ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MICHEL MEO

Inégalités d'auto-intersection pour les courants positifs fermés définis dans les variétés projectives

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 26, nº 1 (1998), p. 161-184

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1998_4_26_1_161_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXVI (1998), pp. 161-184

Inégalités d'auto-intersection pour les courants positifs fermés définis dans les variétés projectives

MICHEL MEO

0. - Introduction

Le premier objectif de cet article est d'établir, étant donné un courant positif fermé défini sur une variété projective, des inégalités d'auto-intersection qui permettent de borner le degré des strates où la multiplicité est constante. À l'aide du théorème de plongement de Matsusaka, on se ramène au cas de l'espace projectif et on utilise alors un potentiel de Skoda qu'on envisage ici d'un point de vue géométrique. L'un des points essentiels est que la méthode utilisée permet de traiter le cas d'un courant de dimension quelconque. Seul le cas de la codimension 1 était connu auparavant. Dans la suite de l'article, on calcule explicitement le noyau dans l'espace projectif définissant le potentiel utilisé, afin de bien faire le lien entre ses deux constructions. On y arrive en remontant à l'espace affine. On propose ensuite aussi une méthode intrinsèque plus naturelle, qui relie ce calcul à la résolution explicite de l'équation d'Euler-Green. Cette dernière est classique en théories de Nevanlinna et d'Arakelov et a déjà été résolue par Bismut-Bost-Gillet-Soulé. Dans cet article on donne également une présentation self-contained d'une solution élémentaire de cette équation, obtenue à partir de la formule de King.

Soit précisément T un courant positif fermé de bidimension (p, p) défini dans une variété complexe X de dimension n et, pour $c > 0$, E_c le sous-ensemble analytique formé des points en lesquels le nombre de Lelong de T est supérieur ou égal à c (cf. [Siu1]). On suppose X compacte et munie d'une métrique kaehlerienne ω et on s'intéresse à une majoration du degré par rapport à ω des composantes irréductibles de dimension q donnée apparaissant dans les E_c en termes de la classe de cohomologie de T.

On rappelle le résultat obtenu par Demailly (cf. [D1]). Soit $0 = b_p \leq \cdots \leq b_{-1}$ la suite des valeurs de saut de dimension des E_c. Autrement dit $b_q = \inf\{c > 0, \dim E_c \leq q\}$ avec en particulier $b_{-1} = \max_{x \in X} \nu(T, x)$ et pour $c \in \,]b_q, b_{q-1}]$ la dimension de E_c est q. Soit $(Z_{q,k})_{k \geq 1}$ la famille au

Pervenuto alla Redazione il 5 novembre 1996.

plus dénombrable des composantes irréductibles de dimension q des E_c pour $c \in]b_q, b_{q-1}]$ et $\nu_{q,k} = \min_{x \in Z_{q,k}} \nu(T,x) \in]b_q, b_{q-1}]$ le nombre de Lelong générique de T le long de $Z_{q,k}$.

Lorsque $p = n-1$ c'est-à-dire T de bidegré $(1,1)$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned}(0.1)\quad \sum_{k\geq 1}(\nu_{q,k} - b_{n-1}) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\{Z_{q,k}\}\{\omega\}^q \leq (\{T\} + b_{n-1}\{u\})\\ \cdots (\{T\} + b_q\{u\})\{\omega\}^q\end{aligned}$$

où $\{u\}$ est une classe de cohomologie dans X semi-positive (i.e. dans l'adhérence du cône de Kaehler) telle que $c_1(\mathcal{O}_{TX}(1)) + \pi_X^*\{u\}$ soit semi-positive, $\mathcal{O}_{TX}(1)$ désignant le fibré en droites tautologique associé au fibré tangent TX au-dessus du fibré des hyperplans $P(T^*X)$ et $\pi_X : P(T^*X) \to X$ la projection. La démonstration utilise le résultat de régularisation suivant, qui est vrai d'ailleurs avec une métrique hermitienne ω quelconque (cf. [D1] et [D3]).

On suppose $\mathcal{O}_{TX}(1)$ muni d'une métrique hermitienne dont la forme de courbure vérifie $\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{TX}(1)) + \pi_X^* u \geq 0$ pour une certaine forme $\mathcal{C}^\infty$ positive u dans X de bidegré $(1,1)$. Soit T un courant fermé de bidegré $(1,1)$ vérifiant $T \geq \gamma$ pour une certaine forme réelle continue γ et θ une forme réelle $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans la même classe de dd^c-cohomologie que T i.e. $T = \theta + dd^c U$ avec U une fonction presque plurisousharmonique. Alors, pour tout $c > 0$, il existe une suite de courants fermés $(T_{c,\ell})_{\ell \geq 1}$ qui converge faiblement vers T et vérifie

(i) $T_{c,\ell} = \theta + dd^c U_{c,\ell}$ où $(U_{c,\ell})_{\ell\geq 1}$ est une suite décroissante de fonctions presque plurisousharmoniques $\mathcal{C}^\infty$ dans $X - E_c$ qui converge vers U.

(ii) $T_{c,\ell} \geq \gamma - \min(\lambda_\ell, c)u - \delta_\ell \omega$ où $(\lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une suite décroissante de fonctions continues telle que $\lambda_\ell(x) \to \nu(T,x)$ pour tout $x \in X$ et $(\delta_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une suite décroissante de constantes positives qui converge vers 0.

(iii) $\nu(T_{c,\ell}, x) = (\nu(T,x) - c)_+$ pour tout $x \in X$.

L'idée pour en déduire l'inégalité d'intersection est de considérer pour des valeurs $c_j \to b_j^+$, j variant de $n-2$ à q, le produit $T \wedge \left(T_{c_{n-2},\ell} + c_{n-2}u + \delta_\ell\omega\right) \wedge \cdots \wedge \left(T_{c_q,\ell} + c_q u + \delta_\ell \omega\right)$ qui est bien défini à l'aide de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère (cf. [D2], [Sib], [Fo-Sib]) puisque les singularités de $T_{c_j,\ell} + c_j u + \delta_\ell\omega$ sont contenues dans un sous-ensemble analytique de dimension j.

Lorsque X est l'espace projectif $\mathbf{P}_n$, on peut prendre $u = 0$ et l'inégalité (0.1) s'écrit simplement

$$\sum_{k\geq 1}(\nu_{q,k} - b_{n-1}) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{n-q}$$

en désignant par $\delta(\cdot)$ les degrés relativement à ω la métrique de Fubini-Study.

On se propose d'établir l'inégalité analogue pour un courant positif fermé T de bidimension (p, p) quelconque dans $\mathbf{P}_n$

$$\sum_{k\geq 1}(\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{p+1-q}. \tag{0.2}$$

L'idée est de considérer un courant positif fermé T_1 de bidegré $(1, 1)$ dans $\mathbf{P}_n$ qui possède le même degré que T et le même nombre de Lelong en tout point et d'utiliser de la même façon l'opérateur de Monge-Ampère $T \wedge \left(T_{1,c_{n-2},\ell} + \delta_\ell\omega\right) \wedge \cdots \wedge \left(T_{1,c_q,\ell} + \delta_\ell\omega\right)$.

Ensuite, lorsque T est défini dans une variété projective X et ω est une métrique kaehlerienne dans X définissant une classe de cohomologie entière, un plongement dans un espace projectif effectué grâce au théorème de Matsusaka (cf. [Ko-M]) implique l'existence d'une constante C ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1}\cdot c_1(X)$ telle que

$$\sum_{k\geq 1}(\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq C\delta(T)^{p+1-q} \tag{0.3}$$

et dont un majorant peut être explicité grâce à [Siu2].

Pour définir T_1 on peut utiliser comme Lelong et Skoda (cf. [L] et [Sk1]) un potentiel. Soit $\pi : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}_n$ l'application canonique, on considère dans $\mathbf{C}^{n+1}$ le courant positif fermé

$$dd^c\Bigg(z \to -\frac{1}{(p+1)2^{p+2}}\int_{\mathbf{C}^{n+1}}\left\{\frac{1}{|z-x|^{2p+2}} - \frac{1}{(1+|x|^2)^{p+1}}\right\} (\pi^*T)(x) \wedge \left(dd^c|x|^2\right)^{p+1}\Bigg). \tag{0.4}$$

Il est invariant par homothéties et donc provient d'un courant défini dans $\mathbf{P}_n$ qui a les mêmes nombres de Lelong que T et comme le montre un calcul facile le même degré que T.

Comme l'a remarqué Demailly, on en a aussi une construction géométrique. On projette T orthogonalement sur un sous-espace projectif de dimension $p+1$ puis on considère l'image inverse. Sauf pour un ensemble négligeable dans la grassmannienne $G(p+2, \mathbf{C}^{n+1})$ des sous-espaces projectifs de dimension $p+1$, son degré est le même que celui de T et T_1 s'obtient en fait comme la moyenne relativement à $G(p+2, \mathbf{C}^{n+1})$ de ce courant.

