

534.121.1 : 512.8

有限要素法による平板の面内振動解析*

川井 忠彦**, 吉村 信敏***

1. ま え が き

最近、有限要素法（マトリックス法）による連続体の静的応力解析が多くの研究者によって行なわれているが、この方法は連続体の固有振動数解析にも応用することができる。本報は平板の面内振動についてその手法を研究したものである。

2. 理 論

有限要素法では連続体を、板の場合には三角形や長方形、三次元物体の場合には四面体や直方体などの有限要素に分割し、その頂点（有限要素法では“節点”と呼ぶ）においてのみ互いに連結されている有限要素の集合体として連続体を理想化する。一方において各要素の変形様式を簡単な形に仮定して、節点に作用する力（節点力）と節点の変位（節点変位）の関係を変分原理から求めて式(1)のようにマトリックスで表わす。

$$f = kd \dots\dots\dots(1)$$

ここに f : 節点力の列ベクトル, d : 節点変位の列ベクトル, k : 要素の剛性マトリックスである。

たとえば、図1に示すような平面応力場における三角形平板要素の場合には節点力および節点変位のベクトルの内容は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f &= \{X_i, X_j, X_k, Y_i, Y_j, Y_k\} \\ d &= \{u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ただし、' は転置行列をあらわす。

ここで要素の x 方向の変位 u , y 方向の変位 v が未定係数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ により

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

のように表わされるものと仮定して仮想仕事の原理をもちいれば、要素の剛性マトリックス k は次のように求められる⁽¹⁾。

$$k = \Delta h N^T D N \dots\dots\dots(4)$$

$$N = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_{jk}, y_{ki}, y_{ij}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, x_{kj}, x_{ik}, x_{ji} \\ x_{kj}, x_{ik}, x_{ji}, y_{jk}, y_{ki}, y_{ij} \end{bmatrix}$$

ここに

$$x_{mn} = x_m - x_n, \quad y_{mn} = y_m - y_n$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1, \nu, 0 \\ \nu, 1, 0 \\ 0, 0, (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Δ : 三角形要素の面積, ν : ポアソン比, E : 縦弾性係数, h : 板厚である。

式(1)の関係をすべての要素について求め、つりあいの条件を用いて整理・統合すると構造全体として節点力 F と節点変位の関係は式(5)のようになる。

$$F = Kd \dots\dots\dots(5)$$

ここに K は構造全体の剛性マトリックスであって要素の剛性マトリックス k を組合わせることによって求められる。

静的応力解析では、拘束条件によって式(5)の内の不用な行または列を取除き、荷重条件によって F の各項に節点外力を与えて式(5)を d に関する連立一次方程式として解けば節点変位が定まり、それから要素の応力やひずみが計算されるのである。もちろんこれらの操作は電子計算機をもちいて自動的に実行する。

しかし動的な問題ではさらに慣性力を考慮しなければならない。慣性力は実際には有限要素内に分布しているのであるが、有限要素法では節点を通じてのみ力が伝達されると仮定しているから、分布した慣性力を等価な節点力に置換えなければならない⁽²⁾。すなわち

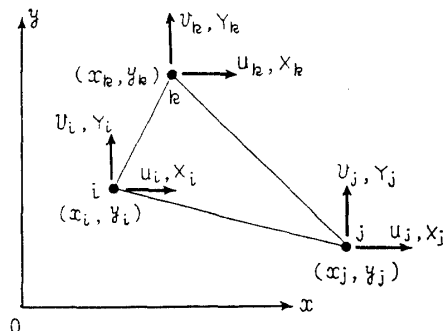


図1 三角形平板要素およびその節点力と節点変位

* 昭和 42 年 10 月 14 日 創立 70 周年記念東京祝賀会講演会において講演, 原稿受付 昭和 44 年 3 月 15 日.
 ** 正員, 東京大学生産技術研究所.
 *** 正員, 大成建設会社技術研究所(東京都江東区豊洲 4-11-19).

有限要素内の変位に対して慣性力のなす仕事 (W^D) と節点変位に対して節点力のなす仕事 (W^R) を計算し、二つの仕事等しくなるように定めた節点力が、分布した慣性力と等価な節点力である。これを三角形平板要素(図1)の場合についてくわしく説明しよう。

