В. И. Богачев, А. В. Колесников, Интегрируемость абсолютно непрерывных преобразований мер и применения к оптимальному переносу, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 433–456

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp87

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 50 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
2005

 БОГАЧЕВ В. И., КОЛЕСНИКОВ А. В.***

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕР И ПРИМЕНЕНИЯ К ОПТИМАЛЬНОМУ ПЕРЕНОСУ[1)]

Для двух заданных борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ таких, что $d\nu/d\mu = g$, рассматриваются некоторые отображения вида $T(x) = x + F(x)$, преобразующие μ в ν. Наши основные результаты дают оценки вида

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Phi_1(|F|)\, d\mu \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_2(g)\, d\mu$$

для некоторых функций Φ_1 и Φ_2 при подходящих предположениях относительно μ. Даны применения к оптимальному переносу масс в задаче Монжа.

Ключевые слова и фразы: оптимальный перенос, гауссовская мера, выпуклая мера, логарифмическое неравенство Соболева, неравенство Пуанкаре, неравенство Талаграна.

1. Введение. В последнее десятилетие наблюдается возрастающий интерес к изучению связей между двумя классическими задачами оптимизации, поставленными Г. Монжем и Л. В. Канторовичем. В частности, были обнаружены плодотворные связи между этими задачами, нелинейными преобразованиями мер, нелинейными дифференциальными уравнениями и нелинейными функциональными неравенствами (см. [1]–[20], где можно найти дополнительные ссылки). Напомним, что общая задача Монжа имеет дело с измеримыми отображениями T из

---

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

** Scuola Normale Superiore, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, I-56100 Pisa, Italy; e-mail: sascha77@mail.ru

1) Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ 04-01-00748, НШ 1758.2003.1, DFG Grant 436 RUS 113/343/0(R), INTAS 03-51-5018 и DFG-Forschergruppe «Spectral Analysis, Asymptotic Distributions, and Stochastic Dynamics».

Эта работа была завершена во время нашего визита в университет Билефельда. Мы благодарим М. Рекнера за полезные обсуждения. Второй автор признателен за поддержку Центру математических исследований Эннио Де Джорджи (Высшая Нормальная Школа Пизы).

заданного вероятностного пространства $(X, \mathscr{A}, \mu)$ в вероятностное пространство $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, преобразующими μ в ν и минимизирующими интегралы

$$K(\mu, \nu, h, T) := \int_X h(x, T(x))\,\mu(dx)$$

для заданной неотрицательной измеримой функции h на $X \times Y$ (называемой функцией стоимости). Соответствующий инфимум обозначается через $K(\mu, \nu, h)$. При широких предположениях существует отображение T, на котором инфимум достигается. Такое отображение называется оптимальным переносом между μ и ν. Если $X = Y$ — метрическое пространство с расстоянием d, то типичными функциями стоимости являются $h(x, y) = d(x, y)^p$. М. Талаграном [19] было показано, что если $X = Y = \mathbf{R}^d$, $h(x, y) = |x - y|^2$, $\mu = \gamma$ — стандартная гауссовская мера и $\nu = g \cdot \gamma$, где $g \ln g \in L^1(\gamma)$ с обычным соглашением $0 \ln 0 = 0$, то