On étudie ensuite le noyau $\widetilde{K}$ sur $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$ qui donne T_1 directement en fonction de T. Un calcul d'image directe à partir de la formule (0.4) permet d'exprimer $\widetilde{K}$ en des termes intrinsèques à l'espace projectif et en particulier d'obtenir sa partie principale au voisinage des points de la diagonale. Une autre méthode pour mener ce calcul directement à partir de la définition géométrique est envisagée. Comme $\widetilde{K}$ est en fait la moyenne relativement à $G(p+2, \mathbf{C}^{n+1})$

de l'image réciproque dans $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n$ du courant d'intégration sur la diagonale associée à un sous-espace projectif de dimension $p+1$, il s'agit alors dans un premier temps d'exprimer une forme de Green de ce sous-ensemble.

On pourrait pour cela encore remonter à l'espace affine. Soit $\beta : \mathbf{C}^* \times (\mathbf{C}^{p+2} - \{0\}) \times (\mathbf{C}^{p+2} - \{0\}) \to \mathbf{C}^{p+2}$ définie par $\beta(t,z,x) = tz + x$ et α la projection sur les deux derniers facteurs. L'image réciproque dans $(\mathbf{C}^{p+2} - \{0\}) \times (\mathbf{C}^{p+2} - \{0\})$ du courant d'intégration sur la diagonale Δ de $\mathbf{P}_{p+1} \times \mathbf{P}_{p+1}$ est alors égale à $\alpha_* \beta^* \delta_0 = \alpha_*\big((dd^c \log|tz+x|)^{p+2}\big)$. On peut ensuite l'exprimer comme somme de la forme $\sum_{j=0}^{p+1} \big(dd^c \log|z|\big)^j \wedge \big(dd^c \log|x|\big)^{p+1-j}$ qui représente la classe de cohomologie de Δ dans $\mathbf{P}_{p+1} \times \mathbf{P}_{p+1}$ et d'un terme qui est le dd^c d'une forme singulière le long de Δ se calculant à l'aide de la quantité $\frac{|z \wedge x|}{|z||x|}$.

On procède ici autrement en interprétant Δ comme le lieu des zéros de la section du fibré vectoriel $\mathrm{pr}_1{}^*\mathcal{O}(1) \otimes \mathrm{pr}_2{}^*(\mathbf{C}^{p+2}/\mathcal{O}(-1))$ au-dessus de $\mathbf{P}_{p+1} \times \mathbf{P}_{p+1}$ qui associe $z^* \otimes (z \bmod \mathbf{C}x)$ à $([z],[x])$.

De façon générale, étant donnés E un fibré vectoriel hermitien de rang r au-dessus d'une variété complexe X et Z une sous-variété lisse de X définie comme l'ensemble des zéros d'une section s de E transverse à la section nulle, on explicite une forme différentielle ψ' à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$ telle que

$$[Z] = c_r(\Theta) + \big(dd^c \log|s|\big)^r + dd^c \psi' \tag{0.5}$$

Θ désignant la forme de courbure de E et $c_r(\Theta)$ sa forme de Chern de degré maximum. L'équation $[Z] = c_r(\Theta) + dd^c\phi$ est classique en théorie d'Arakelov et il existe déjà plusieurs références pour sa résolution effective (cf. [G-So], [Bi-G-So], [Bos-G-So]). La solution présentée ici est obtenue élémentairement à partir de la formule de King (cf. [Ki]).

Revenant à l'expression de $[\Delta]$, on trouve donc que dans $\mathbf{P}_{p+1} \times \mathbf{P}_{p+1}$

$$[\Delta] = \sum_{j=0}^{p+1} \mathrm{pr}_1{}^*\left(\omega^j_{|\mathbf{P}_{p+1}}\right) \wedge \mathrm{pr}_2{}^*\left(\omega^{p+1-j}_{|\mathbf{P}_{p+1}}\right) + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1} + dd^c\psi'$$

avec $|s| = \frac{|z\wedge x|}{|z||x|}$ et ψ' une forme à coefficients $O\left(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\right)$. Finalement on n'a pas explicité la moyenne des différents termes, mais tout ceci suggère bien l'existence d'une forme ψ à coefficients $O\left(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\right)$ telle que

$$\widetilde{K} = \sum_{j=0}^{p+1} \mathrm{pr}_1^*\,\omega^j \wedge \mathrm{pr}_2^*(\omega^{p+1-j}) + (dd^c \log|s|)^{p+1} + dd^c\psi.$$

Remerciements. Je voudrais exprimer ma gratitude à Jean-Pierre Demailly qui m'a suggéré l'étude de ce sujet et dont les remarques et les conseils ont aidé à l'élaboration de ce travail.

1. – Courant de bidegré (1,1) associé à un courant positif fermé de l'espace projectif

Soit $P(V)$ l'espace projectif des droites d'un espace vectoriel complexe V de dimension $N+1$. On munit $P(V)$ de la métrique de Fubini-Study induite par un produit scalaire sur V et on note $\omega = \frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(1))$ sa forme fondamentale. Étant donné un courant positif fermé T de bidimension (p, p) dans $P(V)$ avec $p \leq N-1$, on va définir un courant positif fermé T_1 de bidegré $(1, 1)$ dans $P(V)$ ayant même degré que T par rapport à ω et même nombre de Lelong que T en tout point de $P(V)$.

On note $G(p+2, V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de V de dimension $p+2$. Pour $W \in G(p+2, V)$ on désigne par $\sigma_W : V \longrightarrow W$ la projection orthogonale sur W et par $\tilde{\sigma}_W : P(V) \dashrightarrow P(W)$ l'application méromorphe induite. Les considérations qui suivent concernant les images inverses et directes par $\tilde{\sigma}_W$ de courants positifs fermés seront utiles à la définition de T_1.

(1.1) Proposition. *L'image inverse par $\tilde{\sigma}_W$ d'un courant S de $P(W)$ est définie dans $P(V)$ et est positive fermée si S l'est.*

Démonstration. Soit $Y = \{([z], [x]) \in P(V) \times P(W),\ \sigma_W(z)$ et x colinéaires$\}$ et η, τ les restrictions à Y des projections de $P(V) \times P(W)$ sur $P(V)$, $P(W)$. En fait η représente l'éclatement de $P(V)$ de centre $P(W^{\perp})$ et permet d'éliminer les singularités de $\tilde{\sigma}_W$ i.e. le diagramme ci-après est commutatif. On pose alors $\tilde{\sigma}_W{}^*S = \eta_*\tau^*S$ qui est bien défini, τ étant en fait une submersion puisqu'elle s'identifie à la projection du fibré projectivisé $P\big(W^{\perp} \oplus \mathcal{O}_{P(W)}(-1)\big)$ sur $P(W)$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ P(V) \arrow[r, dashed, "\tilde{\sigma}_W"'] & P(W) \end{tikzcd}$$

□

De la même façon, l'image directe par $\tilde{\sigma}_W$ d'une forme u de classe C^{∞} dans $P(V)$ est bien définie en posant $\tilde{\sigma}_{W*}u = \tau_*\eta^*u$ et vérifie la relation

$$\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^*S \wedge u = \int_{P(W)} S \wedge \tilde{\sigma}_{W*}u \quad \text{pour tout courant } S \text{ dans } P(W).$$

En particulier

(1.2) Lemme. *Pour $\ell \leq p+1$, l'image directe $\tilde{\sigma}_{W*}(\omega^{\ell+N-p-1})$ est égale à $\omega^{\ell}_{|P(W)}$.*

DÉMONSTRATION. $\tilde{\sigma}_{W*}(\omega^{\ell+N-p-1})$ est une forme sur $P(W)$ invariante par l'action du groupe unitaire $U(W) \simeq U(W) \times \{\mathrm{id}_{W^\perp}\} \subset U(V)$. Elle est donc égale à $C\omega^{\ell}_{|P(W)}$ pour une certaine constante C. Pour tout courant S de bidimension (ℓ, ℓ) dans $P(W)$, on a alors

$$\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^* S \wedge \omega^{\ell+N-p-1} = C \int_{P(W)} S \wedge \omega^{\ell}_{|P(W)}.$$

Si on choisit en particulier pour S le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de dimension ℓ, $\tilde{\sigma}_W{}^* S$ est alors le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de dimension $\ell + N - p - 1$ et les deux intégrales ci-dessus sont égales à 1. On a donc bien $C = 1$. □

On note μ l'unique mesure positive sur $G(p+2, V)$ invariante par le groupe unitaire de masse égale à 1.

(1.3) LEMME. *L'intégrale* $\int_{W \in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{\ell}_{|P(W)}\big) d\mu(W)$ *existe pour tout* $\ell \leq p+1$ *et est égale à* ω^{ℓ}.