ある三角形要素の節点変位を \mathbf{d} , 等価節点力を \mathbf{r} とすると、節点変位に対して等価節点力のなす仕事 W^R は次のようになる。

$$W^R = \mathbf{d}' \mathbf{r} \dots\dots\dots(6)$$

ここに

$$\mathbf{d}' = \{u_i, u_j, \dots, v_k\}$$

$$\mathbf{r}' = \{X_i, X_j, \dots, Y_k\}$$

である。

一方、要素内に分布している単位体積当たりの慣性力を \mathbf{q} とすると、要素の変位 \mathbf{w} に対して慣性力のなす仕事 W^D は次のようになる。

$$W^D = h \int \int \mathbf{w}' \mathbf{q} dx dy \dots\dots\dots(7)$$

ここで W^R と W^D を等置して等価節点力 \mathbf{r} を求めるのであるが、そのまゝに \mathbf{w} と \mathbf{d} の関係を求めておく。 \mathbf{w} の内容は x 方向の変位 u と y 方向の変位 v であるが、これらは式(3)のように仮定されている。マトリックスで表わすと次のようになる。

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{a} \dots\dots\dots(8)$$

ここに $\mathbf{a}' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$ である。

マトリックス \mathbf{S} の x および y に各節点の座標値を代入すると、節点変位 \mathbf{d} は未定係数 \mathbf{a} によって次のように表わされる。

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & & & \\ & 1 & x_j & y_j & & \\ & & 1 & x_k & y_k & \\ & & & & & 1 & x_i & y_i \\ & & & & & & 1 & x_j & y_j \\ & & & & & & & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{a} \dots\dots\dots(9)$$

ゆえに

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d} \dots\dots\dots(10)$$

式(10)を式(8)に代入すれば、要素内の変位 \mathbf{w} と節点変位 \mathbf{d} の関係は次のように表わされる。

$$\mathbf{w} = \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d} \dots\dots\dots(11)$$

一方、この要素が運動する場合、その加速度は $d^2\mathbf{w}/dt^2$ となる。そしてその単位体積当たりの慣性力 \mathbf{q} は単位体積当たりの質量(すなわち密度 ρ) と加速度の積であるから、

$$\mathbf{q} = \rho \frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2} = \rho \ddot{\mathbf{w}} \dots\dots\dots(12)$$

であるが、式(11)の関係から \mathbf{q} は次のようにも表わされる。

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \ddot{\mathbf{d}} \dots\dots\dots(13)$$

さて式(11)および式(13)を式(7)に代入すれば W^D は節点変位 \mathbf{d} によって次のように表わされる。

$$W^D = h \int \int \{(\mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d})' (\rho \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \ddot{\mathbf{d}})\} dx dy$$

$$= \mathbf{d}' \left\{ h (\mathbf{A}^{-1})' \left(\int \int \mathbf{S}' \rho \mathbf{S} dx dy \right) \mathbf{A}^{-1} \right\} \ddot{\mathbf{d}} \dots\dots\dots(14)$$

ここで W^R と W^D を等置すると、分布慣性力に等価な節点力 \mathbf{r} は次のように求められる。

$$\mathbf{r} = h (\mathbf{A}^{-1})' \left(\int \int \mathbf{S}' \rho \mathbf{S} dx dy \right) \mathbf{A}^{-1} \ddot{\mathbf{d}}$$

$$= \mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} \dots\dots\dots(15)$$

\mathbf{m} は要素の“質量マトリックス”と呼ばれ、次のように与えられる。

$$\mathbf{m} = \rho h (\mathbf{A}^{-1})' \begin{pmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} & 0 & 0 & 0 \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} & 0 & 0 & 0 \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ 0 & 0 & 0 & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ 0 & 0 & 0 & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1}$$

ここに $I_{mn} = \int \int x^m y^n dx dy$ であるが、実際の計算法については付録でのべる。

各要素の質量マトリックスを整理・統合することにより構造内の各節点に作用する等価節点力 \mathbf{R} が節点の加速度 $\ddot{\mathbf{d}}$ の関数として次のように求められる。

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} \dots\dots\dots(16)$$

ここに \mathbf{M} は構造全体の質量マトリックスで、要素の質量マトリックスから組立てられるが、その方法は構造全体の剛性マトリックスの場合とまったく同じである。

一方、節点変位による節点力 \mathbf{P} は次のように表わされる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{d} \dots\dots\dots(17)$$

\mathbf{K} : 構造全体の剛性マトリックス

そして \mathbf{R} と \mathbf{P} の和が外力 \mathbf{F} とつりあっているわけであるから次のような式が成り立つ。

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} = \mathbf{F}(t) \dots\dots\dots(18)$$

ここに $\mathbf{F}(t)$ は外力が時間 t の関数であることを示している。

式(18)に式(16)および(17)を代入すると有限要素法における動的解析の基本式が次のように得られ

る。

$$Kd + M\ddot{d} = F(t) \dots\dots\dots(19)$$

ところで固有振動数の解析の場合には

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= O \\ \ddot{d} &= -\omega^2 d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

