monomorphismes est un monomorphisme. La propriété d'exactitude de Γ dans ce cas est l'axiome AB 3' de [8] : un produit direct d'épimorphismes est un épimorphisme.

6.3. sup et inf d'une famille de sous-objets. — Soient $\{A_i\}$, une famille de sous-objets de $A \in \mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ l'ensemble ordonné formé par les A_i et A, avec pour ordre $A_i \prec A_j \Leftrightarrow A_i \subset A_j$; $\mathfrak{A}$ l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ formé par les A_i, A et les inclusions.

Alors

$$\Gamma \mathfrak{A} = \operatorname{Inf}_i \{A_i\} = \bigcap_i A_i.$$

Soient $\mathcal{E}'$ l'ensemble formé par $\{0\}$ et les A_i, ordonné par inclusion, et $\mathfrak{A}$ l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ formé par A et les A/A_i :

$$\mathrm{L}\mathfrak{A}' = A/\sup_i \{A_i\} = A \Big/ \sum_i A_i,$$

autrement dit :

$$\sum A_i = \operatorname{Ker} : (A \to \mathrm{L}\mathfrak{A}').$$

6.4. Limites directe et inverse. — Il est clair que lorque $\mathcal{E}$ est filtrant à droite, $\mathrm{L}A =$ limite directe $\{A(a), p_{ab}\}$ au sens usuel, lorsque $\mathcal{E}$ est filtrant à gauche, $\Gamma A =$ limite inverse $\{A(a), p_{ab}\}$ au sens usuel.

Soit en particulier une famille *filtrante croissante* de sous-objets A_i de $A \in \mathcal{C}$. D'après 6.3, $\mathrm{L}\mathcal{A}' =$ limite directe $\{A/A_i\} = A \Big/ \sum_i A_i$.

Or, soient B un sous-objet de A et $\mathcal{B}'$ l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ formé par B et les $B/B\cap A_i$ avec, si $A_i \subset A_j$, les épimorphismes $B/B\cap A_i \to B/B \cap A_j$. Comme, pour chaque i : $B/B\cap A_i = B + A_i/A_i \to A/A_i$ est un monomorphisme, on forme ainsi un monomorphisme $\mathcal{B}' \to \mathcal{A}'$. D'où un morphisme

$$\mathrm{L}\mathcal{B}' = B \Big/ \sum_i B\cap A_i \to A \Big/ \sum_i A_i = \mathrm{L}\mathcal{A}',$$

qui est un monomorphisme si et seulement si l'on a

$$(\text{lim sup}) \quad B \cap \sum_i A_i = \sum_i B \cap A_i.$$

C'est l'axiome AB 5 de [8]. Il en résulte la proposition bien connue :

PROPOSITION 6.4. — *Le foncteur* L *est exact dans les catégories* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ *filtrant à droite, si et seulement si* $\mathcal{C}$ *vérifie l'axiome précédent* (*lim sup*) (AB 5 de [8]).

Dualement, si $\{A_i\}$ est une famille *filtrante décroissante* de sous-objets de $A \in \mathcal{C}$. D'après 6.3 : $\Gamma\mathcal{A} =$ limite inverse $\{A_i\} = \bigcap_i A_i$. Si B est un sous-objet de A et $\mathcal{B}$ l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ formé par les $(A_i + B)/B$ et les monomorphismes : si $A_i \subset A_j$, $(A_i + B)/B \subset (A_j + B)/B$. Les épimorphismes $A_i \to (A_i + B)/B$ forment un épimorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. D'où un morphisme

$$\Gamma\mathcal{A} = \bigcap_i A_i \to \Gamma\mathcal{B} = \Big[\bigcap_i (A_i + B)\Big] \Big/ B.$$

C'est un épimorphisme si et seulement si

$$(\text{lim inf}) \quad B + \bigcap_i A_i = \bigcap_i (A_i + B).$$

C'est l'axiome AB 5* de [8] d'où résulte la proposition duale de celle ci-dessus.

6.5 — Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X, ordonné par $O \prec O'$ si $O \supset O'$. $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ est la catégorie des préfaisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}(\mathcal{O}^*)$ celle des antifaisceaux. Si R est un recouvrement ouvert de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{R}$ l'ensemble des ouverts de $\mathcal{X}$ contenus dans les ouverts de $\mathcal{R}$, les foncteurs $\Gamma_{\mathcal{R}}$ et $L_{\mathcal{R}}$, composés du foncteur restriction : $\mathcal{C}(\mathcal{O}) \to \mathcal{C}(\mathcal{R})$ et des foncteurs Γ et L sur $\mathcal{R}$ sont les *foncteurs sections et cosections sur le recouvrement $\mathcal{R}$ des préfaisceaux sur $\mathcal{X}$*. De même, $\Gamma_{\mathcal{R}^*}$ et $L_{\mathcal{R}^*}$ composés de $\mathcal{C}(\mathcal{O}^*) \to \mathcal{C}(\mathcal{R}^*)$ et des foncteurs Γ et L sur $\mathcal{R}^*$ sont les *foncteurs sections et cosections sur le recouvrement $\mathcal{R}$ des antifaisceaux sur $\mathcal{X}$*.

. Morphismes et connexion.

7.1. — Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ deux parties de $\mathcal{E}$, $\Gamma_{\mathcal{E}'}$, $L_{\mathcal{E}'}$, $\Gamma_{\mathcal{E}''}$, $L_{\mathcal{E}''}$ leurs foncteurs sections et cosections. A chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ on peut faire correspondre ses restrictions $A \mid \mathcal{E}'$ et $A \mid \mathcal{E}''$ à $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, et considérer ainsi $\Gamma_{\mathcal{E}'}$ et $\Gamma_{\mathcal{E}''}$ comme des foncteurs sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Alors, une inclusion $\underline{\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}''}$, détermine les *transformations naturelles* [de foncteurs sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$] :

$$\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}'' : \quad \Gamma_{\mathcal{E}'} \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{E}''}, \qquad L_{\mathcal{E}'} \Leftarrow L_{\mathcal{E}''}.$$

En effet, $\forall A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ le morphisme $\Gamma_{\mathcal{E}'} A \to A \mid \mathcal{E}'$ détermine par restriction à $\mathcal{E}''$ un morphisme $\Gamma_{\mathcal{E}'} A \to A \mid \mathcal{E}''$ qui se factorise canoniquement en $\Gamma_{\mathcal{E}'} A \to \Gamma_{\mathcal{E}''} A \to A \mid \mathcal{E}''$. De même le morphisme $A \mid \mathcal{E}'' \to L_{\mathcal{E}'} A$ induit par restriction à $\mathcal{E}''$ de $A \mid \mathcal{E}'$, se factorise par $L_{\mathcal{E}''} A \to L_{\mathcal{E}'} A$.

Une double inclusion $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}'' \supset \mathcal{E}''$ donne évidemment des diagrammes commutatifs, par exemple :

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_{\mathcal{E}''} \arrow[dr] & \\ \Gamma_{\mathcal{E}'} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \Gamma_{\mathcal{E}'''} \end{tikzcd}$$

Soit $P(\mathcal{E})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$, ordonné par l'inclusion : si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \in P(\mathcal{E})$, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M} \supset \mathcal{N}$. Si $\mathcal{R} \in P(\mathcal{E})$ et $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, *les $\Gamma_{\mathcal{R}} A$ forment avec les morphismes définis ci-dessus un objet de $\mathcal{C}(P(\mathcal{E}))$, les $L_{\mathcal{R}} A$, un objet de $\mathcal{C}(P^*(\mathcal{E}))$*. On définit ainsi deux foncteurs canoniques de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(P(\mathcal{E}))$ et $\mathcal{C}(P^*(\mathcal{E}))$.

Soient maintenant $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux ensembles ordonnés, ρ un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ (§ 2), $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $A' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et f un morphisme de A dans A' au-dessus de ρ, c'est-à-dire un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}')$ induisant A sur $\mathcal{E}$ et A' sur $\mathcal{E}'$.

Pour tout $a \in \mathcal{E}$, désignons par $\underline{\rho a}$ *l'ensemble des $a' \in \mathcal{E}'$ tels que $a \prec a'$*, et de la même façon, pour tout $a' \in \mathcal{E}'$, désignons par $\overset{-1}{\rho} a'$ *l'ensemble des $a \in \mathcal{E}$ tels que $a \prec a'$* (ces ensembles peuvent être vides). Si $a \prec b$, $\rho a \supset \rho b$, et si $a' \prec b'$, $\overset{-1}{\rho} a' \subset \overset{-1}{\rho} b'$. ρ définit ainsi une application croissante de $\mathcal{E}$ dans $P(\mathcal{E}')$: $a \to \rho a$, et une application croissante de $\mathcal{E}'$ dans $P^*(\mathcal{E})$: $a' \to \overset{-1}{\rho} a'$.

Supposons $\mathcal{C}$ abélienne et désignons par $\overset{-1}{\rho} A'(a)$ *l'objet* $\Gamma_{\rho a} A'$ des sections de la restriction de A' à ρa, *si* $\rho a \neq \emptyset$, et *l'objet nul si* $\rho a = \emptyset$.

On a un morphisme canonique de $A(a)$ dans $\overset{-1}{\rho} A'(a)$, et si $a \prec b$, $a \prec a'$, $b \prec b'$, et $a' \prec b'$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A(a) \arrow[rrr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & & A(b) \arrow[dd] \arrow[dl] \\
& \overset{-1}{\rho} A'(a) \arrow[r] \arrow[dl] & \overset{-1}{\rho} A'(b) \arrow[dr] & \\
A'(a') \arrow[rrr] & & & A'(b')
\end{tikzcd}$$

Les $\overset{-1}{\rho} A'(a)$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: l'*image inverse de* A' *par* ρ, et tout morphisme f de A dans A' au-dessus de ρ se factorise canoniquement en un morphisme de A dans $\overset{-1}{\rho} A'$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et le morphisme de $\overset{-1}{\rho} A'$ dans A'. On a donc

$$\mathrm{Hom}_\rho(A\,;\,A') = \mathrm{Hom}(A\,;\,\overset{-1}{\rho} A').$$

De la même façon, si l'on pose $\rho A(a') = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho} a'} A$, les $\rho A(a')$ forment un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$: l'*image directe de A par* ρ et

$$\mathrm{Hom}_\rho(A\,;\,A') = \mathrm{Hom}(\rho A\,;\,A').$$

Le foncteur image inverse par $\rho : A' \to \overset{-1}{\rho} A'$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, défini par $\rho : \mathcal{E} \prec \mathcal{E}'$, est, comme Γ, un foncteur covariant, additif, exact à gauche.

Le foncteur *image directe par* $\rho : A \to \rho A$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ défini par $\rho : \mathcal{E} \prec \mathcal{E}'$, est comme L, un foncteur covariant, additif, exact à droite.

Les morphismes canoniques $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\rho a} A'$ déterminent, en vertu de la propriété universelle de Γ, un morphisme canonique

$$\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A'.$$

On a de même

$$\mathrm{L}_{\mathcal{E}'} \rho A \to \mathrm{L}_{\mathcal{E}} A.$$

On définit de même $\overset{-1}{\rho}{}^{\star}$ et $\rho^{\star}$ par

$$\overset{-1}{\rho}{}^{\star} A'(a) = \mathrm{L}_{\rho a} A' \qquad \text{et} \qquad \rho^{\star} A(a') = \Gamma_{\overset{-1}{\rho} a'} A.$$

7.2. Connexion et théorème d'isomorphisme. — Le morphisme canonique de ΓA dans $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est composé de morphismes $p_a : \Gamma A \to A(a)$ tels que $p_{ab} . p_a = p_b$, celui de A dans $\mathrm{L}A$ de morphismes $q_a : A(a) \to \mathrm{L}A$ tels que $q_b . p_{ab} = q_a$. Pour chaque $a \in \mathcal{E}$, on a donc un morphisme

$$\Gamma A \xrightarrow{q_a . p_a} \mathrm{L}A$$

et si $a \prec b$, ces morphismes sont identiques car

$$q_a . p_a = q_b . p_{ab} . p_a = q_b . p_b .$$

Ceci nous amène donc à la définition suivante :

DÉFINITION. — *Un ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ *est dit* connexe *si, quels que soient* $a, b \in \mathcal{E}$, *il existe une suite d'éléments* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ de $\mathcal{E}$, *tels que* $c_0 = a$, $c_n = b$, *et qu'entre deux éléments consécutifs* c_i, c_{i+1}, *il y ait une relation d'ordre* $c_i \prec c_{i+1}$ *ou* $c_{i+1} \prec c_i$.

EXEMPLE. — Un ensemble ordonné filtrant (à gauche ou à droite) est connexe. Il est clair que si $\mathcal{E}$ *est connexe, il existe un morphisme canonique* $\Gamma A \to \mathrm{L} A$, si $\mathcal{E}$ n'est pas connexe, une application canonique de l'ensemble des parties connexes de $\mathcal{E}$ dans Hom $(\Gamma A, \mathrm{L} A)$.

THÉORÈME D'ISOMORPHISME 7.2. — *Si* ρ *est un ordre* (§ 2) *de l'ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$ *tel que pour tout* $a' \in \mathcal{E}'$, $\overset{-1}{\rho} a'$ (§ 7.1) *soit une partie non vide connexe de* $\mathcal{E}$, *le morphisme canonique* (§ 7.1) : $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \to \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A'$ *est un isomorphisme* $\Gamma_{\mathcal{E}'} A' \equiv \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A'$.

Dualement, si pour tout $a \in \mathcal{E}$, ρa *est une partie non vide connexe, le morphisme canonique* $\mathrm{L}_{\mathcal{E}'} \rho A \to \mathrm{L}_{\mathcal{E}} A$ *est un isomorphisme* $\mathrm{L}_{\mathcal{E}'} \rho A \equiv \mathrm{L}_{\mathcal{E}} A$.

PREUVE. — Soient $a' \in \mathcal{E}'$, $a \in \overset{-1}{\rho} a'$ (non vide), et $\varphi_{aa'}$ le morphisme composé

$$\Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A' \xrightarrow{p_a} \Gamma_{\rho a} A' \xrightarrow{p_{aa'}} A'(a').$$

Si par exemple, $a \prec b \prec a'$:

$$\varphi_{aa'} = p_{aa'} \cdot p_a = p_{ba'} \cdot p_{ab} \cdot p_a = p_{ba'} \cdot p_b = \varphi_{ba'}.$$

$\overset{-1}{\rho} a'$ étant connexe, on définit ainsi un morphisme de $\Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A'$ dans A' qui se factorise donc en $\Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho} A' \to \Gamma_{\mathcal{E}'} A'$. D'où l'isomorphisme.

Démonstration duale dans le cas de L.

EXEMPLE. — Quel que soit $a' \in \mathcal{E}'$, l'ensemble des éléments $a \in \mathcal{E}$, tels que $a \prec a'$, est non vide et filtrant, ou plus particulièrement encore, il a un plus grand élément $\lambda(a')$ [on a alors une application croissante $\mathcal{E}' \to \mathcal{E} : a' \to \lambda(a')$, $\lambda(a') \prec a'$, « rétractant » ρ] : alors $\Gamma_{\mathcal{E}'} \equiv \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho}$.

Foncteur prolongement. — La proposition suivante est évidente :

PROPOSITION 7.2. — *Soient* $\mathcal{P}$ *une partie de l'ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ *close à gauche* ($a \prec p$ *et* $p \in \mathcal{P} \Rightarrow a \in \mathcal{P}$) *et* ρ *l'ordre canonique* $\mathcal{E} \prec \mathcal{P}$. *Si* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$, $\pi A = \overset{-1}{\rho} A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *est le* prolongement *par zéro hors de* $\mathcal{P}$, *de* A *à* $\mathcal{E}$, π *est un foncteur exact. Si* A *est élémentaire,* πA *est élémentaire, si* A *est injectif,* πA *est injectif. Comme*

$$\Gamma_{\mathcal{P}} A = \Gamma_{\mathcal{E}} \pi A$$

d'après le théorème 7.2, *on a aussi*

$$(r^n\Gamma_{\mathfrak{L}})\,A = (r^n\Gamma_{\mathcal{E}})\,\pi A.$$

Dualement, soient $\mathfrak{L}$ *une partie de* $\mathcal{E}$ close à droite *et* ρ' *l'ordre* $\mathfrak{L} \prec \mathcal{E}$. *Si* $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{L})$, $\pi' A = \rho' A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *est le* prolongement *par zéro hors de* $\mathfrak{L}$, *de* A *à* $\mathcal{E}$, π' *est un foncteur exact. Si* A *est coélémentaire*, $\pi' A$ *est coélémentaire; si* A *est projectif*, $\pi' A$ *est projectif. Comme*

$$\mathrm{L}_{\mathfrak{L}} A = \mathrm{L}_{\mathcal{E}} \pi' A,$$

d'après le théorème 7.2, *on a aussi*

$$(l_n \mathrm{L}_{\mathfrak{L}})\,A = (l_n \mathrm{L}_{\mathcal{E}})\,\pi' A.$$

7.3. **Foncteur restriction.** — Soient $\mathcal{R}$ une partie de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$, γ le foncteur de restriction $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{R})$ qui à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre sa restriction $\gamma A = A \mid \mathcal{R}$. γ est un foncteur exact, mais si I est injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, sa restriction γI n'est pas en général un objet injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ ni même un objet $\Gamma_{\mathcal{R}}$-acyclique; si P est projectif, γP n'est pas en général $\mathrm{L}_{\mathcal{R}}$-acyclique. Mentionnons deux cas où il en est ainsi :

Proposition 7.3 A. — *Si pour chaque* $a \in \mathcal{E}$, *l'ensemble des* $r \in \mathcal{R}$ *tels que* $r \prec a$ *est vide ou possède un plus grand élément* $\lambda(a)$ (*c'est le cas par exemple si* $\mathcal{R}$ *est* clos à droite : $c \prec d$ et $c \in \mathcal{R}$ *entraînent* $d \in \mathcal{R}$), *alors* A *élémentaire* (§ 1) $\Rightarrow \gamma A$ *élémentaire*, A *injectif* $\Rightarrow \gamma A$ *injectif*, *et l'on a entre les dérivés à droite de* $\Gamma_{\mathcal{R}}\gamma$ *sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *et de* $\Gamma_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, *l'*isomorphisme

$$r^n(\Gamma_{\mathcal{R}}.\gamma) = (r^n\Gamma_{\mathcal{R}}).\gamma.$$

Dualement, si pour chaque $a \in \mathcal{E}$, *l'ensemble des* $r \in \mathcal{R}$ *tels que* $a \prec r$ *est vide ou possède un plus petit élément* (*c'est le cas si* $\mathcal{R}$ *est* clos à gauche), *alors :* A *coélémentaire* $\Rightarrow \gamma A$ *coélémentaire*, A *projectif* $\Rightarrow \gamma A$ *projectif*, *et l'on a entre les dérivés à gauche de* $\mathrm{L}_{\mathcal{R}}\gamma$ *sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *et de* $\mathrm{L}_{\mathcal{R}}$ *sur* $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ *l'isomorphisme*

$$l_n(\mathrm{L}_{\mathcal{R}}.\gamma) = (l_n\mathrm{L}_{\mathcal{R}}).\gamma.$$

Remarque. — Si ρ est un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ et $\overset{-1}{\rho}$ le foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{E}') \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E})$ défini au paragraphe 7.1, il en résulte que

$$\left(r^n \overset{-1}{\rho}\right) A'(a) = (r^n\Gamma_{\rho a})\,(A' \mid \rho a).$$

De même pour le foncteur ρ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$:

$$(l_n\rho)\,A(a') = \left(l_n \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}\right)\left(\overset{-1}{\rho}a'\right).$$

Proposition 7.3 B. — *Soient* $\mathcal{E}$ *filtrant a gauche*, $\mathcal{E}'$ *cofinal*, s *le foncteur restriction* $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$: $(r^n\Gamma_{\mathcal{E}})\,A = (r^n\Gamma_{\mathcal{E}'})\,sA$. *Si* $\mathcal{E}$ *est filtrant à droite*, $\mathcal{E}'$ *cofinal* : $(l_n\mathrm{L}_{\mathcal{E}})\,A = (l_n\mathrm{L}_{\mathcal{E}'})\,sA$.