DÉMONSTRATION. Cette intégrale est faiblement convergente car si u est une forme différentielle continue de bidegré $(N-\ell, N-\ell)$ dans $P(V)$, la fonction $W \to \int_{P(W)} \tilde{\sigma}_{W*} u \wedge \omega^{\ell}_{|P(W)}$ est bornée dans $G(p+2, V)$. En effet, on peut supposer u positive et écrivant $u \leq C\omega^{N-\ell}$ avec une constante $C > 0$, il suffit de considérer le cas où $u = \omega^{N-\ell}$ mais alors cette fonction est égale à 1 par le lemme (1.2).

Maintenant $\int_{W \in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{\ell}_{|P(W)}\big) d\mu(W)$ est un courant sur $P(V)$ invariant par l'action de $U(V)$ donc est égal à $C\omega^{\ell}$ pour une constante C. En l'évaluant sur $\omega^{N-\ell}$ on trouve $C = 1$. □

(1.4) PROPOSITION. *L'image directe par* $\tilde{\sigma}_W$ *de la restriction à* $P(V) - P(W^\perp)$ *d'un courant positif fermé* T *défini dans* $P(V)$ *existe pour tout* $W \in G(p+2, V)$ *et c'est un courant positif fermé dans* $P(W)$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de justifier l'existence de $\int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^* u$ pour u une forme différentielle continue de bidegré (p, p) dans $P(W)$. Il suffit de considérer le cas où $u = \omega^{p}_{|P(W)}$. Soit g la fonction dans $P(V)$ égale à $\log \frac{|\sigma_W(z)|}{|z|}$ en $[z]$. Alors

$$\tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega_{|P(W)}\big) = \omega + dd^c g. \tag{1.5}$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon = \omega + dd^c g_\varepsilon$ avec $g_\varepsilon([z]) = \frac{1}{2} \log \frac{|\sigma_W(z)|^2 + \varepsilon |\sigma_{W^\perp}(z)|^2}{|z|^2}$. C'est une forme $\mathcal{C}^\infty$ qui, lorsque $\varepsilon \to 0$, converge faiblement dans $P(V)$ vers $\tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega_{|P(W)}\big)$. Par conséquent $T \wedge \omega_\varepsilon^p$ converge faiblement dans $P(V) - P(W^\perp)$ vers $T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{p}_{|P(W)}\big)$ et donc

$$\int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{p}_{|P(W)}\big) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \omega_\varepsilon^p.$$

Or $\int_{P(V)-P(W^{\perp})} T \wedge \omega_\varepsilon^p = \int_{P(V)} \widetilde{T} \wedge \omega_\varepsilon^p$ en désignant par $\widetilde{T}$ l'extension triviale à $P(V)$ de $T_{|P(V)-P(W^{\perp})}$. Par le théorème de prolongement de Skoda (cf. [Sk2]), $\widetilde{T}$ est fermée et puisque ω_ε est cohomologue à ω dans $P(V)$ on a $\int_{P(V)-P(W^{\perp})} T \wedge \omega_\varepsilon^p = \int_{P(V)-P(W^{\perp})} T \wedge \omega^p$ et donc

$$\int_{P(V)-P(W^{\perp})} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*(\omega^p_{|P(W)}) \leq \int_{P(V)-P(W^{\perp})} T \wedge \omega^p. \tag{1.6}$$

On note $\tilde{\sigma}_{W*}T$ l'image directe par $\tilde{\sigma}_W$ de $\widetilde{T}$. Pour vérifier que $d\tilde{\sigma}_{W*}T = 0$, on reprend l'idée de la démonstration du théorème de prolongement de Skoda-El Mir (cf. [E] et [Sib]). k étant un entier ≥ 1, soit $\varphi_k = \chi\left(\frac{1}{k}g\right)$ avec χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]-\infty, 0]$ valant 1 en 0 et convexe croissante. Cette suite de fonctions vérifie les propriétés suivantes:

φ_k est $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ et $0 \leq \varphi_k \leq 1$,

φ_k tend vers 1 uniformément sur tout compact de $P(V) - P(W^{\perp})$,

$\varphi_k = 0$ au voisinage de $P(W^{\perp})$.

On va aussi estimer le hessien de φ_k. On a

$$dd^c\varphi_k = \frac{1}{k^2}\chi''\left(\frac{1}{k}g\right) dg \wedge d^c g + \frac{1}{k}\chi'\left(\frac{1}{k}g\right) dd^c g.$$

Compte-tenu de la convexité de χ le premier terme est positif. Pour le second, on utilise que $dd^c g \geq -\omega$ d'après (1.5) et que χ' est positive et majorée par une constante C. D'où la minoration $dd^c\varphi_k \geq -\frac{C}{k}\omega$.

Puisque $\tilde{\sigma}_{W*}T$ est réel, il suffit de vérifier qu'il est d'-fermé. Comme c'est la limite de $\tilde{\sigma}_{W*}(\varphi_k T)$ il s'agit de voir que $\tilde{\sigma}_{W*}(d'\varphi_k \wedge T)$ tend vers 0.

Comme toute forme $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(W)$ de bidegré $(p-1, p)$ est une somme de formes s'écrivant $i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta} \wedge \bar{\beta}$ avec θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ d-fermée de bidegré $(p-1, 0)$ et β de classe $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré $(1, 0)$, cela revient à montrer que la suite $\int_{P(V)} d'\varphi_k \wedge T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\left(i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}\right) \wedge \overline{\tilde{\sigma}_W{}^*\beta}$ tend vers 0. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme hermitienne qui associe $\int_{P(V)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\left(i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}\right) \wedge i\gamma_1 \wedge \bar{\gamma}_2$ à γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}^\infty_{1,0}(P(V))$, le carré de sa valeur absolue est inférieur à

$$\left(\int_{P(V)-P(W^{\perp})} T\wedge\tilde{\sigma}_W{}^*\left(i^{p^2}\theta\wedge\beta\wedge\overline{\theta\wedge\beta}\right)\right)\left(\int_{P(V)} T\wedge\tilde{\sigma}_W{}^*\left(i^{p-1)^2}\theta\wedge\bar{\theta}\right)\wedge i d'\varphi_k\wedge d''\varphi_k\right).$$

Compte-tenu de la relation $d'\varphi_k \wedge d''\varphi_k = \frac{1}{2}d'd''(\varphi_k^2) - \varphi_k d'd''\varphi_k$, la dernière intégrale est égale à

$$\int_{P(V)} T\wedge\tilde{\sigma}_W{}^*\left(i^{(p-1)^2}\theta\wedge\bar{\theta}\right)\wedge\varphi_k(-id'd''\varphi_k) \leq \frac{CC'}{k}\int_{P(V)-P(W^{\perp})} T\wedge\tilde{\sigma}_W{}^*\left(\omega^{p-1}_{|P(W)}\right)\wedge\omega$$

après majoration de $i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}$ par $C'\omega^{p-1}_{|P(W)}$ et utilisation de l'estimation du hessien de φ_k.

Enfin, l'intégrale $\int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*(\omega^{p-1}_{|P(W)}) \wedge \omega$ est convergente puisque par un raisonnement analogue à celui effectué pour établir (1.6) on voit qu'elle est inférieure à $\int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \omega^p$. □

Il résulte de tout ceci que $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ est, pour tout $W \in G(p+2, V)$, un courant positif fermé de bidegré (1, 1) bien défini dans $P(V)$. De plus, d'après (1.2),

$$\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T \wedge \omega^{N-1} = \int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*(\omega^p_{|P(W)})$$

et d'après (1.6) le second membre est inférieur au degré de T. Autrement dit, le degré de $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ est toujours inférieur à celui de T. La formule

$$\int_{W\in G(p+2,V)} d\mu(W) \int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*(\omega^p_{|P(W)}) = \int_{P(V)} T \wedge \omega^p \tag{1.7}$$

qui est une conséquence de la formule de Fubini et de (1.3) implique alors que pour presque tout W il y a égalité.

Enfin, l'intégrale $\int_{W\in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T d\mu(W)$ est faiblement convergente. En effet, les courants $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ étant positifs, cela résulte du fait que la fonction qui à W associe $\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T \wedge \omega^{N-1}$ est, comme on vient de le voir, majorée. On note

$$T_1 = \int_{W\in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T d\mu(W).$$

Alors

(1.8) PROPOSITION. *T_1 est un courant positif fermé de bidegré (1, 1) dans $P(V)$ qui possède le même degré que T.*

2. – Conservation des nombres de Lelong

On note $\pi : V \dashrightarrow P(V)$ l'application canonique.

(2.1) LEMME.