であるから、式 (19) は次の形をした特性方程式になる。

$$(K - \omega^2 M)d = O \dots\dots\dots(21)$$

ただし、 ω は角速度である。

振動学ではこのような特性方程式を解く場合には

$$|K - \omega^2 M| = 0$$

となるような ω を「はさみうち法」でさがすという方法がしばしばとられるのであるが、有限要素法では K や M の元数が多いので $|K - \omega^2 M|$ を計算するのに時間がかかり、また計算中にオーバーフローが起りやすいので、特別な場合を除いては、望ましい方法ではない*。

そのかわりに反復法 (power method) を採用する⁽⁸⁾。しかし反復法では

$$(X - \lambda^2 I)d = O \dots\dots\dots(22)$$

I : 単位マトリックス

の形の特性方程式しか解けないから、式 (21) を変形して式 (22) の形にしなくてはならない。そのためにまず K^{-1} を式 (21) の左から乗ざると、

$$(I - \omega^2 K^{-1} M)d = O$$

次に ω^2 で除すると、

$$(I/\omega^2 - K^{-1} M)d = O \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここで $1/\omega^2$ を λ^2 で、 $K^{-1}M$ を X で置換えれば、式 (23) は式 (22) の形になり反復法で取扱うことができる。計算手続をのべるとつぎのようになる。

① 構造全体の剛性マトリックス K の逆行列 K^{-1} を計算する。

② K^{-1} に構造全体の質量マトリックス M を右から乗じて $K^{-1}M$ を計算する。

③ $K^{-1}M$ を X と考えて式 (22) の特性方程式を反復法で解く。

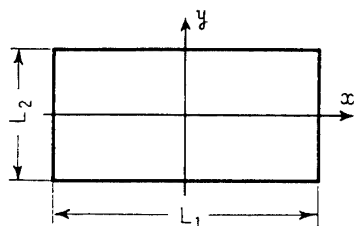


図 2 周辺自由長方形板

④ 反復法の性質から、固有値 (λ) の大きな固有振動から順に固有ベクトルがもとめられてくる。ところで λ はもとめる固有角速度の逆数であるから、結局系の固有振動数の小さなほうから順に解が得られてくることになる。工学的に重要なのは数個の低次固有振動であるから、所望の次数まで固有振動数と固有ベクトルがもとめられたら反復法による計算をうち切る。

ただしこの方法では K^{-1} を求めなければならないが、解析しようとする系に剛体変位が許容されていると K は特異 (singular) になるので K^{-1} を計算することができない。こういう場合には他の条件を使って剛体変位の成分を含まなくなるまでマトリックスの元数をおとす必要があるが、詳細は解析例とともにのべることにする。

ところで有限要素法では、原理的にはリッツの方法と同様に変形を仮定して計算するわけであるから、得られた解はかならず高めの近似を与えることになる。したがって要素分割を細かくしていくと、固有振動数は高めからしだいに正解に収束していくことになる。

3. 解 析 例

図 2 に示すような周辺自由長方形板の固有振動を解析した。この場合板の変位は拘束されていないので、

表 1 $L_2/L_1=0.5$ の長方形板の固有振動数 ($\nu=0.3, F_{LB}=0.5\sqrt{E/\rho}/L_1$)

	振動形	対称性	F/FLB		
			はさみうち法	反復法 1	反復法 2
1	F1	y 軸	0.706 3	0.686 8	
2	L1	x, y 軸	0.993 8	0.991 1	0.989 6
3	F2	原 点	1.158 5	0.993 0*	
4	F2'	原 点	1.707 2		
5	F1'	y 軸	1.729 7	1.686 2	
6	L2	x 軸	1.824 2	1.789 3*	
7	E	x, y 軸	1.940 4	1.866 1	1.793 3
8	L2'	x 軸	2.067 6	1.838 3*	
9	R1/L3	x, y 軸	2.134 2	1.958 9*	2.080 4

(注) 振動形の名称は Redwood⁽⁴⁾ がもっている名称を参考に付けたもので特に本質的な意味はないが、F は Flexural, L は Longitudinal, E は Edge, R は Radial を表わしている。

* 印は長方形板の上半分を解析して求めた値であることを示す。

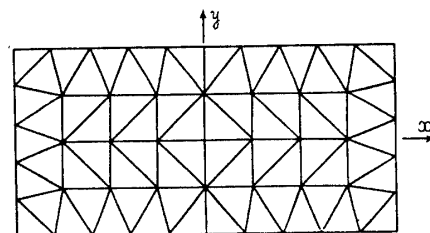


図 3 長方形板の要素分割 ($L_2/L_1=0.5$)

