Drumi Dimitrov Bajnov; Pavel S. Simeonov

Интегральные и дифференциальные неравенства для одного класса кусочно-непрерывных функций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 3, 417–426

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102102

Czechoslovak Mathematical Journal, 36 (111) 1986, Praha

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Д. БАЙНОВ, П. С. СИМЕОНОВ, София

(Поступила в редакцию 19/XI 1984 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с приложением в теории управления, радиоэлектроники, биологии и других областях знания, в последних годах, все интенсивнее разрабатывается теория дифференциальных систем с импульсным воздействием вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)\,, \quad t \neq \tau_i(x)\,; \quad \Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = B_i(x)\,, \tag{1}$$

где $f: I \times \Omega \to R^n$; $\tau_i: \Omega \to R$; $B_i: \Omega \to R^n$; $I = [0, \infty)$; Ω – область в n-мерном Евклидовом пространстве с нормой $|\cdot|$. Среди первоначально опубликованных по этой тематике работ упомянем работы [1]–[5].

Системами (1) описываются процессы и явления, которые подвергаются кратковременным воздействиям и скачкообразно меняют свое состояние. Считается, что импульсное воздействие происходит в моментах t_i когда изображающая точка (t, x) расширенного фазового пространства попадает на некоторую из гиперповерхностей σ_i с уравнением $t = \tau_i(x)$. Предполагается, что каждое решение $x(t)$ системы (1) непрерывно слева и в моментах t_i встречи с гиперповерхностью σ_i изображающая точка „мгновенно" перебрасывается с положения $(t_i, x(t_i))$ в положение $(t_i, x(t_i) + B_i(x(t_i)))$, т.е.

$$x(t_i - 0) = x(t_i)\,, \quad x(t_i + 0) = x(t_i) + \Delta x(t_i) = x(t_i) + B_i(x(t_i))\,.$$

В моментах $t \neq \tau_i(x)$ решение $x(t)$ определяется системой $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(t, x)$. При качественном исследовании систем с импульсным воздействием часто используется техника интегральных и дифференциальных неравенств. Функции, которые оцениваются этими неравенствами, имеют разрывы первого рода в моментах $\{t_i\}$ импульсного воздействия, при том, величина разрыва зависит от значения функции в точке t_i. Эта характерная особенность выделяет класс интегральных и дифференциальных неравенств, которые будем называть неравенствами для функций со скачками.

В настоящей работе, для функций со скачками, рассмотрено интегральное неравенство типа Бихари и обоснован метод сравнения для дифференциальных неравенств.

Отметим, что в [4] впервые использован аналог неравенства Гронуолла-Беллмана для функций со скачками.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ТИПА БИХАРИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО СКАЧКАМИ

Далее, если $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ – числовые последовательности и $0 \leqq s \leqq \leqq t \leqq \infty$, то символами $\sum\limits_{s<t_i<t} p_i$ и $\prod\limits_{s<t_i<t} p_i$ будем обозначить соответственно сумму и произведение чисел p_i, причем сложение (умножение) ведется по тем i, для которых $s < t_i < t$. При $s = t$, по определению, $\sum\limits_{t<t_i<t} p_i = 0$ и $\prod\limits_{t<t_i<t} p_i = 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция* $v\colon [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ *– кусочно – непрерывна на* $[t_0, \infty)$ *и имеет точки разыва первого рода, у которых нет конечной точки сгущения.*

2. *Последовательность* $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– возрастающая:* $t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$.

3. *Функция* $p(s)$ *– непрерывна и неотрицательна при* $s \geqq t_0$.

4. *Функция* $\phi(v)$ *– непрерывна и неубывающая при* $v \geqq 0$, *положительна при* $v > 0$ *и* $\phi(\lambda u) \geqq \mu(\lambda)\,\phi(u)$, *при* $\lambda > 0$ *и* $v > 0$, *где* $\mu(\lambda) > 0$ *при* $\lambda > 0$.

5. *Последовательности* $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ *и* $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *такие, что* $p_i > 0$ *и* $\beta_i \geqq 0$.