Preuve. — Soient A^a un objet élémentaire (§ 1) en $a \in \mathcal{E}$, $a_0 \prec a$, $a_0 \in \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_0 = \{ b \in \mathcal{E}' ;\ b \prec a_0 \}$, s_0, s' les restrictions à $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}'$; $s_0 A^a$ est un objet élémentaire donc acyclique de $\mathcal{C}(\mathcal{E}_0)$. Si $0 \to s' A^a \to B' \to C' \to 0$ est une suite exacte dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$, sa restriction à $\mathcal{E}_0$ est exacte, donc aussi

$$0 \to \Gamma_{\mathcal{E}_0} s_0 A^a \to \Gamma_{\mathcal{E}_0} s_0 B' \to \Gamma_{\mathcal{E}_0} s_0 C' \to 0.$$

Mais, d'après 7.2 : $\Gamma_{\mathcal{E}_0} s_0 = \Gamma_{\mathcal{E}'}$. Donc $0 \to \Gamma_{\mathcal{E}'} s' A^a \to \Gamma_{\mathcal{E}'} B' \to \Gamma_{\mathcal{E}'} C' \to 0$ est exacte et $(r^1 \Gamma_{\mathcal{E}'}) (s' A^a) = 0$. Il en résulte que si ΠA_i est un produit d'objets élémentaires de $\mathcal{E}$, $r^1 \Gamma_{\mathcal{E}'} (s' \Pi A_i) = 0$ d'où l'on tire par un raisonnement connu que $(r^n \Gamma_{\mathcal{E}'}) (s' \Pi A_i) = 0$, d'où le résultat.

8. Variations sur les foncteurs sections et cosections : foncteurs relatifs avec supports, limites.

8.1. Foncteurs sections et cosections relatifs. — Soit $\mathcal{E}'$ une partie de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$. Considérons les morphismes d'un objet S de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ (considéré comme attaché à un premier élément x ajouté à $\mathcal{E}$, *cf.* § 3.3), dans un objet A de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, qui sont *nuls sur* $\mathcal{E}'$. Il résulte alors qu'ils sont nuls sur $\overline{\mathcal{E}'}$, clôture droite de $\mathcal{E}'$: ensemble des éléments $a \in \mathcal{E}$ tels qu'il existe au moins $a' \in \mathcal{E}'$ avec $a' \prec a$. Si φ_0 est l'épimorphisme naturel $\prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \to \prod_{a' \in \mathcal{E}'} A(a')$ soit $\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ le foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$ défini par

$$\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A = \operatorname{Ker}(\partial \times \varphi_0),$$

c'est-à-dire par la suite exacte

$$0 \to \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A \to \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \xrightarrow{\partial \times \varphi_0} \prod_{\substack{a,\, b \\ a \prec b}} A(a, b) \times \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a).$$

On peut caractériser $\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ par une propriété universelle analogue à celle qui caractérise Γ (*cf.* 3.3). $\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ est exact à gauche et est appelé *foncteur sections de* $\mathcal{E}$ mod $\mathcal{E}'$ (ou *sections de* $\mathcal{E}$ *à supports dans* $\mathcal{E} - \overline{\mathcal{E}'}$).

Notons

$$C^0(\mathcal{E}; A) = \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a), \qquad C^0(\mathcal{E}'; A) = \prod_{a \in \mathcal{E}'} A(a'),$$

$$C^1(\mathcal{E}; A) = \prod_{\substack{a,\, b \in \mathcal{E} \\ a \prec b}} A(a, b), \qquad C^1(\mathcal{E}'; A) = \prod_{\substack{a,\, b \in \mathcal{E}' \\ a \prec b}} A(a, b)$$

et désignons ces objets de $\mathcal{C}$ par : *cochaînes de degré* 0 *ou* 1, *de* $\mathcal{E}$ *ou* $\mathcal{E}'$ *relativement à* A. Soient φ_1 l'épimorphisme naturel $C^1(\mathcal{E}, A) \to C^1(\mathcal{E}'; A)$ et

$$C^0(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) = \operatorname{Ker} \varphi_0, \qquad C^1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) = \operatorname{Ker} \varphi_1.$$

On obtient ainsi le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \Gamma_{\mathcal{E}'} A \arrow[d] & \Gamma_{\mathcal{E}} A \arrow[l] \arrow[d] & \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & C^0(\mathcal{E}', A) \arrow[l] \arrow[d] & C^0(\mathcal{E}; A) \arrow[l, "\varphi_0"'] \arrow[d] & C^0(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & C^1(\mathcal{E}', A) \arrow[l] & C^1(\mathcal{E}; A) \arrow[l, "\varphi_1"'] & C^1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Dualement, considérons les morphismes de $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans un objet S de $\mathcal{C}$, *nuls sur* $\mathcal{E}'$: ils sont alors nuls sur la clôture gauche $\underline{\mathcal{E}'}$ de $\mathcal{E}'$.

Si ψ_0 est le monomorphisme naturel $\bigoplus_{a \in \mathcal{E}'} A(a) \to \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a)$, soit $\mathrm{L}_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ le foncteur covariant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathrm{L}_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A = \operatorname{Coker}(\partial + \psi_0);$$

$\mathrm{L}_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ peut être caractérisé par une propriété universelle analogue à celle de L : c'est le foncteur *cosections de* $\mathcal{E}$ mod $\mathcal{E}'$ (ou *cosections de* $\mathcal{E}$ *à supports dans* $\mathcal{E} - \underline{\mathcal{E}'}$).

Prenons des notations duales pour les *chaînes de degré* 0 *ou* 1 *de* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$ mod $\mathcal{E}'$, *relativement à* A :

$$C_0(\mathcal{E}; A) = \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a), \qquad C_1(\mathcal{E}; A) \bigoplus_{a \prec b} A^\star(a, b),$$
$$C_0(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}', A) = \operatorname{Coker} \psi_0, \qquad C_1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}', A) = \operatorname{Coker} \psi_1.$$

On obtient le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont exactes :

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \mathrm{L}_{\mathcal{E}'} A \arrow[u] \arrow[r] & L_{\mathcal{E}} A \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{L}_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0(\mathcal{E}'; A) \arrow[u] \arrow[r, "\psi_0"] & C_0(\mathcal{E}; A) \arrow[u] \arrow[r] & C_0(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1(\mathcal{E}'; A) \arrow[u, "\partial"'] \arrow[r, "\psi_1"] & C_1(\mathcal{E}; A) \arrow[u, "\partial"'] \arrow[r] & C_1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'; A) \arrow[u, "\partial"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

8.2 Sections et cosections avec supports dans les parties d'un antifiltre. — Une inclusion $\mathcal{E}_i \supset \mathcal{E}_j$ de deux parties de $\mathcal{E}$ détermine pour chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ un monomorphisme $\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_i} A \to \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_j} A$ et un épimorphisme

$L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_i} A \leftarrow L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_j} A$. Si $F = \{\mathcal{E}_i\}$ est un filtre de parties de $\mathcal{E}$, soit Φ l'antifiltre des complémentaires $\{\mathcal{E} - \overline{\mathcal{E}}_i\}$ des clôtures à droite des $\mathcal{E}_i$, Ψ celui des complémentaires $\{\mathcal{E} - \underline{\mathcal{E}}_i\}$ des clôtures à gauche. Les foncteurs $\Gamma_{\mathcal{E}, \Phi}$ et $L_{\mathcal{E}, \Psi}$ des sections et cosections de $\mathcal{E}$ à supports dans Φ ou Ψ sont définis par

$$\Gamma_{\mathcal{E}, \Phi} A = \varinjlim_{\mathcal{E}_i \in F} \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_i} A; \qquad L_{\mathcal{E}, \Psi} A = \varprojlim_{\mathcal{E}_i \in F} L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}_i} A.$$

8.3. Foncteurs limites à droite et à gauche. — Rappelons qu'on a deux foncteurs naturels, que nous noterons S et $S^\star$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(P(\mathcal{E}))$ et $\mathcal{C}(P^\star(\mathcal{E}))$ (§ 7) :

$$\text{si } A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \text{ et } \mathcal{R} \in P(\mathcal{E}) : \quad SA(\mathcal{R}) = \Gamma_{\mathcal{R}} A, \qquad S^\star A(\mathcal{R}) = L_{\mathcal{R}} A.$$

S est covariant et exact à gauche comme Γ, $S^\star$ covariant et exact à droite comme L.

Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $P(\mathcal{E})$ formé des parties $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, que nous appellerons *recouvrements à droite de $\mathcal{E}$*, satisfaisant à

$$(\mathcal{D}) \qquad \mathcal{R} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R} \text{ est clos à droite } (r \prec a \text{ et } r \in \mathcal{R} \text{ entraînent } a \in \mathcal{R}), \\ \forall a \in \mathcal{E}, \text{ il existe } r \in \mathcal{R} \text{ tel que } a \prec r. \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ est ordonné par inclusion [ordre induit par celui de $P(\mathcal{E})$], et n'est pas vide puisqu'il contient $\mathcal{E}$, qui en est le premier élément.

$\mathcal{D}$ est filtrant à droite car si $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2 \in \mathcal{D}$, l'intersection $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ appartient encore à $\mathcal{D}$: en effet, si $a \in \mathcal{E}$, il existe $r_1 \in \mathcal{R}_1$ tel que $a \prec r_1$ et $r_2 \in \mathcal{R}_2$ tel que $r_1 \prec r_2$ d'où un élément $r_2 \in \mathcal{R}$ tel que $a \prec r_2$.

Étudier $\mathcal{D}$ revient naturellement à étudier « l'extrémité droite » de $\mathcal{E}$.

Comme $\mathcal{D}$ a un premier élément, $\Gamma_{\mathcal{D}}$ et $L_{\mathcal{D}^\star}$ sont triviaux. Comme $\mathcal{D}$ est filtrant à droite, $L_{\mathcal{D}}$ et $\Gamma_{\mathcal{D}^\star}$ sont des foncteurs de limite directe et inverse.

Nous appellerons *sections et cosections de Čech* (*à droite*) *sur $\mathcal{E}$, et noterons $\check{\Gamma}_d$ et $\check{L}_d$ les foncteurs composés*

$$\check{\Gamma}_d = L_{\mathcal{D}} . S, \qquad \check{L}_d = \Gamma_{\mathcal{D}^\star} . S^\star$$

soient

$$\check{\Gamma}_d A = L_{\mathcal{D}} . SA = \varinjlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{D}} \Gamma_{\mathcal{R}} A, \qquad \check{L}_d A = \Gamma_{\mathcal{D}^\star} . S^\star A = \varprojlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{D}} L_{\mathcal{R}} A.$$

Il existe un ordre canonique ρ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$: $\mathcal{R} \prec a \Longleftrightarrow \mathcal{R} \ni a$, et $\check{\Gamma}_d$ et $\check{L}_d$ peuvent aussi s'écrire

$$\check{\Gamma}_d = L_{\mathcal{D}} . \overset{-1}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \check{L}_d = \Gamma_{\mathcal{D}^\star} . \overset{-1}{\rho}{}^\star.$$

Dualement, soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble des recouvrements à gauche de $\mathcal{E}$, défini par

$$(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{R} \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R} \text{ est clos à gauche.} \\ \forall a \in \mathcal{E}, \text{ il existe } r \in \mathcal{R} \text{ tel que } r \prec a. \end{cases}$$

Il existe un ordre canonique ρ' de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{G}$: $a \prec \mathcal{R} \Longleftrightarrow a \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{G}$ est *filtrant à gauche*, et les *sections et cosections de Čech (à gauche) sur* $\mathcal{E}$, *notées* $\check{\Gamma}_g$ *et* $\check{\mathrm{L}}_g$ *sont les foncteurs composés*

$$\check{\Gamma}_g = \mathrm{L}_{\mathcal{G}}.S = \mathrm{L}_{\mathcal{G}}.\rho'; \qquad \check{\mathrm{L}}_g = \Gamma_{\mathcal{G}^\star}.S^\star = \Gamma_{\mathcal{G}^\star}.\rho'^\star$$

soient

$$\check{\Gamma}_g A = \mathrm{L}_{\mathcal{G}}.SA = \varinjlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{G}} \Gamma_{\mathcal{R}} A, \qquad \check{\mathrm{L}}_g A = \Gamma_{\mathcal{G}^\star}.S^\star A = \varprojlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{G}} \mathrm{L}_{\mathcal{R}} A.$$

Si $\mathcal{E}'$ est une partie de $\mathcal{E}$ close à droite, $\mathcal{E}''$ une partie close à gauche (§ 8.1), la « relativation » des foncteurs S et $S^\star$ ci-dessus donne des foncteurs $S_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(P(\mathcal{E}))$ et $S^\star_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}(P^\star(\mathcal{E}))$, définis par

$$\mathcal{R}\in P(\mathcal{E}) : \quad \begin{aligned} S_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A(\mathcal{R}) &= \Gamma_{\mathcal{R} \bmod \mathcal{R}\cap\mathcal{E}'} A, \\ S^\star_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''} A(\mathcal{R}) &= \mathrm{L}_{\mathcal{R} \bmod \mathcal{R}\cap\mathcal{E}''} A; \end{aligned}$$

d'où les *sections et cosections de Čech à gauche et à droite mod* $\mathcal{E}'$ *ou* $\mathcal{E}''$ (foncteurs *composés*) :

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_{d,\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} &= \mathrm{L}_{\mathcal{D}}.S_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}; \qquad & \check{\mathrm{L}}_{d,\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''} &= \Gamma_{\mathcal{D}^\star}.S^\star_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''}; \\ \check{\Gamma}_{g,\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} &= \mathrm{L}_{\mathcal{G}}.S_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}; \qquad & \check{\mathrm{L}}_{g,\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''} &= \Gamma_{\mathcal{G}^\star}.S^\star_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}''}. \end{aligned}$$

9. Homologie et cohomologie d'un ensemble ordonné.

9.1. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec sommes directes dont tout objet est image d'un objet projectif. D'après les propositions 5, 2.1 et 2.4, on peut définir pour tout ensemble ordonné $\mathcal{E}$, les foncteurs $l_n\mathrm{L}$, dérivés gauches de L, de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$. Si $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, $l_n\mathrm{L}A\in\mathcal{C}$ est le $n^{\text{ième}}$ objet d'homologie $H_n(\mathcal{E}; A)$ de $\mathcal{E}$ relativement à A.

Dualement, soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits dont tout objet se plonge dans un injectif. On peut définir les dérivés à droite du foncteur Γ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{C}$. Si $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, $r^n\Gamma A$ est le $n^{\text{ième}}$ *objet de cohomologie* $H^n(\mathcal{E}; A)$ *de* $\mathcal{E}$ *relativement à* A.

Morphismes. — Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux ensembles ordonnés, f *une application croissante* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, $A'\in\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et $\overset{-1}{f} A'$ l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ défini par $\overset{-1}{f} A'(a) = A'(fa)$. $\overset{-1}{f}$ est un foncteur exact de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Si $0\to A'\to I'^\star$ est une résolution injective de A' dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$: $0\to \overset{-1}{f} A'\to \overset{-1}{f} I'^\star$ est acyclique, et si $0\to \overset{-1}{f} A'\to I^\star$ est une résolution injective de $\overset{-1}{f} A'$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, l'isomorphisme $\overset{-1}{f} A'\to \overset{-1}{f} A'$ se prolonge par un morphisme, défini à une homotopie près, de $\overset{-1}{f} I'^\star$ dans $I^\star$ ([2], chap. V, prop. 1.1a).

D'après le paragraphe 7.1, si f_0 est l'ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ défini par f, on a une transformation naturelle de foncteurs $\Gamma_{\mathcal{E}'} \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{f_0}$. On a donc des morphismes

$$\Gamma_{\mathcal{E}'} I'^{\star} \to \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{f} I'^{\star} \to \Gamma_{\mathcal{E}} I^{\star},$$

d'où le morphisme canonique

$$H^n\left(\mathcal{E};\ \overset{-1}{f} A'\right) \leftarrow H^n(\mathcal{E}';\ A').$$

Dualement, si f'_0 est l'ordre de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ défini par f (§ 2, exemple b), on a une transformation naturelle de foncteurs $L_{\mathcal{E}} f'_0 \Rightarrow L_{\mathcal{E}'}$ (§ 7.1). En prenant une résolution projective de A', et en raisonnant comme ci-dessus, $\left(f'_0 A' = \overset{-1}{f} A'\right)$, on obtient le morphisme canonique

$$H_n\left(\mathcal{E};\ \overset{-1}{f} A'\right) \to H_n(\mathcal{E}';\ A').$$

Des considérations d'algèbre homologique relative que nous ne développerons pas, où les chaînes et cochaînes relatives (§ 8.1 et 10) permettent de définir $H_n(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A)$ et $H^n(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A)$ qu'il ne faut naturellement pas confondre avec $(l_n L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}) A$ et $(r^n \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}) A$.