$$K(\gamma, g \cdot \gamma, h) \leqslant 2\,\mathrm{Ent}_\gamma(g),$$

где

$$\mathrm{Ent}_\gamma(g) := \int_X g \ln g\, d\gamma.$$

Записав T как $T(x) = x + F(x)$, представим неравенство Талаграна в виде

$$\int_X |F|^2\, d\gamma \leqslant 2 \int_X g \ln g\, d\gamma.$$

В этой работе мы рассматриваем более общую задачу, когда отображение $T = I + F$, где $I(x) = x$, преобразует меру μ в меру $g \cdot \mu$, а интерес представляет интегрируемость функций от $|F|$ при подходящих предположениях интегрируемости g. Интересный результат в этом направлении принадлежит К. Фернику [21], который рассматривал гауссовскую меру γ на сепарабельном пространстве Фреше и вероятностную меру $g \cdot \gamma$ такую, что $g \in L^p(\gamma)$ для некоторого $p > 1$. В [21] было показано, что существует такое отображение $T = U + S$, где отображение U сохраняет меру γ и S — отображение со значениями в пространстве Камерона–Мартина H меры γ, что функция $\exp(\omega |S|_H^2)$ интегрируема при достаточно малых ω (однако отображение T не обязательно является оптимальным переносом). Наш основной результат в п. 2 содержит неравенство Талаграна и оценку Ферника для оптимальных переносов как частные случаи и применим к более общим преобразованиям. Все результаты этой работы имеют следующий вид: если вероятностная мера μ преобразуется в вероятностную меру $\nu = g \cdot \mu$ отображением $T(x) = x + F(x)$, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Phi_1(|F(x)|)\,\mu(dx) \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_2(g(x))\,\mu(dx)$$

для некоторых функций Φ_1 и Φ_2 при подходящих предположениях относительно μ. Множество специальных случаев получается при варьировании класса мер μ, преобразований T и функций Φ_2. Например, если мера μ — гауссовская (или удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева) и $\Phi_2(g) = g^p$, то $\Phi_1(|F|) = \exp(\omega|F|^2)$, а если $\Phi_2(g) = g|\ln g|^p$, то $\Phi_1(|F|) = |F|^r$. В п. 2 мы имеем дело со случаем, где μ — гауссовская или строго выпуклая мера, T — довольно общее обратимое преобразование или оптимальный перенос для функций стоимости $h(x,y) = |x-y|^p$, $p \in (1,2]$. В пп. 3 и 4 рассматриваются оптимальные переносы для $h(x,y) = |x-y|^2$ в случае мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева и неравенству Пуанкаре соответственно.

Введем некоторые обозначения и терминологию. Для заданных меры μ и μ-интегрируемой функции g обозначим через $g \cdot \mu$ меру с плотностью g относительно μ. Символ $W^{p,k}(U)$ обозначает классическое пространство Соболева функций на открытом множестве $U \subset \mathbf{R}^d$, которые входят в $L^p(U)$ вместе со своими обобщенными производными до порядка k. Символ $W^{p,k}(U,\mathbf{R}^d)$ обозначает пространство отображений из U в $\mathbf{R}^d$, компоненты которых принадлежат $W^{p,k}(U)$. Класс $W^{p,k}_{\mathrm{loc}}$ состоит из таких отображений (или функций) f на $\mathbf{R}^d$, что $\zeta f \in W^{p,k}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^d)$ (соответственно $\zeta f \in W^{p,k}(\mathbf{R}^d)$) для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Предположим, что μ — борелевская мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью $\varrho \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Для заданного отображения $F \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ пусть

$$\delta_\mu F(x) := \operatorname{div} F(x) + \left\langle F(x), \frac{\nabla\varrho(x)}{\varrho(x)} \right\rangle,$$

где мы полагаем $\nabla\varrho(x)/\varrho(x) = 0$ при $\varrho(x) = 0$. Если $|F|\,\varrho$, $|F|\,|\Delta\varrho|$, $\|DF\|\,\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, то для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi\delta_\mu F\,d\mu = -\int_{\mathbf{R}^d} \langle\nabla\varphi, F\rangle\,d\mu.$$

Пусть $x^2 := |x|^2$, если $x \in \mathbf{R}^d$. Для заданного линейного оператора A на $\mathbf{R}^d$ положим

$$\det{}_2 A := \det A \exp(\mathrm{Trace}(I-A)).$$

Если A симметричен и имеет собственные значения $a_1,\ldots,a_d$, то $\det_2 A = \prod_{i=1}^d a_i e^{1-a_i}$. В частности, если $A \geqslant 0$, то $0 \leqslant \det_2 A \leqslant 1$. Если $A = I + B$, то

$$\det{}_2 A = \det(I+B)\,\exp(-\mathrm{Trace}\,B).$$

Абсолютно непрерывная мера μ на $\mathbf{R}^d$ называется выпуклой, если ее плотность имеет вид $\exp(-V)$, где V — выпуклая функция.

