O. DEBARRE

Inégalités numériques pour les surfaces de type général. Appendice : « L'inégalité $p_g \geq 2q - 4$ pour les surfaces de type général » par A. Beauville

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 319-346
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__319_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 319-346.

INÉGALITÉS NUMÉRIQUES POUR LES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

PAR

O. DEBARRE (*)

APPENDICE

L'INÉGALITÉ $p_g \geqslant 2q-4$ POUR LES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

PAR

A. BEAUVILLE (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est d'améliorer la classique inégalité de Noether : $K^2 \geqslant 2p_g - 4$, valable pour les surfaces algébriques complexes minimales de type général, en faisant intervenir l'irrégularité de la surface. On montre les inégalités suivantes :

★ $K^2 \geqslant 2p_g + 2(q-4)$, l'égalité n'ayant lieu que pour le produit de deux courbes de genre 2.

★ $K^2 \geqslant 2p_g$, si la surface est irrégulière.

Pour ce faire, nous montrons successivement les inégalités $K^2 \geqslant 3p_g - 2q + 9$, si le système canonique est composé d'un pinceau; $K^2 \geqslant 3p_g + q - 7$, si l'application canonique est birationnelle (ce résultat a été montré en 1947 par F. JONGMANS); $K^2 \geqslant 2p_g + 4(q-4)$, si l'application canonique est de degré 2, avec égalité uniquement pour le produit de deux courbes de genres respectifs 2 et au moins 2; $K^2 \geqslant 3p_g - 4$, si l'application canonique est de degré 3 et si la surface est irrégulière. Enfin, un appendice rédigé par A. BEAUVILLE est consacré a la démonstration de l'inégalité $p_g \geqslant 2q-4$. Les deux inégalités annoncées sont conséquence directe de ces résultats.

(*) Texte reçu le 29 octobre 1981, révisé le 8 mars 1982.

O. DEBARRE, Harvard University, Department of Mathematics, Cambridge, Massachusetts 02138 (U.S.A.).

A. BEAUVILLE, École Polytechnique, centre de Mathématiques, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/319/$ 5.00

ABSTRACT. — The aim of this article is to improve Noether's classical inequality: $K^2 \geqslant 2p_g - 4$, for minimal complex algebraic surfaces of general type, by using the irregularity of the surface. We show the following inequalities:

★ $K^2 \geqslant 2p_g + (q-4)$, with equality only for the product of two curves of genus 2.

★ $K^2 \geqslant 2p_g$, if the surface is irregular.

They are derived from the following inequalities: $K^2 \geqslant 3p_g - 2q + 9$, if the canonical system is composed of a pencil; $K^2 \geq 3p_g + q - 7$, if the canonical map is birational (this result is due to F. JONGMANS, 1947); $K^2 \geq 2p_g + 4(q-4)$, if the canonical map is of degree 2, with equality only for the product of two curves, one of them of genus 2, the other one of genus at least 2; $K^2 \geq 3p_g - 4$, if the canonical map is of degree 3 and the surface is irregular. Finally, an appendice written by A. BEAUVILLE is devoted to the proof of the inequality $p_g \geq 2q - 4$.

Introduction

On sait depuis M. Noether qu'une surface minimale de type général vérifie l'inégalité $K^2 \geqslant 2p_g - 4$; de plus les surfaces avec $K^2 = 2p_g - 4$ et $K^2 = 2p_g - 3$ sont régulières ([H1] et [H2]). On doit donc s'attendre à une inégalité plus fine si l'on fait intervenir l'irrégularité q de la surface.

Le but de cet article est de montrer que toute surface complexe minimale de type général vérifie l'inégalité :

$$K^2 \geqslant 2p_g + 2(q-4),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour le produit de deux courbes de genre 2; on a de plus $K^2 \geqslant 2p_g$ dès que $q \geqslant 1$.

Pour cela, on montre d'abord, dans le cas où le système canonique est composé d'un pinceau, l'inégalité :

$$K^2 \geqslant 3p_g + 2q - 9.$$

Si l'application canonique est génériquement finie de degré d, on montre les inégalités suivantes, dont la première est due à JONGMANS (*cf.* [J], p. 425) :

$$K^2 \geqslant 3p_g + q - 7 \qquad \text{si} \quad d=1,$$
$$K^2 \geqslant 2p_g + 4(q-4) \qquad \text{si} \quad d=2,$$

avec égalité si et seulement si la surface est isomorphe au produit de deux courbes lisses dont l'une est de genre deux, l'autre de genre au moins 2 :

$$K^2 \geqslant 3p_g - 4 \qquad \text{si} \quad d=3 \quad \text{et} \quad q \geqslant 1.$$

En combinant ces résultats avec l'inégalité $p_g \geq 2q-4$, démontrée dans l'Appendice, on obtient l'inégalité annoncée.

Je voudrais remercier ici A. BEAUVILLE, sur les conseils duquel ce travail a été réalisé, de l'aide qu'il m'a apportée et du temps qu'il a bien voulu me consacrer.

1. Notations et préliminaires

1.1. Les surfaces considérées ici sont des surfaces projectives complexes. Une surface de type général est toujours supposée lisse. Si X est une surface lisse, on note q_X ou q son irrégularité, K_X ou K un diviseur canonique, $p_g(X)$ ou p_g son genre géométrique.

Si Σ est une surface contenue dans $\mathbb{P}^n$, on dira qu'elle est non dégénérée si elle n'est contenue dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^n$. Si Σ est singulière et si X est une surface lisse birationnellement isomorphe à Σ, on posera $p_g(\Sigma)=p_g(X)$ et $q_\Sigma = q_X$.

1.2. Si X est une surface lisse et D un diviseur sur X on note $H^i(X, D)$ les espaces de cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ et $h^i(X, D)$ ou $h^i(D)$ leur dimension. Si $h^0(D) \geq 1$, on note $\Phi_D : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{h^0(D)-1}$ l'application rationnelle associée au système linéaire $|D|$. Si Σ est l'image de Φ_D, on note $\varphi_D : X \dashrightarrow \Sigma$ l'application déduite de Φ_D et on dira que $|D|$ est composé d'un pinceau si Σ est une courbe.

1.3. SURFACES RÉGLÉES (*cf.* [B1], Chap. III et IV).

Si C est une courbe lisse de genre g, $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 et de degré d sur C, $S=\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{p} C$ la surface réglée associée, F une fibre de p, de classe f dans $H^2(S, \mathbb{Z})$ et h la classe de $\mathcal{O}_S(1)$ dans $\mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$ on a :

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} f \oplus \mathbb{Z} h \quad \text{avec} \quad f^2=0, \quad fh=1 \quad \text{et} \quad h^2=d.$$

$$K_S \equiv \mathcal{O}_S(-2) \otimes p^*(K_C \otimes \Lambda^2 \mathcal{E}).$$

La classe de K_S dans $H^2(S, \mathbb{Z})$ est donc $-2h+(2g-2+d)f$. Les sections de p sont en correspondance bijective avec les fibrés quotients de $\mathcal{E}$. En particulier, si L est un fibré de rang 1 et de degré d sur C et $\mathcal{E}=\mathcal{O}_C \oplus L$, on distingue deux sections, d'images notées H et B, correspondant aux fibrés quotients L et $\mathcal{O}_C$. La classe de H est h et $B \equiv H - p^* L$ est de classe $h-df$.

Enfin on notera Σ_d la surface réglée $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$, de base $\mathbb{P}^1$, pour $d \geq 0$.

1.4. REVÊTEMENTS DOUBLES (*cf.* [HO], p. 47 à 50).

Un revêtement double est un morphisme fini de degré 2, $\pi : X \to S$ entre surfaces lisses. La surface S étant fixée, la donnée du revêtement double $\pi : X \to S$ est équivalente à la donnée d'une classe de diviseur δ dans $\mathrm{Pic}(S)$ et d'une courbe lisse $\Delta \in |2\delta|$, lieu de ramification de π. On a $K_X \equiv \pi^*(K_S+\delta)$. Pour tout diviseur D sur S, on a $h^i(\pi^* D)=h^i(D)+h^i(D-\delta)$. Si $p_g(S)=0$, l'application canonique de X se factorise en $\Phi_K=\Psi\circ\pi$ où $\Psi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ est l'application associée à $|K_S+\delta|$.

Les deux lemmes suivant sont démontrés par exemple dans [B2], p. 123.

LEMME 1.5. — *Soit X une surface de type général minimale dont l'image de l'application canonique est une surface Σ. On a alors $K^2 \geqslant (\deg \varphi_K)(\deg \Sigma)$ avec égalité si et seulement si $|K|$ est sans point base, sans partie fixe.*

LEMME 1.6. — *Soit $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ une surface irréductible non dégénérée. Si Σ est réglée, on a $\deg(\Sigma)\geqslant n-1+q_\Sigma$; si Σ n'est pas réglée, on a $\deg(\Sigma)\geqslant 2n-2$ avec égalité seulement si Σ est birationnellement isomorphe à une surface* K 3, *auquel cas $p_g(\Sigma)=1$.*

Enfin, on utilisera souvent le résultat suivant dû à M. REID (*cf.* [R] et cor. 5.7, p. 138 de [B2]).

THÉORÈME 1.7. — *Soit X une surface minimale de type général irrégulière, vérifiant $K_X^2<3\chi(\mathcal{O}_X)$. Alors :*

— *Pour tout morphisme $X \to B$ surjectif à fibres connexes de X sur une courbe lisse B de genre b, on a $b=0$ ou $b=q_X$.*

— *Il existe une application rationnelle de degré 2 sur une surface de même irrégularité que X.*

— *Si l'application canonique de X est génériquement finie, elle est de degré pair.*

2. Surfaces de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau

On énonce dans ce paragraphe un théorème qui résume des résultats de HORIKAWA et de BEAUVILLE.