* 行列の値を計算するためには、同じ元数の行列を逆変換すると同程度の計算時間が必要である。

この長方形板には x 方向, y 方向, および回転の三つの剛体変位が許されている. そのため式 (21) の \mathbf{K} は特異になり, \mathbf{K}^{-1} が求められず, したがって反復法を使うことができない. そこでやむを得ず $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$ となる ω を「はさみうち法」でさがすという方法もちいた. こうすれば \mathbf{K} が特異であるかどうかに関係なく固有振動数を求めることができる. $L_2/L_1 = 0.5$ の場合について長方形板を図3に示すように要素数 70, 節点数 51 に分割して計算を行なって求められた固有振動数を第九次まで表1のはさみうち法の欄に示した. ただし固有振動数は長さ L_1 の棒の縦一次固有振動数 $F_{LB} = 0.5\sqrt{E/\rho}/L_1$ で無次元化してある. またそれぞれの固有振動数に対する振動形を図4に示しておく.

この結果から判断して, 軸対称性を有するものについては全体の 1/2 あるいは 1/4 のみを考慮して精度を向上させることができる. 図4中の F1, L1, F1', E, R1/L3 で示した振動形はいずれも y 軸に関して対称であり, ゆえに y 軸上では x 方向の変位がないので板の右半分だけを図5のように要素数 72, 節点数 49 に分割した. 図の左側のローラはこの節点については y 軸方向の変位だけが許されていることを模式的に示したものである.

ところで図5からもあきらかなように, この状態では y 軸方向の剛体変位が許されているので \mathbf{K}^{-1} を求めることができず, したがって反復法を適用することができない. そこで「重心は動かない」という条件をあらたに導入して剛体変位を拘束しなければならない. 任意の三角形要素 L の y 方向の重心の移動量を v_g^L , 要素 L の質量を m_L とすると, 「重心不動」の条件は次のようになる.

$$\frac{\sum_L m_L v_g^L}{\sum_L m_L} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

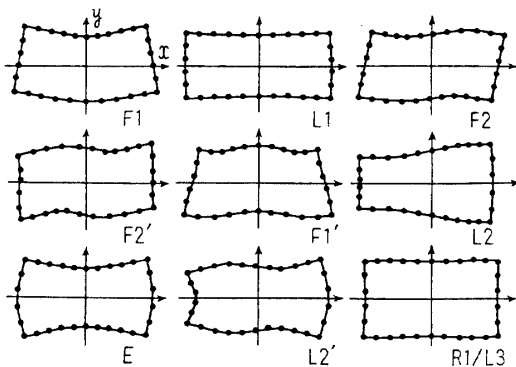


図4 $L_2/L_1 = 0.5$ の長方形板の固有振動形

ここに $v_g^L = (v_i^L + v_j^L + v_k^L)/3$ である. 式 (24) は式 (25) の形をした節点変位に関する一次式となる.

$$a_1 d_1 + a_2 d_2 + \dots + a_i d_i + \dots + a_n d_n = 0 \dots(25)$$

ここに d_1, d_2, \dots, d_n は節点変位を一般的にあらわしたものである. いまその内の d_n をえらび, 他の節点変位であらわすとつぎのようになる.

$$d_n = -\frac{a_1}{a_n} d_1 - \frac{a_2}{a_n} d_2 - \dots - \frac{a_i}{a_n} d_i - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} d_{n-1} \dots\dots\dots(26)$$

ところで式 (21) の特性方程式は数式の形にするとつぎのようになっている.

$$\begin{aligned} &(K_{i,1} - \omega^2 M_{i,1})d_1 + (K_{i,2} - \omega^2 M_{i,2})d_2 \\ &+ \dots + (K_{i,j} - \omega^2 M_{i,j})d_j + \dots \\ &+ (K_{i,n} - \omega^2 M_{i,n})d_n = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

($K_{i,j}, M_{i,j}$ はそれぞれ \mathbf{K}, \mathbf{M} マトリックスの i 行 j 列の値をしめす)

ここで式 (27) に式 (26) を代入すると

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(K_{i,1} - \frac{a_1}{a_n} K_{i,n} \right) - \omega^2 \left(M_{i,1} - \frac{a_1}{a_n} M_{i,n} \right) \right\} d_1 \\ &+ \left\{ \left(K_{i,2} - \frac{a_2}{a_n} K_{i,n} \right) - \omega^2 \left(M_{i,2} - \frac{a_2}{a_n} M_{i,n} \right) \right\} d_2 \\ &+ \dots \\ &+ \left\{ \left(K_{i,j} - \frac{a_j}{a_n} K_{i,n} \right) - \omega^2 \left(M_{i,j} - \frac{a_j}{a_n} M_{i,n} \right) \right\} d_j \\ &+ \dots \\ &+ \left\{ \left(K_{i,n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} K_{i,n} \right) - \omega^2 \left(M_{i,n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} M_{i,n} \right) \right\} d_{n-1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \dots\dots\dots(28)$$