(i) *Pour toute forme différentielle u de classe C^∞ à support compact dans V, l'image directe π_*u calculée par intégration le long des fibres de π existe et est une forme différentielle de classe C^∞ dans $P(V)$.*

(ii) *L'image inverse par π d'un courant S de $P(V)$ est définie dans V et est positive fermée si S l'est.*

DÉMONSTRATION. On considère le fibré $Y = \mathcal{O}_{P(V)}(-1) \xrightarrow{\tau} P(V)$ et l'application $\eta : Y \longrightarrow V$ qui est en fait l'éclatement de V en 0. η résout la singularité de π i.e. le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ V \arrow[r, dashed, "\pi"'] & P(V) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose alors $\pi_* u = \tau_* \eta^* u$ et $\pi^* S = \eta_* \tau^* S$. □

En fait en notant ℓ le degré de $\pi_* u$, on a la formule

$$(2.2) \qquad (\pi_* u)_{[z]}(\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell) = \int_{\mathbf{C}} u_{tz}(z, iz, t\zeta^1(z), \ldots, t\zeta^\ell(z))\ d\lambda(t)$$

pour $\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell$ dans $T_{[z]}P(V) = \mathrm{Hom}(\mathbf{C}z, V/\mathbf{C}z)$, λ désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}$.

(2.3) Proposition. *Les nombres de Lelong d'un courant positif fermé sont conservés par image réciproque par submersion.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une projection $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \longrightarrow \mathbf{C}^n$. L'image réciproque d'un courant de $\mathbf{C}^n$ est alors égale à son produit tensoriel avec le courant d'intégration sur $\mathbf{C}^m$ et on conclut grâce au fait suivant. □

(2.4) Lemme. *Si T et S sont des courants positifs fermés définis au voisinage de* 0 *respectivement dans $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^m$, on a l'égalité $\nu(T \otimes S, 0) = \nu(T, 0)\nu(S, 0)$.*

Démonstration. Appelons (p, p) et (q, q) les bidimensions respectives de T et S. Alors

$$\begin{aligned} \nu(T \otimes S, 0, r) = & \binom{p+q}{p} \left(\frac{1}{\pi^q r^{2q}}\right) \int_{|z|<r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right)^p \nu\left(T, 0, \sqrt{r^2 - |z|^2}\right) S(z) \\ & \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\right)^q \\ & \sim \nu(T, 0) \binom{p+q}{p} \left(\frac{1}{\pi^q r^{2q}}\right) \int_{|z|\le r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right)^p S(z) \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\right)^q. \end{aligned}$$

Notons τ la mesure trace de S et $\tau(r)$ la masse de τ sur la boule $\overline{B}(0, r)$. Pour toute fonction w de classe C^1 dans $\mathbf{R}^+$, on a

$$\int_{\overline{B}(0,r)} w(|z|)\ d\tau(z) = w(r)\tau(r) - \int_0^r w'(t)\tau(t)\ dt.$$

En effet, lorsque S est une forme différentielle continue, τ s'obtient à partir de la mesure de Lebesgue à l'aide d'une densité h et la relation

$$\tau(r) = \int_{\overline{B}(0,r)} h\ dV = \int_0^r \left(\int_{|z|=t} h(z)\ dA(z)\right)\ dt$$

implique que $\tau(r)$ est dérivable de dérivée égale à $\int_{|z|=r} h(z)\, dA(z)$. On a alors

$$\int_{\overline{B}(0,r)} w(|z|)\, d\tau(z) = \int_0^r w(t) \left(\int_{|z|=t} h(z)\, dA(z) \right) = \int_0^r w(t)\tau'(t)\, dt$$

puis l'égalité annoncée après une intégration par parties. Lorsque S est quelconque, on effectue une régularisation et on utilise le fait suivant.

(2.5) LEMME. *Soit ρ_ℓ une suite de mesures positives dans V convergeant faiblement vers une mesure ρ. Alors*

$$\int_{\overline{B}(0,r)} \rho = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{\ell} \int_{B(0,r+\varepsilon)} \rho_\ell = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{\ell} \int_{\overline{B}(0,r+\varepsilon)} \rho_\ell .$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte des inégalités

$$\int_{B(0,r)} \rho \leq \liminf_{\ell} \int_{B(0,r)} \rho_\ell \leq \limsup_{\ell} \int_{\overline{B}(0,r)} \rho_\ell \leq \int_{\overline{B}(0,r)} \rho . \qquad \square$$

Ainsi

$$\frac{1}{\pi^q r^{2q}} \int_{|z|\leq r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right)^p S(z) \wedge \left(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\right)^q = \int_0^1 2pt(1-t^2)^{p-1} \frac{\tau(rt)}{\frac{\pi^q}{q!} r^{2q}}\, dt$$

qui tend vers $\nu(S,0) \int_0^1 2pt^{2q+1}(1-t^2)^{p-1}\, dt$, la dernière intégrale valant $\frac{1}{\binom{p+q}{p}}$. $\square$

Les considérations suivantes vont permettre, T étant un courant positif fermé dans $P(V)$, d'exprimer le courant $\pi^*\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ à l'aide de π^*T. On note $\pi_W : W - \{0\} \longrightarrow P(W)$ l'application canonique et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, "\sigma_W"'] & P(V) \arrow[d, dashed, "\tilde{\sigma}_W"] \\ W \arrow[r, dashed, "\pi_W"] & P(W) . \end{tikzcd}$$

(2.6) LEMME. *Pour toute forme différentielle u de classe C^∞ à support compact dans W, l'image directe $\pi_*\sigma_W{}^*u$ calculée par intégration de $\sigma_W{}^*u$ le long des fibres de π existe dans $P(V) - P(W^\perp)$ et y est égale à $\tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u$.*

DÉMONSTRATION. Le support de $\sigma_W{}^*u$ est contenu dans $\operatorname{supp} u + W^\perp$. Puisque $\operatorname{supp} u$ est compact, pour z hors de $W^\perp$, l'ensemble des t tels que tz appartienne à $\operatorname{supp} u + W^\perp$ est borné. On peut alors calculer $(\pi_*\sigma_W{}^*u)_{[z]}$ à l'aide de la formule (2.2):

$$(\pi_*\sigma_W{}^*u)_{[z]}(\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell) = \int_{\mathbf{C}} u_{t\sigma_W(z)}\big(\sigma_W(z), i\sigma_W(z), t\sigma_W(\zeta^1(z)), \\ \ldots, t\sigma_W(\zeta^\ell(z))\big) d\lambda(t)$$

pour $\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell$ dans $T_{[z]}P(V)$. C'est la même chose que $(\tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u)_{[z]}(\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell)$. □

(2.7) PROPOSITION. *L'image directe $\sigma_{W*}\pi^*T$ existe pour tout $W \in G(p+2, V)$ et est égale à $\pi_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$.*

DÉMONSTRATION. Soit u une forme différentielle continue à support compact dans W. Il s'agit de voir que la mesure $\pi^*T \wedge \sigma_W{}^*u$ est de masse finie dans V. D'une part, d'après (2.6), on a

$$\begin{aligned}\int_{V-W^\perp} \pi^*T \wedge \sigma_W{}^*u &= \int_{P(V)-P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u \\ &= \int_{P(W)} \pi_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T \wedge u.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{W^\perp} \pi^*T \wedge \sigma_W{}^*u = \int_W \sigma_{W*}(\mathbb{1}_{W^\perp} \cdot \pi^*T) \wedge u = 0$$

par le résultat suivant (cf. [Fe], § 4.1.15). □

(2.8) LEMME. *Soit S un courant localement plat, Ψ et Ψ' deux applications de classe C^1 dont les restrictions au support de S sont égales à une même application propre. Alors les images directes Ψ_*S et Ψ'_*S sont égales.*

La Proposition (2.7) implique que pour tout W dans $G(p+2, V)$ on a la relation $\pi^*\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T = \sigma_W{}^*\sigma_{W*}\pi^*T$ et donc

$$\pi^*T_1 = \int_{W\in G(p+2,V)} \sigma_W{}^*\sigma_{W*}\pi^*T \; d\mu(W) \; . \tag{2.9}$$

On va maintenant calculer le nombre de Lelong de T_1 au point $[z_0]$ en utilisant la proposition (2.3):

$$\nu(T_1, [z_0]) = \nu(\pi^*T_1, z_0) = \lim_{r\to 0} \nu(\pi^*T_1, z_0, r)$$

où, en notant $\alpha = dd^c \log|z|$ l'image réciproque de ω dans V,

$$\begin{aligned}\nu(\pi^*T_1, z_0, r) &= \int_{B(0,r)} (\pi^*T_1)(z_0 + z) \wedge \alpha^N \\ &= \int_V (\pi^*T)(z_0 + z) \wedge \phi_r\end{aligned} \tag{2.10}$$

avec $\phi_r = \int_{W\in G(p+2,V)} \sigma_W{}^*\sigma_{W*}(\mathbb{1}_{B(0,r)} \cdot \alpha^N) \; d\mu(W)$.

Remarquons que la forme différentielle ϕ_r vérifie la relation $\phi_r = h_{r*}\phi_1$ en désignant par h_r l'homothétie de rapport r.