On suppose que X est une surface minimale de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau de genre b i. e. il existe une courbe lisse B de genre b, une application rationnelle surjective à fibres connexes $p : X \dashrightarrow B$, un diviseur D sur B de degré $a\geqslant p_g-1$, tels que $K\equiv Z+p^* D$, où Z est la partie fixe de $|K|$.

Si $b=0$, HORIKAWA a montré (*cf.* th. 1.1 et 1.2, p. 211-212 de [H3]) :

(1) $$K^2 \geqslant 3p_g - 3 \quad \text{si} \quad p_g \geqslant 3.$$

(2) $$K^2 \geqslant 4p_g - 6 \quad \text{si} \quad p_g \geqslant 5.$$

Si $b \geqslant 1$ et $p_g \geqslant 2$, BEAUVILLE a montré (*cf.* remarque 5.4, p. 136 de [B2]) :

(3) $$\begin{cases} K^2 \geqslant 3p_g + 5(b-1) & \text{sauf si} \quad K^2 = 8 \text{ ou } 9, \\ & p_g = q = b = 2. \end{cases}$$

THÉORÈME 2.1. — *Soit X une surface minimale de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau. On a alors :*

$$K^2 \geqslant 3p_g + 2q_X - 9.$$

Démonstration. — On remarque tout d'abord que comme on n'est pas dans le cas d'égalité de l'appendice, on a $p_g \geqslant 2q-3$. Supposons d'abord $b=0$. L'inégalité est triviale si $p_g \leqslant 2$. Si $p_g \leqslant 4$, on a $q_X \leqslant 3$ puisque $p_g \geqslant 2q-3$ et l'inégalité résulte de (1). Si $p_g \geqslant 5$, elle résulte de (2) et de $p_g \geqslant 2q-3$.

On peut donc supposer $b \geqslant 1$.

L'inégalité cherchée résulte alors du lemme suivant et de (3).

LEMME 2.2. — *Soit X une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau de genre $b \geqslant 1$. Alors $q \leqslant b+1$.*

Démonstration. — On reprend les notations ci-dessus. Si $b \geqslant a$, on a $b \geqslant a \geqslant p_g - 1 \geqslant q_X - 1 \geqslant b - 1$ et le résultat est montré; si $b < a$, par Riemann-Roch, pour tout point m de B, on a $h^0(D+m) > h^0(D)$. On se place dans ce second cas et Z ne contient alors pas de fibres de p. On suppose $q > b$ et on prend une 1-forme ω sur X, qui ne soit pas dans $p^* H^0(B, \Omega_B^1)$. On choisit des coordonnées locales u sur B et x sur X, telles que, en posant $t = p^* u$, (x, t) forme un système de coordonnées locales sur un ouvert U de X. On notera, pour tout diviseur L sur X, L_U sa restriction à U.

La 1-forme ω s'écrit sur U : $\omega(x, t) = A(x, t)\,dx + B(x, t)\,dt$, où A et B sont holomorphes dans U.

Soit α un élément non nul de $H^0(B, \Omega_B^1)$. Dans U, on a $p^* \alpha(t) = R(t)\,dt$ avec R holomorphe dans U.

Si A était identiquement nulle, on aurait, sachant que les 1-formes holomorphes sur une surface lisse sont fermées, $\partial B/\partial x = 0$, soit $\omega \in p^* H^0(B, \Omega_B^1)$. Donc $A \neq 0$.

D'autre part, les fibres contenues dans $\operatorname{div}(\omega\wedge p^*\alpha)$ forment un diviseur de type p^*D, puisque Z n'en contient pas. En particulier, on a l'inégalité entre diviseurs sur B : $\operatorname{div}(\alpha)\leqslant D$. Il existe donc un diviseur effectif G sur B tel que $\operatorname{div}(A)=Z_U+(p^*G)_U$, et deux fonctions holomorphes g et z sur U telles que :

$$\operatorname{div}(z)=Z_U \qquad \text{et} \qquad A(x, t)=z(x, t)g(t).$$

Si ω' est une autre 1-forme vérifiant les mêmes hypothèses que ω, on peut écrire sur U :

$$\omega'(x, t)=z(x, t)h(t)dx+B'(x, t)dt$$

et :

$$\omega\wedge\omega'(x, t)=z(x, t)[g(t)B'(x, t)-h(t)B(x, t)]\,dx\wedge dt.$$

Or le diviseur de $\omega\wedge\omega'$ est de type $Z+p^*D'$, donc le crochet ci-dessus ne dépend que de t, d'où :

$$g(t)\frac{\partial B'}{\partial x}(x, t)-h(t)\frac{\partial B}{\partial x}(x, t)=0. \tag{4}$$

On utilise $d\omega=d\omega'=0$ et il vient :

$$0=g(t)\left[\frac{\partial z}{\partial t}(x, t)h(t)+z(x, t)\frac{\partial h}{\partial t}(t)\right]-h(t)\left[\frac{\partial z}{\partial t}(x, t)g(t)+z(x, t)\frac{\partial g}{\partial t}(t)\right]$$
$$=z(x, t)\left[g(t)\frac{\partial h}{\partial t}(t)-h(t)\frac{\partial g}{\partial t}(t)\right].$$

Comme $z\neq 0$, il s'ensuit que g et h sont proportionnelles. On suppose donc $g=h$. L'égalité (4) fournit une application φ telle que :

$$B'(x, t)-B(x, t)=\varphi(t),$$

ce qui prouve que $\omega-\omega'\in p^*H^0(B, \Omega_B^1)$.

On a donc montré $q-b=\dim(H^0(X, \Omega_X^1)/p^*H^0(B, \Omega_B^1))\leqslant 1$, ce qui termine la démonstration du lemme.

3. Surfaces de type général dont l'application canonique est birationnelle

Un résultat de JONGMANS (*cf.* [J], p. 425) améliore l'inégalité de Castelnuovo $K^2\geqq 3p_g-7$ pour les surfaces minimales de type général dont l'application canonique est birationnelle.

PROPOSITION 3.1. — *Soit X une surface lisse non réglée, L un diviseur sur X. Si l'application φ_L est birationnelle, on a :*

$$4h^0(L)-6\leqslant h^0(2L).$$

Démonstration. — On peut d'abord supposer $|L|$ sans partie fixe puis, quitte à éclater ses points bases, sans points bases. On note :

$$n=h^0(L),\qquad \Sigma=\varphi_L(X)\subset\mathbb{P}^{n-2},\qquad d=\deg\Sigma=L^2.$$

On remarque aussi que, par hypothèse, la surface Σ est non réglée, donc (*cf.* 1.6) que $d\geqq 2n-4$.

De plus, Σ est non dégénérée donc (*cf.* [G-H], p. 174) une section hyperplane générique de Σ est irréductible, non dégénérée dans son hyperplan. Par Bertini, il existe une courbe $C\in|L|$, lisse et irréductible, d'image par φ_L une courbe $\tilde{C}\subset\mathbb{P}^{n-2}$ non dégénérée. De nouveau (*cf.* [G-H], p. 249), il existe une section hyperplane de $\tilde{C}$ dont les d points sont en position générale, i.e. aucun (n-2)-uplet n'est linéairement dépendant.

Comme $d\geqslant 2n-4$, on peut choisir un ensemble $\mathcal{D}=\{p_0,\ldots,p_{2n-6}\}$ de points en position générale sur une section hyperplane $\tilde{s}$ de $\tilde{C}$. On notera, pour tout diviseur D sur X, r_C la restriction de $H^0(X, D)$ à $H^0(C, D_{|C})$.

L'application $\varphi_{L|C}: C\to\tilde{C}$ est associée au sous-espace vectoriel $r_C H^0(X, L)$ de $H^0(C, L_{|C})$ donc, à la section hyperplane $\tilde{s}$ de $\tilde{C}$ correspond un élément s de $r_C H^0(X, L)$, de diviseur noté $D\in\mathrm{Div}(C)$, sur lequel se trouvent les antécédents $q_0,\ldots,q_{2n-6}$ des points de $\mathcal{D}$.

Par propriété de position générale, il existe un hyperplan H_1 (resp. H_2) de $\mathbb{P}^{n-1}$ contenant $p_1,\ldots,p_{n-3}$ (resp. $p_{n-2},\ldots,p_{2n-6}$) mais pas p_0, lequel hyperplan correspond à un élément η_1 (resp. η_2) de $H^0(X, L)$. L'élément $\sigma_0=r_C(\eta_1\otimes\eta_2)$ de $r_C H^0(X, 2L)$ est nul en tous les q_i pour $i\neq 0$ et non nul en q_0.

On peut construire ainsi $2n-5$ éléments $\sigma_0,\ldots,\sigma_{2n-6}$ de $r_C H^0(X, 2L)$ vérifiant, pour $0\leqslant i,j\leqslant 2n-6$, $\sigma_i(q_j)=0$ si $i\neq j$, $\sigma_i(q_i)\neq 0$. Or les éléments de l'image de l'inclusion :

$$r_C H^0(X, L)\overset{\otimes s}{\hookrightarrow} r_C H^0(X, 2L),$$

sont nuls sur D. En particulier, $\sigma_0,\ldots,\sigma_{2n-6}$ sont libres dans $r_C H^0(X, 2L)/r_C H^0(X, L)$ et :

$$2n-5\leqslant\dim r_C H^0(X, 2L)-\dim r_C H^0(X, L)=h^0(2L)-h^0(L)-h^0(L)+1.$$

d'où la proposition.

