С. Ю. Доброхотов, Интегрирование в квадратурах $2n$-мерных линейных гамильтоновых систем с n известными кососортогональными решениями, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2(320), 143–144

DOI: https://doi.org/10.4213/rm34

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ $2n$-МЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С n ИЗВЕСТНЫМИ КОСООРТОГОНАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

С. Ю. Доброхотов

Предположим,что у гамильтоновой системы $\dot{x} = JH_x(x)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ в $2n$-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^{2n}$ с гамильтонианом $H(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_x^{2n})$ имеется n-мерное инвариантное лагранжево многообразие (компактное или некомпактное) $\Lambda = (x \in \mathbb{R}_x^{2n} : x = X(\varphi))$ с накрывающей, диффеоморфной $\mathbb{R}^n$, и с координатами (на накрывающей) $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$, такими что ее траектории на Λ имеют вид $x = X(\varphi + \omega t)$, где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$-вектор "частот". Мы обозначаем через E_n $n \times n$ единичную матрицу, и через 0 матрицу нужного размера с нулевыми элементами. Условие лагранжевости означает, что в любой точке φ все касательные векторы $\partial X/\partial\varphi_j$ косоортогональны друг другу: $(X_{\varphi_j}, JX_{\varphi_k}) = 0$ для всех $j, k = 1, \dots, n$ (см., например, [1], [3], [4]). Эти векторы линейно-независимы в силу условия $dim\Lambda = n$. Гамильтонова система и траектории $x = X(\varphi + \omega t)$ порождают систему в вариациях $\dot{z} = JA(t)z$, где $A = \|\partial^2 H/\partial x_i \partial x_j(X(\varphi + \omega t)\|$.

Хорошо известно (и очевидно), что вектор-функции $Y_j(t) = X_{\varphi_j}(\varphi + \omega t)$ являются решениями этой системы. Из общей теории линейных систем следует, что знание n линейно-независимых решений n-мерной линейной системы позволяет понизить ее порядок на n. Оказывается, что для системы в вариациях знание решений Y_j позволяет явно (в квадратурах) построить все остальные ее решения. Хотя этот факт представляется весьма естественным, его доказательство элементарно, и он в неявной форме, вероятно, использовался в работах, связанных с теорией возмущений гамильтоновых систем и геометрическим квантованием, тем не менее ни мне, ни многим специалистам в области гамильтоновых систем соответствующие формулы не были известны.

Введем $2n \times n$ матрицу $Y(t) = (Y_1, \dots, Y_n)$ и $n \times n$ невырожденную матрицу ${}^tY(t)Y(t)$, где индекс t слева вверху означает транспонирование. В силу косоортогональности векторов $Y_1, \dots, Y_n$ справедливо равенство ${}^tYJY = 0$. Обозначим через $M(t)$ $n \times n$ матрицу $M(t) = \left({}^tY(t)Y(t)\right)^{-1}$ и через $[A, J] = AJ - JA$. Далее определим $n \times n$ матрицу

$$R(t) = \int_0^t M(\xi)\,{}^tY(\xi)J[A(\xi), J]Y(\xi)M(\xi)d\xi \tag{1}$$

и $(2n \times 2n)$-матрицу $\Phi(t) = \big(Y(t), Y(t)R(t) + JY(t)M(t)\big)$.

Теорема 1. *Матрица $\Phi(t)$ есть фундаментальная матрица системы $\dot{z} = JA(t)z$.*

Доказательство. Очевидно каждый из векторов $Y_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, ортогонален каждому из векторов $JY_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому совокупность этих векторов образует базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_x^{2n}$. Так как Y_j являются решениями системы в вариациях, то фундаментальная матрица может быть представлена в виде, указанном в теореме, с некоторыми матрицами $M(t)$ и $R(t)$. Выберем матрицу $M(t)$ таким образом, чтобы при $t = 0$ Φ была симплектичной, т.е. чтобы ${}^t\Phi J\Phi = J$. В силу гамильтоновости линейной системы в вариациях это свойство сохраняется для всех t (см., например, [1], [2].) Отсюда немедленно следует равенство $M(t) = \left({}^tY(t)Y(t)\right)^{-1}$. Теперь нам осталось подставить в систему в вариациях матричнозначную функцию $Y(t)R(t) + JY(t)M(t)$ и потребовать, чтобы она была ее решением. Учитывая,что $Y(t)$ есть решение этой системы, умножая затем полученное равенство на $M\,{}^tY$ слева, и интегрируя результат приходим к (1).

Замечание 1. Из доказательства ясно, что теорема справедлива для любой линейной гамильтоновой системы $\dot{z} = JA(t)z$ с $A(t) ={}^t A(t)$, у которой известно $(2n \times n)$-матричное решение, вектор-столбцы которого линейно независимы и косоортогональны. В частности теорема справедлива для системы второго порядка $(n = 1)$ с коэффициентами $a_{12} = 0$, $a_{11} = 1$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00720).