9.2. **Suites exactes.** — Les $l_n L$ forment un foncteur homologique ([8], p. 140 et 143), les $r^n \Gamma$ un foncteur cohomologique. A une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ d'objets de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ correspondent donc des suites exactes d'homologie et de cohomologie :

$$\begin{gathered}
\ldots \to H_n(\mathcal{E};\ A') \to H_n(\mathcal{E};\ A) \to H_n(\mathcal{E};\ A'') \to H_{n-1}(\mathcal{E};\ A') \to \ldots \\
\to H_1(\mathcal{E};\ A'') \to L A' \to L A \to L A'' \to 0, \\
0 \to \Gamma A' \to \Gamma A \to \Gamma A'' \to H^1(\mathcal{E};\ A') \to \ldots \\
\to H^n(\mathcal{E};\ A) \to H^n(\mathcal{E};\ A'') \to H^{n+1}(\mathcal{E};\ A') \to \ldots.
\end{gathered}$$

D'autre part, la définition de $\Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ et $L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'}$ (§ 8.1) donne naissance aux suites exactes d'homologie et de cohomologie relatives (*cf.* également § 10) :

$$\begin{gathered}
\ldots \to H_n(\mathcal{E};\ A) \to H_n(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A) \to H_{n-1}(\mathcal{E};\ A) \to \ldots \\
\to H_1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A) \to L_{\mathcal{E}'} A \to L_{\mathcal{E}} A \to L_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A \to 0, \\
0 \to \Gamma_{\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}'} A \to \Gamma_{\mathcal{E}} A \to \Gamma_{\mathcal{E}'} A \to H^1(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A) \to \ldots \\
\to H^n(\mathcal{E};\ A) \to H^n(\mathcal{E}';\ A) \to H^{n+1}(\mathcal{E} \bmod \mathcal{E}';\ A) \ldots.
\end{gathered}$$

9.3. **Réduction.** — Soit ρ un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ tel que $\forall a' \in \mathcal{E}'$, $\overset{-1}{\rho} a'$ soit non vide et connexe. Il en résulte (§ 7.2) un isomorphisme de foncteurs *sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$: $\Gamma_{\mathcal{E}'} = \Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho}$, d'où l'identité des dérivés droits $r^n \Gamma_{\mathcal{E}'}$ et $r^n\left(\Gamma_{\mathcal{E}} \overset{-1}{\rho}\right)$

sur $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$. Il est intéressant d'avoir des critères donnant des conditions pour qu'on ait

$$r^n(\Gamma_{\mathcal{E}}\overset{-1}{\rho}) \equiv (r^n\Gamma_{\mathcal{E}}).\overset{-1}{\rho},$$

le suivant sera utilisé au paragraphe 11 :

PROPOSITION 9.3. — *Soient* λ *une application croissante de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$, ρ *l'ordre de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$ *défini par* λ (§ 3). *Supposons que l'ensemble* $\overset{-1}{\rho}a'$, *des éléments* a *de* $\mathcal{E}$ *tels que* $\lambda a \prec a'$, *ait, quel que soit* $a' \in \mathcal{E}'$, *un plus grand élément* $\mu a'$ (*il en résulte* $\lambda\mu a' \prec a'$, $\forall a' \in \mathcal{E}'$). *Alors* $r^n(\Gamma_{\mathcal{E}}\overset{-1}{\rho}) = (r^n\Gamma_{\mathcal{E}})\overset{-1}{\rho}$. *Autrement dit, on a un isomorphisme, pour tout* $A' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$:

$$H^n(\mathcal{E}'; A') \equiv H^n(\mathcal{E}; \overset{-1}{\rho}A').$$

Dualement, *soient* λ *une application croissante de* $\mathcal{E}'$ *dans* $\mathcal{E}$, ρ *l'ordre de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}'$ *défini par* $\lambda (a \prec a' \Leftrightarrow a \prec \lambda a')$. *Si l'ensemble* ρa, a, *quel que soit* $a \in \mathcal{E}$, *un plus petit élément* μa, *alors* $l_n(\mathrm{L}_{\mathcal{E}'}\rho) = (l_n\mathrm{L}_{\mathcal{E}'})\rho$ *autrement dit*, $H_n(\mathcal{E}; A) \equiv H_n(\mathcal{E}'; \rho A)$.

PREUVE. — Si $J'^{a'}$ est un injectif élémentaire de $\mathcal{E}'$ (§ 2), $\overset{-1}{\rho}J'^{a'}$ est un injectif élémentaire $J^{\mu a'}$ [avec $J'^{a'}(a') \equiv J^{\mu a'}(\mu a')$]. Comme $\overset{-1}{\rho}$ commute avec π, l'image par $\overset{-1}{\rho}$ d'un produit d'injectifs élémentaires de $\mathcal{E}'$ est un produit d'injectifs élémentaires de $\mathcal{E}$. Comme tout objet d'une catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ a une résolution injective à l'aide de produits d'injectifs élémentaires, la proposition en résulte.

Preuve duale pour la seconde partie.

10. Résolutions standards dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

10.1. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits, σ le foncteur qui à chaque objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre l'objet $\sigma A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ ainsi défini :

$$\sigma A = \prod_{b \in \mathcal{E}} A^b,$$

où A^b est l'objet élémentaire (§ 2) défini par $A^b(b) = A(b)$.

Le produit des morphismes canoniques de A dans les A^b détermine un *monomorphisme* de A dans σA : $A \subset \sigma A$.

Si Π est un foncteur exact (*cf.* § 6, axiome $AB3^*$ de [8]), ce que nous supposerons, σ est un foncteur exact de A car

$$(\sigma A)(a) = \prod_{\substack{b \\ a \prec b}} A(a, b) \qquad \text{avec } (cf.\ \S\ 4.3) \quad A(a, b) = A(b).$$

Pour la même raison, comme un objet élémentaire est Γ-acyclique, un produit d'objets élémentaires l'est alors également : *σA est Γ-acyclique,* et

$$\Gamma(\sigma A) = \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a).$$

Itérons le foncteur σ :

$$\sigma\sigma A = \sigma^2 A = \prod_{\substack{b,c \\ b \prec c}} A^{b,c}, \qquad \text{où} \quad A^{b,c} \equiv A^c \quad \text{si } b \prec c.$$

$$\Gamma\sigma^2 A = \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} A(a, b) \qquad [A(a, b) = A(b)].$$

Or, la suite exacte de définition de ΓA s'écrit

$$0 \to \Gamma A \to \prod_{a \in \mathcal{E}} A(a) \to \prod_{\substack{a,b \\ a \prec b}} A(a, b),$$

c'est-à-dire

$$0 \to \Gamma A \to \Gamma\sigma A \to \Gamma\sigma^2 A.$$

Elle suggère donc de manière évidente la considération de la résolution suivante de A, Γ-acyclique, dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ou *Γ-résolution standard de A* :

$$0 \to A \to \sigma A \xrightarrow{\partial_0} \sigma^2 A \xrightarrow{\partial_1} \ldots \to \sigma^{n+1} A \xrightarrow{\partial_n} \sigma^{n+2} A \to \ldots,$$

où

$$\sigma^{n-1} A = \prod_{a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n} A^{a_0, a_1, \ldots, a_n},$$

avec

$$A^{a_0, a_1, \ldots, a_n} \equiv A^{a_n} \qquad \text{si} \quad a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n$$

et ∂_n est défini par le produit de ses composantes appliquées dans chaque $A^{a_0, a_1, \ldots, a_n}$:

$$\partial_{n, A^{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}}} : \quad \prod_{b_0 \prec \ldots \prec b_n} A^{b_0, b_1, \ldots, b_n} \to \prod_{i=0}^{n+1} A^{a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{n+1}} \to A^{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}},$$

$$\partial_{n, A^{a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, 1_{A^{a_0, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_{n+1}}} + (-1)^{n+1} p_{a_n, a_{n+1}} 1_{A^{a_0, a_1, \ldots, a_n}}.$$

Cette résolution est *acyclique dans* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, ce qui veut dire qu'elle l'est en chaque $b \in \mathcal{E}$. En effet, en $b \in \mathcal{E}$, on obtient

$$0 \to A(b) \to \prod_{\substack{a_0 \\ b \prec b_0}} A(a_0) \xrightarrow{\partial_0} \prod_{\substack{a_0, a_1 \\ b \prec a_0 \prec a_1}} A(a_0, a_1) \to \dots$$
$$\to \prod_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_n \\ b \prec a_0 \prec \dots \prec a_n}} A(a_0, a_1, \dots, a_n) \to \dots$$

qui n'est autre que l'image de la résolution par le foncteur sections Γ_b relatif au sous-ensemble $\bar{b}$ de $\mathcal{E}$ formé des c tels que $b \prec c$. Ce sous-ensemble a un premier élément b : $\Gamma_{\bar{b}}$ est donc exact et $\Gamma_{\bar{b}} A = A(b)$. Le début de la suite précédente, définissant $\Gamma_{\bar{b}} A$ est donc exact. L'*opérateur conique classique*

$$\prod_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \\ b \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_{n-1}}} A(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \equiv \prod_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \\ b \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_{n-1}}} A(b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$
$$\xleftarrow{s_n} \prod_{\substack{c_0, c_1, \dots, c_n \\ b \prec c_0 \prec c_1 \prec \dots \prec c_n}} A(c_0, c_1, \dots, c_n)$$

nul sur $A(c_0, c_1, \dots, c_n)$ si $c_0 \neq b$ et l'identité si $c_0 = b$, est un *opérateur d'homotopie*, car la composante appliquée dans $A(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $\partial_{n-1} s_n$ est

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \, 1_{A(b, a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)} + (-1)^n p_{a_{n-1} a_n} 1_{A(b, a_0, \dots, a_{n-1})}$$

tandis que la composante de $s_{n+1} \partial_n$ dans le même objet est la composante de ∂_n dans $A(b, a_0, a_1, \dots, a_n)$, c'est-à-dire

$$1_{A(a_0, \dots, a_n)} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \, 1_{A(b, a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)} - (-1)^n p_{a_{n-1} a_n} 1_{A(b, a_0, \dots, a_{n-1})}.$$

Donc la composante de $\partial_{n-1} s_n + s_{n+1} \partial_n$ appliquée dans $A(a_0, a_1, \dots, a_n)$ est $1_{A(a_0, \dots, a_n)}$, c'est-à-dire l'identité.

La résolution $\sigma A = [\sigma A \to \sigma^2 A \to \dots \to \sigma^n A \to \dots]$ est un foncteur exact de A.

Il est bien connu qu'on peut, au lieu d'une résolution injective, utiliser une résolution Γ-acyclique d'un objet A pour calculer la valeur pour A des dérivés $r^n\Gamma$ ([8], p. 148). La résolution ci-dessous est l'*analogue de la résolution flasque canonique en théorie des faisceaux* ([7], p. 167). Comme elle existe indépendamment de l'éventuel plongement de tout élément de $\mathcal{C}$ dans un injectif, on peut donc énoncer (*cf.* § 9) :

DÉFINITION 10.1. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec produits, $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné, Γ le foncteur sections sur $\mathcal{E}$ (§ 4.3). Les* objets de cohomologie de $\mathcal{E}$ relativement à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *sont les objets de cohomologie du complexe dans $\mathcal{C}$ obtenu en appliquant Γ à la Γ-résolution standard de A définie ci-dessus, soit, en notant*

$$C^m(\mathcal{E};\,A) = \Gamma\sigma^{n+1}A = \sum_{a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n} A(a_0,\,a_1,\,\ldots,\,a_n)$$

les cochaînes de degré n de $\mathcal{E}$ relativement à A (*cf.* § 8.1) *du complexe* (*qui est un* foncteur résolvant pour Γ : ([8] p. 149 et § 12.1).

$$0 \to C^0(\mathcal{E};\,A) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathcal{E};\,A) \xrightarrow{\delta_1} \ldots \to C^n(\mathcal{E};\,A) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(\mathcal{E};\,A) \to \ldots.$$

Définition analogue pour la cohomologie de $\mathcal{E}$ mod $\mathcal{E}'$.

10.2. — Dualement, on considère le foncteur τ qui à chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ fait correspondre l'objet $\tau A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$;

$$\tau A = \bigoplus_{b \in \mathcal{E}} A_b,$$

où A_b est l'objet coélémentaire (§ 2) défini par $A_b(b) = b$.

La somme directe des morphismes canoniques des A_b dans A détermine un *épimorphisme*

$$\tau A \to A.$$

Si $\bigoplus$ est un foncteur exact (§ 6, axiome $AB3$ de [8]), τ est un foncteur exact de A, et τA *est* L-*acyclique* :

$$\mathrm{L}(\tau A) = \bigoplus_{a \in \mathcal{E}} A(a).$$

On observe de la même manière que la suite exacte de définition de L n'est autre que

$$\mathrm{L}\tau^2 A \xrightarrow{\partial} \mathrm{L}\tau A \to \mathrm{L}A \to 0,$$

d'où l'introduction naturelle de la L-*résolution standard de A* :

$$\ldots \to \tau^{n+1}A \xrightarrow{\partial_n} \tau^n A \to \ldots \xrightarrow{\partial_1} \tau A \to A \to 0,$$

avec

$$\tau^{n+1}A = \bigoplus_{a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n} A_{a_0, a_1, \ldots, a_n},$$

avec $A_{a_0, a_1, \ldots, a_n} = A_{a_0}$ et ∂_n, défini par la somme directe de ses composantes sur chaque $A_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$:

$$\partial_{n, A_{a_0, a_1, \ldots, a_n}} = 1_{A_{a_1, \ldots, a_n}} \cdot p_{a_0 a_1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\, 1_{A_{a_0, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n}}.$$

Cette résolution de A *par des objets* L*-acycliques*, est *acyclique dans* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ car en $b \in \mathcal{E}$, elle s'écrit :

$$\rightarrow \bigoplus_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_n \\ a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n \prec b}} A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n) \xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{\substack{a_0, a_1 \\ a_0 \prec a_1 \prec b}} A^\star(a_0, a_1)$$

$$\xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{a \prec b} A(a) \rightarrow A(b) \rightarrow 0$$

[où $A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n) = A(a_0)$ suivant la convention du paragraphe 5.1].

L'ensemble $\underline{b}$ des éléments de $\mathcal{E}$ plus petits que b a un dernier élément b, et l'opérateur conique correspondant :

$$\tau^{n+2} A \xleftarrow{t_n} \tau^{n+1} A,$$

$$\bigoplus_{\substack{c_0, c_1, \ldots, c_{n+1} \\ c_0 \prec c_1 \prec \ldots \prec c_{n+1} \prec b}} A^\star(c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}) \xleftarrow{t_n} \bigoplus_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_n \\ a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n \prec b}} A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n, b)$$

$$\equiv \bigoplus_{\substack{a_0, a_1, \ldots, a_n \\ a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n \prec b}} A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

est un opérateur d'homotopie.

La résolution

$$TA = [\ldots \rightarrow \tau^n A \rightarrow \ldots \rightarrow \tau^2 A \rightarrow \tau A]$$

est un foncteur exact de A.

On peut donc énoncer (*cf.* § 9) :

Définition. — *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne avec sommes directes*, $\mathcal{E}$ *un ensemble ordonné*, L *le foncteur cosections sur* $\mathcal{E}$ (§ 5.1). *Les* objets d'homologie de $\mathcal{E}$ relativement à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *sont les objets d'homologie du complexe dans* $\mathcal{C}$ *obtenu en appliquant* L *à la* L*-résolution standard de A définie ci-dessus, soit, en notant*

$$C_n(\mathcal{E};\, A) = \mathrm{L}\tau^{n+1} A = \bigoplus_{a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n} A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

les chaînes de degré n de $\mathcal{E}$ relativement à A (*cf.* § 8.1) *du complexe*

$$0 \leftarrow C_0(\mathcal{E};\, A) \xleftarrow{\partial_1} C_1(\mathcal{E};\, A) \leftarrow \ldots \leftarrow C_{n-1}(\mathcal{E};\, A) \xleftarrow{\partial_n} C_n(\mathcal{E};\, A) \leftarrow \ldots$$

qui est un foncteur résolvant pour L ([8], p. 149 et § 12.1).

10.3. Application : homologie et cohomologie de l'ensemble ordonné $\mathcal{N}$ des entiers ≥ 0 et des ensembles filtrants de type dénombrable. — D'après la proposition 7.3 B, l'homologie et la cohomologie d'un ensemble filtrant de type dénombrable sont les mêmes que celle d'un ensemble cofinal qu'on peut choisir isomorphe à $\mathcal{N}$.

Or, on a dans ce cas des foncteurs résolvants très simples de $\Gamma_{N^\star}$ et L_N; si $A \in \mathcal{C}(N^\star)$:

$$0 \to \Gamma_{N^\star} A \to \prod_n A(n) \xrightarrow{\partial} \prod_n A(n) \to 0 \to 0 \to \ldots,$$

avec, si $\alpha = \{\alpha_n\}$:

$$(\partial\alpha)_n = p_{n+1,n}\alpha_{n+1} - \alpha_n$$

si $A \in \mathcal{C}(N)$:

$$\ldots \to 0 \to \bigoplus_n A(n) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_n A(n) \to LA \to 0$$

avec, si $\alpha = \sum \alpha_n$:

$$\partial\alpha = \sum (\alpha_n - p_{n-1,n}\alpha_{n-1}).$$

Si A est un objet élémentaire de $\mathcal{C}(N^\star)$, ∂ est un épimorphisme (c'est d'ailleurs un épimorphisme si tous les $p_{n+1,n}$ sont des épimorphismes).

Si A est un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(N)$, ∂ est un monomorphisme.

Les complexes sont donc bien acycliques dans le premier cas pour les produits d'objets élémentaires, dans le second cas pour les sommes d'objets coélémentaires.

On a donc

$$r^n\Gamma(N^\star;\, A) = 0 \qquad \text{si} \quad n \geqq 2,$$

$$r^1\Gamma(N^\star;\, A) = H^1(N^\star;\, A) = \prod_{n\in N} A(n)/\partial \prod_{n\in N} A(n),$$

$$l_n L(N\,;\, A) = 0 \qquad \text{si} \quad n \geqq 2,$$

$$l_1 L(N\,;\, A) = H_1(N\,;\, A) = \operatorname{Ker}\left[\bigoplus_n A(n) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_n A(n)\right];$$

$H^1(N^\star;\, A)$ avait déjà été utilisé par Steenrod ([12], p. 845) et nous le retrouverons au paragraphe 15.

10.4. Dimension homologique. Problème de caractérisation du type d'un ensemble filtrant.

Définitions :

1 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne,* $\mathcal{E}$ *un ensemble ordonné. La* dimension homologique de $\mathcal{E}$ relativement à $\mathcal{C}$ *est le plus petit entier* $n \geqq 0$ (*ou* $+\infty$), *tel que* $H_m(\mathcal{E};\, A) = 0$, $\forall m > n$ *et* $\forall A \in \mathcal{C}$. *La* dimension homologique absolue *de* $\mathcal{E}$ *est la borne supérieure des dimensions homologiques de* $\mathcal{E}$ *relativement aux catégories abéliennes.*

2. *Deux ensembles filtrants à droite* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ *sont dits* de même type *s'il existe un ensemble cofinal* $\mathcal{E}_0$ *de* $\mathcal{E}$ *et un ensemble cofinal* $\mathcal{E}'_0$ *de* $\mathcal{E}'$, *isomorphes* (*pour leur structure d'ensemble ordonné*).

PROBLÈME. — Est-ce qu'un ensemble filtrant de dimension homologique absolue égale à 1 est de type démombrable? Plus généralement, la dimension homologique absolue est-elle un invariant moins fin que le type dans la catégorie des ensembles filtrants?

10.5. Isomorphismes. — Nous allons prouver deux théorèmes d'isomorphismes qui s'ajoutent aux théorèmes d'isomorphismes déjà démontrés aux propositions 7.2, 7.3 A, 7.3 B.