Si X est une surface minimale de type général, on a (*cf.* [Bo], p. 185) :

$$h^0(2K)=K^2+\chi(\mathcal{O}_X).$$

On en déduit :

THÉORÈME 3.2. — *Une surface minimale X, de type général, dont l'application canonique φ_K est birationnelle, vérifie : $K^2\geqslant 3p_g+q-7$.*

Remarque 3.3. — On peut préciser légèrement le résultat 3.2 : si $|M|$ est la partie mobile de $|K|$ et Z sa partie fixe, la proposition 3.1 donne :

$$h^0(2M)\geqslant 4p_g-6.$$

Or le théorème A de [Bo], p. 177, donne $h^1(-M)=0$. On a donc :

$$h^0(2M)\leqslant h^0(M+K)=\chi(-M)=\chi(\mathcal{O}_X)+\frac{1}{2}(M^2+MK).$$

Toute surface vérifiant les hypothèses de 3.2 satisfait donc à :

$$K^2\geqslant 3p_g+q-7+KZ+\frac{1}{2}MZ.$$

4. Surfaces de type général dont l'application canonique est de degré 2

Avant de traiter le cas des surfaces de type général dont l'application canonique est de degré 2, on va montrer deux propositions concernant les surfaces de type général admettant une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée.

PROPOSITION 4.1. — *Soit X une surface minimale de type général admettant une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée Σ. On a alors :*

$$K_X^2\geqslant 2p_g+4(q_X-4)+6(2-r)$$

avec $r=q_x-q_\Sigma$.

Démonstration. — Il existe une involution birationnelle σ de X qui échange les points identifiés par φ. Comme X est minimale, σ est en fait un automorphisme de X.

Le lieu des points fixes de σ est union disjointe de courbes lisses et de points isolés. Si $\hat{X}$ est la surface obtenue en éclatant les points fixes isolés de σ, l'involution σ induit une involution $\hat{\sigma}$ de $\hat{X}$ dont l'ensemble des points fixes est une union disjointe de courbes lisses, $\hat{\Delta}$, contenant tous les diviseurs exceptionnels de $\hat{X}$.

La surface $S=\hat{X}/\hat{\sigma}$ est alors lisse, birationnellement isomorphe à Σ donc réglée. La donnée de l'application $\pi : \hat{X} \to S$ est équivalente à la donnée d'une courbe lisse $\Delta=\pi(\hat{\Delta})$ sur S et d'un élément δ de $\mathrm{Pic}(S)$ avec $\Delta\in|2\delta|$.

On veut maintenant montrer l'inégalité :

(5) $q_S \leqslant g(K_S+\delta)=1+\frac{1}{2}(K_S(K_S+\delta)+(K_S+\delta)^2)=1+K_S^2+\frac{3}{2}K_S\delta+\frac{1}{2}\delta^2.$

Elle n'est pas difficile si le système linéaire $|K_S+\delta|$ contient un diviseur irréductible (on montre plus bas que ce diviseur ne peut être contenu dans une fibre de S).

Malheureusement, ce n'est pas le cas si $|K_{\hat{X}}|$ a une partie fixe et le raisonnement est dans ce cas plus compliqué. On peut supposer Σ irrationnelle. En effet, si $q_S=0$, l'inégalité cherchée est $K_X^2 \geqslant 2p_g-2q_X-4$, plus faible que celle de Noether.

On suppose donc $q_S>0$ et on pourra parler sans ambiguïté de la fibration canonique de S, de fibre rationnelle de S.

Soit S' un modèle minimal de S. Le morphisme $\varepsilon : S \to S'$ est composé d'éclatements :

$$S=S_1 \underset{\eta_1}{\to} S_2 \underset{\eta_2}{\to} \dots S_n \underset{\eta_n}{\to} S_{n+1}=S',$$

où, pour $i\in\{1, \dots, n\}$, η_i est l'éclatement du point p_{i+1} de S_{i+1}. On note, pour $i\in\{1, \dots, n\}$:

$$\varepsilon_i=\eta_i \dots \eta_1, \qquad \varepsilon=\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_0=\mathrm{Id}_S,$$

$$\delta_{i+1}=\varepsilon_{i*}(\delta), \qquad \delta'=\delta_{n+1}, \qquad \delta_1=\delta,$$

$$\Delta_{i+1}=\varepsilon_i(\Delta), \qquad \Delta'=\Delta_{n+1}, \qquad \Delta_1=\Delta,$$

$$E_i=\eta_i^{-1}(p_{i+1})\subset S_i; \qquad \tilde{E}_i=\varepsilon_{i-1}^*(E_i); \qquad n_i=\delta.\tilde{E}_i=\delta_i.E_i.$$

On désigne par m l'intersection de δ avec une fibre rationnelle de S. Comme :

$$h^0(K_S+\delta)=p_g \geqq q_X \geqq q_S \geqq 1,$$

$|K_S+\delta|$ est non vide donc $m\geqq 2$. Si $m=2$, on a alors $K_{\hat{X}}.\pi^* T=0$. Or les images des diviseurs exceptionnels de $\hat{X}$ ont des composantes rationnelles donc contenues dans les fibres de S. Si ε' est le morphisme $\hat{X} \to X$, $\varepsilon'_* \pi^* F$ est mobile et $K_X.\varepsilon'_*\pi^* F=0$, ce qui contredit la proposition 1, p. 174 de [Bo]. On a donc $m\geqq 3$.

LEMME 4.2. — *Il existe un morphisme birationnel $\varepsilon : S \to S'$, où S' est une surface minimale, tel que, avec les notations ci-dessus, on ait pour tout i $(1\leqslant i\leqslant n)$:*

$$0<n_i\leqslant \frac{m}{2}+1<m.$$

Démonstration. — Remarquons que toute courbe exceptionnelle sur S rencontre Δ. En effet, si ce n'était pas le cas, l'image inverse sur $\hat{X}$ de cette courbe serait somme disjointe de deux courbes exceptionnelles non contenues dans $\hat{\Delta}$, ce qui contredit le fait que $\hat{\Delta}$ contient toutes les courbes exceptionnelles de $\hat{X}$. D'autre part, comme Δ_i n'a que des composantes simples, on a $2n_i = \Delta_i . E_i \geqslant -1$. On en déduit que $n_i \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si E_i est composante de Δ_i et rencontre l'ensemble des autres composantes transversalement en un seul point. On supposera que I est le plus petit entier i tel que $n_i = 0$. On note :

$$\Delta = C^{(1)} + \ldots + C^{(s)}, \qquad C_i^{(j)} = \varepsilon_{i-1}(C^{(j)}), \qquad m_i^{(j)} = C^{(j)} . \tilde{E}_i.$$

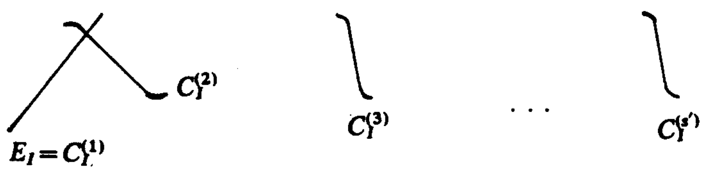
On supposera que $E_I = C_I^{(1)}$ rencontre $C_I^{(2)}$ mais pas les autres composantes $C_I^{(3)}, \ldots, C_I^{(s')}$ de Δ_I et enfin que, pour $i \in \{2, \ldots, I\}$, p_i est sur $\varepsilon_{i*}(\hat{E}_I)$ puisque, si ce n'est pas le cas, on peut ne pas faire la contraction η_i sans changer $\tilde{E}_I$ ni donc n_I. De plus, I reste toujours le plus petit entier i avec $n_i = 0$.

On a alors, pour $i \in \{1, \ldots, I-1\}$ et $j \in \{3, \ldots, s'\}$:

$$\operatorname{Supp} \tilde{E}_i \cap C^{(j)} \subset \operatorname{Supp} \tilde{E}_I \cap C^{(j)} \subset \varepsilon_{I-1}^{-1}(C_I^{(1)}) \cap \varepsilon_{I-1}^{-1}(C_I^{(j)}) = \emptyset$$

soit $m_i^{(j)} = 0$ et $C^{(j)} \simeq C_I^{(j)}$.

De plus $C_I^{(2)} . C_I^{(j)} = C^{(2)} . C^{(j)} + \sum_{i=1}^{I-1} m_i^{(j)} m_i^{(2)} = 0$ donc Δ_I se présente sous la forme :



et Δ_{I+1} est lisse, union disjointe de $C_{I+1}^{(2)}, \ldots, C_{I+1}^{(s')}$.

Soit $\pi' : X' \to S_{I+1}$ le revêtement double associé à δ_{I+1} et Δ_{I+1}. L'application $\varepsilon_I \pi : \hat{X} \to S_{I+1}$ se factorise par π' (*cf.* [HO], lemme 4, p. 48) et on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ S \arrow[r, "\varepsilon_I"'] & S_{I+1} \end{tikzcd}$$

et $K_{\hat{X}} - \alpha^* K_{X'} \equiv \pi^*(K_S + \delta) - \alpha^* \pi'^*(K_{S_{I+1}} + \delta_{I+1}) \equiv \pi^*(\Sigma_{i=1}^{I}(1 - n_i)\tilde{E}_i)$

ou :

$$\pi^* \tilde{E}_I \equiv E + \textstyle\sum_{i=1}^{I-1} (n_i - 1)\, \pi^* \tilde{E}_i,$$

où E ainsi que les deux membres sont des diviseurs effectifs. D'autre part, on a obtenu $\hat{X}$ en éclatant sur X minimale, des points distincts. En utilisant l'unicité du modèle minimal pour $\hat{X}$, on voit que l'unique élément E du système linéaire $|K_{\hat{X}} - \alpha^* K_{X'}|$ n'a que des composantes simples.

On a aussi $h^0(\pi^* \tilde{E}_I) = h^0(\tilde{E}_I) + h^0(\tilde{E}_I - \delta)$ (*cf.* 1.4).