Говорят, что вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева, если существует такое число $C > 0$, что следующее неравенство выполнено для каждой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 \ln \varphi^2 \, d\mu - \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 \, d\mu\Big) \ln\Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 \, d\mu\Big) \leqslant 2C \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \, d\mu. \qquad (1.1)$$

Необходимым условием, чтобы μ удовлетворяла (1.1), является существование такого $\varepsilon > 0$, что $\exp(\varepsilon|x|^2) \in L^1(\mu)$ (на самом деле это верно для всякого $\varepsilon < (2C)^{-1}$, см. [22, гл. 5]). В [23] показано, что если μ — выпуклая мера, причем $\exp(\varepsilon|x|^2) \in L^1(\mu)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то μ удовлетворяет (1.1) с некоторым $C(\varepsilon)$. В качестве примера меры, удовлетворяющей (1.1), можно взять вероятностную меру с плотностью $\exp(-V)$, где V — дважды дифференцируемая выпуклая функция с $D^2V(x) \geqslant C^{-1}I$ (см. [22]).

Говорят, что вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет неравенству Пуанкаре, если для всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Big(\varphi - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi \, d\mu\Big)^2 d\mu \leqslant C_2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^2 \, d\mu. \qquad (1.2)$$

Согласно [24], всякая выпуклая мера удовлетворяет (1.2). Отметим, что всякая мера μ, удовлетворяющая (1.2), удовлетворяет также неравенству

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Big|\varphi - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi \, d\mu\Big|^p d\mu \leqslant C_p \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^p \, d\mu, \qquad \varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d), \qquad (1.3)$$

для каждого $p \geqslant 2$ и $C_p = C_2^{p/2}(1 + p^2/4)^{p/2}$. В самом деле, без потери общности можно считать, что $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi \, d\mu = 0$. Пусть $p = 2 + t$. По неравенствам Пуанкаре и Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} \, d\mu &\leqslant \Big(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi|\varphi|^{t/2} \, d\mu\Big)^2 + C_2\Big(1 + \frac{t}{2}\Big)^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^2 |\varphi|^t \, d\mu \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 \, d\mu \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^t \, d\mu + C_2\Big(1 + \frac{t}{2}\Big)^2 \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{2/(2+t)} \\
&\quad \times \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{t/(2+t)} \\
&\leqslant \Big[\int_{\mathbf{R}^d} C_2 |\nabla\varphi|^2 \, d\mu + C_2\Big(1 + \frac{t}{2}\Big)^2 \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{t/(2+t)}\Big] \\
&\quad \times \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{t/(2+t)} \leqslant C_2\Big[1 + \Big(1 + \frac{t}{2}\Big)^2\Big] \\
&\quad \times \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{t/(2+t)} \Big(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} \, d\mu\Big)^{t/(2+t)},
\end{aligned}$$

что дает наше утверждение.

Отметим, что если μ удовлетворяет (1.1) или (1.2) с некоторыми постоянными, то такова же и всякая вероятностная мера вида $\exp U \cdot \mu$, где функция U ограничена (см. [22, с. 96]).

Наконец, напомним, что по теореме Бренье [9] (см. [20, с. 66]) для всякой пары борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ с конечными вторыми моментами такой, что μ абсолютно непрерывна, найдется такая выпуклая функция V на $\mathbf{R}^d$ (которая конечна на выпуклом множестве полной μ-меры), что отображение $T = \nabla V$ преобразует μ в ν и является единственным оптимальным переносом между μ и ν для функции стоимости $h(x,y) = |x-y|^2$. Более того, предположим, что ν также абсолютно непрерывна. Зададим преобразование Лежандра V^* функции V посредством

$$V^*(x) = \sup_y [\langle x, y\rangle - V(y)].$$

Тогда функция V^* конечна и выпукла на выпуклом множестве полной ν-меры, отображение $S = \nabla V^*$ преобразует ν в μ, является единственным оптимальным переносом между ν и μ и для μ-почти всех x и y удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\nabla V^*(\nabla V(x)) = x, \quad V(x) + V^*(\nabla V(x)) = \langle x, \nabla V(x)\rangle,\\ V(x) + V^*(y) \geqslant \langle x, y\rangle.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Р. Маккэн [16] (см. также [20]) следующим образом уточнил теорему Бренье: для двух заданных борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ таких, что μ абсолютно непрерывна (никаких моментных условий не накладывается), существует отображение T, являющееся градиентом выпуклой функции и преобразующее μ в ν. Такое отображение единственно в том смысле, что всякие два таких отображения совпадают μ-почти всюду.