PROPOSITION 10.5. — *Si A est un objet constant de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ [$\forall a \prec b, p_{ab}$ est un isomorphisme de $A(a)$ sur $A(b)$], on peut aussi le considérer avec les $\overset{-1}{p}_{ab}$ comme un objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$. Les foncteurs résolvants des paragraphes* 10.1 *et* 10.2 *montrent alors immédiatement que l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ et son dual $\mathcal{E}^*$ ont mêmes objets d'homologie et de cohomologie relativement à A :*

$$H_n(\mathcal{E}; A) = H_n(\mathcal{E}^*; A), \qquad H^n(\mathcal{E}; A) = H^n(\mathcal{E}^*; A).$$

THÉORÈME 10.5.A. — *Soit ρ un ordre de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans l'ensemble ordonné $\mathcal{P}$ satisfaisant à :*

1° $\forall a \in \mathcal{E}$, *$\rho a$ est non vide et filtrant à gauche;*

2° $\forall p \in \mathcal{P}$, *$\overset{-1}{\rho} p$ est non vide et filtrant à droite.*

Alors, si $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome (lim sup) *du paragraphe* 6.4, *et si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$: ρ est un foncteur exact; l'image par ρ d'un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un objet $L_{\mathcal{P}}$-acyclique de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$*; l'image par ρ de la $L_{\mathcal{E}}$-résolution standard de A dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ (§ 10.2) est donc une résolution $L_{\mathcal{P}}$-acyclique de ρA dans $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. *On a donc les isomorphismes*

$$H_n(\mathcal{E}; A) = H_n(\mathcal{P}; \rho A).$$

Dualement, si $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome (lim inf) *du paragraphe* 6.4 *et si $B \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$, on a l'isomorphisme*

$$H^n(\mathcal{E}; \overset{-1}{\rho}\mathrm{B}) = H^n(\mathcal{P}; \mathrm{B}).$$

PREUVE. — Par définition : $\rho A(p) = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho} p} A$.

Puisque $\overset{-1}{\rho} p$ est filtrant à droite et que $\mathcal{C}$ satisfait à (lim sup), d'après le paragraphe 6.4, ρ est un foncteur *exact* :

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{P}).$$

Montrons qu'il transforme un objet coélémentaire (§ 1) de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ en un objet $L_{\mathcal{P}}$-acyclique. Soit A un tel objet, tel que $A(b) = A(a)$ si $a \prec b$ et $A(b) = 0$ si $a \not\prec b$. D'après la condition 2° :

$$A(p) = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho} p} A = A(a) \quad \text{si } a \prec p \qquad \text{et} \qquad \rho A(p) = 0 \quad \text{si } a \not\prec p.$$

Donc, ρA est constant et égal à $A(a)$ sur ρa (qui est filtrant à gauche et clos à droite) et nul hors de ρa. D'après la proposition 7.2 :

$$H_n(\mathcal{T}; \rho A) = (l_n \mathrm{L}_{\mathcal{T}})\, \rho A = (l_n \mathrm{L}_{\rho a})\, \rho A = H_n(\rho a; \rho A).$$

Mais comme ρA est constant sur ρa, d'après la proposition 10.5 A ci-dessus :

$$H_n(\rho a; \rho A) = H_n(\rho a^\star; \rho A)$$

et comme $\rho a^\star$ est maintenant filtrant à droite, $H_n(\rho a^\star; \rho A) = 0$ si $n > 0$, puisque $\mathcal{C}$ satisfait à (lim sup). Donc $H_n(\mathcal{T}; \rho A) = 0$ si $n > 0$ et l'image par ρ d'un objet coélémentaire de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est bien $\mathrm{L}_{\mathcal{T}}$-acyclique.

Il en est donc de même de l'image par ρ d'un objet projectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Comme $\mathrm{L}_{\mathcal{T}}\rho A = \mathrm{L}_{\mathcal{E}} A$ d'après le théorème 7.2 et que ρ est exact, on a bien les isomorphismes

$$H_n(\mathcal{E}; A) = H_n(\mathcal{T}; \rho A).$$

Preuve analogue pour la propriété duale.

Les considérations du paragraphe 9.1 (Morphismes) et la démonstration du théorème 10.5 A ci-dessus prouvent immédiatement le théorème suivant, *généralisation du théorème* 10.5 A *et de la proposition* 9.3 :

THÉORÈME 10.5 B. — *Soient ρ un ordre de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans l'ensemble ordonné $\mathcal{E}'$, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Si le foncteur $\rho : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ est exact, on a un morphisme canonique*

$$H_n(\mathcal{E}'; \rho A) \to H_n(\mathcal{E}; A).$$

Si de plus, $\forall a \in \mathcal{E}$ l'homologie de (ρa) à coefficients constants dans $\mathcal{C}$ est triviale [c'est-à-dire : ρa est non vide et connexe, et $H_n(\rho a; K) = 0$, $n > 0$; $K \in \mathcal{C}$], alors ce morphisme est un isomorphisme

$$H_n(\mathcal{E}; A) = H_n(\mathcal{E}'; \rho A).$$

Dualement, si $B' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et si $\overset{-1}{\rho} : \mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un foncteur exact, on a un morphisme canonique

$$H^n(\mathcal{E}'; B') \to H^n(\mathcal{E}; \overset{-1}{\rho} B').$$

Si de plus, $\forall a' \in \mathcal{E}'$, la cohomologie de $\overset{-1}{\rho} a'$ a coefficients constants dans $\mathcal{C}$ est triviale, ce morphisme est un isomorphisme

$$H^n\big(\mathcal{E}; \overset{-1}{\rho} B'\big) = H^n(\mathcal{E}'; B')$$

(on notera l'analogie de ce théorème avec le théorème dit de Vietoris-Begle).

10.6. Homologie et cohomologie d'un recouvrement d'un espace topologique à coefficients dans un préfaisceau ou un antifaisceau. — Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert clos, c'est-à-dire que $U \in \mathcal{R}$ et $U \supset V \Rightarrow V \in \mathcal{R}$, A un préfaisceau dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, défini sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ ($\mathcal{R}$ ordonné par inclusion : $U \prec V \Leftrightarrow U \supset V$), B un antifaisceau défini sur $\mathcal{R}(B \in \mathcal{C}(\mathcal{R}^*))$.

Les $H_n(\mathcal{R}; A)$ et $H^n(\mathcal{R}; A)$, $H_n(\mathcal{R}; B)$ et $H^n(\mathcal{R}; B)$ sont les objets d'homologie et de cohomologie de $\mathcal{R}$ à coefficients dans A et B.

On peut les calculer au moyen des chaînes et des cochaînes de $\mathcal{R}$ à coefficients dans A et B, d'après les paragraphes **10.1** et **10.2**.

Soit maintenant $\mathcal{P}$ une famille non vide de parties non vides de l'espace topologique X, ordonné par inclusion ($p \prec q \Leftrightarrow p \supset q$), satisfaisant aux deux conditions suivantes :

($\mathcal{P}_1$) la réunion de deux parties de X appartenant à $\mathcal{P}$, appartient également à $\mathcal{P}$;

($\mathcal{P}_2$) tout ouvert non vide de X contient un élément de $\mathcal{P}$.

Exemples de familles $\mathcal{P}$. — *a*. Les parties finies de X; *b*. Si chaque ouvert non vide de X contient un fermé non vide (par exemple si tout point est fermé), les fermés non vides de X forment une famille $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ que forment les éléments de $\mathcal{P}$ contenus dans au moins un ouvert du recouvrement ouvert clos $\mathcal{R}$.

La relation d'inclusion dans $P(X)$ définit alors un ordre canonique π de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ qui satisfait aux deux propriétés (*cf.* théorème **10.5** A) :

(π_1) si U est un ouvert de $\mathcal{R}$, l'ensemble πU des $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ contenus dans U est non vide et filtrant à gauche;

(π_2) si $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, l'ensemble $\overset{-1}{\pi} p$ des ouverts de $\mathcal{R}$ contenant p est non vide et filtrant à droite.

Si A est un préfaisceau défini sur $\mathcal{R}$: $A \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$, πA est l'objet de $\mathcal{C}(\mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ défini par

$$\pi A(p) = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\pi} p} A = \varinjlim_{U \supset p} A(U).$$

Une application immédiate du théorème **10.5** A donne le théorème :

Théorème **10.6**. — *Si la catégorie $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome* (lim sup) (§ **6.4**) (*par exemple si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modules sur un anneau*), *l'homologie du recouvrement $\mathcal{R}$ relativement au préfaisceau $A \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ est isomorphe à l'homologie de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ relativement à $\pi A \in \mathcal{C}(\mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ (voir ci-dessus les définitions de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, π) :*

$$H_n(\mathcal{R}; A) = H_n(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}; \pi A)$$

autrement dit, l'homologie de $\mathcal{R}$ peut se calculer sur les éléments de $\mathcal{P}$ contenus dans $\mathcal{R}$.

Dualement, si $\mathcal{C}$ satisfait à (lim inf) (*par exemple si $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens compacts*), *et si $B \in \mathcal{C}(\mathcal{L}^*_{\mathcal{R}})$* :

$$H^n(\mathcal{R};\ \overset{-1}{\pi} B) = H^n(\mathcal{L}_{\mathcal{R}};\ B).$$

11. Foncteurs canoniques entre ensembles ordonnés et schémas simpliciaux.

11.1. — Rappelons qu'un *schéma simplicial M* ([7], p. 37) est un ensemble muni de la structure définie par un ensemble de parties finies, appelées simplexes, de telle sorte que toute partie finie non vide d'un simplexe soit encore un simplexe. Un schéma simplicial M est *ordonné* s'il est muni d'une relation d'ordre telle que tout simplexe soit totalement ordonné.

Les schémas simpliciaux forment une *catégorie* $\mathcal{S}$: un morphisme ou *application simpliciale* de M dans M' est une application qui transforme tout simplexe de M en simplexe de M'. Les schémas simpliciaux ordonnés forment une *catégorie* $\mathcal{S}_0$ dans laquelle les morphismes sont les *applications simpliciales croissantes*. $\mathcal{S}_0$ est naturellement appliquée dans $\mathcal{S}$.

11.2. Foncteurs α, $\overline{\alpha}$ et β. — A tout schéma simplicial M faisons correspondre l'ensemble ordonné αM dont les éléments sont les simplexes de M et la relation d'ordre l'inclusion : si $s,\ t \in M$, $s \prec t \Leftrightarrow s \subset t$. Si f est une application simpliciale de M dans M', αf est une application croissante de αM dans $\alpha M'$. *α est donc un foncteur de la catégorie $\mathcal{S}$ dans la catégorie $\mathcal{O}$* des ensembles ordonnés et applications croissantes.

A tout ensemble ordonné $\mathcal{E}$ faisons correspondre le schéma simplicial ordonné $\beta\mathcal{E}$ obtenu en appelant simplexe de $\mathcal{E}$ toute suite finie totalement ordonnée d'éléments distincts de $\mathcal{E}$: $a_0 \prec a_1 \prec \ldots \prec a_n$. Si g est une application croissante de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, βg est une application simpliciale ordonnée de $\beta\mathcal{E}$ dans $\beta\mathcal{E}'$: *β est donc un foncteur de la catégorie $\mathcal{O}$ dans la catégorie $\mathcal{S}_0$*.

Le composé $\beta\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_0$ n'est autre que la *subdivision barycentrique. Nous nous restreindrons dans ce qui suit à $\mathcal{S}_0$*.

Si M_n est l'ensemble des simplexes de degré n de $M \in \mathcal{S}_0$, c'est-à-dire des simplexes comptant $n+1$ éléments de M : $\alpha M = \bigcup\limits_{n \geq 0} M_n$.

Soit $\Delta_n = (0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ la suite des $(n+1)$ premiers nombres entiers ≥ 0. $\Delta_n \in \mathcal{O}$, et il est d'usage de noter encore Δ_n le schéma simplicial ordonné $\beta\Delta_n$. Désignons par $\mathfrak{M}_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_0}(\Delta_n,\ M)$ l'ensemble des simplexes singuliers de degré n de M ([7], p. 39), c'est-à-dire des applications croissantes (au sens large) de Δ_n dans les simplexes de M, et par $\overline{\alpha} M = \bigcup\limits_{n \geq 0} \mathfrak{M}_n$.

Préordonnons $\bar{\alpha} M$ par

$$\sigma_m \in \mathfrak{M}_m, \qquad \sigma_n \in \mathfrak{M}_n, \qquad \sigma_m \prec \sigma_n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe au moins une application} \\ \text{croissante } \varphi_{mn} \text{ de } \Delta_m \text{ dans } \Delta_n \\ \text{telle que } \sigma_n . \varphi_{mn} = \sigma_m . \end{array} \right.$$

Si f est une application simpliciale ordonnée de M dans M', $\bar{\alpha} f$ est une application croissante de $\bar{\alpha} M$ dans $\bar{\alpha} M'$.

A tout $s_n \in M_n$ correspond une application croissante unique σ_n de Δ_n sur s_n d'où une *injection*

$$M_n \rightarrow \mathfrak{M}_n \qquad \text{et} \qquad \alpha M \rightarrow \bar{\alpha} M.$$

Réciproquement, à tout simplexe singulier σ correspond un simplexe $\lambda(\sigma)$ de M : l'image de σ. Dans l'ensemble préordonné $\bar{\alpha} M$, λ est une rétraction (*cf.* § 7.3, corollaire), de $\bar{\alpha} M$ sur le sous-ensemble αM [λ est croissante, $\lambda(\sigma) \prec \sigma$, $\lambda =$ identité sur αM]. λ est une transformation naturelle de foncteurs (sur $\mathcal{S}_0$) $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha$.

11.3. Conservation de l'homologie et de la cohomologie par β. — Soit, pour $i = 0, 1, 2, n$, f_i l'application strictement croissante de Δ_{n-1} dans Δ_n qui ne prend pas la valeur i, et F_i l'application ($i^{\text{ième}}$ face) de $\mathfrak{M}_n$ dans $\mathfrak{M}_{n-1}$ (notation ci-dessus) définie par $F_i \sigma_n = \sigma_n f_i$. On a donc $F_i \sigma_n \prec \sigma_n$ et F_i applique M_n dans M_{n-1}.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. *Un système de coefficients covariants dans $\mathcal{C}$ sur le schéma simplicial $M \in \mathcal{S}$ est, par définition, un objet de $\mathcal{C}(\alpha M)$, un système contravariant, un objet de $\mathcal{C}(\alpha M^*)$.*

En posant $A(\sigma) = A(\lambda \sigma)$, pour $\sigma \in \bar{\alpha} M$, on étend aux simplexes singuliers, c'est-à-dire à $\bar{\alpha} M$, le système de coefficients : cela revient *indifféremment* à prendre $\overset{-1}{\lambda} A$ *image inverse de A par l'ordre* λ de $\bar{\alpha} M$ dans αM, défini par la rétraction λ, *où jA, image directe de A par l'ordre j* de αM dans $\bar{\alpha} M$ que détermine l'inclusion.

Les objets de COHOMOLOGIE *de $M \in \mathcal{S}_0$ relativement à un système* COVARIANT $A \in \mathcal{C}(\alpha M)$ sont par définition les objets de cohomologie *du complexe des cochaînes singulières de M relativement à A :*

$$\prod_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} A(\sigma_0) \xrightarrow{\partial_0} \prod_{\sigma_1 \in \mathfrak{M}_1} A(\sigma_1) \xrightarrow{\partial_1} \ldots \rightarrow \prod_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A(\sigma_n)$$
$$\xrightarrow{\partial_n} \prod_{\partial_{nn} \in \mathfrak{M}_{nn}} A(\sigma_{nn}) \rightarrow \ldots$$

où la composante de ∂_n appliquée dans $A(\sigma_{n+1})$ est

$$\partial_{n, A(\sigma_{n+1})} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i p_{F_i \sigma_{n+1}, \sigma_{n+1}} 1_{A(F_i \sigma_{n+1})},$$

$p_{F_i\sigma_{n+1},\sigma_{n+1}}$ est le morphisme de A : $A(F_i\sigma_{n+1}) \to A(\sigma_{n+1})$.

$$\prod_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A(\sigma_n) = C^n(M; A)$$

est l'objet des *cochaînes singulières de degré n de M relativement à A*.

Dualement, *les objets d'*HOMOLOGIE *de $M \in \mathcal{S}_0$ relativement à un système* CONTRAVARIANT $A^\star \in \mathcal{C}(\alpha M^\star)$ sont ceux du *complexe des chaînes singulières de M relativement à A :*

$$\begin{aligned} \ldots \to \bigoplus_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A^\star(\sigma_n) &\xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{\sigma_{n-1} \in \mathfrak{M}_{n-1}} A^\star(\sigma_{n-1}) \to \ldots \\ \to \bigoplus_{\sigma_1 \in \mathfrak{M}_1} A^\star(\sigma_1) &\to \bigoplus_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} A^\star(\sigma_0) \end{aligned}$$

avec la composante de ∂_n définie sur $A^\star(\sigma_n)$:

$$\partial_{n,A^\star(\sigma_n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, 1_{A^\star F_i \sigma_n} p_{\sigma_n F_i \sigma_n},$$

$\bigoplus_{\sigma_n \in \mathfrak{M}_n} A^\star(\sigma_n)$ est l'objet des chaînes singulières de degré n de M relativement à A.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné, un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ définit un système covariant sur le schéma simplicial ordonné associé $\beta\mathcal{E}$ par $A(a_0, a_1, \ldots, a_n) = A(a_n)$, et un système contravariant par $A^\star(a_0, a_1, \ldots, a_n) = A(a_0)$.

Les définitions du paragraphe 10 montrent alors que *les objets d'homologie et de cohomologie de $\mathcal{E}$ relativement à A sont respectivement ceux du schéma simplicial $\beta\mathcal{E}$ relativement aux systèmes de coefficients $A^\star$ et A définis par A sur $\beta\mathcal{E}$*. Nous exprimerons cette propriété en disant que *le foncteur β conserve l'homologie et la cohomologie.*

11.4. **Conservation de l'homologie et de la cohomologie par α et $\bar{\alpha}$.** — Partons réciproquement d'un schéma simplicial ordonné M et d'un système covariant $A \in \mathcal{C}(\alpha M)$ ou contravariant $A^\star \in \mathcal{C}(\alpha M^\star)$. Nous allons prouver les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} H^n(M; A) &= H^n(\alpha M; A) = H^n(\bar{\alpha} M; A), \\ H_n(M; A^\star) &= H_n(\alpha M^\star; A^\star) = H_n(\bar{\alpha} M^\star; A^\star). \end{aligned}$$

Les éléments de $M_0 = \mathfrak{M}_0$ sont les éléments minimaux de αM comme de $\bar{\alpha} M$. Si $S \in \mathcal{C}$, un élément

$$h \in \operatorname{Hom}\Big(S; \prod_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} A(\sigma_0)\Big) = \prod_{\sigma_0 \in \mathfrak{M}_0} \operatorname{Hom}(S; A(\sigma_0))$$

appartient au noyau de

$$\mathrm{Hom}\Big(S;\ \prod_{\sigma_0\in\mathfrak{M}_0} A(\sigma_0)\Big) \xrightarrow{\delta_{0,s}} \mathrm{Hom}\Big(S;\ \prod_{\sigma_1\in\mathfrak{M}_1} A(\sigma_1)\Big)$$

si et seulement si

$$p_{F_0\sigma_1,\sigma_1} h_{F_0\sigma_1} = p_{F_1\sigma_1,\sigma_1} h_{F_1\sigma_1} \qquad \text{quel que soit} \quad \sigma_1\in\mathfrak{M}_1.$$

Si l'on pose alors

$$h_{\sigma_1} = p_{F_0\sigma_1,\sigma_1} h_{F_0\sigma_1} = p_{F_1\sigma_1,\sigma_1} h_{F_1\sigma_1}$$

et qu'on considère le sous-ensemble $\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1$ de l'ensemble ordonné $\bar{\alpha}M$, la définition de Γ (§ 4.3) donne un isomorphisme naturel

$$H^0(M;\ A) = \Gamma_{\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1} A.$$

Mais, si ρ est d'ordre défini par l'inclusion de $\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1$ dans $\bar{\alpha}M$, $\overset{-1}{\rho}\sigma_n$ est connexe quel que soit $\sigma_n\in\bar{\alpha}M$ (§ 7.2) d'où, d'après le théorème d'isomorphisme 7.2 l'isomorphisme

$$\Gamma_{\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1}\overset{-1}{\rho} A = \Gamma_{\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1}(A \mid \mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1) = \Gamma_{\bar{\alpha}M} A$$

($\overset{-1}{\rho} A$ est la restriction de A à $\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1$), d'où $H^0(M;\ A) = \Gamma_{\bar{\alpha}M} A$. $H^n(M;\ A)$ et $r^n\Gamma_{\bar{\alpha}M} A = H^n(\alpha M;\ A)$ sont des foncteurs cohomologiques sur $\mathcal{C}(\bar{\alpha};\ M)$ isomorphes pour $n=0$: ils le sont pour tout n.