Si $D \in |\tilde{E}_I - \delta|$, $2D + \Delta \in |2\tilde{E}_I|$. Comme le système linéaire $|2\tilde{E}_I|$ a pour seul élément $2\tilde{E}_I$, on a $2D + \Delta = 2\tilde{E}_I$, ce qui est impossible puisque Δ n'a que des composantes simples.

Donc $h^0(\pi^* \tilde{E}_I) = 1$ et l'unique élément de $|\pi^* \tilde{E}_I|$ est $\pi^* \tilde{E}_I$. Comme $n_i \geqslant 1$ pour $i < I$, on a :

$$\pi^* \tilde{E}_I = E + \textstyle\sum_{i=1}^{I-1} (n_i - 1)\, \pi^* \tilde{E}_i.$$

La courbe $C^{(1)}$ n'est dans aucun des $\tilde{E}_i$ pour $i < I$ et, comme elle est dans Δ, la courbe $\tilde{C}^{(1)} = (1/2)\, \pi^* C^{(1)}$ n'est dans aucun des $\pi^* \tilde{E}_i$ pour $i < I$. Le coefficient de $\tilde{C}^{(1)}$ dans le diviseur de droite de l'égalité ci-dessus est son coefficient dans E, c'est-à-dire 0 ou 1, alors qu'il est 2 dans $\pi^* \tilde{E}_I$ puisque $C^{(1)} \leqslant \tilde{E}_I$. On a donc une contradiction.

Après avoir montré que, pour tous les modèles minimaux de S, on avait $n_i > 0$, on va montrer qu'on peut en choisir un pour lequel $n_i \leqslant (m/2) + 1$. Pour cela, on sépare Δ en $\Delta_h = C^{(1)} + \ldots + C^{(t)}$, union des composantes de Δ non contenues dans les fibres de S et $\Delta_v = \Delta - \Delta_h$. Pour tout morphisme $\varepsilon : S \to S'$ de S sur un modèle minimal S' de S, on *a* $\varepsilon(\Delta_h)^2 \geqslant \Delta_h^2$. On peut donc choisir ε de façon telle que $\varepsilon(\Delta_h)^2$ soit minimal. Si on remarque que par un point d'une surface réglée, il passe au plus deux composantes de fibres et que si il en passe deux, elles s'y coupent transversalement, on obtient que E_i coupe, sur S_i, au plus deux autres composantes de fibres et donc que $\Delta_v . \tilde{E}_i \leqslant 2$.

Soit maintenant $x = \varepsilon(\tilde{E}_i) \in S'$. Le morphisme $\eta = \eta_n \ldots \eta_i : S_i \to S'$ contracte E_i en x donc se factorise à travers l'éclatement $\rho : \hat{S}' \to S'$ de x :

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta"] & S' \arrow[d, "\rho"] \\
S_{i+1} \arrow[r] & S'
\end{tikzcd}$$

La fibre de $\hat{S}'$ au dessus de x est $E+E'$, avec $E=\rho^{-1}(x)$ et E' courbes exceptionnelles. Soit $\rho' : \hat{S}' \to S''$ la contraction de E'. Si on pose $\Delta_{h,i}=\varepsilon_{i-1}(\Delta_h)$, on a :

$$\varepsilon(\Delta_h)^2=\eta(\Delta_{h,i})^2=\eta'(\Delta_{h,i})^2+[E.\eta'(\Delta_{h,i})]^2$$
$$\leqslant \rho'\eta'(\Delta_{h,i})^2=\eta'(\Delta_{h,i})^2+[E'.\eta'(\Delta_{h,i})]^2$$

par choix de ε, puisque S'' est minimale. Or on a :

$$2m=\Delta.\text{Fibre de } S=\Delta_h.\text{ Fibre de } S=\eta'(\Delta_{h,i}).\,(E+E').$$

Donc $\Delta_h.\tilde{E}_i=\operatorname{mult}_{p_{i+1}}(\Delta_{h,i+1})\leqslant \operatorname{mult}_x(\Delta_{h,n+1})=E.\eta'(\Delta_{h,i})\leqslant m$ et le lemme découle alors de l'égalité : $2n_i=\Delta_h.\tilde{E}_i+\Delta_v.\tilde{E}_i$.

LEMME 4.3. — On a : (5) $K_S^2+(3/2)K_S\delta+(1/2)\delta^2 \geqq q_S-1$.

Démonstration. — Si on note $[\delta']=mh+pf$ (*cf.* 1.3), on a :

$$\delta'^2+m\,\delta'.K_{S'}=2m^2(q_S-1).$$

Puis avec $K_S\equiv\varepsilon^* K_{S'}+\sum_{i=1}^n \tilde{E}_i$ et $\delta\equiv\varepsilon^*\delta'-\sum_{i=1}^n n_i\tilde{E}_i$, (*cf.* [P], p. 104) :

$$\delta^2=\frac{m}{m-1}[\delta^2+\delta.K_S+2-2q_S]-2m(q_S-1)+\sum_{i=1}^n\frac{n_i(n_i-m)}{m-1}.$$

La quantité $\delta^2+\delta.K_S+2-2q_S=2\chi(\mathcal{O}_X)-2+2q_S$ est positive ou nulle, m est au moins égal à 3 et $0<n_i<m$. On a donc :

$$\delta^2\leqslant\frac{3}{2}[\delta^2+\delta.K_S+2-2q_S]-2m(q_S-1)-n$$
$$\leqslant\frac{3}{2}\delta^2+\frac{3}{2}\delta.K_S+3(1-q_S)-6(q_S-1)+K_S^2+8(q_S-1),\text{ puisque } q_S-1\geqslant 0.$$

On peut maintenant montrer la proposition :

$$\frac{1}{2}K_X^2\geqq\frac{1}{2}K_{\tilde{X}}^2=(K_S+\delta)^2\geqq-\frac{3}{2}K_S.\delta-\frac{1}{2}\delta^2+q_S-1+2K_S\delta+\delta^2$$
$$=2-2q_S+\frac{1}{2}\delta(K_S+\delta)-3+3q_S$$
$$=\chi(\mathcal{O}_S\oplus\mathcal{O}_S(-\delta))+3(q_X-r)-3$$
$$=\chi(\mathcal{O}_X)+3q_X-3r-3=p_g(X)+2q_X-3r-2.$$

Remarque 4.4. — Si on a égalité dans l'énoncé de la proposition précédente, on a $K_{\hat{X}}^2=K_X^2$ et $\hat{X}$ est isomorphe à X. Dans ce cas, X est donc revêtement double de S.

PROPOSITION 4.5. — *Soit X une surface minimale de type général admettant une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée Σ. On suppose : $q_X-q_\Sigma \geqslant 2$. On a alors :*

$$K_X^2 \geqslant 2p_g+4(q_X-4),$$

avec égalité si et seulement si X est isomorphe au produit d'une courbe lisse de genre 2 et d'une courbe lisse de genre au moins 2.

Démonstration. — On reprend les notations de la proposition précédente. On suppose donc $r \geqslant 2$.

LEMME 4.6. — *Il existe une courbe lisse B de genre r et un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "q"] \\ S \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

où une fibre générique de p est lisse connexe de genre $f \geqslant 2$, isomorphe à la fibre correspondante de q.

Démonstration. — Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ une base de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur $\hat{X}$ anti-invariantes par $\hat{\sigma}$. Pour $i \in \{2, \ldots, r\}$, $\omega_1 \wedge \omega_i$ est une 2-forme sur $\hat{X}$ invariante par $\hat{\sigma}$ donc provenant d'une 2-forme holomorphe sur S, qui, réglée, n'admet pas de 2-forme holomorphe non nulle. Donc $\omega_1 \wedge \omega_i=0$. La construction de la courbe B et du morphisme p suit la démonstration d'un résultat classique de Castelnuovo et de Franchis (*cf.* [B1], prop. X.9, p. 155).

On note $K(\hat{X})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\hat{X}$. Il existe $f_i \in K(\hat{X})$ telle que $\omega_i=f_i\omega_1$. Or les 1-formes holomorphes sur $\hat{X}$ sont fermées donc $0=d\omega_i=df_i \wedge \omega_1$ et il existe f_1 dans $K(\hat{X})$ avec $\omega_1=f_1\, df_2$ et $df_j \wedge df_2=0$ pour $j \in \{1, \ldots, r\}$, ce qui signifie que les deux éléments f_j et f_2 de $K(\hat{X})$ sont algébriquement liés : il existe un polynôme p_j à deux variables tel que $p_j(f_2, f_j)=0$. Si C est la courbe de $\mathbb{P}^r$ adhérence de :

$$\{(1, x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{P}^r \mid P_1(x_2, x_1)=P_3(x_2, x_3)=\ldots=P_r(x_2, x_r)=0\},$$

les fonctions rationnelles $f_1, \ldots, f_r$ définissent une application rationnelle $\rho' : \hat{X} \dashrightarrow C$. Soit $\eta : \widetilde{X} \to \hat{X}$ un morphisme composé d'éclatements tel que $\rho' \eta : \widetilde{X} \to C$ soit un morphisme et soit : $\widetilde{X} \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{u} C$ la factorisation de Stein de $\rho' \eta$ où B est une courbe lisse et où les fibres de ρ sont connexes. Les 1-formes $\alpha_1 = u^* (x_1\, dx_2)$ et $\alpha_i = u^* (x_1\, x_i\, dx_2)$, $i \in \{ 2, \ldots, r \}$, sont holomorphes sur B, libres dans $H^0(B, K_B)$, donc on a $g(B) \geqslant r > 0$, et ρ contracte les diviseurs exceptionnels éventuels de $\widetilde{X}$. On en déduit que ρ se factorise par η, ce qui donne p.