$a_{22} = a(t)$. Если обозначить $v = y_2$, $\dot v = y_1$, то для v имеем уравнение $\ddot v + a(t)v = 0$. Пусть $v_1(t)$ – некоторое его решение, тогда второе линейно независимое решение имеет вид

$$v_2 = v_1 \int_0^t \bigl(a(t) - 1\bigr)(v_1^2 - \dot v_1^2)/(v_1^2 + \dot v_1^2)^2\, dt + \dot v_1/(v_1^2 + \dot v_1^2).$$

По сравнению с хорошо известной формулой для второго решения $v_2 = v_1 \int dt/v_1^2$, эта формула имеет более громоздкий вид, но в отличие от последней она годится (без дополнительных исследований) в том случае, когда v_1 обращается в ноль в некоторых точках.

Замечание 2. Пусть Λ – тор и система $\dot x = JH_x$ вполне интегрируема в некоторой окрестности Λ. Тогда в ней можно ввести переменные действия $I = (I_1, \dots, I_n)$, сопряженные с φ (см. [1]); считаем, что равенство $I = I^0$ задает Λ. Матрица $W(\varphi, t) = X_I(\varphi + \omega t) + tX_\varphi(\varphi + \omega t)\omega_I$, где $\omega_I = \|\partial\omega_i/\partial I_j\|$, $i, j = 1 \dots, n$, является матричным решением системы вариациях. С учетом симплектичности матрицы (X_φ, X_I) имеем $X_I(\varphi) = JX_\varphi\widetilde M(\varphi) + X_\varphi(\varphi)Q(\varphi)$, где $\widetilde M(\varphi) = ({}^tX_\varphi(\varphi)X_\varphi(\varphi))^{-1}$ и $Q(\varphi)$ – гладкая $(n \times n)$-матричнозначная функция. Очевидно, $W(\varphi, t) - X_\varphi(\varphi + \omega t)Q(\varphi)$ есть $(2n \times n)$-матричное решение этой же системы, совпадающее со вторым блоком фундаментального решения Φ. Отсюда для $I = I^0$ немедленно следует ("гомологическое") уравнение для определения $Q(\varphi)$ (и тем самым для $X_I(\varphi)|_{I=I^0}$) и формула для $\omega_I|_{I=I^0}$:

$$Q(\varphi + \omega t) = Q(\varphi) + \int_0^t \widetilde M^t X_\varphi J[H_{xx}, J]X_\varphi \widetilde M\big|_{\varphi' = \varphi + \omega\xi}\, d\xi - t\omega_I,$$

$$\omega_I\big|_{I=I^0} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \widetilde M^t X_\varphi J[H_{xx}, J])X_\varphi \widetilde M\big|_{\varphi' = \varphi + \omega\xi}\, d\xi.$$

В "вырожденных" ситуациях гамильтоновы системы допускают лишь k-мерные изотропные многообразия $(k < n)$, движение на которых по-прежнему имеет вид $x = X(\varphi + \omega t)$, но φ и ω в этих формулах k-мерные векторы и соответствующая матрица $Y = X_\varphi$ состоит из k линейно независимых попарно косоортогональных векторов. Часто, однако, удается построить еще $n - k$ комплексных линейно независимых решений и $n - k$ комплексно сопряженных к ним (см. [3], [4]). Таким образом, оказывается известно $2n - k$ линейно независимых решений, образующих $2n \times (n - k)$ матрицы $Z(t)$ и $\overline Z(t)$ и $2n \times k$ матрицу $Y(t)$. Они нормированы условиями ${}^t\overline ZJZ = 2iE_{n-k}$, ${}^tZJY = O$, ${}^tZJZ = O$. В этом случае "недостающий" блок в фундаментальной матрице $\Phi(t) = (\overline Z, Z, Y, U)$ – $(2n \times k)$-матрицу $U(t)$ тоже удается выразить в квадратурах, хотя и с помощью более сложной (по виду) формулы. Введем $(k \times k)$-матрицу $M(t) = ({}^tY(t)Y(t))^{-1}$, $((n-k) \times k)$-матрицу $G(t) = \frac{i}{2}{}^tZYM$ и $(k \times k)$-матрицу

$$R = \int_0^t M^tY\Bigl(J - \frac{i}{2}(\overline Z^tZ - Z^t\overline Z)(E_{2n} - YM^tY)\Bigr)[A, J]YM\, d\xi.$$

Теорема 2. *Положим* $U = \overline ZG + Z\overline G + YR + JYM$. *Тогда при сформулированных выше предположениях* $\Phi(t) = (\overline Z, Z, Y, U)$ *есть фундаментальная матрица системы* $\dot z = JA(t)z$, *при этом* ${}^t\overline ZJU = {}^tZJU = O$, ${}^tYJU = E_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–300. [2] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. [3] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. [4] Нехорошев Н. Н. // Труды ММО. 1972. Т. 26. С. 181–198.

Институт проблем механики РАН
E-mail: dobr@ipmnet.ru

Принято редколлегией
02.03.1998