Il reste à prouver l'isomorphisme naturel

$$H^n(\alpha M;\ A) = H^n(\bar{\alpha}M;\ A)\ :$$

or c'est une conséquence de l'existence de la rétraction $\lambda : \bar{\alpha}\to\alpha$ (§ 11.2) et de la proposition 9.3.

Dualement, un élément

$$h\in\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\sigma_0\in\mathfrak{M}_0} A^\star(\sigma_0);\ S\Big) = \prod_{\sigma_0\in\mathfrak{M}_0}\mathrm{Hom}(A^\star(\sigma_0);\ S)$$

appartient au noyau de

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\sigma_1\in\mathfrak{M}_1} A^\star(\sigma_1);\ S\Big) \xrightarrow{\delta_{1,s}} \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\sigma_0\in\mathfrak{M}_0} A^\star(\sigma_0);\ S\Big)$$

si et seulement si

$$p_{\sigma_1,F_0\sigma_1}.\,h_{F_0\sigma_1} = p_{\sigma_1,F_1\sigma_1}.\,h_{F_1\sigma_1}.$$

On définit alors

$$h_{\sigma_1} = p_{\sigma_1,F_0\sigma_1} = p_{\sigma_1,F_1\sigma_1} h_{F_1\sigma_1},$$

et la propriété universelle de L donne les isomorphismes

$$H_0(M;\ A^\star) = \mathrm{L}_{(\mathfrak{M}_0\cup\mathfrak{M}_1)^\star} A^\star = \mathrm{L}_{\bar{\alpha}M^\star} A^\star$$

et comme λ est une « corétraction » de $\overline{\alpha}M^\star$ sur $\alpha M^\star$, on obtient tous les isomorphismes annoncés.

Un raisonnement analogue prouve qu'on peut calculer l'homologie et la cohomologie de M *en utilisant les chaînes et cochaînes* (sur les simplexes de M) au lieu des chaînes et cochaînes singulières.

Résumons la discussion précédente :

THÉORÈME 11.4. — *Avec les notations de ce paragraphe* 11 :

1° Foncteur $\beta : \mathcal{O} \to \mathcal{S}_0$. *Pour chaque ensemble ordonné* $\mathcal{E} \in \mathcal{O}$, β *détermine deux foncteurs* $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(\beta\mathcal{E})$, $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta^\star} \mathcal{C}(\beta\mathcal{E}^\star)$ *et identifie*

$$H^n(\mathcal{E};\, A) = H^n(\beta\mathcal{E};\, \beta A),$$
$$H_n(\mathcal{E};\, A) = H_n(\beta\mathcal{E};\, \beta^\star A).$$

2° Foncteurs α, $\overline{\alpha} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{O}$. α *et* $\overline{\alpha}$ *identifient :*

pour A *système covariant sur le schéma simplicial ordonné* M :

$$H^n(M;\, A) = H^n(\alpha M;\, A) = H^n(\overline{\alpha}M;\, A);$$

pour $A^\star$ *système contravariant sur* M :

$$H_n(M;\, A^\star) = H_n(\alpha M^\star;\, A^\star) = H_n(\overline{\alpha}M^\star;\, A^\star).$$

Il en résulte que n'importe quel composé successif de β *et de* α *ou* $\overline{\alpha}$, *en particulier la subdivision barycentrique, conserve l'homologie et la cohomologie « à coefficients ».*

Or, à l'aide de la formation usuelle du bord des simplexes, on ne sait définir directement sur un schéma simplicial, *ni son homologie relativement à un système covariant, ni sa cohomologie relativement à un système contravariant*, tandis que ces définitions sont naturelles pour un ensemble ordonné. Nous poserons donc, *par définition*, pour un schéma simplicial ordonné M :

Si A est un système covariant sur M :

$$H_n(M;\, A) = H_n(\alpha M;\, A).$$

Si $A^\star$ est un système contravariant;

$$H^n(M;\, A^\star) = H^n(\alpha M^\star;\, A^\star)$$

et nous allons prouver comme précédemment que

$$H_n(\alpha M;\, A) = H_n(\overline{\alpha}M;\, A),$$

et

$$H^n(\alpha M^\star;\, A^\star) = H^n(\overline{\alpha}M^\star;\, A^\star).$$

En effet, $A \in \mathcal{C}(\alpha M)$ et soit θ l'ordre de αM dans $\overline{\alpha} M$ défini par l'application λ de $\overline{\alpha} M$ sur αM précédemment définie (rétraction). L'image directe θA coïncide avec $\overset{-1}{\lambda} A$: c'est l'extension naturelle de A à $\overline{\alpha} M$. D'autre part, si j est l'inclusion de αM dans $\overline{\alpha} M$, pour tout $s \in \alpha M$, l'ensemble θs des éléments σ de $\overline{\alpha} M$ tels que $s \prec \lambda\sigma$ a un plus petit élément qui est $js = s$. On se trouve donc dans les hypothèses de la proposition 9.3, qui affirme l'isomorphisme

$$H_n(\alpha M;\ A) = H_n(\overline{\alpha} M;\ \theta A).$$

Démonstration analogue du second isomorphisme.

12. Catégories de complexes. — Rappelons rapidement les quelques résultats qui seront utilisés dans la suite.

12.1. — Soient $[a, b]$ un intervalle de l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers $\gtrless 0$, tel que $a+2 \leqq b$ (a peut être $-\infty$, b peut être $+\infty$), $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Un complexe sur $[a, b]$ est un objet de $\mathcal{C}([a, b])$ (notation du paragraphe 1) tel que $p_{nn'} = 0$ si $n' \geqq n+2$, soit encore tel que $p_{n+1,n+2} \cdot p_{n,n+1} = 0$ pour tout n tel que $a \leqq n \leqq b-2$.

Munis des morphismes de $\mathcal{C}([a, b])$ les complexes sur $[a, b]$ forment une catégorie $\mathcal{C}_{[a,b]}$, sous-catégorie de $\mathcal{C}([a, b])$. C'est une catégorie abélienne.

Notations. — Pour abréger, nous noterons $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{[-\infty,+\infty]}$, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}_{[0,\infty]}$, les complexes positifs, $\mathcal{C}_l = \mathcal{C}_{[-\infty,0]}$ les complexes négatifs. $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_l$, $\mathcal{C}_{[a,b]}$ s'identifient à des sous-catégories de $\mathcal{C}_c$.

Les objets projectifs de $\mathcal{C}_{[a,b]}$ sont les complexes $P = (P_n)$ du type suivant : soient (Q_n), $a \leqq n \leqq b$ une famille d'objets projectifs de $\mathcal{C}$, et $P_a = Q_a$, $P_n = Q_{n-1} + Q_n$ si $a+1 \leqq n$; $p_{n,n+1}$ est un isomorphisme sur Q_n, nul sur Q_{n-1}.

Les objets injectifs sont du type suivant : si (J_n) $a \leqq n \leqq b$ est une famille d'objets injectifs de $\mathcal{C}$: $I_n = J_n + J_{n+1}$ si $n+1 \leqq b$; $I_b = J_b$.

Dès lors, il est facile de voir que si $\mathcal{C}$ satisfait à la propriété : (P) : Tout objet est image d'un objet projectif, ou (I) : tout objet se plonge dans un objet objectif, $\mathcal{C}_{[a,b]}$ y satisfait aussi.

Il suffit en effet, si $A \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, de construire un complexe P ou I du type ci-dessus, avec pour Q_n un objet projectif d'image A_n, pour J_n un objet injectif dans lequel A_n se plonge.

Tout objet de $\mathcal{C}_{[a,b]}$ possède alors une résolution projective ou une résolution injective et l'on peut appliquer à ces résolutions les raisonnements classiques valables dans toute catégorie abélienne. En particulier, un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ dans $k\mathcal{C}([a, b])$ se relève en un morphisme pour des résolutions de A et B; deux relèvements sont homotopes $\left[\text{dans } \left(\mathcal{C}_{[a,b]}\right)_r \text{ ou } \left(\mathcal{C}_{[a,b]}\right)_l\right.$ et à une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathcal{C}_{[a,b]}$ on peut faire correspondre une suite exacte de résolutions$]$.

Le foncteur H^0, homologie de degré zéro, est exact à gauche sur $\mathcal{C}_r$ et son $n^{\text{ième}}$ dérivé à droite $r^n H^0$ est H^n. H^0 est exact à droite sur $\mathcal{C}_l$ et son $n^{\text{ième}}$ dérivé à gauche $l_n H^0$ est H_n.

Soit $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]}$ la catégorie restreinte des complexes sur $[a, b]$, dont les objets sont les complexes sur $[a, b]$ et les morphismes, les classes d'homotopie des morphismes usuels dans $\mathcal{C}_{[a,b]}$. Le groupe abélien $\overline{\mathrm{Hom}}(A; B)$ est le quotient de $\mathrm{Hom}(A, B)$ par le sous-groupe des applications homotopes à zéro. Deux complexes sont isomorphes dans $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]}$ s'ils ont même type d'homotopie.

Un foncteur F sur $\mathcal{C}_{[a,b]}$ qui se laisse factoriser on a,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_{[a,b]} \arrow[rr, Rightarrow, "F"] \arrow[d, Rightarrow, "\tau"'] & & \mathcal{C}' \\ \overline{\mathcal{C}}_{[a,b]} \arrow[rr, Rightarrow] & & \arrow[u, Rightarrow, "\overline{F}"'] \end{tikzcd}$$

$F = \overline{F}.\tau$, où τ est le foncteur d'équivalence homotopique, est un *invariant d'homotopie.*

Avec cette notation, les résolutions projectives et injectives des objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, peuvent se décrire par des foncteurs exacts : les foncteurs résolutions $\mathcal{P}: \mathcal{C} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}_l$ et $\mathcal{J}: \mathcal{C} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}_r$.

Rappelons encore ([8], p. 149) qu'un *foncteur résolvant* $\mathcal{F}$ d'un foncteur additif $\mathcal{F}: \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$, exact à gauche, est un foncteur exact $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'_r$ tel que :

a. $F = H^0 \mathcal{F}$ (composition des foncteurs $\mathcal{J}: \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'_r$ et $H^0: \mathcal{C}'_r \Rightarrow \mathcal{C}'$) ;
b. $H^n \mathcal{F}$ est nul sur les injectifs de $\mathcal{C}$, si $n > 0$.

Définition analogue d'un foncteur résolvant d'un foncteur additif exact à droite.

12.2. **Complexes doubles.** — Pour des raisons de cohérence avec ce qui précède, nos conventions diffèrent de celles de [6]. Si $[a, b] \times [c, d]$ est un intervalle de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, nous notons $d_{\mathrm{I}}^{n,m} = p_{(n,m)(n+1,m)}$ la différentielle « horizontale », $d_{\mathrm{II}}^{n,m} = p_{(n,m)(n,m+1)}$ la différentielle « verticale », Δ_{I} le premier degré, Δ_{II} le second degré, d'un complexe double de $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$, qui vérifient

$$d_{\mathrm{I}}.d_{\mathrm{I}} = 0, \qquad d_{\mathrm{II}}.d_{\mathrm{II}} = 0, \qquad d_{\mathrm{I}}.d_{\mathrm{II}} = d_{\mathrm{II}}.d_{\mathrm{I}}.$$

Il y a isomorphisme des catégories $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$ et $\left(\mathcal{C}_{[a,b]}\right)_{[c,d]}$. Deux morphismes homotopes dans $\left(\mathcal{C}_{[a,b]}\right)_{[c,d]}$ sont homotopes au sens de l'homotopie des complexes doubles dans $\mathcal{C}_{[a,b]\times[c,d]}$.

Nous noterons donc $\mathcal{C}_{cc} = (\mathcal{C}_c)_c$, $(\mathcal{C}_l)_l = \mathcal{C}_{ll}$, etc.

Notons $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]\times[c,d]}$ la catégorie restreinte des complexes doubles avec pour morphismes les classes d'homotopie des morphismes usuels. La construction des résolutions projectives et injectives des objets de $\mathcal{C}_{[a,b]}$ détermine des foncteurs de $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]}$ dans $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]l}$ et $\overline{\mathcal{C}}_{[a,b]r}$. C'est une conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 12.2. — *Soient A, $A' \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ et f, g deux morphismes : $A \to A'$, homotopes, si $\overline{f}$, $\overline{g}$ sont des relèvements de f et g pour des résolutions projectives (ou injectives) de A et A', ils sont homotopes, comme morphismes de complexes doubles, dans $\mathcal{C}_{[a,b]l}$ $\left(ou\ \mathcal{C}_{[a,b]r}\right)$.*

PREUVE. — Il suffit de prouver que si f est un morphisme de A dans A' homotope à zéro dans $\mathcal{C}_{[a,b]}$:

$$f = (f_n), \qquad f_n = d'_{n-1}\, s_n + s_{n+1}\, d_n,$$

on peut construire un relèvement $\overline{f}$ de f, homotope à zéro dans $\mathcal{C}_{[a,b]l}$ pour des résolutions projectives de A et A'. Or, soient $(P_n = Q_{n-1} + Q_n)$, $(P'_n = Q'_{n-1} + Q')$ des objets projectifs d'images respectives A et A', σ_n et τ_n des morphismes dans $\mathcal{C}$ satisfaisant à

$$\sigma_n : \quad Q_n \to Q'_{n-1} \qquad \text{tel que, si } \varepsilon_n = (Q_n \to A_n) \text{ et } \varepsilon'_n = (Q'_n \to A'_n),$$
$$s_n \varepsilon_n = \varepsilon'_{n-1}\, \sigma_n ;$$
$$\tau_n : \quad Q_{n-1} \to Q'_{n-1} \qquad \text{tel que} \quad s_n\, d_{n-1}\, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon'_{n-1}\, \tau_n$$

et $F = (F_n)$ le morphisme $P \to P'$ défini par

$$F_n = D'_{n-1}(\sigma_n + \tau_n) + (\sigma_{n+1} + \tau_{n+1})\, D_n,$$

F relève f : $\varepsilon'_n F_n = f_n \varepsilon_n$, et est homotope à zéro. En prenant la restriction de F aux noyaux de ε et ε', on répète l'opération, et l'on construit ainsi de proche en proche un relèvement $\overline{f}$ de f homotope à zéro.

Preuve analogue dans le cas de résolutions injectives.

12.3. Foncteur $\mathcal{K}$. — Supposons que dans $\mathcal{C}$ les produits infinis existent et que Π soit un foncteur exact. A chaque complexe double $A = (A^{pq})$, faisons correspondre le complexe simple $\mathcal{K}A$ défini par

$$(a) \qquad \mathcal{K}A = \prod_{p+q=n} A^{p\,q} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (p,\ q \text{ varient dans les intervalles de définition} \\ \quad \text{du premier et du second « degré » de } A). \end{array} \right.$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta_n : \quad \mathcal{K}A^n \to \mathcal{K}A^{n+1}, \qquad \text{si} \quad k \in \prod\limits_{p+q=n} A^{p,q}, \\ \text{et} \quad r+s = n+1 : \quad (\delta k)^{r,s} = d_{\mathrm{II}} k^{r,s-1} + (-1)^s d_{\mathrm{I}} k^{r-s} \end{array} \right.$$

et à chaque morphisme $A \to B$, le morphisme $\mathcal{K}A \to \mathcal{K}B$ induit.

Le foncteur $\mathcal{K}$ possède les propriétés suivantes :

1° c'est un foncteur exact;

2° c'est un invariant d'homotopie en ce sens que, si f est un morphisme homotope à zéro de doubles complexes $A \to B$, le morphisme induit.

$$\mathcal{K}A \to \mathcal{K}B$$

est également homotope à zéro.

Proposition 12.3. — *Soient A un complexe acyclique de $\mathcal{C}_{[a,b]}$, $\mathcal{P}A$ une résolution projective de $A\left(\in \mathcal{C}_{[a,b]l}\right)$, $\mathcal{I}A$ une résolution injective de $A \in \mathcal{C}_{[a,b]r}$). Le morphisme identique des complexes doubles $\mathcal{P}A$ et $\mathcal{I}A$ est homotope à zéro, donc aussi, si F est un foncteur additif, celui des complexes doubles $F\mathcal{P}A$, $F\mathcal{I}A$ et des complexes simples $\mathcal{K}F\mathcal{P}A$, $\mathcal{K}F\mathcal{I}A$. Ces derniers sont donc acycliques.*

Preuve. — La suite $0 \to A_a \to A_{a+1} \to \ldots \to A_{b-1} \to A_b \to 0$ est exacte. Soit $Z_n = \operatorname{Ker}[A_n \to A_{n+1}]$; la suite $0 \to Z_n \to A_n \to Z_{n+1} \to 0$ est exacte, et $Z_n = 0$, $Z_b = A_b$.

Si $Q_{n,\star}$ est une résolution projective de Z_n, $Q_{n,\star} + Q_{n,+1\star}$ est une résolution projective de A_n et les $\mathcal{P}_{n,\star} = (Q_{n,\star} + Q_{n+1,\star})$ $a \leq n \leq b$ forment un complexe double, résolution projective de A.

Soit

$$s_{\mathrm{I}}^{n,m}: \quad \mathcal{P}_{n,m} = (Q_{n,m} + Q_{n+1,m}) \to \mathcal{P}_{n-1,m} = (Q_{n-1,m} + Q_{n,m})$$

défini par l'identité sur $Q_{n,m}$ et zéro sur $Q_{n+1,m}$. On a

$$a_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{II}} = d_{\mathrm{II}} s_{\mathrm{I}} \qquad \text{et} \qquad 1^{n,m} = s_{\mathrm{I}}^{n+1,m}\, d_{\mathrm{I}}^{n,m} + d_{\mathrm{I}}^{n-1,m}\, s_{\mathrm{I}}^{nm},$$

C. Q. F. D.

Raisonnement analogue pour $\mathcal{I}A$.

Définition 12.3. — Équivalence homologique de deux complexes A, $B \in \mathcal{C}$ $A \sim_{hm} B \Longleftrightarrow$ *il existe une suite $A = A_1$, A_2, $\ldots$, $A_n = B$ de complexes et de morphismes $f_n : A_n \to A_{n+1}$ ou $A_n \leftarrow A_{n+1}$ tels que* $\operatorname{Ker} f_n$ *et* $\operatorname{Coker} f_n$ *soient des complexes acycliques (il en résulte que A et B ont des objets d'homologie isomorphes).*

Exemple. — Soit $\mathcal{F}$ un foncteur résolvant (*voir* 12.1 ou [8], p. 149) d'un foncteur additif F, exact à gauche par exemple, de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Soient $A \in \mathcal{C}\,(a, b)$ $\mathcal{I}A$ une résolution injective de A, $\mathcal{F}\mathcal{I}A$ est un complexe double de $\mathcal{C}'_{r,r}$, et les morphismes $0 \to F\mathcal{I}A \to \mathcal{K}\mathcal{F}\mathcal{I}A$ et $0 \to \mathcal{F}A \to \mathcal{K}\mathcal{F}\mathcal{I}A$ entraînent l'équivalence homologique des complexes $\mathcal{F}A$ et $F\mathcal{I}A$.