6. *При* $t \geqq t_0$ *выполнено неравенство*

$$v(t) \leqq c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqq t_i<t} p_i\, p(s)\, \phi(v(s))\, \mathrm{d}s + \sum_{t_0<t_i<t} \prod_{t_i\leqq t_j<t} p_j\beta_i v(t_i - 0) \quad (c_0 > 0)\,. \tag{2}$$

Тогда

$$v(t) \leqq \psi^{-1}\left(\psi(c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i(1+\beta_i)) + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqq t_i<t} \frac{p_i(1+\beta_i)}{\mu(p_i(1+\beta_i))}\, p(s)\, \mathrm{d}s\right) \tag{3}$$

при всех $t \geqq t_0$, *для которых*

$$\psi(c_0 \prod_{t_0<t_i<t} p_i(1+\beta_i)) + \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqq t_i<t} \frac{p_i(1+\beta_i)}{\mu(p_i(1+\beta_i))}\, p(s)\, \mathrm{d}s \in \mathrm{Dom}\, \psi^{-1}\,.$$

Здесь $\psi(v) = \displaystyle\int_a^v \frac{\mathrm{d}z}{\phi(z)}$, *где* $v \geqq a > 0$.

Доказательство. 1°. Пусть $t_0 \leqq t \leqq t_1$. Тогда неравенства (2) и (3) имеют вид

$$v(t) \leqq c_0 + \int_{t_0}^{t} p(s)\, \phi(v(s))\, \mathrm{d}s\,, \tag{4}$$

$$v(t) \leqq \psi^{-1}\left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Положим $u(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} p(s)\,\phi(v(s))\,\mathrm{d}s$. При $t \geqq t_0$ функция $u(t)$ непрерывна, неотрицательна и удовлетворяет неравенствам

$$(5) \qquad v(t) \leqq u(t)\,,$$

$$(6) \qquad u(t) \leqq c_0 + \int_{t_0}^{t} p(s)\,\phi(u(s))\,\mathrm{d}s \equiv w(t)\,.$$

Тогда, учитывая (5) и (6), получаем

$$\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s \geqq \int_{t_0}^{t} \frac{p(s)\,\phi(u(s))}{\phi(w(s))}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}(w(s))}{\phi(w(s))} = \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{\mathrm{d}z}{\phi(z)} =$$
$$= \psi(w(t)) - \psi(c_0) \geqq \psi(u(t)) - \psi(c_0) \geqq \psi(v(t)) - \psi(c_0)\,.$$

Следовательно, $\psi(v(t)) \leqq \psi(c_0) + \int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s$ откуда следует (4). Кроме того, для постоянной

$$c_1 = \psi^{-1}\left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^{t_1} p(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

и функции

$$v_1(t) = \psi^{-1}\left(\psi(c_0) + \int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

получаем следующие соотношения:

$$v(t) \leqq v_1(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1]\,,$$
$$\int_{t_0}^{t_1} p(s)\,\phi(v_1(s))\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}v_1(s) = v(t_1) - v(t_0) = c_1 - c_0\,,$$
$$\psi(c_1) - \psi(c_0) = \int_{t_0}^{t_1} p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

2°. Справедливость теоремы 1 для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$ доказываем индукцией по i.

Положим $p_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ и введем следующие постоянные и функции:

$$c_{k+1} = \psi^{-1}\left(\psi(p_k(1 + \beta_k)\,c_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

$$v_{k+1}(t) = \psi^{-1}\left(\psi(p_k(1 + \beta_k)\,c_k) + \int_{t_k}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad \text{при} \quad t \in (t_k, t_{k+1}]\,. \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Предположим, что при $k = 0, 1, \ldots, i$ и $t \in (t_k, t_{k+1}]$ выполнены следующие соотношения:

$$(7) \qquad v(t) \leqq v_{k+1}(t)\,,$$

$$(8)\qquad \psi(v(t)) - \psi(c_0 \prod_{t_0<t_j<t} p_j(1+\beta_j)) \leqq \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqq t_j<t} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}\, p(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$(9)\qquad \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,\phi(v_{k+1}(s))\,\mathrm{d}s = c_{k+1} - p_k(1+\beta_k)\,c_k\,,$$

$$(10)\qquad \psi(c_{k+1}) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^{k} p_j(1+\beta_j)) = \int_{t_0}^{t_{k+1}} \prod_{s\leqq t_j \leqq t_{k+1}} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}\, p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Пусть $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$. Тогда неравенство (2) принимает вид

$$(11)\qquad v(t) \leqq c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j + \sum_{k=0}^{i} \Big(\prod_{j=k+1}^{i+1} p_j \Big) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)\,\phi(v(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\phi(v(s))\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \sum_{k=1}^{i} \Big(\prod_{j=k}^{i+1} p_j \Big) \beta_k v(t_k - 0) + p_{i+1}\beta_{i+1} v(t_{i+1} - 0)\,.$$

