Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2. С. 177–182.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.51
MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

# Неоднородные течения Куэтта

**С. Н. Аристов, Е. Ю. Просвиряков**

Получено решение задачи, в рамках точных решений уравнений Навье – Стокса, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное пространственно-неоднородными ветровыми напряжениями.

Ключевые слова: течение Куэтта, переопределенная краевая задача, точное решение, завихренная жидкость, функция тока, экваториальные противотечения

## 1. Постановка задачи

Известно, что течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье – Стокса и уравнением несжимаемости [1]:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{V}, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор скорости, $P$ — давление, деленное на постоянную среднюю плотность $\rho$ жидкости, $\nu$ — коэффициент кинематической вязкости, $\dfrac{d}{dt}$ — полная производная, $\nabla$ и $\Delta$ дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа соответственно [1].

Получено 27 ноября 2013 года
После доработки 13 марта 2014 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00023-а), ФСР МФП НТС (программа СТАРТ) и ИВФ РТ (программа СТАРТ).

Аристов Сергей Николаевич
asn@icmm.ru
Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Россия, г. Пермь, ул. Ак. Королёва, д. 1

Просвиряков Евгений Юрьевич
evgen_pros@mail.ru
Казанский государственный национальный исследовательский университет им. А. Н. Туполева (КАИ)
420111, Россия, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 10
Институт машиноведения УрО РАН
620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

Рассмотрим течение жидкости между двумя плоскостями, параллельными плоскости $Oxy$; ось $Oz$ направлена вверх. Условимся называть плоскость, совпадающую с плоскостью $Oxy$, нижней или абсолютно твердой, а верхнюю плоскость — свободной. Для простоты можно считать, что нижняя плоскость неподвижна. При задании на верхней плоскости скорости, направленной, например, параллельно оси $Oy$, получим течение, описанное Куэттом [2]. Физически такое течение можно интерпретировать как движения, вызванные наличием постоянной скорости на поверхности жидкости, связанной с ветром. Очевидно, что интерес представляют течения при пространственно-неоднородном движении атмосферы. Иными словами, воздушные массы перемещаются по воде со скоростью, параллельной плоскости $Oxy$, но при этом скорость зависит от координат $x$ и $y$.

Далее будем изучать течения вязкой несжимаемой жидкости, при которых ветер изменяется незначительно по сравнению с толщиной слоя, то есть $h \ll l$. Здесь $h$ и $l$ — толщина слоя жидкости и характерный размер воздушных масс соответственно. В этом случае можно пренебречь искривлением свободной поверхности; таким образом верхняя граница является плоской, следовательно, давление можно считать постоянным, а вертикальную скорость $V_z$ равной нулю. В этом случае система (1.1) — (1.2) преобразуется к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Отметим, что система (1.3) является переопределенной, поскольку для нахождения двух компонент скорости имеется три уравнения. Очевидно, что необходимо провести анализ совместности этой системы для получения решений, имеющих физический смысл. Учитывая приближение крупномасштабности, разложим компоненты скорости в ряд Тейлора по поперечным координатам и ограничимся однородными и линейными по поперечным координатам слагаемыми:

$$V_x = U + u_1 x + u_2 y, \quad V_y = V + v_1 x + v_2 y. \tag{1.4}$$

Отметим, что коэффициенты в разложении Тейлора (1.4) зависят от поперечной координаты $z$ и времени $t$. Решение (1.4) совпадает с решением Линя [3], построенного для уравнений магнитной гидродинамики, в котором гидродинамические и магнитные поля линейны по горизонтальным координатам. Подставим соотношения (1.4) в систему (1.3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях горизонтальных координат $x$ и $y$. Таким образом, осуществлен переход от краевой задачи нелинейной системы уравнений с частными производными к системе квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{L}u_2 + u_1u_2 + u_2v_2 = 0, \quad \widehat{L}v_1 + u_1v_1 + v_1v_2 = 0, \tag{1.5}$$

$$\widehat{L}u_1 + u_1^2 + u_2v_1 = 0, \quad \widehat{L}v_2 + u_2v_1 + v_2^2 = 0, \tag{1.6}$$

$$\widehat{L}U + Uu_1 + Vu_2 = 0, \quad \widehat{L}V + Uv_1 + Vv_2 = 0, \tag{1.7}$$

$$u_1 + v_2 = 0. \tag{1.8}$$

В системе уравнений (1.5)–(1.8) введен нестационарный дифференциальный оператор, описывающий диффузионные процессы:

$$\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Отметим, что система (1.5)–(1.8) была приведена в обзоре [4]. Там же были приведены все известные классические решения, принадлежащие рассматриваемому классу, и получены новые решения для указанной системы. Однако решение, которое будет получено ниже, является общим и ранее описано не было.