ここであらためて構造全体の剛性マトリックス \mathbf{K}^* と質量マトリックス \mathbf{M}^* を定義し, その i 行 j 列の

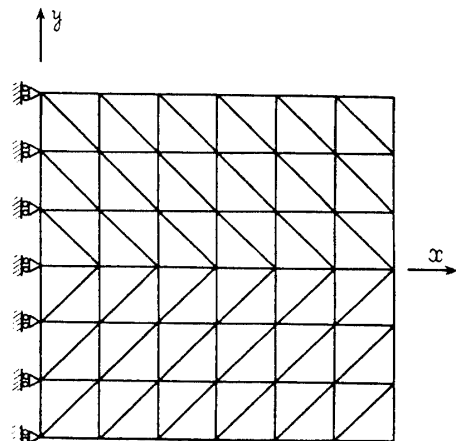


図5 右半分の要素分割

値がそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} K_{i,j}^* &= K_{i,j} - \frac{a_j}{a_n} K_{i,n} \\ M_{i,j}^* &= M_{i,j} - \frac{a_j}{a_n} M_{i,n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

$$(i, j=1, 2, \dots, n-1)$$

となるようにすると、 K^* 、 M^* には重心不動の条件を考慮に入れてあるから、 K^* は特異にならず、前にのべた方法をもちいて反復法によって固有振動数と固有ベクトルを計算することができる。なおこの際に、構造全体の剛性マトリックス、質量マトリックスの元数が一つさがる。このようにして求めた固有振動数を表 1 の反復法 1 の欄に示した。

また図 4 中の L1, L2, E, L2', R1/L3 で表わされる振動形はいずれも x 軸に関して対称である。この場合も y 軸に対称な場合と同様に板の上半分を図 6 に示すように要素数 80, 節点数 55 に分割し、 x 軸方向に「重心不動」の条件をもちいて K および M の元数を一つおとして反復法による計算を行なった。その結果も表 1 の反復法 1 の欄に示してある。

さて x および y 両軸に対称な固有振動 (L1, E, R1/L3) については板の右上半分のみを考慮すればよいから、それを図 7 に示すように要素数 54, 節点数 40 に分割した。この場合は剛体変位が拘束されているので、そのまま反復法をもちいればよい。こうして得られた解を表 1 の反復法 2 の欄に示しておく。

要素分割が細くなるにつれて固有振動数の計算値が小さくなりながら収束していくようすが表 1 からわかる。このようにして構造物の対称性を利用して解の精度を向上させることができる。

図 8 は x, y 両軸に対称な振動形をもつ固有振動について L_2/L_1 を変化させて固有振動数を求めて曲線

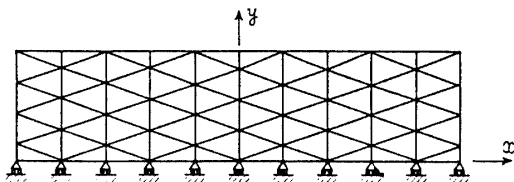


図 6 上半分の要素分割

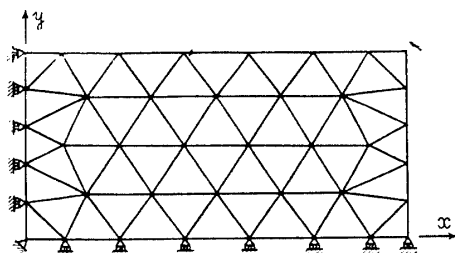


図 7 右上半分の要素分割

で結んだもので、Redwood⁽⁴⁾ が圧電性セラミックをもちいて行なった実験もともに示してあるが両者は良く一致している。図中の L1, E などは振動形の種類を表わすが、これらを $L_2/L_1=1/1.1, 2/3$ および $1/3$ の三つの場合について示したのが図 9 である。

図 10 は y 軸に対称な振動形をもつ固有振動について L_2/L_1 を変化させて固有振動数を求めグラフにしたものである (ただし $x \cdot y$ 両軸に対称な振動形をもつものは除外してある)。図中には Redwood⁽⁴⁾ の実験もあわせて示してある。図 10 では振動形の名称を周波数の低いものから順に F1, F3, F5 と命名したのであるが、同一の名称をもつ振動形でも L_2/L_1 の値によって内容が若干異なっていることは興味深い。たとえば F3 で示した一連の固有振動形のうち $L_2/L_1=$