Из соотношений (7), (9) и (11) получаем, что при $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$

$$(12)\qquad v(t) \leqq c_{i+1} p_{i+1}(1+\beta_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\phi(v(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Рассуждая как в пункте 1° из (12) следует, что

$$(13)\qquad \psi(v(t)) \leqq \psi(c_{i+1} p_{i+1}(1+\beta_{i+1})) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{при} \quad t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]\,.$$

Исходя из свойств функции ϕ, находим что при $x > 0$, $y > 0$ и $\lambda > 0$

$$(14)\qquad \psi(\lambda x) - \psi(\lambda y) \leqq \frac{\lambda}{\mu(\lambda)} (\psi(x) - \psi(y))\,.$$

Тогда, согласно (13), (14) и (10),

$$\psi(v(t)) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^{i+1} p_j(1+\beta_j)) \leqq$$
$$\leqq \psi(p_{i+1}(1+\beta_{i+1})\,c_{i+1}) - \psi(p_{i+1}(1+\beta_{i+1})\,c_0 \prod_{j=0}^{i} p_j(1+\beta_j)) + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s \leqq$$
$$\leqq \frac{p_{i+1}(1+\beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1+\beta_{i+1}))} \Big[\psi(c_{i+1}) - \psi(c_0 \prod_{j=0}^{i} p_j(1+\beta_j))\Big] + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s \leqq$$
$$\leqq \frac{p_{i+1}(1+\beta_{i+1})}{\mu(p_{i+1}(1+\beta_{i+1}))} \int_{t_0}^{t_{i+1}} \prod_{s\leqq t_j<t_{i+1}} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}\, p(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_{i+1}}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \prod_{s\leqq t_j<t} \frac{p_j(1+\beta_j)}{\mu(p_j(1+\beta_j))}\, p(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Этим доказана справедливость неравенства (8) для $t \in (t_{i+1}, t_{i+2}]$. Из неравенства (13), после несложных преобразований, получаем, что соотношения (7), (9) и (10) имеют место при $k = i + 1$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\phi(v) = v^m$, $m > 1$. *Тогда из неравенства*

$$v(t) \leqq \prod_{t_0 < t_i < t} p_i + \int_{t_0}^{t} \prod_{s \leqq t_i < t} p_i \, p(s) \, v^m(s) \, \mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_i < t} \Big(\prod_{t_i \leqq t_j < t} p_j \Big) \beta_i v(t_i - 0)$$

следует неравенство

$$v(t) \leqq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i(1 + \beta_i) \left[1 - (m - 1) \int_{t_0}^{t} \Big(c \prod_{t_0 < t_i < s} p_i(1 + \beta_i) \Big)^{m-1} p(s) \, \mathrm{d}s \right]^{1/(1-m)}$$

при всех $t \geqq t_0$, *для которых*

$$(m - 1) \int_{t_0}^{t} \Big(c \prod_{t_0 < t_i < s} p_i(1 + \beta_i) \Big)^{m-1} p(s) \, \mathrm{d}s < 1 \, .$$

Следствие 2. *Пусть* $\phi(v) = v$. *Тогда из неравенства*

$$v(t) \leqq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i + \int_{t_0}^{t} \prod_{s \leqq t_i < t} p_i \, p(s) \, v(s) \, \mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_i < t} \Big(\prod_{t_i \leqq t_j < t} p_j \Big) \beta_i v(t_i - 0)$$

следует неравенство

$$v(t) \leqq c \prod_{t_0 < t_i < t} p_i(1 + \beta_i) \exp \left(\int_{t_0}^{t} p(s) \, \mathrm{d}s \right), \quad \text{\textit{при}} \quad t \geqq t_0 \, .$$

Замечание 1. При $p_i \equiv 1$ и $m > 1$ результат следствия 1 совпадает с результатом леммы 2 [6]. При $p_i \equiv 1$ и $m = 1$ результат следствия 2 совпадает с результатом леммы 2 [4] и представляет собой обобщением леммы Гронуолла-Беллмана.