Corollaire 12.3. — *Si A, B, sont deux complexes homologiquement équivalents de $\mathcal{C}_{[a,b]}$, G un foncteur additif $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ les objets d'homologie*

$H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{L}A)$ et $H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{L}B)$ sont isomorphes, de même que les objets d'homologie $H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{I}A)$ et $H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{I}B)$.

Si l'un des degrés du complexe double A est borné inférieurement ou supérieurement, il détermine une filtration de $\mathcal{K}A$ et une suite spectrale de premier terme $h_{\mathrm{I}}h_{\mathrm{II}}A$ ou $h_{\mathrm{II}}h_{\mathrm{I}}A$, convergente vers sa limite qui est l'objet gradué associé à $H^*(\mathcal{K}A)$.

13. Hyperdérivés d'un foncteur composé.

13.1. — Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$ trois catégories abéliennes, $F : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \Rightarrow \mathcal{C}''$ deux foncteurs additifs, A un objet de $\mathcal{C}$, $\mathfrak{L}A$ et $\mathfrak{I}A$ des résolutions projective et injective de A. $F\mathfrak{L}A$ et $F\mathfrak{I}A$ sont des complexes dans $\mathcal{C}'$. On peut en prendre, dans $\mathcal{C}'_c$ (ou indifféremment d'ailleurs dans $\mathcal{C}'_l$ pour $F\mathfrak{L}A$ ou $\mathcal{C}'_r$ pour $F\mathfrak{I}A$) des résolutions projectives et injectives : $\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A$, $\mathfrak{I}F\mathfrak{I}A$, $\mathfrak{I}F\mathfrak{L}A$, $\mathfrak{L}F\mathfrak{I}A$. En leur appliquant G on obtient des complexes doubles dans $\mathcal{C}''$ auxquels on peut appliquer le foncteur $\mathcal{K}$.

DÉFINITION 13.1. — *En utilisant les notations ci-dessus, les hyperdérivés du foncteur composé GF sont les foncteurs qui à chaque objet $a \in \mathcal{C}$ font correspondre les objets d'holomorphie suivants :*

$$\begin{aligned}
&(ll_n\ GF)A = H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A), \\
&(rl_n\ GF)A = H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{I}F\mathfrak{L}A) \qquad (n \gtrless 0), \\
&(lr_n\ GF)A = H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{I}A) \qquad (n \gtrless 0), \\
&(rr_n GF)A = H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{I}F\mathfrak{I}A)
\end{aligned}$$

et à chaque morphisme $A \to A'$, les morphismes induits.

13.2. Propriétés des hyperdérivés.

13.2. *Justification de la définition.* — Il faut prouver que la définition est bien indépendante du double choix de résolutions. Or, si f est un morphisme $A \to A'$ dans $\mathcal{C}$, tous les morphismes $\mathfrak{L}A \to \mathfrak{L}A'$ relevant f sont homotopes entre eux dans $\mathcal{C}_l$, donc aussi les morphismes images par F : $F\mathfrak{L}A \to F\mathfrak{L}A'$. Les morphismes les relevant : $\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A \to \mathfrak{L}F\mathfrak{L}A'$ sont également homotopes entre eux d'après la proposition 12.2, donc aussi les morphismes images par G, puis $\mathcal{K}$. On a donc un morphisme unique

$$H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A) \to H^n(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A').$$

Raisonnement analogue dans les autres cas.

b. Suites exactes — Soit $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}$. On peut en choisir des résolutions projectives ou injectives qui forment des suites exactes de complexes, qui restent exactes lorsqu'on applique le foncteur F :

$$0 \to F\mathfrak{L}A' \to F\mathfrak{L}A \to F\mathfrak{L}A'' \to 0$$

et

$$0 \to F\mathcal{J}A' \to F\mathcal{J}A \to F\mathcal{J}A'' \to 0$$

Dans $\mathcal{C}'_c$ (ou $\mathcal{C}'_l$, ou $\mathcal{C}'_r$) on peut alors choisir des résolutions des complexes précédents de telle sorte qu'aux suites exactes de complexes correspondent des suites exactes de complexes doubles, qui restent exactes lorsqu'on leur applique le foncteur G :

$$0 \to G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A' \to G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A \to G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A'' \to 0, \quad \text{etc.}$$

Le foncteur $\mathcal{K}$ étant un foncteur exact, on obtient ainsi des suites exactes de complexes :

$$0 \to \mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A' \to \mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A \to \mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A'' \to 0, \quad \text{etc.},$$

d'où des suites exactes d'homologie :

$$\ldots \to (H_n GF)A' \to (H_n GF)A \to (H_n GF)A'' \to (H_{n+1} GF)A' \to \ldots, \quad \text{etc.}$$

c. *Utilisation de foncteurs résolvants.* — Supposons par exemple F et G exacts à droite (le même raisonnement vaut pour F et G indépendamment exacts à gauche ou à droite). Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des foncteurs résolvants (§ 12.1) de F et G. Alors, si $A \in \mathcal{C}$, les complexes $\mathcal{F}A$ et $\mathcal{F}\mathfrak{L}A$ de $\mathcal{C}'_l$ sont homologiquement équivalents (§ 12.3). D'après le corollaire 12.3, il en résulte un isomorphisme

$$H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{L}\mathcal{F}A) = H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A).$$

D'autre part, pour chaque objet B de $\mathcal{C}$, les épimorphismes dans $\mathcal{C}''_l$:

$$\mathcal{K}\mathcal{G}\mathfrak{L}B \to \mathcal{G}B \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{K}\mathcal{G}\mathfrak{L}B \to G\mathfrak{L}B \to 0$$

sont des équivalences homologiques (§ 12.3). Soient $X = (X_n)$ un complexe de $\mathcal{C}'_c$ et $Y = (Y_{n\star})$ le complexe double de $\mathcal{C}''_{cl}$ défini par $Y_{n,\star} = \mathcal{K}\mathcal{G}(\mathfrak{L}X)_{n,\star}$. Les épimorphismes $Y \to \mathcal{G}X \to 0$ et $Y \to G\mathfrak{L}X \to 0$ ont pour noyaux des complexes doubles d_{II}-acycliques. Il en résulte l'isomorphisme de $H^*(\mathcal{K}\mathcal{G}X)$ et de $H^*(\mathcal{K}\mathcal{G}\mathfrak{L}X)$.

En revenant aux notations initiales, on a donc un isomorphisme

$$H^*[\mathcal{K}\mathcal{G}(\mathcal{F}A)] = H^*[\mathcal{K}G\mathfrak{L}(\mathcal{F}A)],$$

d'où un isomorphisme

$$H^*(\mathcal{K}\mathcal{G}\mathcal{F}A) = H^*(\mathcal{K}G\mathfrak{L}F\mathfrak{L}A).$$

PROPOSITION 13.2. — *On peut, dans le calcul des hyperdérivés d'un foncteur composé GF, où G et F sont indépendamment exacts à gauche ou à droite, utiliser des foncteurs résolvants.*

d. Suites spectrales. — Les complexes doubles intervenant dans les définitions des hyperdérivés sont d_{I}-acycliques en degré $\Delta_{\mathrm{I}} \neq 0$ et l'on a par exemple

$$rr_n(GF)A = H^n(\mathcal{K}G\mathcal{J}F\mathcal{J}A) = h_{\mathrm{II}}h_{\mathrm{I}}(G\mathcal{J}F\mathcal{J}A)^{0.n}$$

qui correspond à la dégénérescence de l'une des suites spectrales attachée au complexe double.

La seconde suite spectrale a pour premier terme les $r^p[(r^q G)F]A$ et converge vers l'objet gradué associé à $rr(GF)A$ filtré par Δ_{I}. On a de même une suite spectrale de premier terme : les $l^p[(l^q G)F]A$, aboutissant à $ll(GF)A$; une suite spectrale de premier terme : les $r^p[(l_q G)F]A$, aboutissant à $lr(GF)A$, et une suite spectrale de premier terme : les $l_p[(r^q G)F]A$, aboutissant à $rl(GF)A$.

En particulier, si G est exact à droite, et si F transforme les projectifs de $\mathcal{C}$ en objets de $\mathcal{C}'$ annulés par les foncteurs $l_n G$ pour $n > 0$, l'hyperdérivé $ll_n(GF)$ est le dérivé ordinaire $l_n(GF)$.

Si G est exact à gauche, et si F transforme les injectifs de $\mathcal{C}$ en objets de $\mathcal{C}'$ annulés par les foncteurs $r_n G$ pour $n > 0$, l'hyperdérivé $rr_n(GF)$ est le dérivé ordinaire $r_n(GF)$.

Si ces hypothèses ne sont pas réalisées, bien entendu $ll_n(GF)$ *ne coïncide pas* avec $l_n(GF)$ [prendre un projectif P de $\mathcal{C}$ tel que $(l_n G)P \neq 0$], et $rr_n(GF)$ ne coïncide pas avec $r_n(GF)$.

Si G est exact,

$$ll_n(GF) = rl_n(GF) = l_n(GF) = G l_n F$$

et

$$rr_n(GF) = lr_n(GF) = r_n(GF) = G.r_n F.$$

13.3. Foncteurs composés associés à un ordre. — Soient ρ un ordre (§ 2) de l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans l'ensemble ordonné $\mathcal{E}'$, ρ le foncteur « image directe par ρ » (§ 7) : $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, et $\overset{-1}{\rho}$ le foncteur image inverse $\mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E})$. On peut appliquer ce qui précède aux foncteurs composés : $\mathrm{L}_{\mathcal{E}'}\rho$; $\Gamma_{\mathcal{E}'}\rho$; $\mathrm{L}_{\mathcal{E}}\overset{-1}{\rho}$; $\Gamma_{\mathcal{E}}\overset{-1}{\rho}$.

Dans le calcul de leurs hyperdérivés, on peut (proposition 13.2) utiliser des foncteurs résolvants pour ρ et $\overset{-1}{\rho}$ soient (d'après la proposition 7.3 A et le paragraphe 10) :

$\mathcal{G}$: foncteur résolvant de $\rho : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}')_l$;

$\mathcal{G}A(a') = C_*(\overset{-1}{\rho}a'; A)$ complexe des chaînes de $\overset{-1}{\rho}a$ relativement à A.

$\mathcal{G}'$: foncteur résolvant de $\overset{-1}{\rho} : \mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E})_r$;

$\mathcal{G}'A'(a) = C^*(\rho a; A')$ complexe des cochaînes de ρa relativement à A'.

On peut ensuite prendre des foncteurs résolvants pour $\mathrm{L}_{\mathcal{E}'}$; $\Gamma_{\mathcal{E}'}$; $\mathrm{L}_{\mathcal{E}}$; $\Gamma_{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire prendre les complexes des chaînes ou des cochaînes de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{E}'$

relativement à $\mathfrak{C}A$ ou $\mathfrak{C}'A'$, pour obtenir les complexes doubles définissant les hyperdérivés.

Insistons sur une propriété essentielle des foncteurs ρ et $\overset{-1}{\rho}$ qui motive leur utilisation. Si $A\in\mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\rho A\in\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ et $\rho A(a') = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}A$. De façon précise, si $\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}$ est le foncteur de restriction :

$$A\in\mathcal{C}(\mathcal{E}) \quad\Rightarrow\quad \gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}A = A \mid \overset{-1}{\rho}a'\in\mathcal{C}(\overset{-1}{\rho}a'),$$

on devrait écrire :

$$\rho A(a') = \mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}A$$

autrement dit, ρ peut être considéré comme une collection de foncteurs sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, indexés par les éléments de $\mathcal{E}'$: les $\mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}$.

$$l_n\left(\mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}\circ\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\right) = \left(l_n\mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}\right)\circ\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}$$

autrement dit, on peut indifféremment dériver $\mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ ou dans $\mathcal{C}(\overset{-1}{\rho}a')$: le foncteur $\mathrm{L}_{\overset{-1}{\rho}a'}$ ne dépend pas globalement de $\mathcal{E}$, il ne dépend que de $\overset{-1}{\rho}a'$: ρ *est, en quelque sorte, de caractère local sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. De même pour le foncteur $\overset{-1}{\rho} : \mathcal{C}(\mathcal{E}')\Rightarrow\mathcal{C}(\mathcal{E})$:

$$\overset{-1}{\rho}A'(a) = \Gamma_{\rho a}A'$$

c'est une collection de foncteurs $(\Gamma_{\rho a})$ et le foncteur $\Gamma_{\rho a}$ ne dépend que de ρa : $\overset{-1}{\rho}$ *est de caractère local sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$.

13.4. Cas des foncteurs $\rho^\star$ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star$. — Rappelons que si ρ est un ordre de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, on a défini à la fin du paragraphe 7.1, les foncteurs

$$\rho^\star : \quad \mathcal{C}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(\mathcal{E}'^\star) \quad \text{par } (\rho^\star A)(a') = \Gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}A,$$
$$\overset{-1}{\rho}{}^\star : \quad \mathcal{C}(\mathcal{E}') \to \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star) \quad \text{par } (\overset{-1}{\rho}{}^\star A')(a) = \mathrm{L}_{\rho a}A'.$$

Mais cette fois, les foncteurs $\rho^\star$ *et* $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ *ne sont plus de caractère local sur* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *et* $\mathcal{C}('\mathcal{E})$ *respectivement*, c'est-à-dire que

$$r^n\left(\Gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\circ\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\right)\neq\left(r^n\Gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\right)\circ\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'} \qquad \text{et} \qquad l_n(\mathrm{L}_{\rho a}\circ\gamma_{\rho a})\neq(l_n\mathrm{L}_{\rho a})\circ\gamma_{\rho a}.$$

Or les termes dans les applications sont les $\left(r^n\Gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\right)\circ\gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}$ et les $(l_n\mathrm{L}_{\rho a})\circ\gamma_{\rho a}$, c'est-à-dire qu'il faut dériver localement les foncteurs et non pas globalement sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$.

On peut donc considérer $\rho^\star$ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ comme des collections de foncteurs $\rho^\star = \{\Gamma_{\overset{-1}{\rho}a'}\}$ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star = \{\mathrm{L}_{\rho a}\}$. Cependant, pour appliquer les théorèmes généraux sur les foncteurs résolvants, les foncteurs composés, les hyperdérivés, etc., *il est nécessaire de pouvoir considérer $\rho^\star$ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ comme de simples foncteurs sur une catégorie.*

Nous allons donc *étendre la définition de $\rho^\star$ à une catégorie $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star) \supset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ et celle de $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ à une catégorie $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star) \supset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$*. Par rapport à ces catégories *ρ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star$* SERONT DE CARACTÈRE LOCAL.

DÉFINITION DE LA CATÉGORIE $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$. — *Un objet de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$ est la donnée pour chaque $a' \in \mathcal{E}'$ d'un objet $A_{a'}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ nul hors de $\overset{-1}{\rho} a'$, et pour chaque couple ordonné $a' \prec b'$ de $\mathcal{E}'$ d'un morphisme dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$:*

$$p_{b'a'} : \quad A_{a'} \leftarrow A_{b'} \text{ tel que si } a' \prec b' \prec c' : \quad p_{c'a'} = p_{b'a'} \circ p_{c'b'}$$

[*il en résulte que $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$ est une sous-catégorie de $[\mathcal{C}(\mathcal{E})](\mathcal{E}'^\star)$*]. *$\mathcal{C}(\mathcal{E})$ se plonge canoniquement dans $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E})$ en définissant pour chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$: $A_{a'} =$ extension par zéro hors de $\overset{-1}{\rho} a'$ de la restriction de A à $\overset{-1}{\rho} a'$.*

La restriction ponctuelle d'un objet $A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$ à sa composante $A_{a'}$ en $a' \in \mathcal{E}'$ est un FONCTEUR EXACT.

Tout objet de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ nul hors de $\overset{-1}{\rho} a'$ se plonge dans un injectif de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ nul hors de $\overset{-1}{\rho} a'$ en vertu de la construction de la proposition 1.3. Cette dernière construction appliquée à $[\mathcal{C}(\mathcal{E})](\mathcal{E}'^\star)$ montre que tout objet de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E})$ se plonge dans un objet injectif. De plus *tout objet de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E})$ peut se plonger dans un objet injectif produit d'injectifs du type suivant :*

$$J^{b',a} \in \mathcal{C}(\mathcal{E}), \qquad a \prec b'$$

tel que

$$J^{b',a}(c') = 0 \qquad \text{si} \quad b' \not\prec c' \text{ dans } \mathcal{E}',$$
$$J^{b',a}(c') = J^a \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) \qquad \text{si} \quad b' \prec c',$$

avec

$$J^a(c) = 0 \quad \text{si } c \not\prec a \qquad \text{et} \qquad J^a(c) = J \text{ injectif de } \mathcal{C} \text{ si } c \prec a.$$

Extension du foncteur $\rho^\star$ à $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star) \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E}'^\star)$, si $A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$, $\rho^\star A \in \mathcal{C}(\mathcal{E}'^\star)$ défini par

$$(\rho^\star A)\ (a') = \rho^\star A_{a'} = \Gamma_{\overset{-1}{\rho} a'} A_{a'}.$$

Comme $\Gamma_{\overset{-1}{\rho} a'} A_{a'} = \Gamma_{\mathcal{E}} A_{a'}$ d'après la proposition 7.2 ($A_{a'}$ est nul hors de $\overset{-1}{\rho} a'$) et que si $a' \prec b'$, on a un morphisme $A_{a'} \leftarrow A_{b'}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, il en résulte un morphisme dans $\mathcal{C}$: $\Gamma_{\mathcal{E}} A_{a'} \leftarrow \Gamma_{\mathcal{E}} A_{b'}$ soit $\rho^\star A(a') \leftarrow \rho^\star A(b')$ avec transitivité si $a' \prec b' \prec c'$.

Le foncteur $\rho^\star$ sur $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$ s'obtient donc en appliquant en chaque point de $\mathcal{E}'$ le foncteur $\Gamma_{\mathcal{E}}$. Comme la restriction ponctuelle en a' d'un injectif de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$ est un injectif de $\mathcal{C}(\overset{-1}{\rho} a')$, on a donc

$$\text{si } A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star) : \quad [(r^n \rho^\star)\ A]\ (a') = \left(r^n \Gamma_{\overset{-1}{\rho} a'}\right) A_{a'} = (r^n \Gamma_{\mathcal{E}})\ A_{a'}.$$

Le foncteur $\rho^\star$ est de caractère local sur $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star)$.

On voit de plus que *le foncteur $\mathcal{F}$* :

$$A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star) \Rightarrow (\mathcal{F}A)_{a'} = C^\star(\overset{-1}{\rho}\, a';\, A_{a'}) = \text{complexe des cochaînes de } \overset{-1}{\rho}\, a' \text{ relativement à } A_{a'}$$

est un foncteur résolvant de $\rho^\star$.