Soit v le morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ induit par l'application : $(x_0, \ldots, x_r) \to (x_0, x_2)$, σ_C l'involution de C induite par : $(x_0, \ldots, x_r) \to (x_0, -x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

Comme $\hat{\sigma}^* \omega_j = -\omega_j$ pour $j \in \{ 1, \ldots, r \}$, on a :

$$\begin{cases} f_1 \hat{\sigma} = -f_1, & \\ f_i \hat{\sigma} = f_i & \text{pour} \quad i \in \{2, \ldots, r\}, \end{cases}$$

et l'application $vup : \hat{X} \to \mathbb{P}^1$ se factorise par π en un morphisme $S \to \mathbb{P}^1$ dont la factorisation de Stein est : $S \xrightarrow{q} B' \xrightarrow{u'} \mathbb{P}^1$. Pour résumer, on a obtenu les diagrammes commutatifs suivants :

D1
$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[r, "u"] & C \arrow[d, "v"] \\ S \arrow[r, "q"'] & B' \arrow[r, "u'"'] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} .$$

D2
$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & B \arrow[r, "u"] & C \arrow[d, "\sigma_C"] \\ \hat{X} \arrow[r, "p"] & B \arrow[r, "u"] & C \end{tikzcd}$$

Comme B (resp. B') est la clôture intégrale de C (resp. $\mathbb{P}^1$) dans $\hat{X}$ (resp. S), on a une flèche $\psi : B \to B'$ qui fait commuter le diagramme D1. De même, on a une involution $\sigma_B : B \to B$ qui fait commuter D2. De plus $\psi \sigma_B = \psi$ puisque :

$$\forall\, b \in B, \quad \psi \sigma_B(b) = q \pi p^{-1} \sigma_B(b) = q \pi \hat{\sigma}\, p^{-1}(b) = q \pi p^{-1}(b) = \psi(b).$$

On en déduit que ψ est de degré 2 et qu'une fibre générique de p est isomorphe à la fibre correspondante de q.

Montrons maintenant que B' est rationnelle. Si ce n'est pas le cas, comme S est réglée, la fibre générique de q est rationnelle et donc aussi celle de p, ce qui est absurde puisque $\hat{X}$ n'est pas réglée.

Remarquons enfin que, puisqu'il n'y a pas de 1-forme holomorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$, toutes les 1-formes holomorphes sur B sont anti-invariantes par σ_B^* et $p^* H^0(B, \Omega_B^1)$ est constitué de formes anti-invariantes par $\hat{\sigma}^*$, ce qui prouve $g(B) \leqq r$ ainsi que le lemme.

LEMME 4.7. — *On a* $K_{\hat{X}}.\hat{\Delta} \leqslant 4(r+1)(f-1)$.

Démonstration. — Si Γ est le lieu de ramification de Ψ sur $\mathbb{P}^1$ et si $x \notin \operatorname{Supp}\Gamma$, $\pi^{-1} q^{-1}(x) = p^{-1} \Psi^{-1}(x)$ a deux composantes connexes donc Δ ne rencontre pas $q^{-1}(x)$. On a donc montré que $q(\Delta) \subset \operatorname{Supp}\Gamma$. D'autre part, le théorème d'Hurwitz donne $\deg\Gamma = 2[g(B)+1] = 2(r+1)$ donc $\hat{\Delta}$ est contenue dans au plus $2(r+1)$ fibres de p.

D'autre part, pour une composante A d'une fibre de p, $K_{\hat{X}}.A \geqslant 0$ sauf si A est une courbe exceptionnelle de $\hat{X}$. Par construction, ces courbes exceptionnelles sont contenues dans $\hat{\Delta}$, et donc :

$$K_{\hat{X}}.\hat{\Delta} \leqslant 2(r+1) K_{\hat{X}}.F_p = 4(r+1)(f-1).$$

Il vient alors :

$$(6) \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 2 - 2q_S + \frac{1}{2}\delta(K_S + \delta)$$

$$= 2 - 2q_S + \frac{1}{8}\pi^* \Delta . K_{\hat{X}} = 2 - 2q_S + \frac{1}{4}\hat{\Delta} K_{\hat{X}} \leqslant 2 - 2q_S + (r+1)(f-1).$$

D'autre part, les courbes exceptionnelles de $\hat{X}$ sont contractées par p puisque $g(B) > 0$ et on peut appliquer le théorème d'Arakelov (*cf.* Appendice) au morphisme $X \to B$ qui s'en déduit :

$$(7) \qquad 0 \leqslant (\omega_{X/B})^2 = K_X^2 - 8(f-1)(r-1).$$

D'où :

$$\frac{1}{2}K_X^2 - (p_g + 2q_X - 8)$$

$$\geqslant 4(f-1)(r-1) - [2 - 2q_S + (r+1)(f-1) - 3q_S - 3r + 9]$$

$$= 3(r-2)(f-2) + f - q_S,$$

ce qui montre le théorème puisque $\mathring{X}$ étant de type général, $f \geqq 2$ et donc $f \geqq q_S$. De plus, s'il y a égalité, $f = q_S$, $(r-2)(f-2)=0$ et :

$$p_g(X)-(2q_X-4)$$
$$=\chi(\mathcal{O}_X)-q_X+3=2-2f+(r+1)(f-1)-r-f+3=(r-2)(f-2)=0,$$

ce qui prouve que X est isomorphe au produit d'une courbe lisse de genre 2 et d'une courbe lisse de genre au moins 2 (*cf.* Appendice). On peut maintenant énoncer notre résultat.

THÉORÈME 4.8. — *Soit X une surface minimale de type général dont l'application canonique est de degré 2. On a alors :*

$$K_X^2 \geqslant 2p_g + 4(q_X - 4)$$

avec égalité si et seulement si X est isomorphe au produit d'une courbe lisse de genre 2 et d'une courbe lisse de genre au moins 2, non hyperelliptique.

Si $1 \leqslant q_X \leqslant 3$, on a $K_X^2 \geqslant 2p_g + q_X - 1$.

Démonstration. — On note Σ l'image de X par son application canonique. Si Σ n'est pas réglée, on voit d'une part qu'on n'est pas dans le cas d'égalité de l'appendice donc que $p_g \geqslant 2q-3$, d'autre part que $p_g(\Sigma)$ vaut 0 ou $p_g(X)$ (th. 3.1, p. 127 de [B2]). Les lemmes 1.6 et 1.5 donnent :

$$K_X^2 \geqslant 2 \deg \Sigma \geqslant 2(2p_g - 3) \geqslant 2p_g + 4q_X - 9.$$

Pour les petites valeurs de q_X, il suffit de remarquer que $p_g \geqslant 4$ donc que :

$$K_X^2 \geqslant 4p_g - 6 \geqslant 2p_g + 2.$$

On suppose maintenant Σ réglée. La première inégalité est alors une conséquence directe des propositions 4.1 et 4.5.

Si $q_X = 3$, la proposition 4.1 suffit si $r \leqslant 1$. On suppose donc $r \geqslant 2$ et on applique les formules (6) et (7) :

$$p_g \leqslant 3f-1, \qquad K_X^2 \geqslant 8(f-1).$$

On utilise le théorème 3 de [H], p. 89, qui montre en particulier que si $X \to B$ est un morphisme d'une surface lisse minimale sur une courbe lisse de genre $g(B)$, à fibre générique lisse connexe de genre 2, on a :

$$K_X^2 \geqslant 2\chi(\mathcal{O}_X) + 6(g(B)-1).$$

Ici, si $f=2$:

$$K_X^2 \geqslant 2\chi(\mathcal{O}_X)+6=2p_g+2.$$

Si $f\geqslant 3$, on raisonne par l'absurde, en supposant $K_X^2<2p_g+2$.

On a alors :

$$2p_g+1\geqslant K_X^2\geqslant 8(f-1)\geqslant 16 \qquad \text{soit} \quad p_g\geqslant 8.$$

Et :

$$K_X^2-3\chi(\mathcal{O}_X)<2p_g+2-3p_g+6\leqslant 0.$$

On peut alors appliquer le théorème 1.7, qui donne $r=0$, ce qui est une contradiction.

Si $q_X=2$, la proposition 4.1 suffit si $r=0$. On suppose donc $r>0$. Le théorème 1.7 donne alors $K_X^2\geqslant 3\chi(\mathcal{O}_X)\geqslant 2p_g+1$ si $p_g\neq 3$. On aura terminé si on montre l'inégalité pour $r=2$. Les formules (6) et (7) s'écrivent :

$$p_g\leqslant 3f, \qquad K_X^2\geqslant 8(f-1).$$

Si $f=2$, le théorème d'Horikawa employé ci-dessus donne $K_X^2\geqslant 2p_g+4$. Si $f=3$ et si on suppose $K_X^2<2p_g+4$, on obtient $p_g\geqslant 7$, puis $K_X^2<3\chi(\mathcal{O}_X)$, ce qui contredit 1.7, de la même façon que dans le cas $q_X=3$. Le cas $q_X=1$ est déjà connu (*cf.* lemme 14, p. 212 de [Bo]).

5. Surfaces de type général dont l'application canonique est de degré 3

La meilleure inégalité que l'on peut déduire dans ce cas de 1.5 et 1.6 est $K^2\geqslant 3p_g-6$. On va montrer que les cas $K^2=3p_g-6$ et $K^2=3p_g-5$ ne se produisent pas si la surface est irrégulière.

Proposition 5.1. — *Toute surface minimale de type général irrégulière dont l'application canonique est de degré* 3 *vérifie* $K^2\geqslant 3p_g-4$.