2. Оценки нелинейных преобразований. Сначала мы рассмотрим преобразования стандартной гауссовской меры γ на $\mathbf{R}^d$.

Теорема 2.1. *Пусть $T = I + F$ — борелевское отображение в $\mathbf{R}^d$, которое инъективно на множестве полной γ-меры и преобразует γ в меру $g \cdot \gamma$, причем $F \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Предположим, что для некоторого $\kappa \geqslant 0$ почти всюду $\langle DF(x)\,a, a\rangle \geqslant -\kappa |a|^2$ при всех $a \in \mathbf{R}^d$, а также $\det_2(I + DF) > 0$ почти всюду (т.е. $\det(I + DF) > 0$ почти всюду). Пусть θ — такая неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0, +\infty)$, что для некоторого $\omega \in (0, (4\kappa)^{-1})$ почти всюду $\theta' \leqslant \omega\theta$. Предположим также, что найдутся число $\alpha > 2(1 - 4\omega\kappa)^{-1}$ и функция $\Psi \in L^1(\gamma)$ такие, что*

$$g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|) \in L^1(\gamma), \quad \ln \det_2(I + DF)\,\theta(|F|^2) \leqslant \Psi. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma \leqslant \Big(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha}\Big)^{-1}\Big[\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma + \int_{\mathbf{R}^d}\Psi\,d\gamma\Big]. \quad (2.2)$$

В частности, если $\det_2(I+DF) \leqslant 1$ *почти всюду (что выполнено, если, например, операторы* $I+DF(x)$ *симметричны и неотрицательны), то*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma \leqslant \Big(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha}\Big)^{-1}\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma. \quad (2.3)$$

Наконец, если θ *удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в* (2.1), (2.2) *и* (2.3) *можно заменить* $\theta(\alpha|\ln g|)$ *на* $\theta(\alpha\ln g)$.

Доказательство. Предположим сначала, что имеется такое число τ, что θ постоянна на $[\tau,+\infty)$. Заметим, что $\theta(|F|^2) \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и имеют место равенство

$$\nabla\theta(|F|^2) = 2\theta'(|F|^2)\,DF\cdot F \quad (2.4)$$

и оценка

$$\theta'(|F(x)|^2)|DF(x)\cdot F(x)| \leqslant \sqrt{\tau}\sup_{t\in[0,\tau]}\theta'(t)\|DF(x)\|. \quad (2.5)$$

Чтобы это обосновать, зафиксируем шар U и возьмем последовательность отображений $F_j \in C_0^\infty$, сходящуюся к F по норме $W^{1,1}(U,\mathbf{R}^d)$ и почти всюду. Тогда $\theta(|F_j|^2) \to \theta(|F|^2)$ в $L^1(U)$. Кроме того, отображения $\nabla\theta(|F_j|^2) = 2\theta'(|F_j|^2)\,DF_j\cdot F_j$ сходятся в $L^1(U,\mathbf{R}^d)$ к отображению $2\theta'(|F|^2)\,DF\cdot F$, что доказывает, что $\theta(|F|^2)$ на U входит в $W^{1,1}(U)$ и выполнено (2.4) и (2.5).

Зафиксируем функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такую, что $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ и $|\nabla\zeta(x)| \leqslant M$. Из наших предположений вытекает, что T обладает борелевской версией, которая инъективна на множестве полной меры и имеет свойство Лузина (N). Значит, выполняется обычная формула замены переменных