Définition de la catégorie $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star)$ et extension du foncteur $\overset{-1}{\rho}{}^\star$. — *Dualement un objet de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star)$ est la donnée pour chaque $a \in \mathcal{E}$ d'un objet $A'_a \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ nul hors de ρa, et pour chaque couple ordonné $a \prec b$ de $\mathcal{E}$, d'un morphisme dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$* :

$$p_{ba} : \quad A'_a \leftarrow A'_b \ \textit{tel que si } a \prec b \prec c : \quad p_{ca} = p_{ba} \circ p_{cb}$$

[il en résulte que $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star)$ est une sous-catégorie de $[\mathcal{C}(\mathcal{E}')](\mathcal{E}^\star)]$. $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ se plonge canoniquement dans $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star)$ en définissant pour chaque $A' \in \mathcal{E}'$: $A'_a =$ extension par zéro hors de ρa de la restriction de A' à ρa.

Le foncteur $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ s'étend à $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star) \Rightarrow (\mathcal{C}^\star)$ de la façon suivante :

$$\text{si } A' \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star) : \quad (\overset{-1}{\rho}{}^\star A')(a) = \overset{-1}{\rho}{}^\star A'_a = \mathrm{L}_{\rho a} A'_a = \mathrm{L}_{\mathcal{E}'} A'_a.$$

Le foncteur $\overset{-1}{\rho}{}^\star$ est de caractère local sur $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star)$, et le foncteur $\mathcal{G}$:

$$A' \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star) \Rightarrow (\mathcal{G}A')_a = C_\star(\rho a;\, A'_a) = \text{complexe des chaînes de } \rho a \text{ relativement à } A'_a$$

est un foncteur résolvant de $\overset{-1}{\rho}{}^\star$.

13.5. **Foncteurs composés avec $\rho^\star$ et $\overset{-1}{\rho}{}^\star$.** — Dans les applications interviennent les foncteurs composés

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}'^\star) \overset{\rho^\star}{\Longrightarrow} \mathcal{C}(\mathcal{E}'^\star) \xRightarrow{\mathrm{L}_{\mathcal{E}'^\star} \text{ et } \Gamma_{\mathcal{E}'^\star}} \mathcal{C},$$
$$\mathrm{L}_{\mathcal{E}'^\star}.\rho^\star \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathcal{E}'^\star}.\rho^\star;$$
$$\mathcal{C}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{C}_\rho(\mathcal{E}^\star) \overset{\overset{-1}{\rho}{}^\star}{\Longrightarrow} \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star) \xRightarrow{\mathrm{L}_{\mathcal{E}^\star} \text{ et } \Gamma_{\mathcal{E}^\star}} \mathcal{C},$$
$$\mathrm{L}_{\mathcal{E}^\star}.\overset{-1}{\rho}{}^\star \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathcal{E}^\star}.\overset{-1}{\rho}{}^\star.$$

On peut donc, comme précédemment, calculer leurs hyperdérivés en utilisant des foncteurs résolvants.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ ou de $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ le foncteur $\mathcal{F}$ ou le foncteur $\mathcal{G}$ la transforme en une suite exacte de complexes d'où des suites exactes d'homologie pour les hyperdérivés analogues à celles du paragraphe 13.2 (b).

14. Homologie et cohomologie (à la Čech) des espaces topologiques à coefficients dans un préfaisceau ou un antifaisceau.

14.1. — Soient X un espace topologique, $\mathcal{E}$ l'ensemble ordonné de ses ouverts non vides ($O_1 \prec O_2 \Rightarrow O_1 \supset O_2$), $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ un *préfaisceau* sur X dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}$ l'ensemble ordonné filtrant des recouvrements ouverts clos de X (recouvrements à droites de $\mathcal{E}$ (§ 8.3) : si un ouvert O appartient au recouvrement $\mathcal{R}$, tout ouvert $O' \subset O$ appartient également à $\mathcal{R}$). Si ρ est l'ordre canonique de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{E}$ (§ 8.3), *les foncteurs sections et cosections de Čech* (*à droite*) *sur* $\mathcal{E}$:

$$\check{\Gamma} = \mathrm{L}_{\mathcal{O}} \cdot \overset{-1}{\rho} = \varinjlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}} \Gamma_{\mathcal{R}}, \qquad \check{\mathrm{L}} = \Gamma_{\mathcal{O}^\star} \cdot \overset{-1}{\rho}{}^\star = \varprojlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}} \mathrm{L}_{\mathcal{R}}$$

seront appelés les *foncteurs sections et cosections de Čech sur les préfaisceaux de* X.

$\check{\Gamma} A \in \mathcal{C}$ et $\check{\mathrm{L}} A \in \mathcal{C}$ sont les *sections et cosections de Čech du préfaisceau* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$. *Les objets de cohomologie et d'homologie* (*à la Čech*) *de* X *relativement au préfaisceau A sont, par définition, les hyperdérivés* (§ 13.3 et 13.4) :

$$\check{H}^n(X;\, A) = lr_n \check{\Gamma} A = lr_n(\mathrm{L}_{\mathcal{O}} \cdot \overset{-1}{\rho})\, A \qquad (n \gtrless 0),$$
$$\check{H}_n(X;\, A) = rl_n \check{\mathrm{L}}\, A = rl_n(\Gamma_{\mathcal{O}^\star} \cdot \overset{-1}{\rho}{}^\star)\, A \qquad (n \gtrless 0).$$

A une suite exacte de préfaisceaux : $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ correspondent des suites exactes de cohomologie et d'homologie (§ 13.2 *b* et 13.4), en général illimitées dans les deux sens.

On peut considérer l'homologie et la cohomologie ainsi définies comme l'*homologie et la cohomologie de Čech corrigées* de façon que l'axiome de la suite exacte soit satisfait.

Soient maintenant $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ un antifaisceau sur X dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}^\star$ l'ensemble $\mathcal{O}$ muni de la relation d'ordre opposée, ρ' l'ordre canonique de $\mathcal{E}^\star$ dans $\mathcal{O}^\star$ (dual de ρ ci-dessus). Les *foncteurs sections et cosections de Čech* (*à gauche*) *sur* $\mathcal{E}^\star$:

$$\check{\Gamma}^\star = \mathrm{L}_{\mathcal{O}} \cdot \rho'^\star = \varinjlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}} \Gamma_{\mathcal{R}^\star}, \qquad \check{\mathrm{L}}^\star = \Gamma_{\mathcal{O}^\star} \cdot \rho' = \varprojlim_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}} \mathrm{L}_{\mathcal{R}^\star}$$

seront appelés les *foncteurs sections et cosections de Čech sur les antifaisceaux de* X.

Les objets de cohomologie et d'homologie de X *relativement à l'antifaisceau B sont, par définition, les hyperdérivés* (§ 13.3 et 13.4).

$$\check{H}^n(X;\, B) = lr_n(\mathrm{L}_{\mathcal{O}} \cdot \rho'^\star)\, B,$$
$$\check{H}_n(X;\, B) = rl_n(\Gamma_{\mathcal{O}^\star} \cdot \rho')\, B.$$

A une suite exacte d'antifaisceaux : $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ correspondent des suites exactes de cohomologie et d'homologie (§ 13.3 et 13.4) en général illimitées dans les deux sens.

14.2. Cas d'un espace métrique compact. Identité avec l'homologie de Steenrod [12] lorsque les « coefficients » sont constants. — Lorsque X est métrique compact, l'ensemble filtrant $\mathcal{O}$ des recouvrements ouverts de X (que nous supposons toujours clos, *cf.* § 14 et 8.3) est de type dénombrable : soit (N) : $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{R}_i \supset \ldots$ une suite cofinale de $\mathcal{O}$. D'après la proposition 7.3 B, on peut remplacer $\mathcal{O}$ par N, et, d'après le paragraphe 13, utiliser des foncteurs résolvants pour le calcul de l'homologie de X relativement à un préfaisceau ou un antifaisceau A (dans la catégorie $\mathcal{C}$). Nous supposerons dans le reste de ce paragraphe que $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ ou une catégorie de modules afin de pouvoir parler de chaînes, cycles, etc..., *éléments* des objets des chaînes, des cycles, etc...

Soit $C_p(\mathcal{R}_i; A)$ l'objet des chaînes (§ 10.2) de degré p de $\mathcal{R}_i$ relativement à A. Les chaînes des $\mathcal{R}_i$ forment sur N^* l'objet de $\mathcal{C}_l(N^*)$:

$$C_*(\mathcal{R}_0; A) \leftarrow C_*(\mathcal{R}_1; A) \leftarrow \ldots \leftarrow C_*(\mathcal{R}_i; A) \leftarrow \ldots,$$

où les $p_{i+1,i} : C_*(\mathcal{R}_{i+1}; A) \to C_*(\mathcal{R}_i; A)$ sont des *monomorphismes*, auquel nous allons appliquer le foncteur résolvant du paragraphe 10.3.

Nous obtenons ainsi le complexe double (le degré Δ_{II} de la ligne du bas est zéro, celui de la ligne du dessus est 1) :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & 0 \arrow[u, phantom] & & 0 & & 0 \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_n(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u] \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_{n-1}(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_0(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u] \\
\ldots \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_n(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_{n-1}(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u, "\delta"] \arrow[r] & \ldots \arrow[r, "\partial"] & \prod_i C_0(\mathcal{R}_i; A) \arrow[u, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

où $d_{\mathrm{I}} = \partial$ est la différéntielle des chaînes et $d_{\mathrm{II}} = \delta$ la différentielle du paragraphe 10.3.

La différentielle du complexe simple associé K est $D = d_{\mathrm{I}} + \beta\, d_{\mathrm{II}} = \partial + \beta\,\delta$ avec $\beta = (-1)^{\Delta_{\mathrm{I}}}$: on prend δ sur les colonnes de degré Δ_{I} pair, $-\delta$ sur celles de degré Δ_{I} impair.

Un cycle z de K de degré $n-1$ est donc formé d'une double famille $z = \{(d_n^i)_{i \in N}, (c_{n-1}^i)_{i \in N}\}$ telle que

$$\begin{cases} \partial c_{n-1}^i = 0, & \forall i : \text{les } c_{n-1}^i \text{ sont des cycles}, \\ \partial d_n^i = (-1)^n [p_{i+1,i} c_{n-1}^{i+1} - c_{n-1}^i]. \end{cases}$$

Les cycles c_{n-1}^i forment donc avec les homologies de liaison des d_n^i *un cycle de X du type de Vietoris.*

Mais (on sait que l'homologie de Vietoris ne satisfait pas à l'axiome de la suite exacte), la condition pour un cycle d'être homologue à zéro dans K est plus forte que celle qui est utilisée dans l'homologie de Vietoris. On obtient donc un objet d'homologie « plus grand ». En effet, le cycle $z = \{(d_n^i)_{i\in N}, (c_{n-1}^i)_{i\in N}\}$ est un bord Du, $u = \{(a_{n+1}^i)_{i\in N}, (b_n^i)\}$ si

$$\begin{cases} d_n^i = (-1)^n[p_{i+1,i}b_n^{i+1} - b_n^i] + \partial a_{n+1}^i, \\ c_{n-1}^i = \partial b_n^i, \end{cases}$$

c'est-à-dire que tous les cycles c_{n-1}^i sont des bords (condition de Vietoris), mais en plus, on impose aux d_n^i (qui font partie de la définition du cycle) d'être homologues aux différences $p_{i+1,i}b_n^{i+1} - b_n^i$ (au signe près) des chaînes b_n^i ayant pour bords les cycles c_{n-1}^i.

Lorsque A est un objet constant formé d'un groupe abélien, on peut exprimer cette construction comme le fait STEENROD [12] en associant à un cycle $\{(d_n^i)_{i\in N}, (c_{n-1}^i)_{i\in N}\}$ un cycle infini d'un complexe simplicial attaché à X, obtenu en recollant les d_n^i suivant les cycles c_{n-1}^i. L'homologie entre ces cycles infinis est l'homologie décrite ci-dessus.

Si $\mathcal{C}$ désigne le complexe double ci-dessus, et $\mathcal{H}_n(\mathcal{R}; A)$ l'objet sur N formé des $H_n(\mathcal{R}_i; A)$, $i\in N$:

$$\begin{aligned} h_{II}h_I\mathcal{C}^{0,n} &= H^0(N^*; \mathcal{H}_n(\mathcal{R}; A)) = \Gamma_{N^*}\mathcal{H}_n(\mathcal{R}; A) \\ &= \varprojlim H^n(\mathcal{R}_i; A) = \check{H}_n(X; A) \end{aligned}$$

c'est l'homologie de Čech classique lorsque A est un préfaisceau.

$$h_{II}h_I\mathcal{C}^{1,n} = H^1(N^*; \mathcal{H}_{n+1}(\mathcal{R}; A)) = \tilde{H}_n(X; A)$$

c'est, lorsque A est constant, formé d'un groupe abélien, l'objet d'homologie des « cycles faiblement homologues à zéro » de STEENROD [12].

La suite spectrale correspondante donne les suites exactes

$$0 \to \tilde{H}_n(X; A) \to H_n(X; A) \to \check{H}_n(X; A) \to 0,$$

qui peuvent être obtenues directement en associant à tout cycle $z = \{(d_n^i), (c_{n-1})\}$ de K le cycle de Vietoris $V = (c_{n-1}^i)$.

13. Faisceaux et cofaisceaux.

13.1. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les sommes et produits infinis existent et sont des foncteurs exacts, $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné, $\mathcal{O}$ l'ensemble ordonné filtrant des recouvrements à droite de $\mathcal{E}$ (*cf.* § 8.3).

Appelons *filtre* sur $\mathcal{E}$ toute partie Φ, filtrante à droite, et close à gauche ($a, b \in \Phi \Rightarrow \exists c, a \prec c, b \prec c, c \in \Phi$ et $a \prec \Phi, b \prec a \Rightarrow b \in \Phi$). Soit X un ensemble de filtres de $\mathcal{E}$ satisfaisant aux deux conditions :

1° X recouvre $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} \subset \bigcup_{x \in X} x$;

2° $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{O}, \forall x \in X, \mathcal{R} \cap x \neq \emptyset$.

La considération d'un tel couple $(\mathcal{E}, X)$ généralise le cas où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X, chaque point $x \in X$ étant représenté par le filtre de ses voisinages. La notion de point d'un espace topologique trouve donc ici sa généralisation dans celle d'ensemble filtrant à droite.

LEMME 15. — *Sur $\mathcal{E}$ filtrant à droite* : $\check{\Gamma} = \check{L} = L$ (§ 8.3) *et* $\check{\Gamma}^\star = \check{L}^\star = \Gamma^\star$.

PREUVE. — L'application ordonnée qui à tout $a \in \mathcal{E}$ fait correspondre le recouvrement à droite de $\mathcal{E}$ (§ 8.3) : $\mathcal{R}_a = \{ b \in \mathcal{R}_a \Leftrightarrow a \prec b \}$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur une partie $\mathcal{E}_0$ cofinale de $\mathcal{O}$. Comme, si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\Gamma_{\mathcal{R}_a} = A(a)$, il en résulte que

$$\check{\Gamma} A = L_{\mathcal{E}_0} \overset{-1}{\rho} A = L_{\mathcal{E}_0} \{ \Gamma_{\mathcal{R}_a} A \} = L A.$$

D'autre part, si $\mathcal{R}$ est un recouvrement à droite quelconque de $\mathcal{E}$, $LA \leftarrow L_{\mathcal{R}} A$ est un isomorphisme, et $\check{L} A = \Gamma_{\mathcal{O}^\star} \{ L_{\mathcal{R}} A \} = LA$.

Preuve analogue pour $\check{\Gamma}^\star$ et $\check{L}^\star$.

COROLLAIRE. — *D'après le paragraphe* 6, *il est équivalent de dire que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome* (lim sup), *ou que l'homologie et la cohomologie de tout ensemble filtrant à droite $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est triviale* (*c'est-à-dire nulle en degrés* $\neq 0$). *Dualement, $\mathcal{C}$ satisfait à* (lim inf) *si et seulement si l'homologie et la cohomologie de tout ensemble filtrant à droite $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ est triviale. On n'obtiendra donc une théorie de l'homologie et de la cohomologie satisfaisant à l'usuelle trivialité locale qu'en prenant des coefficients covariants si $\mathcal{C}$ satisfait à* (lim sup), *ou contravariants, si $\mathcal{C}$ satisfait à* (lim inf).

X étant muni de l'ordre trivial (aucune relation d'ordre), soit β l'ordre canonique de $\mathcal{E}$ dans X : $a \prec x \Leftrightarrow x \ni a$. Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$,

$$\beta A(x) = L_x A = \varinjlim_{a \in x} A(a)$$

et

$$\overset{-1}{\beta} \beta A(a) = \prod_{x \ni a} L_x A \quad (cf. \text{ § } 7).$$

Si $\mathcal{R} \in \mathcal{O}$, β induit un ordre de $\mathcal{R}$ dans X et d'après le théorème 7.2 et la condition 2° ci-dessus : $\Gamma_{\mathcal{R}} \overset{-1}{\beta} \beta A = \prod_{x \in X} L_x A$ est indépendant de $\mathcal{R}$.

Dualement, si $A^\star \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$,

$$\overset{-1}{\beta}{}^\star A^\star(x) = \Gamma_x A^\star = \varprojlim_{a \in x} A^\star(a),$$

$$\beta^\star \overset{-1}{\beta}{}^\star A^\star(a) = \bigoplus_{x \ni a} \Gamma_x A^\star \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}^\star_{\mathcal{R}} \beta^\star \overset{-1}{\beta}{}^\star A^\star = \bigoplus_{x \in X} \Gamma_x A^\star.$$

15.2. Définition 15.2. — Faisceaux et cofaisceaux sur un ensemble ordonné $\mathcal{E}$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$: *Un objet $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un faisceau si quels que soient $a \in \mathcal{E}$, $\mathcal{R}_a$, recouvrement à droite de $\overline{a}$ (clôture à droite de a : $b \in \overline{a} \Leftrightarrow a \prec b$, cf. § 8.3), $A(a) = \Gamma_{\mathcal{R}_a} A$. [Cette définition est celle de* Godement *([7] p. 109), dans le cas des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique.]*

Un objet $A^\star \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ est un cofaisceau, si quels que soient a et $\mathcal{R}_a$ comme ci-dessus :

$$A^\star(a) = \mathrm{L}_{\mathcal{R}^\star_a} A^\star.$$

Conséquences de la définition précédente. — Si $\mathcal{R}$ est un recouvrement à droite de $\mathcal{E}$(§ 8.3), soit ρ l'ordre canonique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$. Si A est un faisceau :

$$\overset{-1}{\rho}(A \mid \mathcal{R})(a) = \Gamma_{\rho a}(A \mid \mathcal{R}) = \Gamma_{\mathcal{R} \cap \overline{a}} A = A(a).$$

D'après le théorème 7.2, il en résulte que

$$\Gamma_{\mathcal{E}} A = \Gamma_{\mathcal{R}} A = \check{\Gamma}_{\mathcal{E}} A.$$

Quelle que soit la partie de $\mathcal{E}$ close à droite $\mathcal{E}'$:

$$\Gamma_{\mathcal{E}'} A = \Gamma_{\mathcal{R}'} A = \check{\Gamma}_{\mathcal{E}'} A,$$

car la restriction à $\mathcal{E}'$ du faisceau A est un faisceau sur $\mathcal{E}'$

Dualement, si $A^\star$ est un cofaisceau, et $\rho^\star$ l'ordre dual de $\mathcal{R}^\star$ dans $\mathcal{E}^\star$:

$$\mathrm{L}_{\mathcal{E}^\star} A^\star = \mathrm{L}_{\mathcal{R}^\star} A^\star = \check{\mathrm{L}}^\star A^\star.$$

Exemple. — A la fin du paragraphe 15.1, $\overset{-1}{\beta}\beta A$ est un faisceau, $\beta^\star \overset{-1}{\beta}{}^\star A$ un cofaisceau.