Отметим, что в Теореме 1, точки разрыва функции могут не совпадать с точками „скачка" $\{t_i\}$ (как это требуется в [4] и [6]), что особенно важно в случаях, когда моменты импульсного воздействия не фиксированы.

3. ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО СКАЧКАМИ

Пусть вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет системе с импульсным воздействием в фиксированных моментах времени

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = F(t, u) \quad \text{при} \quad t \neq t_i \, , \tag{15}$$

$$u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i)) \, ,$$

где $F: I \times G \to R^k$; $\psi_i: G \to R^k$; G – открытое подмножество R^k; $0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_i < \ldots$; $\lim_{i \to \infty} t_i = \infty$.

Прежде чем сформулировать теоремы о дифференциальных неравенствах введем некоторые определения.

Пространство R^k будем считать полуупорядоченным в следующем смысле: будем писать $v \leqq u$ $(v < u)$, если $v_i \leqq u_i$ $(v_i < u_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, k$.

Определение 1. Функцию $\psi\colon G \to R^k$ называем *монотонно возрастающей в* G, если при всех $u, v \in G$ из того, что $v \leqq u$ следует что $\psi(v) \leqq \psi(u)$, а из $v < u$ следует $\psi(v) < \psi(u)$.

Определение 2 [7]. Функцию F называем квазимонотонно возрастающей в G, если для любой пары (t, u) и (t, v) из $I \times G$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ имеем $F_i(t, v) \leqq F_i(t, u)$ всегда, когда $v_i = u_i$ и $v \leqq u$.

Определение 3. Решение $u^+\colon (t_0, \omega) \to R^k$ системы (15), для которого $u^+(t_0 + 0) = u_0$, называем *максимальным решением системы* (15), если любое другое решение $u\colon (t_0, \tilde{\omega}) \to R^k$, для которого $u(t_0 + 0) = u_0$, удовлетворяет неравенству $u(t) \leqq u^+(t)$ при $t \in (t_0, \omega) \cap (t_0, \tilde{\omega})$.

Аналогично определяется минимальное решение $u^-(t)$ системы (15).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция* $F\colon I \times G \to R^k$ *непрерывна и квазимонотонно возрастающая в* G.
2. *Функции* $\psi_i\colon G \to R^k$, $k = 1, 2, \ldots$ — *монотонно возрастающие в* G.
3. *Функция* $u^+\colon (t_0, \omega) \to R^k$ — *максимальное решение системы* (15), *для которого* $u^+(t_0 + 0) = u_0$, $(t_0, u_0) \in I \times G$ *и* $u(t_i + 0) \in G$ *если* $t_i \in (t_0, \omega)$.
4. *Функция* $v\colon (t_0, \tilde{\omega}) \to R^k$ $(\tilde{\omega} \leqq \omega)$ *кусочнонепрерывна с точками разрыва* $\{t_i\}$, *в которых непрерывна слева и такова, что:*

$$\begin{aligned}
&(t, v(t)) \in I \times G, && \text{при} \quad t \in (t_0, \tilde{\omega}) \text{ и } v(t_i + 0) \in G \text{ если } t_i \in (t_0, \tilde{\omega}),\\
&v(t_0 + 0) \leqq u_0, &&\\
&D\, v(t) \leqq F(t, v(t)), && \text{при} \quad t \in (t_0, \tilde{\omega}),\ t \neq t_i,\\
&v(t_i + 0) \leqq \psi_i(v(t_i)), && \text{при} \quad t_i \in (t_0, \tilde{\omega}),
\end{aligned} \tag{16}$$

где $D\, v(t)$ *некоторая производная Дини для* $v(t)$.

Тогда $v(t) \leqq u^+(t)$ *при* $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 < t_1$. Пусть $t \in (t_0, t_1] \cap (t_0, \tilde{\omega})$. Тогда согласно условию 4 Теоремы 2 и Лемме сравнения [7], IX, 2.6 (см. также [8]) будем иметь, что $v(t) \leqq u^+(t)$. В частности, $v(t_1) \leqq u^+(t_1)$ и учитывая неравенство (16) и условие 2 получаем

$$v(t_1 + 0) \leqq \psi\ (v(t_1)) \leqq \psi_1(u^+(t_1)) = u^+(t_1 + 0)\,.$$

С аналогичными рассуждениями доказывается, что $v(t) \leqq u^+(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1}] \cap (t_0, \tilde{\omega})$, $i = 1, 2, \ldots$.