L'inégalité $\mathbb{1}_{B(0,r)} \cdot \alpha^N \leq \alpha^N$ et les lemmes (1.2) et (1.3) impliquent par ailleurs $\phi_r \leq \alpha^{p+1}$.

Ceci assure que l'intégrale (2.10) converge a *priori*. En effet

$$\int_{B(0,R)} (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1} = \frac{1}{R^{2p+2}} \int_{B(z_0,R)} \pi^* T \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c |z|^2\right)^{p+1}$$

et la seconde intégrale est majorée par la masse de $\pi^* T \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c |z|^2\right)^{p+1}$ sur $B(0, R + |z_0|)$ qui, à cause de l'invariance de $\pi^* T$ par homothétie, est proportionnelle à $(R + |z_0|)^{2p+2}$.

Maintenant, ϕ_1 étant une forme positive invariante par l'action du groupe unitaire s'écrit $f(|z|)\alpha^{p+1} + g(|z|)\alpha^p \wedge d \log |z| \wedge d^c \log |z|$ avec des fonctions f et g positives dans $\mathbf{R}_+^*$. La croissance de ϕ_r par rapport à r implique la décroissance de f et g. Le fait que $\lim_{r \to \infty} \phi_r = \alpha^{p+1}$ implique $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$. En particulier g est nulle et donc

$$\nu(\pi^* T_1, z_0, r) = \int_V f\left(\frac{|z|}{r}\right) (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1}.$$

La forme α^N étant à coefficients localement intégrables, on a $\lim_{r \to 0} \phi_r = 0$ et donc $f(\infty) = 0$. Grâce au théorème de convergence monotone on obtient finalement

$$\nu(\pi^* T_1, z_0) = \int_{\{0\}} (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1} = \nu(\pi^* T, z_0).$$

3. – Inégalités d'auto-intersection

On va maintenant utiliser le courant construit précédemment pour établir le résultat suivant:

(3.1) Proposition. *Étant donné T un courant positif fermé de bidimension (p, p) dans $P(V)$ on a, avec les notations de l'Introduction, l'inégalité suivante pour $q \leq p$*

$$\sum_{k \geq 1} (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q) \delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{p+1-q}.$$

Démonstration. On écrit $T_1 = \delta(T)\omega + dd^c U$ où U est une fonction dans $P(V)$. Le théorème d'atténuation des singularités des fonctions presque plurisousharmoniques (cf. [D1] et [D3]) donne l'existence pour tout $c > 0$ d'une suite décroissante $(U_{c,\ell})_{\ell \geq 1}$ de fonctions convergeant vers U telles que

(i) $U_{c,\ell}$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V) - E_c$;

(ii) $dd^c U_{c,\ell} + (\delta(T) + \delta_\ell)\omega \geq 0$ où δ_ℓ est une suite décroissante de constantes positives convergeant vers 0;
(iii) en tout point $[z]$ de $P(V)$, $\nu(U_{c,\ell}, [z]) = (\nu(T, [z]) - c)_+$.

Pour $c_j > b_j$ l'ensemble des points au voisinage desquels $U_{c_j,\ell}$ n'est pas minorée est contenu dans E_{c_j} qui est de dimension inférieure ou égale à j.

Le courant $T \wedge \left(dd^c U_{c_{p-1},\ell} + (\delta(T)+\delta_\ell)\omega\right) \wedge \cdots \wedge \left(dd^c U_{c_q,\ell} + (\delta(T)+\delta_\ell)\omega\right)$ est alors bien défini d'après la théorie des opérateurs de Monge-Ampère et son nombre de Lelong en un point $[z]$ est supérieur à $\nu(T, [z])\big(\nu(T, [z]) - c_{p-1}\big)_+ \cdots \big(\nu(T, [z]) - c_q\big)_+$. La formule de Siu implique que ce courant est supérieur à $\sum_k \nu_{q,k}(\nu_{q,k} - c_{p-1})_+ \cdots (\nu_{q,k} - c_q)_+ [Z_{q,k}]$.

En comparant les degrés, on obtient

$$\sum_k \nu_{q,k}(\nu_{q,k} - c_{p-1})_+ \cdots (\nu_{q,k} - c_q)_+ \delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)(\delta(T) + \delta_\ell)^{p-q}$$

puis l'inégalité annoncée par passages à la limite. □

Le résultat précédent souffre de la critique suivante:

L'inégalité (3.1) fournit certes une borne pour $\sum_k (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k})$. Cependant celle-ci doit pouvoir être améliorée au moins dans le cas où T est le courant associé à un sous-ensemble algébrique. Par exemple, pour une courbe irréductible de $\mathbf{P}_2$ de degré d et de genre g, l'inégalité (3.1) s'écrit $\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \leq d^2$, les ν_k étant les multiplicités des points singuliers, alors qu'on a en fait l'inégalité $\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \leq (d-1)(d-2) - 2g$. Pour un sous-ensemble algébrique A de dimension quelconque dans $\mathbf{P}_n$ une borne analogue pour $\sum_k (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k})$ faisant intervenir la topologie de A serait intéressante.

(3.2) Corollaire. *Soit X une variété projective de dimension n et ω une métrique kaehlerienne sur X dont la classe de cohomologie est entière. Il existe une constante C ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1} \cdot c_1(X)$ telle que pour tout courant positif fermé T de bidimension (p, p) dans X on a l'inégalité suivante pour $q \leq p$*

$$\sum_{k \geq 1} (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq C\delta(T)^{p+1-q}$$

en désignant par $\delta(\cdot)$ les degrés calculés par rapport à ω.

Démonstration. Puisque $\{\omega\}$ est entière, c'est la première classe de Chern d'un fibré en droites ample L. Il existe un entier m ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1} \cdot c_1(X)$ tel que mL soit très ample (cf. [Ko-M]; une valeur explicite de m est obtenue dans [Siu2]). On applique alors l'inégalité (3.1) à l'image directe de T par le plongement dans l'espace projectif défini par les sections de ce fibré et on obtient

$$\sum_k (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq m^{(p+1)(p-q)}\delta(T)^{p+1-q}\ . \qquad \square$$

Dans l'inégalité précédente, la présence d'une constante dépendant notamment de $\{\omega\}^{n-1}\cdot c_1(X)$ est naturelle comme le montre déjà le cas où X est une surface et T le courant associé à une courbe irréductible A: on a alors

$$\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \leq \{A\}^2 - c_1(X)\cdot\{A\} + 2 - 2g \ .$$

4. – Calcul du potentiel

Dans ce paragraphe, on établit d'abord la relation entre T_1 et le potentiel de Skoda associé dans V à π^*T. On calcule ensuite en des termes intrinsèques à l'espace projectif le noyau de l'opérateur intégral $T \longrightarrow T_1$ et on obtient en particulier sa singularité. On propose aussi une méthode géométrique intrinsèque qui amène à envisager ce calcul comme un corollaire de la formule de King (cf. appendice).

(4.1) LEMME. *Soit X une variété complexe, pr_1 et pr_2 les projections de $X \times X$ sur X et Δ_X la diagonale de $X \times X$. Pour tout courant S dans X, le produit ${\mathrm{pr}_2}^*S \wedge [\Delta_X]$ est bien défini et on a l'égalité $S = \mathrm{pr}_{1\,*}({\mathrm{pr}_2}^*S \wedge [\Delta_X])$.*

DÉMONSTRATION. On note $i : X \longrightarrow X \times X$ l'injection définie par $i(x) = (x, x)$. Alors $[\Delta_X] = i_*1$ et ${\mathrm{pr}_2}^*S \wedge [\Delta_X] = i_*S$. □

T désignant un courant positif fermé de bidimension (p, p) dans $P(V)$, la relation (2.9) entraîne que π^*T_1 s'obtient à partir de π^*T à l'aide de la formule

$$(\pi^*T_1)(z) = \int_V (\pi^*T)(x) \wedge K(z, x)$$

où

$$\begin{aligned} K &= \int_{W\in G(p+2,V)} (\sigma_W \times \sigma_W)^*[\Delta_W]\ d\mu(W) \\ &= \int_{W\in G(p+2,V)} \left(dd^c \log|\sigma_W(z) - \sigma_W(x)|\right)^{p+2}\ d\mu(W) \\ &= \left(dd^c \log|z - x|\right)^{p+2} \end{aligned}$$

grâce au lemme (1.3).