Démonstration. — Si on note $\Sigma=\varphi_K(X)$ et $n=p_g-1$, et si on suppose $K^2<3p_g-4$, on a :

$$3p_g-5\geqslant K^2\geqslant 3\deg\Sigma\geqslant 3(p_g-2),$$

donc Σ est une surface de degré $n-1$ dans $\mathbb{P}^n$, dont la liste est bien connue (*cf.* [N]). On va étudier chaque cas possible pour Σ. Tout d'abord, le théorème 1.7 donne :

$$3p_g-5\geqslant K^2\geqslant 3\chi(\mathcal{O}_X)=3p_g-3q_X+3 \text{ et } q_X\geqslant 3.$$

La remarque de la page 209 de [Bo] donne alors :

$$3p_g-5\geqslant K^2\geqslant 2p_g+q_X-4 \qquad \text{et} \qquad p_g\geqslant 4.$$

On remarque aussi que, si $|K|$ a une partie fixe non nulle Z et si $|M|$ est sa partie mobile, on a $MZ\geqslant 2$ (*cf.* [Bo], lemme 1, p. 181) et donc $K^2=M^2+MZ+KZ\geqslant 3(p_g-2)+2$ ce qui n'est pas.

On suppose d'abord $K^2=3p_g-6$. Le système linéaire $|K|$ est alors sans point base et définit un morphisme $\varphi: X\to\Sigma$ de degré 3 (*cf.* Lemme 1.5).

Si Σ est la surface de Véronèse i. e. $\mathbb{P}^2$ plongé dans $\mathbb{P}^5$ par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, il existe un diviseur D sur X tel que $K\equiv 2D$ et $p_g=6$, $D^2=3$, $KD=6$, D^2+KD impair ce qui est impossible.

Si Σ est la surface Σ_r plongée par $|h+kf|$ avec $r\leqslant n-3$ et $2k=n-1-r$, il existe des diviseurs C et D sur X tels que $K\equiv C+kD$ et $C^2=3k^2=3r$, $CD=3$, $D^2=0$ et D^2+KD est impair.

Si Σ est un cône sur la courbe rationnelle de degré $n-1$, comme dans le lemme 1.5, p. 361 de [H1], il existe un pinceau $|D|$, un diviseur effectif G avec $KG=0$ et $|K|=|(n-1)D+G|$. On a :

$$K^2=3(n-1)=KD(n-1) \qquad \text{et} \qquad KD=3 \qquad \text{et} \qquad D^2 \text{ est impair.}$$

$$3=(n-1)D^2+DG \quad \text{donc } D^2=1.$$

Il y a deux cas :

1° $n=3$, $p_g=4$, $D^2=DG=1$, $K^2=6$, $q_X\geqslant 3$, qui contredit $K^2\geqslant 2p_g+q_X-4$;

2° $n=4$, $p_g=5$, $D^2=1$, $DG=0$, $K^2=9$, $q_X=3$, $G^2=0$.

Par le théorème de l'index de Hodge, on a $G\equiv 0$ et $K\equiv 3D$. Alors, comme tout élément de $|K|$ est 1-connexe (lemme 1, p. 181 de [Bo]), D est 1-connexe. Comme $D^2>0$, le corollaire de la page 178 du même article donne $h^1(X,-D)=0$, d'où :

$$h^0(4D)=\chi(-D)=8-q_X\leqslant 5=h^0(3D)$$

ce qui est impossible puisque D est mobile.

Si maintenant $K^2=3p_g-5$, $|K|$ a un point fixe. Si $\varepsilon:\hat{X}\to X$ est l'éclatement de ce point, de diviseur exceptionnel E et si $M\equiv\varepsilon^* K_X-E$, on a $M^2=3p_g-6=(\deg\varphi_M)(\deg\Sigma)$ donc (*cf.* [B2] 1.1 *a*, p. 123) $|M|$ est sans point base et la situation est la suivante :

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Sigma \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi_K"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} M.E=1 \\ K_{\hat{X}} \equiv M+2E. \end{array}$$

Traitons rapidement les différents cas en gardant les mêmes notations :

– Si Σ est la surface de Véronèse $1=M.E=2D.E$.

– Si Σ est la surface Σ_r, $D^2+K_{\hat{X}}D=M.D+2E.D=3+2E.D$ est impair.

– Si Σ est un cône :

$$|M|=|(n-1)D+G|, \qquad MG=0.$$

Donc $MD=3=(n-1)\,D^2+DG$.

Comme $K_{\hat{X}}D=3+2DE$, D^2 est impair. Il y a deux cas :

1° $n=3$, $p_g=4$, $D^2=DG=1$, $K^2=7$, $q_X \geqslant 3$, $M^2=6$.

On a en fait $q_X=3$ à cause de la remarque de la page 209 de [Bo], qui donne $K_X^2 \geqslant 2p_g+q_X-4$.

On remarque que, comme l'intersection de M avec toute courbe irréductible est positive ou nulle, les égalités $M.E=1$ et $MG=0$ prouvent que E n'est pas composante de G donc on a $G.E \geqslant 0$.

Comme D est mobile, $D.E$ est positif ou nul et :

$$1=M.E=2D.E+G.E \qquad \text{donc} \qquad D.E=0.$$

Le point base b du pinceau $|D|$ n'est donc pas sur E. Soit $\varepsilon_2 : \tilde{X} \to \hat{X}$ l'éclatement de b, de courbe exceptionnelle E_2. Un raisonnement analogue à celui suivi par Horikawa dans la démonstration du théorème 4.1 de [H3] permet de construire un morphisme $\varphi : \tilde{X} \to \Sigma_2$, où Σ_2 est définie en 1.3, qui vérifie, avec les notations de 1.3 :

$$\varphi^*(F) \equiv \varepsilon_2^* D - E_2, \qquad \varphi^*(H) \equiv \varepsilon_2^* M.$$

On va comparer $h^0(\Sigma_2, 2H-F)=6$ à $h^0(\tilde{X}, \varphi^*(2H-F))$, qui doit lui être supérieur. On a :

$$\begin{aligned} h^0(\tilde{X}, \varphi^*(2h-f)) &= h^0(\tilde{X}, \varepsilon_2^*(2M-D)+E_2) \\ &= h^2(\tilde{X}, \varepsilon_2^*(-D-G+2E)) = h^2(\hat{X}, -D-G+2E) \\ &= h^0(\tilde{X}, K_{\hat{X}}+D+G-2E) \leqslant h^0(\hat{X}, K_{\hat{X}}+D+G). \end{aligned}$$

Pour calculer ce terme, on va montrer que $h^1(\hat{X}, -D-G)$ est nul. Comme $(D+G)^2>0$, il suffit, en utilisant le théorème A, p. 177 de [Bo] et son corollaire, de montrer que $D+G$ est 1-connexe. On rappelle qu'un diviseur effectif R est m-connexe si pour toute décomposition $R=R_1+R_2$, où R_1 et R_2 sont des diviseurs effectifs, on a $R_1 R_2 \geqslant m$.

Tout diviseur $R \in |M|$ est 2-connexe :

Si $R=R_1+R_2$ avec $R_i \geqslant 0$, $S_i=R_i+(R_i E) E$ est effectif et $S_i . E=0$. Il existe S'_i effectif sur X avec $\varepsilon^* S'_i=S_i$. On a :

$$S_1+S_2=R+E \equiv \varepsilon^* K_X.$$

Le lemme 1, p. 181 de [Bo] donne $S'_1 . S'_2 \geqslant 2$, si $S'_i \neq 0$.

Dans ce cas :

$$\begin{cases} R_1 . R_2 = S_1 . S_2 - (R_1 . E)(R_2 . E), \\ R_1 . E + R_2 . E = 1, \end{cases}$$

donc :

$$R_1 . R_2 \geqslant S_1 . S_2 = S'_1 . S'_2 \geqslant 2.$$

Si par exemple $S'_1=0$, $R_1=-(R_1 E) E$ est :

$$R_1 . R_2 = -(R_1 . E)(R_2 . E) \geqslant 2,$$

puisque :

$$R_1 . E < 0, \qquad R_1 . E + R_2 . E = 1.$$

Tout diviseur $R \in |D+G|$ est 1-connexe : si $R=R_1+R_2$ avec $R_i \geq 0$, on a $2=D(D+G)=DR_1+DR_2$, avec DR_i positif ou nul puisque D est mobile. On peut donc supposer par exemple que $DR_1 \leqslant 1$. On a alors :

$$D+R \in |M|, \qquad D+R=(D+R_2)+R_1,$$

donc $2 \leqslant (D+R_2) . R_1 = DR_1 + R_1 R_2$ et $R_1 R_2 \geqslant 1$.

On a donc :

$$h^0(\hat{X}, K_{\hat{X}}+D+G)=\chi(\hat{X}, -D-G)=5<h^0(\Sigma_2, 2h-f)$$

ce qui est impossible.

2° $n=4$, $p_g=5$, $D^2=1$, $DG=0=G^2$.

Le théorème de l'index donne $G \equiv 0$, soit $M \equiv 3D$, qui contredit l'égalité $M . E=1$.

6. Résultats généraux

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'énoncer deux inégalités concernant toutes les surfaces minimales de type général.

THÉORÈME 6.1. — *Toute surface minimale irrégulière de type général vérifie l'inégalité* $K^2 \geqslant 2p_g$.