## 2. Исследование разрешимости краевой задачи

Для анализа переопределенной задачи вычислим функцию тока, описывающую систему уравнений (1.5)–(1.8); учитывая соотношения (1.4), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x = U + u_1 x + u_2 y,\\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y = -\left(V + v_1 x + v_2 y\right).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Интегрируя систему уравнений (2.1), получим решение для функции тока, представляющее собой квадратичную форму, которая, вообще говоря, может вырождаться в линейную форму в зависимости от значений ее коэффициентов (решений системы (1.5)–(1.8)):

$$\psi = Uy + u_1 xy + u_2 \frac{y^2}{2} - Vx - v_1 \frac{x^2}{2} - v_2 xy. \tag{2.2}$$

Запишем инварианты квадратичной формы, необходимые для анализа типа квадратичной формы или вырожденных случаев [5]. Будем рассматривать два инварианта: главный и малый. Для малого инварианта получим следующее выражение [5]:

$$\delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{v_1}{2} & \dfrac{u_1}{2} \\ \dfrac{u_1}{2} & \dfrac{u_2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left(v_1 u_2 + u_1^2\right).$$

Главный инвариант квадратичной формы записывается следующим образом [5]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{v_1}{2} & \dfrac{u_1}{2} & -\dfrac{V}{2} \\ \dfrac{u_1}{2} & \dfrac{u_2}{2} & \dfrac{U}{2} \\ -\dfrac{V}{2} & \dfrac{U}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[V\left(Uu_1 + Vu_2\right) + U\left(v_1 u_2 + u_1^2\right)\right].$$

Анализируя подсистему системы (1.5)–(1.8), состоящую из уравнений (1.6) и (1.8), получим следующее равенство:

$$v_1 u_2 + u_1^2 = 0. \tag{2.3}$$

Следовательно, малый инвариант квадратичной формы равен нулю ($\delta = 0$), поэтому тип квадратичной формы зависит от величины главного инварианта формы:

$$\Delta = -\frac{1}{8}\,(Uu_1 + Vu_2).$$

При $U = V = 0$ имеем $\Delta = 0$; следовательно, тип изолинии функции тока — прямые. При $V \neq 0$ и $Uu_1 + Vu_2 \neq 0$ изолиниями функции тока будут параболы. Отметим, что неравенства $V \neq 0$ и $Uu_1 + Vu_2 \neq 0$ можно ослабить, например, до условия $u_2 \neq 0$, поскольку можно совершить такое преобразование поворота, что одна из функций $U$ или $u_1$ обратится в нуль.

В этом случае общее решение уравнения (2.3) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= u\cos\theta\sin\theta, \qquad & u_2 &= u\cos^2\theta, \\ v_1 &= -u\sin^2\theta, \qquad & v_2 &= -u\cos\theta\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\theta$ — произвольная постоянная, а функция $u$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\widehat{L}u = 0.$$

Очевидно, что представление (2.4) обеспечивает разрешимость задачи. Из решения (2.4) следует, что в качестве полей скорости на поверхности, при которых отсутствует вертикальная компонента скорости, может быть задана только комбинация сдвигового потока (основное течение) и однородной части, которая описывается величиной скорости $u$ и углом $\theta$ (вторичное течение).

## 3. Анализ решений

Далее, для удобства, в решениях (2.4) положим $\theta = 0$; следовательно, справедливы следующие равенства:

$$u_1 = v_1 = v_2 = 0, \quad u_2 = u.$$

Таким образом, вводя новые обозначения, преобразуем соотношения (1.4) к виду:

$$V_x = U + uy, \quad V_y = V. \tag{3.1}$$

Теперь исходная система (1.5)–(1.8) может быть записана следующим образом:

$$\widehat{L}u = 0, \quad \widehat{L}V = 0, \quad \widehat{L}U + Vu = 0. \tag{3.2}$$

Ограничимся далее исследованием установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости. Сформулируем граничные условия для системы (3.2). На нижней границе выполнены условия прилипания:

$$U = V = 0, \quad u = 0; \tag{3.3}$$

на верхней границе заданы скорости:

$$U = W\cos\varphi, \quad u = \Omega, \quad V = W\sin\varphi, \tag{3.4}$$

где $\Omega = \dfrac{\partial V_x}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial x} \equiv u$ — вертикальная компонента завихренности [1] на свободной поверхности, вычисленная согласно формулам (3.1). Здесь $W$ — значение скорости на поверхности слоя жидкости, а угол $\varphi$ — это направление этой скорости относительно выбранной системы координат.