Écrivant de plus que

$$\left(dd^c \log|z - x|\right)^{p+2} = dd^c\left(-C\frac{(dd^c|z-x|^2)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}}\right) \quad \text{avec } C = \frac{1}{(p+1)2^{p+2}}$$

on obtient l'expression

$$(\pi^*T_1)(z) = dd^c\left(-C\int_V \left\{\frac{1}{|z-x|^{2p+2}} - \frac{1}{(1+|x|^2)^{p+1}}\right\}(\pi^*T)(x)\wedge\left(dd^c|x|^2\right)^{p+1}\right).$$

On va maintenant exprimer T_1 à partir de T. La formule précédente peut s'écrire

$$(\pi^* T_1)(z) = \lim_{r\to\infty} dd^c\left(-C\int_{|x|<r}(\pi^* T)(x)\wedge\frac{\left(dd^c|x|^2\right)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}}\right) \tag{4.2}$$

et il s'agit de calculer l'image directe $\pi_*\left(C\frac{\mathbb{1}_{B(0,r)}(x)\left(dd^c|x|^2\right)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}}\right)$. Par la formule (2.2), sa valeur au point $[x]$ est

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<r}\frac{|t|^{2p}}{|z-t\frac{x}{|x|}|^{2p+2}}d\lambda(t)\right)\omega^p([x]).$$

Mais

$$\begin{aligned}|z-t\frac{x}{|x|}|^2 &= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\langle z|x\rangle}{|x|}\bar{t}\right)+|t|^2\\ &= |z|^2\left(1-\frac{|\langle z|x\rangle|^2}{|z|^2|x|^2}+\left|\frac{\langle z|x\rangle}{|z||x|}-\frac{t}{|z|}\right|^2\right)\end{aligned}$$

et l'intégrale ci-dessus s'écrit donc, en notant $a=\frac{|\langle z|x\rangle|}{|z||x|}$,

$$\int_{B(0,r)}\frac{|t|^{2p}}{|z|^{2p+2}\left(1-a^2+|a-\frac{t}{|z|}|^2\right)^{p+1}}d\lambda(t)$$

puis après le changement de variables $t'=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(a-\frac{t}{|z|})$

$$\int_{B\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}}\right)}\frac{|a-t'\sqrt{1-a^2}|^{2p}}{(1-a^2)^p(1+|t'|^2)^{p+1}}d\lambda(t').$$

Compte-tenu du fait que lorsque $r\to\infty$

$$\int_{B\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}}\right)}\frac{d\lambda(t')}{1+|t'|^2} = 2\pi\log\frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}}+o(1)$$

on obtient $T_1=\delta(T)\omega+dd^cU$ avec

$$U([z])=\int_{P(V)}\mathcal{K}([z],[x])(T\wedge\omega^p)([x])$$

et

$$\mathcal{K}([z],[x])=\log\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}}\left\{\frac{|a-t'\sqrt{1-a^2}|^{2p}}{(1-a^2)^p(1+|t'|^2)^{p+1}}-\frac{1}{1+|t'|^2}\right\}d\lambda(t').$$

Ce noyau est singulier lorsque $a = 1$ c'est-à-dire le long de la diagonale de $P(V) \times P(V)$ et il a pour partie principale lorsque $a \to 1$

$$\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{(1+|t'|^2)^{p+1}} d\lambda(t')\right) \frac{1}{(1-a^2)^p} = -\frac{1}{2p(1-a^2)^p}$$

dont la singularité est précisément celle du noyau définissant les potentiels de Skoda associés dans les cartes de $P(V)$. Pour déterminer l'expression de T_1 en fonction de T on peut aussi appliquer le lemme (4.1) directement dans $P(V)$. On trouve que

$$T_1([z]) = \int_{P(V)} \widetilde{K}([z],[x]) \wedge T([x])$$

avec

$$\widetilde{K} = \int_{W \in G(p+2,V)} (\tilde{\sigma}_W \times \tilde{\sigma}_W)^*[\Delta_{P(W)}]\ d\mu(W)\ . \tag{4.3}$$

Se pose alors la question d'exprimer le courant $[\Delta_{P(W)}]$. Pour cela on considère, au-dessus de $P(W) \times P(W)$, le fibré vectoriel $E = \mathrm{pr}_1{}^*\mathcal{O}_{P(W)}(1) \otimes \mathrm{pr}_2{}^*F$ avec F le fibré quotient $W/\mathcal{O}_{P(W)}(-1)$. La fibre de E au-dessus de $([z],[x])$ est $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}z, W/\mathbf{C}x)$ et $\Delta_{P(W)}$ s'interprète comme l'ensemble des zéros de la section s de E définie par $s([z],[x]) : z \longrightarrow z \bmod \mathbf{C}x$. On munit E de la métrique induite par le produit scalaire induit sur W et on a alors $|s| = \frac{|z \wedge x|}{|z||x|} = \sqrt{1-a^2}$.

Afin d'appliquer les résultats rappelés dans l'appendice, on calcule maintenant la forme de Chern de degré maximal de ce fibré hermitien. On écrit pour cela

$$c_{p+1}(\Theta) = \sum_{j=0}^{p+1} c_1(\mathrm{pr}_1{}^*\Theta_{\mathcal{O}(1)})^j \wedge c_{p+1-j}(\mathrm{pr}_2{}^*\Theta_F).$$

Puis, grâce à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow W \longrightarrow F \longrightarrow 0$, on a l'égalité entre formes de Chern totales

$$c(\Theta_F) = c\big(\Theta_{\mathcal{O}(1)}\big)^{-1} = \big(1 - c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)})\big)^{-1}$$

qui fournit $c_{p+1-j}(\Theta_F) = c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)})^{p+1-j}$ puis, comme $c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)}) = \omega_{|P(W)}$,

$$c_{p+1}(\Theta) = \sum_{j=0}^{p+1} \mathrm{pr}_1{}^*\big(\omega^j_{|P(W)}\big) \wedge \mathrm{pr}_2{}^*\big(\omega^{p+1-j}_{|P(W)}\big).$$

Grâce à la proposition (5.10), on peut alors écrire

$$[\Delta_{P(W)}] = \sum_{j=0}^{p+1} \mathrm{pr}_1{}^*\big(\omega^j_{|P(W)}\big) \wedge \mathrm{pr}_2{}^*\big(\omega^{p+1-j}_{|P(W)}\big) + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1} + dd^c\psi'$$

avec une forme différentielle ψ' à coefficients $O\Big(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\Big)$.

Il resterait pour obtenir $\widetilde{K}$ à faire la moyenne par rapport à $W \in G(p+2, V)$ de l'image réciproque dans $P(V) \times P(V)$ des différents termes du second membre de l'égalité précédente. On ne l'a pas fait mais tout laisse penser que ce noyau peut s'écrire comme la somme du courant $\sum_{j=0}^{p+1} \mathrm{pr}_1{}^*\omega^j \wedge \mathrm{pr}_2{}^*\omega^{p+1-j} + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1}$ et d'un terme qui est le dd^c d'une forme à coefficients $O\Big(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\Big)$.

5. – Appendice: formes d'Euler-Green

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au-dessus d'une variété complexe X et s une section holomorphe de E transverse à la section nulle. L'ensemble Z des zéros de s est une sous-variété lisse de X de codimension r dont la classe de cohomologie est la $r^{\text{ème}}$ classe de Chern —aussi appelée classe d'Euler— de E. On munit E d'une métrique hermitienne et on va expliciter une forme différentielle ψ à coefficients localement intégrables dans X, $\mathcal{C}^\infty$ dans $X - Z$ telle que

$$[Z] = c_r(\Theta) + dd^c\psi \tag{5.1}$$

où Θ désigne la forme de courbure de la connexion de Chern de E et $c_r(\Theta)$ sa $r^{\text{ème}}$ forme de Chern.

a. Formule de King

Lorsque E est de rang 1, la formule de Poincaré-Lelong dit précisément que $\psi = \log|s|$ satisfait l'équation (5.1). Le cas général s'y ramène en éclatant X le long de Z.

Soit $\pi : P(E) \longrightarrow X$ le fibré des droites de E, $\widetilde{X} = \{a \in P(E),\ a \ni s(\pi(a))\}$, $\eta : \widetilde{X} \longrightarrow X$ la restriction de π et $H = \eta^{-1}(Z)$. L'application η réalise bien l'éclatement: elle induit un biholomorphisme de $\widetilde{X} - H$ sur $X - Z$ et H étant le fibré des droites de $E_{|Z}$ est isomorphe au fibré normal à Z dans X à cause de la suite exacte $0 \longrightarrow TZ \longrightarrow TX \xrightarrow{ds} E \longrightarrow 0$. Soit L_E le fibré en droites tautologique sur $P(E)$ muni de la métrique induite par celle de E, L sa restriction à $\widetilde{X}$ et ξ la première forme de Chern de L. Puisque $L_{E|P(E_x)} = \mathcal{O}_{P(E_x)}(-1)$ on a $(\eta_{|H})_*\big((-\xi)^{r-1}_{|H}\big) = 1$ et donc $[Z] = \eta_*\big((-\xi)^{r-1} \wedge [H]\big)$. Mais H est précisément le diviseur des zéros de la section de L induite par s donc $[H] = dd^c \log|\eta^* s| + \xi$ puis

$$[Z] = dd^c \eta_*\big((-\xi)^{r-1} \log|\eta^* s|\big) - \eta_*\big((-\xi)^r\big).$$