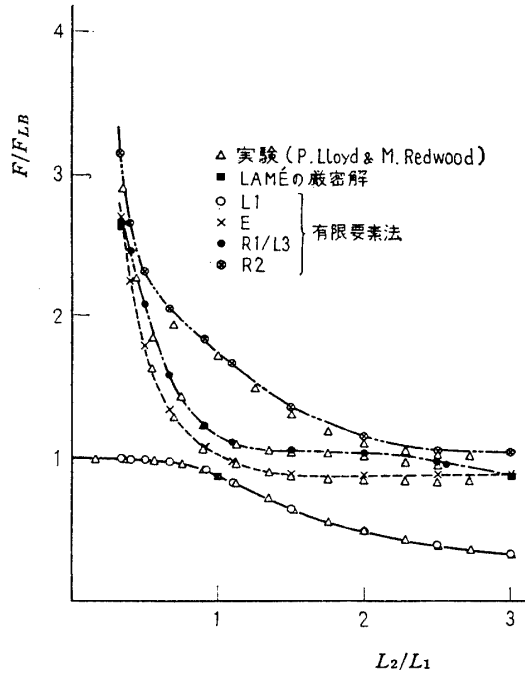


図 8 x, y 両軸に対称な振動の固有振動数

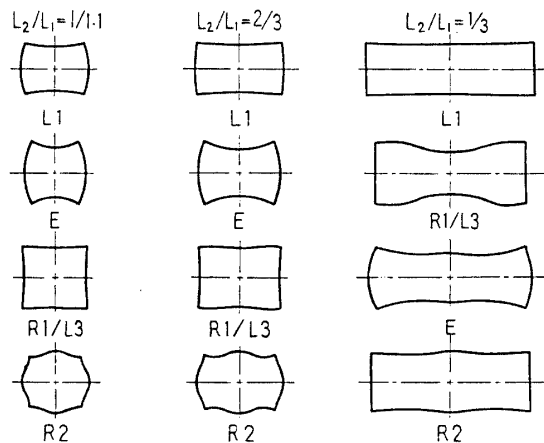


図 9 x, y 両軸に対称な固有振動形

0.2, 0.22, 0.25, 0.333, 0.4 に対する振動形は両端自由のはりの第三次固有振動形に類似しており板の左右端は直線的であるが, $L_2/L_1=0.5, 0.666, 0.8, 0.91$ に対する振動形は板の左右端も曲線的になり, $L_2/L_1 \leq 0.4$ に対するそれとはかなり違っている (図 11 参照). F5 で示した一連の固有振動形についても同様な現象がおこる (図 12 参照).

もう一つの例として図 13 に示すような正三角形板の面内振動を解析した. 長方形板の場合と同様にまず

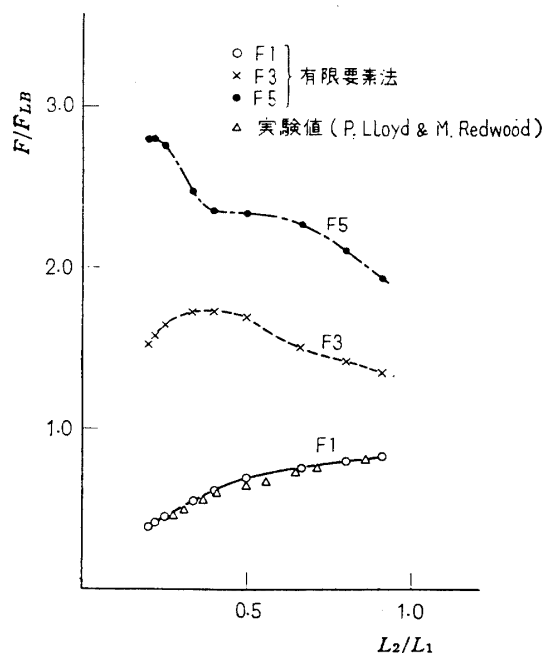


図 10 y 軸に対称な振動の固有振動数

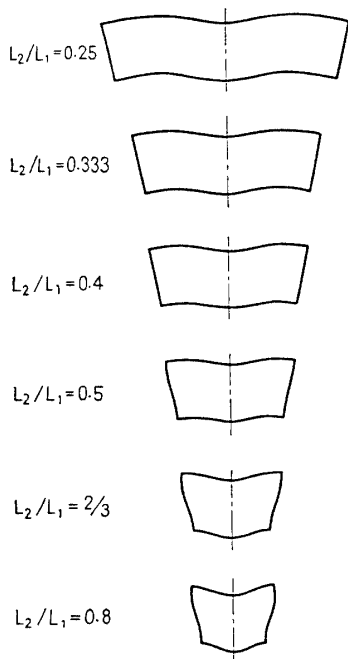


図 11 L_2/L_1 による F3 固有振動形の変化

正三角形板全体を図 14 に示すように要素数 64, 節点数 45 に要素分割し, 「はさみうち法」によって第七次固有振動数まで求めて表 2 のはさみうち法の欄に示した.