Таким образом, исходную задачу о движении жидкости, индуцированном неоднородным ветром, можно рассматривать как комбинацию задач о течении потока, вызванного однородным ветром (течение Куэтта), и течении сдвигового потока.

Решение краевой задачи (3.2)–(3.4) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} U = \frac{\Omega W \sin\varphi}{12\nu h^2} z\left(z^3 - h^3\right) + \frac{zW\cos\varphi}{h}, \\ u = \frac{\Omega z}{h}, \quad V = \frac{zW\sin\varphi}{h}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Проанализируем течение, описываемое решением (3.5) системы (3.2)–(3.4). Для начала в формулах (3.5) положим $\Omega = 0$, то есть рассмотрим течения, у которых отличны от нуля только однородные компоненты скорости $U$ и $V$. В этом случае формулы (3.5) в силу соотношений (3.1) приводятся к следующему виду:

$$V_x = \frac{zW\cos\varphi}{h}, \quad V_y = \frac{zW\sin\varphi}{h}. \tag{3.6}$$

Очевидно, что течение, описываемое формулами (3.6), является классическим течением Куэтта [2].

Далее в формулах (3.5) приравняем нулю скорость на поверхности жидкости: $W = 0$. В этом случае получим основное течение, описываемое формулой

$$V_x = \frac{\Omega z y}{h}. \tag{3.7}$$

Физически решение (3.7) интерпретируется следующим образом. Во-первых, благодаря формулам (3.7) можно описывать течение около двух перпендикулярных плоскостей (течение в прямом угле). Во-вторых, формулы (3.7) позволяют моделировать движение двух встречных потоков в середине слоя.

И наконец, перейдем к изучению комбинации основного и вспомогательных течений. Не ограничивая общности рассуждений, будем анализировать течение при $y = 0$. В этом случае из формул (3.1) следует, что из решений (3.5) необходимо рассматривать только однородные компоненты скоростей $U$ и $V$:

$$\begin{gathered} V_x = \frac{\Omega W \sin\varphi}{12\nu h^2} z\left(z^3 - h^3\right) + \frac{zW\cos\varphi}{h}, \\ V_y = \frac{zW\sin\varphi}{h}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Отметим для начала, что скорости изучаемого течения (3.8) зависят от вязкости несжимаемой жидкости, тогда как при течении Куэтта такой эффект отсутствовал [2]. Анализируя далее соотношения (3.8), заметим, что течение внутри слоя жидкости не связано с направлением ветра (заданием скорости на поверхности). Таким образом, посредством полученного решения можно описывать экваториальные противотечения [6] в Мировом океане. Также заметим, что направление ветра несущественно и для направления струи, поскольку она всегда перпендикулярна сдвигу.

# References


[1] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Fluid Mechanics,* 2nd ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.

[2] Couette M. Études sur le frottement des liquides, *Ann. Chim. Phys. Sér. 6,* 1890, vol. 21, pp. 433–510.

[3] Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.,* 1958, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.

[4] Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.,* 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662; see also: *Teor. Osn. Khim. Tekhnol.,* 2009, vol. 43, no. 5, pp. 547–566.

[5] Tyrtyshnikov E. E. *Matrix analysis and linear algebra,* Moscow: Fizmatlit, 2007 (Russian).

[6] Korotaev G. K., Mikhailova E. N., Shapiro N. B. *Theory of equatorial countercurrents in the world's ocean,* Kiev: Nauk. dumka, 1986 (Russian).


### Inhomogeneous Couette flow


Sergey N. Aristov[1], Eugeny Yu. Prosviryakov[2]

[1]Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS
Ak. Koroleva str. 1, Perm, 614013, Russia

[2]Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev
Karl Marx str. 10, Kazan, 420111, Russia

[2]Institute of Engineering Science UB RAS
Komsomolskaya str. 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

[1]asn@icmm.ru, [2]evgen_pros@mail.ru



We have obtained a solution of the problem within the exact solutions of the Navier – Stokes equations which describes the flow of a viscous incompressible fluid caused by spatially inhomogeneous wind stresses.



MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05
Keywords: Couette flow, redefined boundary-value problem, exact solution, liquid vorticity, stream function, equatorial countercurrent

Received November 27, 2013, accepted March 13, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (Russian)