Démonstration. — Le cas $q_X = 1$ découle de l'inégalité $K^2 \geqslant 2\chi(\mathcal{O}_X)$ (lemme 14, p. 212 de [Bo]). On suppose $q_X \geqslant 2$. Si $|K|$ est composé d'un pinceau, ce résultat est montré dans le lemme 13, p. 210 de [Bo]. On suppose que φ_K est de degré fini d. On a, si $p_g \geqslant 4$:

$$d \geqslant 4 \Rightarrow K^2 \geqslant 4(p_g - 2) \geqslant 2p_g \text{ par } 1.5 \text{ et } 1.6,$$
$$d = 3 \Rightarrow K^2 \geqslant 3p_g - 4 \geqslant 2p_g \text{ par } 5.1,$$
$$d = 2 \Rightarrow K^2 \geqslant 2p_g \text{ par } 4.8,$$
$$d = 1 \Rightarrow K^2 \geqslant 3p_g + q - 7 \geqslant 2p_g \text{ si } q \geqslant 3 \text{ par } 3.2$$

et si $q = 2$, le théorème 1.7 donne $K^2 \geqslant 3\chi(\mathcal{O}_X) = 3p_g - 3$.

Si $p_g = 3$, la remarque de la page 209 de [Bo] donne $K^2 \geqslant 2p_g + q - 4$ et laisse trois possibilités qui mettent en échec l'inégalité $K^2 \geqslant 2p_g$:

$$K^2 = 4 \text{ ou } 5, \qquad q = 2; \qquad K^2 = 5, \qquad q = 3.$$

Pour les deux premières, on a $K^2 < 3\chi(\mathcal{O}_X)$ donc (*cf.* 1.7), il existe une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée d'irrégularité 2. La proposition 4.1 donne alors :

$$K_X^2 \geqslant 2p_g + 4(q_X - 1).$$

Ces deux cas sont impossibles. Pour éliminer le troisième, on utilise le lemme suivant, qui m'a été communiqué par A. BEAUVILLE :

LEMME 6.2. — *Une surface minimale X avec $p_g = q = 3$ vérifie* $K^2 \geqslant 6$.

Démonstration. — Considérons l'application de cup-produit :

$$\varphi : \Lambda^2 H^0(X, \Omega_X^1) \to H^0(X, \Omega_X^2).$$

Si φ n'est pas bijective, il existe deux 1-formes α, β sur X, non proportionnelles, telles que $\alpha \wedge \beta = 0$. On sait alors (*cf.* [B1], prop. X.9) qu'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes de X sur une courbe de genre $\geqslant 2$; le théorème d'Arakelov (*cf.* Appendice) entraîne alors $K^2 \geqslant 8$.

On peut donc supposer φ bijective. Notons maintenant qu'il résulte de [Bo], p. 209, remark, que le système canonique de X n'a pas de partie fixe; ainsi il existe deux 2-formes ω_1 et ω_2 sur X dont les diviseurs D_1 et D_2 n'ont pas de composante commune. D'autre part, la surjectivité de φ et un argument élémentaire d'algèbre linéaire montrent qu'il existe des 1-formes α, β_1, β_2 sur X telles que :

$$\omega_1=\alpha\wedge\beta_1, \qquad \omega_2=\alpha\wedge\beta_2$$

Il en résulte que le cycle $Z(\alpha)$ des zéros de α est de dimension 0; son degré est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de X. On a donc :

$$K^2=D_1.D_2\geqslant \deg Z(\alpha)=\chi_{top}(X);$$

puisque $K^2+\chi_{top}(X)=12\chi(\mathcal{O}_X)=12$, on en déduit $K^2\geqslant 6$, ce qui démontre le lemme ainsi que la proposition 6.1.

Observons que le carré symétrique d'une courbe de genre 3 vérifie $p_g=q=3$, $K^2=6$.

THÉORÈME 6.3. — *Toute surface minimale de type général vérifie l'inégalité :*

$$K^2\geqslant 2p_g+2(q-4).$$

Il y a égalité si et seulement si la surface est isomorphe au produit de deux courbes lisses de genre 2.

Démonstration. — Le cas où $|K|$ est composé d'un pinceau est traité en 2.1. On suppose donc φ_K génériquement finie de degré d. Si $p_g=2q-4$, cas d'égalité de l'appendice, on connaît les caractères numériques de X et on trouve ainsi le cas d'égalité. On suppose donc de plus $p_g\geqslant 2q-3$. On a :

$$d=1 \Rightarrow K^2\geqslant 3p_g+q-7\geqslant 2p_g+3q-10,$$

$d=2$, on utilise le théorème 4.8,

$$d=3 \Rightarrow K^2\geqslant 3p_g-4\geqslant 2p_g+2q-7,$$

$$d\geqslant 4 \Rightarrow K^2\geqslant 4p_g-8\geqslant 2p_g+4q-14,$$

ce qui montre le théorème pour $q\geqslant 4$.

Si $q<4$, il est plus faible que l'inégalité du théorème 6.1.

C.Q.F.D.

La proposition et la construction suivantes donnent une réponse partielle au problème suivant : quelle est, pour p_g et q entiers fixés, la valeur minimale que peut prendre K^2 pour une surface minimale de type général de genre géométrique p_g et d'irrégularité q.

PROPOSITION 6.4. — *Toute surface minimale de type général vérifie l'inégalité :*

$$K^2 \geqslant 2p_g + 4(q-1),$$

pourvu que $p_g \geqslant 7(q-1)$. *S'il y a égalité et si* $p_g > 7(q-1)$, *la surface est revêtement double d'une surface réglée de même irrégularité.*

Démonstration. — Si $K^2 \geqslant 3\chi(\mathcal{O}_X)$, le résultat est une conséquence immédiate des hypothèses. Si $K^2 < 3\chi(\mathcal{O}_X)$ et $q_X > 0$, il se déduit tout aussi facilement du théorème 1.7, de la proposition 4.1 et de la remarque 4.4 pour le cas d'égalité. Si $q_X = 0$, on peut utiliser [H1].

Pour terminer, on va illustrer la proposition 6.4 en construisant, pour tout $q \geqslant 0$ et tout $p \geqslant 6q-2$ pair (pour tout $p \geqslant 3$ si $q=0$), une surface minimale de type général X dont l'application canonique est de degré 2 sur une surface réglée de même irrégularité que X avec :

$$q_X = q, \qquad p_g = p, \qquad K_X^2 = 2p_g + 4(q_X - 1).$$

Soit C une courbe lisse de genre q, M un diviseur sur C de degré $k \geqslant q$. On pose $L = 2M$ et $d = 2k$. On a, avec Riemann-Roch :

$$\deg L > \deg K_C + 1 \Rightarrow |L| \text{ est sans point base,}$$
$$\deg L > \deg K_C \Rightarrow h^0(L) = d - q + 1 \geqslant q + 1.$$

On suppose dans la suite $q > 0$ puisque le cas $q = 0$ a été complètement traité par HORIKAWA dans [H1].

On note $\mathcal{E}$ le fibré $\mathcal{O}_C \oplus L$, S la surface réglée $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ et p la projection $S \to C$.

Avec les notations de 1.3, on va montrer que $|H|$ est sans point base, non composé d'un pinceau.

Si x est point base de $|H|$, x est sur la courbe irréductible H donc pas sur la courbe irréductible B puisque $B.H = 0$. Si D est un diviseur dans $|L|$ ne passant pas par $p(x)$, $B + p^* D$ est dans $|H|$ et ne passe pas par x, donc $|H|$ est sans point base. De même si $|H|$ est composé d'un pinceau, comme $|H|$ est sans partie fixe et $H^2 > 0$, ce pinceau est rationnel et $H \equiv aG$, $h^0(H) = a+1$ (*cf.* [B2], 1.1*b*, p. 123), Mais $[H].f = 1$ donc $a = 1$ et $2 = h^0(H) = h^0(\mathcal{E}) = 1 + h^0(L)$, ce qui contredit l'inégalité $h^0(L) \geqq 2$.

Par Bertini, il existe une courbe lisse irréductible Δ' dans $|5H|$ et, comme $\Delta' B = 0$, $\Delta = \Delta' \cup B$ est une courbe lisse. Si δ est la classe du diviseur $3H$-$p^* M$

dans Pic(S), Δ est dans $|2\delta|$ et on peut construire le revêtement double $\pi: X \to S$ associé à δ et Δ. On a alors (*cf.* 1.3.) :

$$K_S+\delta \equiv -2H+p^*(K_C+L)+3H-p^*M \equiv H+p^*(K_C+M).$$

Or, pour tout diviseur D sur S, $H^i(S, D) \simeq H^i(C, p_* D)$ et $p_* H=\mathscr{E}$ (*cf.* [Ha], p. 371). On a donc, avec la formule de projection et Riemann-Roch :

$$P_g(X)=h^0(S, K_S+\delta)=h^0(S, H\otimes p^*(K_C+M))=h^0(S, \mathscr{E}\otimes(K_C+M))$$

$$=h^0(C, K_C+M)+h^0(C, K_C+L+M)=2q-2+2d,$$

$$q_X-q=h^1(S, K_S+\delta)=h^1(C, K_C+M)+h^1(C, K_C+L+M)=0.$$

$$K_X^2=2(K_S+\delta)^2=4d+8(q-1)=2p_g(X)+4(q_X-1).$$

L'application φ_{K_S+1} est birationnelle donc φ_{K_X} est de degré 2, et son image est birationnellement isomorphe à S.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] BEAUVILLE (A.). — Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, n° 54, 1978.

[B2] BEAUVILLE (A.). — L'application canonique pour les surfaces de type général, *Invent. Math.*, vol. 55, 1979, p. 121-140.

[Bo] BOMBIERI (E.). — Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. IHES*, vol. 42, 1973, p. 171-219.

[G-H] GRIFFITHS (P.) et HARRIS (J.). — *Algebraic Geometry*, New York, John Wiley, 1978.

[H0] HORIKAWA (E.). — On deformations of quintic surfaces, *Invent. Math.*, vol. 31, 1975, p. 43-85.

[H1] HORIKAWA (E.). — Algebraic surfaces of general type with small c_1^2. Part I: *Ann. of Math.*, vol. 104, 1976, p. 357-387.

[H2] Part II: *Invent. Math.*, vol. 37, 1976, p. 121-155.