Or l'image directe par η de $(-\xi)^{r-1} \log|\eta^* s|$ (respectivement de $(-\xi)^r$) est une forme à coefficients localement intégrables dans X, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X - Z$ où elle est égale à $\left(dd^c \log|s|\right)^{r-1} \log|s|$ (respectivement à $\left(dd^c \log|s|\right)^r$). Ainsi

$$[Z] = dd^c \left\{ \left(\left(dd^c \log|s|\right)^{r-1} \log|s| \right)_{|X-Z} \right\} - \left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z}$$

ou encore

$$[Z] = \left(dd^c \log|s|\right)^r - \left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z}. \tag{5.2}$$

On va maintenant exprimer $\left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z}$ en suivant une méthode élémentaire classique (cf. [Bot-C1], [Bot-C2]).

b. Rappels sur les classes de Chern d'une suite exacte

On considère une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes $0 \longrightarrow S \xrightarrow{j} E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$. La métrique sur E induit des métriques sur S et Q et on note D, D_S et D_Q les connexions de Chern. $j^* \oplus g$ est un isomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de E sur $S \oplus Q$ et permet de définir une connexion hermitienne D_0 sur E comme image réciproque de $D_S \oplus D_Q$. On note Θ_0 la forme de courbure de D_0. Alors

(5.3) Proposition. *Soit P un polynôme sur $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$ de degré k invariant par conjugaison intérieure. On a $P(\Theta) - P(\Theta_0) = -d'd''\varphi$ où*

$$\varphi = \int_0^1 \frac{2k}{t} \left\{ P\left(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\right) - P\left(\sigma, \Theta_0, \ldots, \Theta_0\right) \right\} dt$$

avec $\sigma = jj^*$ la projection orthogonale sur S et Θ_t la forme de courbure de $D_t = (1-t)D_0 + tD$.

Démonstration. On écrit tout d'abord $P(\Theta) - P(\Theta_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t)\, dt$ puis

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t) = kP\left(\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\right).$$

Soit $\Gamma = D - D_0 \in \mathcal{C}^\infty_1(X, \mathrm{Hom}(E,E))$ de sorte que $D_t = D_0 + t\Gamma$ et

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} D_t\right) \circ D_t + D_t \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} D_t\right) = \Gamma \circ D_t + D_t \circ \Gamma = D_t\Gamma.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t) &= kP(D_t\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \\ &= kdP(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \end{aligned}$$

compte-tenu de la relation de Bianchi $D_t\Theta_t = 0$ puis

$$P(\Theta) - P(\Theta_0) = d\left(\int_0^1 kP\left(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\right)\, dt\right). \tag{5.4}$$

Il s'agit maintenant d'expliciter Γ. Pour cela on écrit, v étant une section locale $\mathcal{C}^\infty$ de E,

$$\begin{aligned} D_0 v &= jD_S(j^* v) + g^* D_Q(gv) \\ &= j\{j^* Dv + Dj^* \otimes v\} + g^*\{gDv + Dg \otimes v\} \end{aligned}$$

où on note encore par D les connexions de Chern induites sur $\mathrm{Hom}(E, S)$ et $\mathrm{Hom}(E, Q)$. Ceci fait apparaître $\Gamma = -(jDj^* + g^* Dg)$. De plus, le fait que j et g soient holomorphes s'écrit $d''j = 0$ et $d''g = 0$ ou en prenant les adjoints $D'j^* = 0$ et $D'g^* = 0$. Ainsi $\Gamma = -(jd''j^* + g^* D'g) = -(d''(jj^*) + D'(g^* g))$ puis, compte-tenu du fait que $g^* g = \mathrm{id}_E - jj^*$, il vient

$$\Gamma = -d''\sigma + D'\sigma. \tag{5.5}$$

Les relations (5.4) et (5.5) suggèrent maintenant de considérer

$$dP(\sigma, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = P(D\sigma, \Theta_t, \dots, \Theta_t) + (k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t).$$

On va exprimer différemment le second terme. Le fait que $D = D_t + (1-t)\Gamma$ et la relation de Bianchi appliquée à Θ_t impliquent $D\Theta_t = (1-t)[\Gamma, \Theta_t]$ puis

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = (k-1)(1-t)P\big(\sigma, [\Gamma, \Theta_t], \Theta_t, \dots, \Theta_t\big).$$

L'invariance de P par conjugaison intérieure entraîne après dérivation la relation

$$\sum_j P(A_1, \dots, [B, A_j], \dots, A_k) = 0$$

pour $A_1, \dots, A_k$, B dans $M_r(\mathbf{C})$. Lorsque $A_1, \dots, A_k$, B sont des matrices $r \times r$ de formes de degrés respectifs $p_1, \dots, p_k$, q, on en déduit que

$$\sum_j (-1)^{q(p_1 + \cdots + p_{j-1})} P(A_1, \dots, [B, A_j], \dots, A_k) = 0.$$

Appliquant cette dernière relation, on obtient

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = (t-1)P\big([\Gamma, \sigma], \Theta_t, \dots, \Theta_t\big).$$

Or $[\Gamma, \sigma] = [D - D_0, \sigma] = (D - D_0)\sigma$ et $D_0\sigma = 0$ donc

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = (t-1)P(D\sigma, \Theta_t, \dots, \Theta_t)$$

puis

$$dP(\sigma, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = tP(D\sigma, \Theta_t, \dots, \Theta_t). \tag{5.6}$$

Pour identifier les composantes de bidegrés $(k, k-1)$ et $(k-1, k)$ des deux membres de cette dernière égalité, il faut vérifier que Θ_t est de bidegré $(1, 1)$. En effet

$$\Theta_t = D_t^2 = (D-(1-t)\Gamma)^2 = \Theta - (1-t)D\Gamma + (1-t)^2\Gamma^2.$$

Ensuite (5.5) permet d'écrire que

$$D\Gamma = -D'd''\sigma + d''D'\sigma \tag{5.7}$$

et

$$\Gamma^2 = -d''\sigma D'\sigma - D'\sigma d''\sigma \tag{5.8}$$

car $d''\sigma d''\sigma = \{(-d''g^*)g\}(jd''j^*) = 0$ en vertu de $gj = 0$ et par conséquent $D'\sigma D'\sigma = (d''\sigma d''\sigma)^* = 0$ aussi.

La relation (5.6) s'écrit donc

$$\begin{cases} d'P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(D'\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \\ d''P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(d''\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \end{cases}$$

et fournit $(d' - d'')P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t)$.

Comme $d(d' - d'') = -2d'd''$ et $P(\sigma, \Theta_0, \ldots, \Theta_0)$ est fermée, on a bien la formule annoncée. □

Pour exploiter cette formule dans le cas des classes de Chern, on utilise les notations suivantes: $\mathrm{Hom}(E, E) = E \otimes E^*$ s'injecte dans l'algèbre extérieure $\bigwedge(E \oplus E^*)$ et la forme de Chern totale de Θ s'écrit alors $c(\Theta) = (I + \widetilde{\Theta})^r$ en identifiant $\bigwedge^r E \otimes \bigwedge^r E^*$ avec $\mathbf{C}$ à l'aide de I^r et en notant par ailleurs $\sim$ la multiplication par $\frac{i}{2\pi}$. Ainsi $c_k(\Theta) = \binom{r}{k} I^{r-k}\widetilde{\Theta}^k$ puis $c_k(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = \binom{r}{k}\tilde{\sigma} I^{r-k}\widetilde{\Theta}_t^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^r kc_k(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = r\tilde{\sigma}(I+\widetilde{\Theta}_t)^{r-1}$ de sorte que $c(\Theta) - c(\Theta_0) = -dd^c\varphi$ avec

$$\varphi = r\sigma \int_0^1 \{(I + \widetilde{\Theta}_t)^{r-1} - (I + \widetilde{\Theta}_0)^{r-1}\}\frac{dt}{t}.$$

c. Cas d'un sous-fibré de rang 1

Supposons S de rang 1 et soit v une section holomorphe locale de S, $v^* \in E^*$ l'adjoint, de sorte que $\sigma = \frac{vv^*}{|v|^2}$. On note $\alpha = \frac{DvDv^*}{|v|^2}$ et on va exprimer, en utilisant (5.7) et (5.8), les quantités $\sigma D\Gamma$ et $\sigma\Gamma^2$ l'aide de $\sigma\alpha$. On a d'abord

$$\begin{aligned} D'\sigma &= \frac{(D'v)v^*}{|v|^2} + \frac{vD'v^*}{|v|^2} + vv^*d'\frac{1}{|v|^2} \\ &= \frac{(Dv)v^*}{|v|^2} + vv^*d'\frac{1}{|v|^2} \end{aligned}$$

car $d''v = 0$ et $D'v^* = (d''v)^* = 0$;

$$d''\sigma = \frac{vd''v^*}{|v|^2} + vv^*d''\frac{1}{|v|^2} = \frac{vDv^*}{|v|^2} + vv^*d''\frac{1}{|v|^2}.$$

Ensuite

$$D'd''\sigma = \alpha + \text{ termes contenant } v \text{ ou } v^*,$$
$$d''D'\sigma = -\alpha + \text{ termes contenant } v \text{ ou } v^*,$$

et considérant les produits avec σ on obtient $\sigma D\Gamma = -2\sigma\alpha$.