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 2.

2. *Функция* $u^-: (t_0, \omega) \to R^k$ — *минимальное решение системы* (15), *для которого* $u^-(t_0 + 0) = u_0$, $(t_0, u_0) \in I \times G$, $u(t_i + 0) \in G$ *если* $t_i \in (t_0, \omega)$.

3. *Функция* $v: (t_0, \tilde{\omega}) \to R^k$ $(\tilde{\omega} \leqq \omega)$ *кусочнонепрерывна с точками разрыва* $\{t_i\}$, *в которых непрерывна слева и такова, что:*

$$
\begin{aligned}
&(t, v(t)) \in I \times G\,, && \text{при} \quad t \in (t_0, \tilde{\omega}) \ \text{и} \ v(t_i + 0) \in G \ \text{если} \ t_i \in (t_0, \tilde{\omega}),\\
&v(t_0 + 0) \geqq u_0\,, && \\
&D\, v(t) \geqq F(t, v(t))\,, && \text{при} \quad t \in (t_0, \tilde{\omega})\,, \quad t \neq t_i\,,\\
&v(t_i + 0) \geqq \psi_i(v(t_i))\,, && \text{при} \quad t_i \in (t_0, \tilde{\omega})\,,
\end{aligned}
$$

где $D\, v(t)$ *некоторая производная Дини для* $v(t)$.

Тогда $v(t) \geqq u^-(t)$ *при* $t \in (t_0, \tilde{\omega})$.

Доказательство Теоремы 3 аналогично доказательству Теоремы 2.

Отметим, что условие квазимонотонности для функции F можно отбросить в важном для приложений случае, когда уравнение сравнения (15) скалярно. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть функция* $v(t)$ *дифференцируема при* $t \neq t_i$, *в точках* t_i *непрерывна слева и удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \leqq f(t, v) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < T \leqq \infty\,, \quad t \neq t_i\,,
$$

$$
v(t_i + 0) \leqq \psi_i(v(t_i))\,, \quad v(0) \leqq u_0\,,
$$

где функция $f(t, v)$ — *непрерывна в области* $\{0 \leqq t < T,\ |v| < \infty\}$, *а функции* $\psi_i: R \to R$ — *неубывающие.*

Тогда

$$
v(t) \leqq u^+(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T) \cap [0, \omega)\,,
$$

где $u^+(t)$ — *максимальное решение начальной задачи с импульсным воздействием*

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t, u)\,, \quad \text{при} \quad t \in [0, \omega)\,, \quad t \neq t_i\,,
\tag{17}
$$

$$
u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i))\,, \quad u(0) = u_0\,.
$$

Теорема 5. *Пусть функции* f *и* ψ_i *удовлетворяют условиям Теоремы* 4 *и*

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \geqq f(t, v) \quad \text{при} \quad t \in [0, T)\,, \quad t \neq t_i\,,
$$

$$
v(t_i + 0) \geqq \psi_i(v(t_i))\,, \quad v(0) \geqq u_0\,.
$$

Тогда

$$
v(t) \geqq u^-(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T) \cap [0, \omega)\,,
$$

где $u^-(t)$ — *минимальное решение задачи* (17).

Теоремы 4 и 5 являются следствиями Теоремы 1.2 и Теоремы 1.3 из [8] и доказываются как Теоремы 2 и 3.

Следующее утверждение является частным случаем Теорем 4 и 5.