[H3] Part III: *Invent. Math.*, vol. 47, 1978, p. 209-248.

[H] HORIKAWA (E.). — On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2. Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. KODAIRA, p. 79-90, Tokyo and Cambridge: Iwanami Shoten, Publishers and Cambridge University Press, 1977.

[Ha] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*, New York, Springer-Verlag, 1977.

[J] JONGMANS (F.). — Contribution à l'étude des variétés algébriques, *Mém. Soc. R. Sc. Liège*, vol. 7, 1947, p. 367-468.

[N] NAGATA (M.). — On rational surfaces I, *Mem. coll. Sc. Univ. Kyoto, Ser. A*, vol. 32, 1960, p. 351-370.

[P] PERSSON (U.). — On degenerations of algebraic surfaces, *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 189, 1977.

[R] REID (M.). — π_1 for surfaces with small c_1^2, *Springer Lecture Notes* n° 732, Proceedings Copenhagen, 1978.

APPENDICE

L'INÉGALITÉ p_g $2q-4$ POUR LES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

PAR

A. BEAUVILLE

Cette inégalité a fait couler beaucoup d'encre. Elle est établie, sauf pour un cas exceptionnel, par ROSENBLATT [R], suivant une idée de Castelnuovo; puis en général par COMESSATTI [C], dont la démonstration est incorrecte. Elle a donné lieu plus récemment à une polémique assez curieuse (*voir* [J] et [N]), d'où ressort l'absence d'une démonstration complète. Nous allons voir que l'inégalité en question résulte facilement du théorème d'Arakelov, joint à l'idée originale de Castelnuovo.

Je profite de l'occasion pour énoncer une version suffisamment générale du théorème d'Arakelov, valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque :

THÉORÈME D'ARAKELOV. — *Soient X une surface lisse minimale, B une courbe lisse, $p : X \to B$ un morphisme surjectif, dont la fibre générique est une courbe lisse connexe de genre $\geqslant 2$. Soit $\omega_{X/B} = K_X - p^* K_B$ la classe canonique relative.*

(a) *On a $(\omega_{X/B})^2 \geqslant 0$ et $(\omega_{X/B} . C) \geqslant 0$ pour toute courbe irréductible C sur X.*

(b) *On suppose de plus que p est à modules variables (c'est-à-dire que les fibres lisses de p ne sont pas toutes isomorphes). On a alors $(\omega_{X/B})^2 > 0$ et $(\omega_{X/B} . C) > 0$, sauf si C est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2 contenue dans une fibre de p.*

Démonstration. — Lorsque la fibration p est semi-stable, ces propriétés sont démontrées dans [S]. Dans le cas général, il existe un revêtement ramifié $r : D \to B$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y & Y' \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q'"] & X \arrow[d, "p"] \\
& D \arrow[from=ul, "q"'] \arrow[r, "r"'] & B
\end{tikzcd}$$

où Y' est obtenu en désingularisant $X \times_B D$, $\varepsilon : Y' \to Y$ contracte les diviseurs exceptionnels contenus dans les fibres, et où q est une fibration semi-stable.

La théorie du faisceau dualisant montre qu'on a :

$$\omega_{Y/D} \equiv \pi^* \omega_{X/B} - \Delta'$$

où Δ' est un diviseur effectif, contenu dans des fibres de q'; par suite :

$$\varepsilon^* \omega_{Y/D} \equiv \pi^* \omega_{X/B} - \Delta$$

où Δ est effectif et contenu dans des fibres de q'.

Soit C une courbe irréductible sur X. Si C est contenue dans une fibre de p, on a :

$$\omega_{X/B}.C = 2g(C) - 2 - C^2 \geqslant 0$$

puisque X est minimale; de plus l'égalité a lieu si et seulement si $C^2 = -2$, $g(C) = 0$.

Si C n'est pas contenue dans une fibre, il existe une courbe irréductible Γ dans Y', non contenue dans une fibre de q', telle que $\pi(\Gamma) = C$; on a donc $\pi_* \Gamma = dC$, avec $d \in \mathbb{N}$, et :

$$\omega_{X/B}.C = \frac{1}{d}(\pi^* \omega_{X/B}.\Gamma) = \frac{1}{d}(\varepsilon^* \omega_{Y/D} + \Delta).\Gamma = \frac{1}{d}((\omega_{Y/D}.\varepsilon_* \Gamma) + (\Delta.\Gamma))$$

d'où $\omega_{X/B}.C \geqslant 0$ d'après le cas semi-stable; l'égalité n'a lieu que si q, et donc p, sont à modules constants.

On a finalement :

$$(\omega_{Y/D})^2 = (\varepsilon^* \omega_{Y/D})^2 = (\pi^* \omega_{X/B})^2 - \Delta.\varepsilon^* \omega_{Y/D} - \Delta.\pi^* \omega_{X/B}$$

d'où $(\omega_{X/B})^2 \geqslant (\deg \pi)^{-1} (\omega_{Y/D})^2$ d'après ce qui précède; le théorème résulte alors du cas semi-stable.

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème, soient b le genre de B et f le genre de la fibre générique. On a :*

(i) $K_X^2 \geqslant 8(b-1)(f-1)$.

(ii) $\chi_{\text{top}}(X) \geqslant 4(b-1)(f-1)$.

(iii) $\chi(\mathcal{O}_X) \geqslant (b-1)(f-1)$.

La première formule exprime la positivité de $(K_X - p^* K_B)^2$; la seconde résulte de [Ch], chap. IV, th. 6 et 7. La troisième est conséquence des deux premières et de la formule de Noether :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X)).$$

Remarque. — Si on a égalité dans (i), la fibration p est à modules constants; dans (ii), p est lisse ([Ch], *loc. cit.*); dans (iii), p est lisse et à modules constants.

On se place désormais sur le corps des nombres complexes.

LEMME. — *Soient X une surface lisse, B une courbe lisse de genre b, $p : X \to B$ un morphisme surjectif à fibres connexes, f le genre d'une fibre générale F de p. On a alors $q(X) \leqslant b+f$; en cas d'égalité, X est birationnellement équivalente à $B \times F$.*

Démonstration. — Notons L le corps des fonctions rationnelles sur B. On a une suite exacte de variétés abéliennes :

$$0 \to J(B) \to \operatorname{Pic}^0(X) \to P \to 0,$$

où P est la *partie fixe* (ou $L/\mathbb{C}$-trace) de la jacobienne de la fibre générique F_L (*voir* [*L*], chap. VIII); cela entraîne (*loc. cit.*) qu'il existe un homomorphisme injectif $\varphi : P_L \to J(F_L)$. On a en particulier $\dim(P) \leqslant f$, d'où l'inégalité $q(X) \leqslant b+f$.

Supposons qu'il y ait égalité. Alors φ est un isomorphisme, et il existe un ouvert non vide (de Zariski) $\cup$ de B tel que le schéma de Picard $Pic^0(X/B)$ soit *constant* au-dessus de $\cup$. Il en est donc de même, pour tout n, des systèmes locaux $R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Quitte à rétrécir $\cup$, on peut supposer p lisse au-dessus de $\cup$; en choisissant une base symplectique de $R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, pour n fixé $\geqslant 3$, on définit un morphisme de $\cup$ dans le schéma de modules fins des courbes de genre f et de niveau n. D'après le théorème de Torelli, l'image de ce morphisme est réduite à un point, ce qui signifie que la fibration p est triviale au-dessus de $\cup$, donc que X est birationnellement équivalente à $B \times F$.

THÉORÈME. — *Soit X une surface minimale de type général. On a alors $p_g \geqslant 2q-4$; en cas d'égalité, X est isomorphe au produit d'une courbe de genre 2 et d'une courbe de genre $\geqslant 2$.*

Démonstration. — Supposons que X vérifie l'inégalité $p_g \leqslant 2q-4$ (c'est-à-dire $\chi(\mathcal{O}_X) \leqslant q-3$). D'après Castelnuovo (*cf.* [B], X.8 et X.9), il existe une courbe lisse B, de genre $b \geqslant 2$, et un morphisme surjectif à fibres connexes $p : X \to B$. On a :

$\chi(\mathcal{O}_X) \geqslant (b-1)(f-1)$ (corollaire), $\geqslant (b-2)(f-2)+b+f-3 \geqslant q-3$ (lemme).

L'hypothèse entraîne qu'on a égalité, c'est-à-dire :

$$(b-2)(f-2)=0 \qquad \text{et} \qquad b+f=q;$$

le lemme entraîne alors que X est isomorphe à $B\times F$, l'une des courbes B ou F étant de genre 2.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BEAUVILLE (A.). — Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, n° 54, 1978.

[C] COMESSATTI (A.). — Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g\geqslant 2(p_a+2)$ e ad un problema analitico ad esse collegato, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, vol. 46, 1922, p. 1-48.

[Ch] CHAFAREVITCH (I.) *et al.* — Algebraic surfaces, *Proc. of the Steklov Institute*, vol. 75, 1965.

[J] JONGMANS (F.). — Sur l'étude des surfaces algébriques caractérisées par la condition $p_g\geqslant 2(p_a+2)$, *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, s.5, 36, 1950, p. 485-494.

[L] LANG (S.). — *Abelian varieties*, Interscience Wiley, New York, 1959.

[N] NOLLET (L.). — Sur l'étude des surfaces algébriques caractérisées par la condition $p_g\geqslant 2(p_a+2)$, *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, s.5, 36, 1950, p. 897-905.

[R] ROSENBLATT (A.). — Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g\geqslant 2(p_a+2)$, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, vol. 35, 1913, p. 237-244.

[S] SZPIRO (L.). — Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov. Journées de Géométrie algébrique de Rennes, *Astérisque*, n° 64, 1979, p. 169-202.