Un produit de faisceaux est un faisceau. Une somme directe de cofaisceaux est un cofaisceau. Le noyau d'un morphisme [dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$] de faisceaux est un faisceau. Le conoyau d'un morphisme [dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$] de cofaisceaux est un cofaisceau. L'intersection d'une famille de faisceaux sous-objets d'un objet A de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ est un faisceau contenu dans A : il en résulte que si B est un sous-objet [dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$] d'un faisceau C, l'intersection de tous les faisceaux contenus dans C et contenant B (famille non vide puisqu'elle contient C) est un faisceau appelé *faisceau engendré par B dans C*. Si f est un morphisme d'un objet

$B \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ dans un faisceau $\mathcal{C}$, le faisceau engendré par $f(B)$ est le *faisceau image de B par f.*

De même, le sup d'une famille de cofaisceaux est un cofaisceau, et un morphisme f d'un cofaisceau C dans un objet B de $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ se factorise en $C \to D \to B$, où D est le quotient de C par le plus grand cofaisceau contenu dans le noyau de f.

DÉFINITION. — *Le faisceau image (au sens ci-dessus) du préfaisceau A dans le faisceau $\overset{-1}{\beta}\beta A$* $\left[\textit{si } a \in \mathcal{E},\ (\overset{-1}{\beta}\beta A)(a) = \prod_{x \ni a} \mathrm{L}_x A\right]$ *par le morphisme canonique* $\left[A(a) \to \prod_{x \ni a} \mathrm{L}_x A\right]$ *de A dans $\overset{-1}{\beta}\beta A$ est appelé le faisceau associé $\mathcal{A}$ à A.*

Dualement, si $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ est un antifaisceau sur X, soient N le noyau du morphisme $\beta^\star\overset{-1}{\beta}{}^\star B \to B$, c'est-à-dire pour chaque ouvert $a \in \mathcal{E}$:

$$N(a) = \mathrm{Ker}\left[\bigoplus_{x \ni a} \Gamma_{x^\star} B \to B(a)\right],$$

et $\mathcal{N}$ la borne supérieure des cofaisceaux contenus dans N. Le quotient $\mathcal{B} = \beta^\star\overset{-1}{\beta}{}^\star B/\mathcal{N}$ est le cofaisceau associé à B. On a donc un morphisme canonique [dans $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$] : $\mathcal{B} \to B$.

15.3. Un foncteur $F : \mathcal{C}(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E})$ peut être dit *localisable* si quel que soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, FA est un faisceau, *co-localisable* si FA est un cofaisceau. En général, le foncteur obtenu en faisant correspondre à $A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'objet $\{FA(a) = \check{\Gamma}_{\bar{a}} A$, sections de Čech sur la clôture à droite $\bar{a}$ de $a \in \mathcal{E}\}$, *n'est pas localisable.* Lorsque $\mathcal{E}$ est l'ensemble des ouverts de X et $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ par exemple, il est bien connu en effet que la donnée de sections de Čech sur les éléments a d'un recouvrement ouvert de X, coïncidant sur les intersections $a \cap b$, ne définit par une section de Čech sur X (sauf dans le cas particulier où X est paracompact).

Or, il est naturel d'imposer au foncteur devant définir la cohomologie de X qu'en « recollant » des cochaînes sur les ouverts d'un recouvrement de X, on obtienne une cochaîne de X, autrement dit que ce foncteur soit localisable.

De même, il est naturel d'imposer au foncteur définissant l'homologie d'être co-localisable.

Les foncteurs $\check{\Gamma}$ et $\check{\mathrm{L}}$ ne remplissant pas en général ces conditions sont remplacés par les foncteurs suivants :

DÉFINITION. — *Soient X un espace topologique, $\mathcal{E}$ l'ensemble ordonné de ses ouverts, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ la catégorie des préfaisceaux sur X dans $\mathcal{C}$. Pour chaque* *recouvrement à droite* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{E}$ (*recouvrement ouvert clos de* X), *posons :*

$$\Gamma_{\mathcal{R},X} A = \mathrm{Im}\left\{\mathrm{Ker}\left[\prod_{a\in\mathcal{R}} A(a) \xrightarrow{\partial} \prod_{\substack{a,b,x\\ a<b<x\\ a\in\mathcal{R}}} A(a, b, x)\right] \to \prod_{x\in X} \mathrm{L}_x A\right\}$$

avec $A(a, b, x) = \mathrm{L}_x A$, *où le morphisme* ∂ *est défini par sa composante dans chaque* $A(a, b, x)$ *:*

$$\partial_{a,b,x} = p_{a,x} - p_{b,x}.$$

$\Gamma_X = \mathrm{L}_{\mathcal{O}}\{\Gamma_{\mathcal{R},X}\} = \varinjlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{O}} \Gamma_{\mathcal{R},X} = \bigcup_{\mathcal{R}\in\mathcal{O}} \Gamma_{\mathcal{R},X}$ *est le foncteur* SECTIONS SUR X.

Γ_X *est un* FONCTEUR LOCALISABLE, *et si* $\mathfrak{A}$ *est le faisceau associé à* A *:*

$$\Gamma_X A = \Gamma_{\mathcal{E}}\mathfrak{A} (= \Gamma_{\mathcal{R}}\mathfrak{A} = \check{\Gamma}_{\mathcal{E}}\mathfrak{A}) = \Gamma_X \mathfrak{A}.$$

La cohomologie de X *à coefficients dans le préfaisceau* A *est définie par*

$$H^n(X; A) = (lr_n \Gamma_X) A$$

qui, lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ *satisfait à l'axiome* (lim sup) *se réduit à :* $H^n(X; A) = (r_n \Gamma_X) A$ [*dérivé à droite de* Γ_X *pris sur la catégorie* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$].

Dualement, si B *est un antifaisceau sur* X, $B \in \mathcal{C}(\mathcal{E}^*)$, *posons :*

$$\mathrm{L}_{\mathcal{R},X} B = \mathrm{Im}\left\{\bigoplus_{x\in X} \Gamma_x B \to \mathrm{Coker}\left[\bigoplus_{\substack{a,b,x\\ a<b<x\\ a\in\mathcal{R}}} B(a, b, x) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{a\in\mathcal{R}} B(a)\right]\right\}$$

avec $B(a, b, x) = \Gamma_x B$, *où* ∂ *est défini par chaque composante* $\partial_{a,b,x}$ *qui applique* $B(a, b, x)$ *dans* $B(a) \oplus B(b)$ *par*

$$\partial_{a,b,x} = p_{xa} - p_{xb},$$

$\mathrm{L}_X = \Gamma_{\mathcal{O}^*}\{\mathrm{L}_{\mathcal{R},X}\} = \varinjlim_{\mathcal{R}\in\mathcal{O}} \mathrm{L}_{\mathcal{R},X}$ *est le* foncteur cosections *sur* X.

L'homologie de X *à coefficients dans l'antifaisceau* B *est définie par* $H_n(X; B) = (rl_n \mathrm{L}_X) B$ *qui lorsque* $\mathcal{C}$ *satisfait à l'axiome* (lim inf), *se réduit à* $H_n(X; B) = (l_n \mathrm{L}_X) B$.

Pour l'homologie à coefficients dans un préfaisceau, le foncteur co-localisable est obtenu en prenant les « chaînes à support quasi compact ».

15.4. — Convenons de dire avec R. GODEMENT [7] qu'un faisceau $\mathfrak{A}$ est *flasque* si quel que soit l'ouvert a : $\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{A}(a)$ est un épimorphisme, et dualement qu'un cofaisceau $\mathcal{B}$ est flasque si $\mathcal{B}(a) \to \mathcal{B}(X)$ est un monomorphisme quel que soit a.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 15.4. — *Si la catégorie* $\mathcal{C}$ *satisfait à l'axiome* (lim sup) *du paragraphe* 6.4, *les faisceaux sur un espace topologique* X *dans* $\mathcal{C}$ *forment une catégorie abélienne* $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$ *dans laquelle tout objet se plonge dans un injectif s'il en est ainsi dans* $\mathcal{C}$, *et sur laquelle est défini le foncteur* $\Gamma_X = \Gamma_{\mathcal{E}}$. *Le foncteur qui à chaque préfaisceau* A *fait correspondre le faisceau associé* $\mathcal{A}$, *est un foncteur exact de* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *dans* $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$ *qui transforme un produit de préfaisceaux élémentaires* (*cf.* § 1), *en un faisceau flasque, donc une résolution injective de* A *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ *en une résolution flasque* (*donc* Γ_X*-acyclique d'après* [7] *de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$. *Il en résulte un morphisme fonctoriel*

$$H^n(X;A) \to (r^n\Gamma_X)\,\mathcal{A}$$

[$r^n\Gamma_X$ *dérivé à droite de* Γ_X *pris dans la catégorie* $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$] *qui, si* A *est un faisceau* ($A = \mathcal{A}$), *est un isomorphisme*

$$H^n(X;\mathcal{A}) = (r^n\Gamma_X)\,\mathcal{A}.$$

La définition de la cohomologie du paragraphe 14 *coïncide donc avec la définition usuelle dans le domaine de validité de celle-ci.*

Dualement si $\mathcal{C}$ *satisfait à l'axiome* (lim inf) *du paragraphe* 6.4, *les cofaisceaux sur* X *dans* $\mathcal{C}$ *forment une catégorie abélienne* $\mathcal{F}^\star(X;\mathcal{C})$, *dont tout objet est image d'un projectif s'il en est ainsi dans* $\mathcal{C}$, *et sur laquelle est défini le foncteur* $L_X = L_{\mathcal{E}}$. *Le foncteur qui à chaque antifaisceau* B *fait correspondre son cofaisceau associé* $\mathcal{B}$ *est un foncteur exact qui transforme un antifaisceau somme directe d'antifaisceaux coélémentaires* (*cf.* § 1) *en un cofaisceau flasque* (*donc* L_X*-acyclique*), *donc une résolution projective de* B *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\star)$ *en une résolution flasque de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{F}^\star(X;\mathcal{C})$. *Il en résulte un morphisme fonctoriel*

$$H_n(X;B) \leftarrow (l_nL_X)\,\mathcal{B}$$

[l_nL_X *dérivé à gauche de* L_X *pris dans la catégorie* $\mathcal{F}^\star(X,\mathcal{C})$] *qui, si* B *est un cofaisceau* ($B = \mathcal{B}$), *est un isomorphisme*

$$H_n(X;B) = (l_nL_X)\,\mathcal{B}.$$

PREUVE. — La démonstration que la catégorie $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$ est abélienne si $\mathcal{C}$ satisfait à (lim sup) reproduit exactement la démonstration de ce même fait lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes abéliens. Il en est de même pour la propriété que tout objet de $\mathcal{F}(X;\mathcal{C})$ se plonge dans un objet injectif.

Si $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome (lim sup), chaque foncteur L_x est exact.

$$\text{Si } 0 \to A \to B \to C \to 0$$

est une suite exacte de préfaisceaux,

$$0 \to L_xA \to L_xB \to L_xC \to 0$$

est exacte pour chaque x. Donc, la suite

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$$

est exacte.

Si maintenant $A = \prod_{a \in \mathcal{E}} A^a$ est un préfaisceau produit des préfaisceaux élémentaires A^a (avec les notations du paragraphe 1), et u un ouvert quelconque de X, le préfaisceau $A_u = \prod_{\substack{a \\ u \prec a}} A^a$ est un facteur direct de A. Comme le foncteur $\Gamma_{\mathcal{R}, X}$ est un foncteur additif, on a un épimorphisme :

$$\Gamma_{\mathcal{R}, X} A \to \Gamma_{\mathcal{R}, X} A_u.$$

Mais il est évident que $\Gamma_{\mathcal{R}, X} A_u = \Gamma_{\mathcal{R}, u} A$. Comme dans l'hypothèse faite sur $\mathcal{C}$, la limite directe est un foncteur exact, on a à la limite un épimorphisme

$$\Gamma_X A = \Gamma_X \mathcal{A} \to \Gamma_u A = \Gamma_u \mathcal{A}.$$

Le faisceau $\mathcal{A}$ associé à A est donc flasque.

Démonstrations duales dans le cas des cofaisceaux.

Remarque. — La catégorie des groupes compacts, duale de la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes abéliens satisfait à l'axiome (lim inf). Si l'on définit la somme directe d'une famille quelconque (G_i) de groupes compacts par $\bigoplus G_i = \mathrm{Hom}\left[\prod_i \mathrm{Hom}(G_i;\ T);\ T\right]$, tout groupe compact est l'image d'un groupe compact projectif, et l'on peut définir l'homologie à coefficients dans un groupe compact en le plongeant dans la catégorie des cofaisceaux, au moyen des dérivés à gauche du foncteur cosections sur X : L_X. La dualité catégorique du paragraphe 5 s'étend donc à la dualité entre cohomologie sur les groupes abéliens et homologie sur les groupes compacts des espaces topologiques.

16. Homologie d'un espace topologique à coefficients dans un préfaisceau sur une catégorie satisfaisant à l'axiome (lim sup) du paragraphe 6.4. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome (lim sup) (c'est le cas des catégories de modules sur un anneau).

La catégorie $\mathcal{C}_\rho\ (\mathcal{O}^\star)$ introduite au paragraphe 13.4 (avec les notations de 14.1 pour ρ et $\mathcal{O}$) a une signification géométrique très simple : un objet de A de $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star)$ est la donnée pour chaque recouvrement ouvert clos $\mathcal{R} \in \mathcal{O}$ de X d'un préfaisceau $A_{\mathcal{R}}$ nul hors de $\mathcal{R}$, et pour $\mathcal{R} \supset \mathcal{R}'$ d'un morphisme de préfaisceaux $A_{\mathcal{R}} \leftarrow A_{\mathcal{R}'}$ [morphisme dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$].

On voit bien ici le rôle essentiel de la notion de caractère local introduite aux paragraphes 13.3 et 13.4 : dire que $\overset{-1}{\rho}{}^\star$, autrement dit que l'homologie de X à coefficients dans un préfaisceau, est de *caractère local* signifie qu'elle *ne dépend que de la donnée du préfaisceau sur un recouvrement ouvert de X, aussi fin soit-il.*

THÉORÈME 16. — *Soient X un espace topologique, $\mathcal{E}$ l'ensemble ordonné de ses ouverts, $\mathcal{O}$ l'ensemble ordonné de ses recouvrements ouverts clos, $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome* (lim sup), *$\mathcal{P}$ une famille « suffisamment riche » de parties non vides de X, c'est-à-dire satisfaisant à* (§ 10.6) :

($\mathcal{P}_1$) *la réunion de deux éléments de $\mathcal{P}$ est un élément de $\mathcal{P}$;*

($\mathcal{P}_2$) *tout ouvert non vide de X contient un élément de $\mathcal{P}$.*

Soient ρ l'ordre canonique de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{E}$, π celui de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{P}$, et $\rho_0 = \pi\rho$. *Alors, si A est un préfaisceau sur X dans $\mathcal{C}[A \in \mathcal{C}(\mathcal{E})]$, et si πA est sa* « trace » *sur $\mathcal{P}$* $\left[\pi A(p) = \varinjlim_{U \supset p} A(U)\right]$, l'homologie de X à coefficients dans A peut se calculer sur $\mathcal{P}$, autrement dit à l'aide de chaînes définies sur $\mathcal{P}$ à coefficients dans πA.

De façon précise, on a

$$\check{H}_n(X;\, A) = rl_n(\Gamma_{\mathcal{O}^\star}\overset{-1}{\rho}{}^\star)\, A = rl_n(\Gamma_{\mathcal{O}^\star}\overset{-1}{\rho}{}^\star_0)\, \pi A.$$

PREUVE. — Soient $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star)$ et $\mathcal{C}_{\rho_0}(\mathcal{O}^\star)$ définies comme au paragraphe 13.4. Un élément $A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star)$ comme il a été dit ci-dessus est une collection de préfaisceaux $A_{\mathcal{R}}$, un élément de $\mathcal{C}_{\rho_0}(\mathcal{O}^\star)$ est une collection d'éléments $B_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$, $B_{\mathcal{R}}$ nul hors de $\mathcal{R}$. Le foncteur π s'étend *ponctuellement* à $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star)$:

$$A \in \mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star) \overset{\pi}{\Longrightarrow} \pi A \in \mathcal{C}_{\rho_0}(\mathcal{O}^\star)$$

par

$$A_{\mathcal{R}} \Rightarrow \pi A_{\mathcal{R}}$$

c'est un foncteur *exact* qui transforme un $A_{\mathcal{R}}$ projectif en un $\pi A_{\mathcal{R}}$ qui est $L_{\mathcal{P}}$ ou $L_{\pi\mathcal{R}}$-acyclique d'après les théorèmes 10.5 A et 10.6. Il en résulte que si (P_n) est une résolution projective de A dans $\mathcal{C}_\rho(\mathcal{O}^\star)$, (πP_n) est une résolution $\overset{-1}{\rho}{}^\star_0$-acyclique dans $\mathcal{C}_{\rho_0}(\mathcal{O}^\star)$. D'où le théorème d'après la proposition 13.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) and MOORE (J.-C.). — Homology theory for locally compact spaces, *Mich. math. J.*, t. 7, 1960, p. 137-159.

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). — *Homological algebra.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).

[3] DEHEUVELS (René). — Homologie à coefficients dans un antifaisceau, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 2492-2494.

[4] DEHEUVELS (René). — Théorie de l'homologie, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres*, t. 14, 1960-1961, n° 26, 40 pages.

[5] DEHEUVELS (René). — Topologie d'une fonctionnelle, *Annals of Math.*, t. 61, 1955, p. 13-72 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1953).

[6] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). — *Foundations of algebraic topology.* — Princeton, Princeton University Press, 1952.

[7] GODEMENT (Roger). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[8] GROTHENDIECK (Alexander). — Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku math. J.*, t. 9, 1957, p. 119-221.

[9] LEFSCHETZ (Solomon). — *Algebraic topology.* — New York, American mathematical Society, 1942 (*Amer math. Soc. Coll. Publ.*, 27).

[10] LERAY (Jean). — L'anneau spectral et l'anneau fibré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 29, 1950, p. 1-139.

[11] Séminaire CARTAN, t. 3, 1950/51 : *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux*, 2e éd. — Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[12] STEENROD (N.). — Regular cycles of compact metric spaces, *Annals of Math.*, t. 41, 1940, p. 833-851.

[13] VIETORIS (L.). — Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Math. Annalen*, t. 97, 1927, p. 454-472.

(Manuscrit reçu le 30 septembre 1961.)

René DEHEUVELS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille,
14, avenue du Château,
Bourg-la-Reine (Seine).