Следствие 1. *Пусть функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны при $0 \leqq t < T \leqq \infty$, а $d_i \geqq 0$ и b_i — постоянные. Пусть функция $v(t)$ дифференцируема при $t \neq t_i$, в точках t_i непрерывна слева и удовлетворят неравенству*

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \begin{matrix}\leqq\\ \geqq\end{matrix} p(t)\, v + q(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T)\,, \quad t \neq t_i\,,$$

$$v(t_i + 0) \leqq (\geqq)\, d_i\, v(t_i) + b_i\,.$$

Тогда при $t \in [0, T)$ имеет место неравенство

$$(18) \qquad v(t) \begin{matrix}\leqq\\ \geqq\end{matrix} v(0) \prod_{0<t_i<t} d_i \exp\left(\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s\right) + \int_0^t \prod_{s<t_i<t} d_i \exp\left(\int_s^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + $$
$$+ \sum_{0<t_i<t} \prod_{t_i<t_k<t} d_k \exp\left(\int_{t_i}^t p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) b_i\,.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно в Теореме 4 (Теореме 5) положить $f(t, u) = p(t)\, u + q(t)$, $\psi_i(u) = d_i u + b_i$ и заметить, что единственное решение задачи

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = p(t)\, u + q(t)\,, \quad t \in [0, T)\,, \quad t \neq t_i\,,$$

$$u(t_i + 0) = d_i\, u(t_i) + b_i\,, \quad u(0) = v(0)$$

является правой частью неравенства (18).

Отметим еще один случай, когда на функцию F не накладывается условие квазимонотонности.

Теорема 6. *Пусть функция $v\colon [0, T) \to R^k$ дифференцируема при $t \neq t_i$, в точках t_i непрерывна слева и удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \leqq Av + q(t)\,, \quad \text{при} \quad t \in [0, T)\,, \quad t \neq t_i\,,$$

$$v(t_i + 0) \leqq \psi_i(v(t_i))\,, \quad v(0) \leqq u_0\,,$$

где функция $q\colon [0, T) \to R^k$ — непрерывна; функции $\psi_i\colon R^k \to R^k$ — монотонно возрастающие в R^k и для элементов постоянной матрицы $A = (a_{ij})_1^k$ выполнено

$$(20) \qquad a_{ij} \geqq 0\,, \quad \text{при} \quad i \neq j\,.$$

Тогда

$$(21) \qquad v(t) \leqq u(t)\,,$$

где $u(t)$ — решение задачи

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au + q(t)\,, \quad t \in [0, T)\,, \quad t \neq t_i\,,$$

$$u(t_i + 0) = \psi_i(u(t_i))\,, \quad u(0) = u_0\,.$$

Доказательство. При $t \in [0, T) \cap [0, t_1)$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Av + q(t) - f(t)\,,$$

где $f(t) \geqq 0$. Из условия (20) следует, что при $t \geqq 0$ матрица e^{At} имеет неотрицательные элементы [9]. Тогда

$$v(t) = \mathrm{e}^{At}\, v(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\, q(s)\, \mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\, f(s)\, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \mathrm{e}^{At} u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)}\, q(s)\, \mathrm{d}s = u(t)\,.$$

В частности, $v(t_1) \leqq u(t_1)$ и $v(t_1 + 0) \leqq u(t_1 + 0)$. Далее, справедливость неравенства (21) для последующих интервалов $(t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$ доказывается индукцией по i.

Замечание 2. Теорема 6 остается в силе, если в (19) и (21) поменяем направление неравенств.

Замечание 3. Отметим, что в [10] получен другой аналог неравенства Бихари для функции со скачками, который является следствием Тоеремы 4.

Литература

[1] *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.:* Об устойчивости движения при наличии толчков. Сибирский мат. ж. *1* (1960), № 2, 233—237.

[2] *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.:* Случайные толчки в линейных динамических системах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Из-во АН УССР, Киев, 1963, 64—81.

[3] *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.:* Системы с толчками в заданные моменты времени. Математ. сб., т. *74*, 1967, № 2.

[4] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.:* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Дифф. уравнения, 1977, № 11, 1981—1992.

[5] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.:* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Дифф. уравнения, 1981, № 11, 1995—2001.

[6] *Борисенко С. Д.:* Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, УМЖ, т. *35*, 1983, № 2, 144—150.

[7] *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.:* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости — Москва, „Мир“, 1980, 300 с.

[8] *Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С.:* Теоремы о неравенствах, Ашхабад, ,,Ылым", 1980, 232 с.

[9] *Беккенбах Э., Беллман Р.:* Неравенства, Москва, ,,Мир", 1965, 276 с.

[10] *Перестюк Н. А., Черникова О. С.:* К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, УМЖ, т. *36*, 1984, № 2, 190—195.

Адрес авторов: 1504, София, ПК 45, Болгария.