その内で軸対称の振動形をもつものについては正三角形板の半分だけを解析することにして図 15 に示す

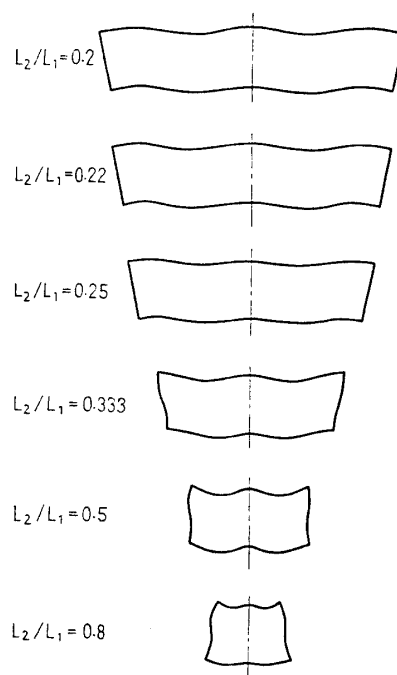


図 12 L_2/L_1 による F5 固有振動形の変化

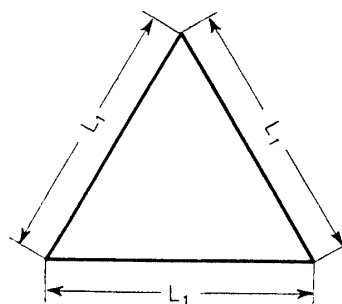


図 13 正三角形平板

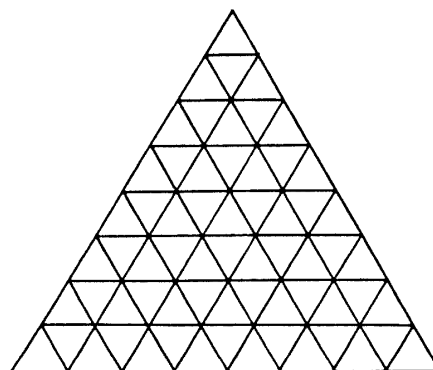


図 14 正三角形板の要素分割

ように要素数 55, 節点数 41 に要素分割した. 重心不動の条件から K および M の元数を一つおとして反復法によって固有振動数を計算しその結果を表 2 の反復法の欄に示しておく.

表 2 には東京大学生産技術研究所尾上研究室による圧電性セラミックをもちいた実験値も示したが電荷分布は縦ひずみ分布に比例するので, 第四次および第六次固有振動は使用した電極形状では励振することができなかった.

図 16 に第七次までの固有振動に対する振動形を図示した. ただし反復法によって精度の良い解が得られた固有振動については, その計算結果から求められた振動形を示してある.

4. 結 論

有限要素法による平板の面内振動の解析手法を検討し, 本方法による解が実験値と良く一致することを確かめた. 同様の手法を板の曲げ振動やかくの振動にも適用することができる⁽⁶⁾. しかし有限要素法においては構造の形状や境界条件が機械的に計算にはいるので

表 2 正三角形板の固有振動数*
($F/LB=0.5\sqrt{E/\rho}/L_1$)

	F/FLB		
	はさみうち法	反 復 法	実 験 値
1	0.884	0.867	0.813 0.832
2	1.289	1.270	1.238
3	1.446	1.434	1.405
4	1.543		
5	2.159	2.051	2.32
6	2.333		
7	2.509	2.447	2.54

* 計算に使用したポアソン比=0.3. なお第一次固有振動について実験値が二つ記載してあるが, これは実験片が正確な正三角形でないために生じた現象と思われる.

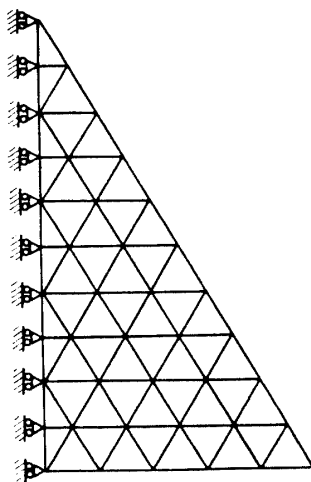


図 15 正三角形板の 1/2 の要素分割

非常に便利である一方, 系が複雑になるにつれて特性方程式の元数が多くなるのでこれをどのように解くかが大きな問題である.

最後に本研究に対してご指導・ご助言をいただいた東京大学工学部 鷲津久一郎教授, 東京大学生産技術研究所 尾上守夫教授, 十文字弘道助手に厚くお礼申し上げます.