De même, $d''\sigma D'\sigma$ est une somme de termes contenant tous v ou v^* et

$$D'\sigma d''\sigma = \alpha + \text{ termes contenant } v \text{ ou } v^*$$

de sorte que $\sigma\Gamma^2 = -\sigma\alpha$.

Tout ceci permet finalement d'écrire, j étant un entier,

$$\sigma\Theta_t^j = \sigma\big(\Theta + 2(1-t)\alpha - (1-t)^2\alpha\big)^j = \sigma\big(\Theta + (1-t^2)\alpha\big)^j$$

puis

$$\varphi = r\sigma\int_0^1 \big\{\big(I + \widetilde{\Theta} + (1-t^2)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-1}\big\}\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{r}{2}\sigma\int_0^1 \big\{\big(I + \widetilde{\Theta} + (1-t)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-1}\big\}\frac{dt}{t}\ .$$

Écrivant

$$\big(I + \widetilde{\Theta} + (1-t)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-1}$$
$$= -t\tilde{\alpha}\sum_{j=1}^{r-1}\big(I + \widetilde{\Theta} + (1-t)\tilde{\alpha}\big)^{j-1}(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-j-1}$$

et intégrant il vient

$$\varphi = \frac{r}{2}\sigma\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\big\{(I + \widetilde{\Theta})^j - (I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^j\big\}(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-j-1}$$
$$= \frac{r}{2}\sigma\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}(I + \widetilde{\Theta})^j(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-j-1} - \frac{r}{2}\left(\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\right)\sigma(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-1}\ .$$

Pour j compris entre 0 et $r-1$, les formes $\sigma I^j(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-j-1} = \sigma I^j(I + \widetilde{\Theta}_0)^{r-j-1}$ sont fermées d'après (5.6) et on peut donc prendre

$$\varphi = \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\sigma\big\{(I + \widetilde{\Theta})^j - I^j\big\}(I + \widetilde{\Theta} + \tilde{\alpha})^{r-j-1}. \tag{5.9}$$

Le fait d'avoir retranché I^j dans le crochet permettra d'assurer par la suite que les singularités des composantes bihomogènes de φ sont convenablement dominées.

d. Application

Tout ceci permet maintenant d'exprimer $\left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z}$ en considérant au-dessus de $X - Z$ le sous-fibré en droites de E engendré par s et la suite exacte $0 \to \mathbf{C}s \to E \to Q \to 0$ avec $Q = E/\mathbf{C}s$. On a alors $c(\Theta_0) = c(\Theta_{\mathbf{C}s})c(\Theta_Q)$ puis, avec φ donnée par (5.9), $c(\Theta) - c(\Theta_{\mathbf{C}s})c(\Theta_Q) = -dd^c\varphi$ qui s'écrit aussi $c(\Theta_Q) = c(\Theta_{\mathbf{C}s})^{-1}c(\Theta) + dd^c\left(c(\Theta_{\mathbf{C}s})^{-1}\varphi\right)$. On exprime alors le fait que $c_r(\Theta_Q) = 0$. Comme $c(\Theta_{\mathbf{C}s}) = 1 - dd^c \log|s|$ et donc $c(\Theta_{\mathbf{C}s})^{-1} = \sum_{k\geq 0}\left(dd^c \log|s|\right)^k$ il vient dans $X - Z$

$$0 = \sum_{k=0}^{r} \left(dd^c \log|s|\right)^k \wedge c_{r-k}(\Theta) + dd^c\psi$$

avec $\psi = \sum_{k=0}^{r-1}\left(dd^c \log|s|\right)^k \wedge \varphi_{r-k-1}$ et φ_{r-k-1} la composante de bidegré $(r-k-1,\ r-k-1)$ de φ.

Or φ est une combinaison linéaire des $\sigma I^{j-\ell}\widetilde{\Theta}^{\ell} I^{r-j-1-\ell'-\ell''}\widetilde{\Theta}^{\ell'}\tilde{\alpha}^{\ell''}$ avec $\ell \geq 1$ dont le degré est $2(\ell + \ell' + \ell'')$ et dont la singularité est dominée par $\frac{1}{|s|^{2\ell''}}$. Ainsi la singularité de φ_{r-k-1} est dominée par $\frac{1}{|s|^{2(r-k-2)}}$ et donc celle de ψ l'est par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$. On peut alors écrire dans X

$$-\left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z} = c_r(\Theta) + \sum_{k=1}^{r-1} \left(dd^c \log|s|\right)^k \wedge c_{r-k}(\Theta) + dd^c\psi.$$

Puis, comme

$$\left(dd^c \log|s|\right)^k = dd^c \left\{ \frac{1}{2(k-1)} \left(\frac{dd^c|s|^2}{2|s|^2} \right)^{k-1} \right\}$$

pour $k \geq 2$, on a

$$-\left(dd^c \log|s|\right)^r_{|X-Z} = c_r(\Theta) + dd^c\psi'$$

avec

$$\psi' = (\log|s|)c_{r-1}(\Theta) + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{1}{2(k-1)} \left(\frac{dd^c|s|^2}{2|s|^2} \right)^{k-1} \wedge c_{r-k}(\Theta) + \psi\ ,$$

qui est à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$.

En combinant avec (5.2) on obtient la conclusion suivante:

(5.10) PROPOSITION. *Il existe une forme différentielle ψ' à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$ telle que*

$$[Z] = c_r(\Theta) + \big(dd^c \log |s|\big)^r + dd^c\psi'.$$

Signalons qu'un calcul explicite des formes d'Euler-Green a déjà été effectué dans [Bi-G-So], [Bos-G-So], [G-So].

REFERENCES

[Bi-G-So] J.-M. BISMUT – H. GILLET – C. SOULÉ, *Complex immersions and Arakelov geometry*, dans: "The Grothendieck Festschrift", Volume I, Progress in Mathematics 86, Birkhäuser, 1990, pp. 249-331.

[Bos-G-So] J.-B. BOST – H. GILLET – C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903-1027.

[Bot-C1] R. BOTT – S.-S. CHERN, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. **114** (1965), 71-112.

[Bot-C2] R. BOTT – S.-S. CHERN, *Some formulas related to complex transgression*, dans: "Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à G. de Rham", Springer Verlag, 1970, pp. 48-57.

[D1] J.-P. DEMAILLY, *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geometry **1** (1992), 361-409.

[D2] J.-P. DEMAILLY, *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*, dans: "Complex analysis and geometry", The University Series in Mathematics, Plenum Press, 1993, pp. 115-193.

[D3] J.-P. DEMAILLY, *Regularization of closed positive currents of type* (1, 1) *by the flow of a Chern connection*, dans: "Contributions to complex analysis and analytic geometry dedicated to P. Dolbeault", Aspects of Mathematics E 26, Vieweg, 1994, pp. 105-126.

[E] H. EL MIR, *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. **153** (1984), 1-45.

[Fe] H. FEDERER, "Geometric measure theory", Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 153, Springer Verlag, 1969.

[Fo-Sib] J. E. FORNAESS – N. SIBONY, *Oka's inequality for currents and applications*, Math. Ann. **301** (1995), 399-419.

[G-So] H. GILLET – C. SOULÉ, *Arithmetic intersection theory*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **72** (1990), 94-171.

[Ki] J. R. KING, *A residue formula for complex subvarieties*, dans: "Proceedings of the Carolina conference on holomorphic mappings and minimal surfaces", University of North Carolina, Chapel Hill, 1970, pp. 43-56.

[Ko-M] J. KOLLÁR – T. MATSUSAKA, *Riemann-Roch type inequalities*, Amer. J. Math. **105** (1983), 229-252.

[L] P. LELONG, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, "Séminaire de Mathématiques Supérieures", 6ème session, été 1967, Presses Universitaires de Montréal, 1968.

[Sib] N. SIBONY, *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J. **52** (1985), 157-197.

[Siu1] Y.-T. SIU, *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53-156.

[Siu2] Y.-T. SIU, *An effective Matsusaka big theorem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (1993), 1387-1405.

[Sk1] H. SKODA, *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbf{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353-408.

[Sk2] H. SKODA, *Prolongement des courants positifs fermés de masse finie*, Invent. Math. **66** (1982), 361-376.

Université d'Angers
Département de mathématiques
2, boulevard Lavoisier
49045 ANGERS Cedex 01, France
meo@tonton.univ-angers.fr