付録: 三角形領域内の定積分

三角形の図心に座標原点をもつ x^*-y^* 座標系を考え, その座標系に関して三角形の 3 頂点 i, j, k の座標が $(x_i^*, y_i^*), (x_j^*, y_j^*), (x_k^*, y_k^*)$ であるとする, 三角形領域内の積分について次のような公式が成り立つ.

$$\int \int_{\Delta} dx^* dy^* = \Delta$$

$$\int \int_{\Delta} x^* dx^* dy^* = 0, \quad \int \int_{\Delta} y^* dx^* dy^* = 0$$

$$\int \int_{\Delta} x^{*2} dx^* dy^* = \Delta(x_i^{*2} + x_j^{*2} + x_k^{*2})/12$$

$$\int \int_{\Delta} y^{*2} dx^* dy^* = \Delta(y_i^{*2} + y_j^{*2} + y_k^{*2})/12$$

$$\int \int_{\Delta} x^* y^* dx^* dy^* = \Delta(x_i^* y_i^* + x_j^* y_j^* + x_k^* y_k^*)/12$$

ここに Δ : 三角形の面積

さて一般の $x-y$ 座標系 (ただし x^* 軸と x 軸, y^* 軸

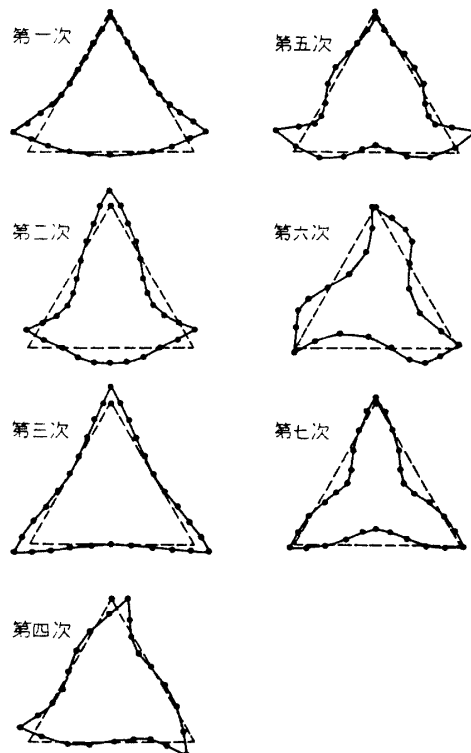


図 16 正三角形板の固有振動形

と y 軸は平行) に対して, 3 頂点 i, j, k の座標が $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ であるとする二つの座標値に関して次の関係が成立する.

$$x = x^* + x_G, \quad y = y^* + y_G$$

ここに x_G, y_G は $x-y$ 座標系における三角形の図心の座標値であって次のようになる.

$$x_G = (x_i + x_j + x_k)/3, \quad y_G = (y_i + y_j + y_k)/3$$

以上をもちいて $x-y$ 座標系に関する積分公式が次のように得られる.

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} x dx dy &= \int \int_{\Delta} (x^* + x_G) dx^* dy^* \\ &= \int \int_{\Delta} x_G dx^* dy^* = \Delta x_G \end{aligned}$$

$$\int \int_{\Delta} y dx dy = \int \int_{\Delta} y_G dx^* dy^* = \Delta y_G$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} x^2 dx dy &= \int \int_{\Delta} (x^* + x_G)^2 dx^* dy^* \\ &= \int \int_{\Delta} (x^{*2} + 2x^* x_G + x_G^2) dx^* dy^* \end{aligned}$$

$$= \Delta (x_i^{*2} + x_j^{*2} + x_k^{*2})/12 + \Delta x_G^2$$

ここに

$$x_i^* = x_i - x_G, \quad x_j^* = x_j - x_G, \quad x_k^* = x_k - x_G$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} y^2 dx dy &= \int \int_{\Delta} (y^* + y_G)^2 dx^* dy^* \\ &= \Delta (y_i^{*2} + y_j^{*2} + y_k^{*2})/12 + \Delta y_G^2 \end{aligned}$$

ここに

$$y_i^* = y_i - y_G, \quad y_j^* = y_j - y_G, \quad y_k^* = y_k - y_G$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\Delta} xy dx dy &= \int \int_{\Delta} (x^* + x_G)(y^* + y_G) dx^* dy^* \\ &= \Delta (x_i^* y_i^* + x_j^* y_j^* + x_k^* y_k^*)/12 + \Delta x_G y_G \end{aligned}$$

文 献

- (1) O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister, *Stress Analysis*, (1965), 158, John-Wiley & Sons.
- (2) 文献 (1) の 126 ページ.
- (3) 森口, *ALGOL 入門*, (昭 39), 73, JUSE 出版社.
- (4) P. Lloyd & M. Redwood, *J. Acous. Soc. Amer.*, 39-2 (1966), 346.
- (5) 川井・吉村, *西部造船会会報*, 36 (昭 43-7), 147