$$\ln g(T) = -\delta_\gamma F + \frac{1}{2}|F|^2 - \ln\det_2(I+DF),$$

где $\delta_\gamma F(x) = \operatorname{div} F(x) - \langle F(x), x\rangle$ (см. [25] и [26, теорема 5.8.29], [27, § 6.3]). Следовательно, имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d}\ln g(T)\,\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma \geqslant -\int_{\mathbf{R}^d}\delta_\gamma F\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma - \int_{\mathbf{R}^d}\Psi\zeta\,d\gamma = 2\int_{\mathbf{R}^d}\langle DF\cdot F, F\rangle\,\theta'(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathbf{R}^d}\theta(|F|^2)\,\langle F,\nabla\zeta\rangle\,d\gamma+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma-\int_{\mathbf{R}^d}\Psi\zeta\,d\gamma\\
\geqslant\ &-2\kappa\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta'(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma\\
&+\int_{\mathbf{R}^d}\theta(|F|^2)\,\langle F,\nabla\zeta\rangle\,d\gamma-\int_{\mathbf{R}^d}\Psi\zeta\,d\gamma\\
\geqslant\ &\Bigl(\frac{1}{2}-2\omega\kappa\Bigr)\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma+\int_{\mathbf{R}^d}\theta(|F|^2)\,\langle F,\nabla\zeta\rangle\,d\gamma-\int_{\mathbf{R}^d}\Psi\zeta\,d\gamma.
\end{aligned}
$$

Равенство в цепочке соотношений выше выполнено ввиду формулы интегрирования по частям, которая применима в силу (2.4). Используя неравенство

$$
x\theta(y)\leqslant\alpha^{-1}y\,\theta(y)+|x|\,\theta(\alpha|x|),\tag{2.6}
$$

которое выполнено для каждого x и каждого $y\geqslant 0$ (имеем либо $x\leqslant y/\alpha$, либо $x>y/\alpha$), получаем

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d}\ln g(T)\,\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma\leqslant\ &\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma\\
&+\int_{\mathbf{R}^d}|\ln g(T)|\,\theta(\alpha|\ln g(T)|)\,\zeta\,d\gamma.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\Bigl(\frac{1}{2}-2\omega\kappa-\frac{1}{\alpha}\Bigr)\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,\zeta\,d\gamma\leqslant&\int_{\mathbf{R}^d}\theta(|F|^2)\,\langle F,\nabla\zeta\rangle\,d\gamma\\
+\int_{\mathbf{R}^d}|\ln g(T)|\,\theta\,(\alpha|\ln g(T)|)\,\zeta\,d\gamma&+\int_{\mathbf{R}^d}\Psi\zeta\,d\gamma.
\end{aligned}\tag{2.7}
$$

Возьмем последовательность функций $\zeta_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ таких, что

$$
\sup_{j,x}|\nabla\zeta_j(x)|\leqslant M,\qquad 0\leqslant\zeta_j(x)\leqslant 1\quad\text{и}\quad\zeta_j(x)=1\quad\text{при }|x|\leqslant j.
$$

Полагая $\zeta=\zeta_j$ в (2.7), заметим, что при $j\to\infty$ первый интеграл в правой части стремится к нулю, так как $\theta(|F|^2)|F|$ является ограниченной функцией, а последовательность $\{|\nabla\zeta_j|\}$ равномерно ограничена и стремится к нулю поточечно. Значит, (2.7) выполнено с $\zeta=1$. Формула замены переменных дает

$$
\Bigl(\frac{1}{2}-2\omega\kappa-\frac{1}{\alpha}\Bigr)\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma\leqslant\int_{\mathbf{R}^d}g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma+\int_{\mathbf{R}^d}\Psi\,d\gamma,
$$

что завершает доказательство в рассматриваемом случае. В общем случае положим $\theta_j(t)=\theta(t)$, если $t\leqslant j$, и $\theta_j(t)=\theta(j)$, если $t\geqslant j$. Поскольку $\theta_j\leqslant\theta$, то оценка (2.2) для каждого θ_j вместо θ дает эту же самую оценку для θ.

Если $\det_2(I+DF)\leqslant 1$ почти всюду, то берем $\Psi=0$. Наконец, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в неравенстве (2.6) можно заменить $\theta(\alpha|x|)$ на $\theta(\alpha x)$, что приведет к замене $\theta(\alpha|\ln g|)$ на $\theta(\alpha\ln g)$ в (2.1), (2.2) и (2.3). Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть $T_j=I+F_j$ — борелевские отображения в $\mathbf{R}^d$, инъективные на множествах полной меры и преобразующие γ в такие меры $g_j\cdot\gamma$, что плотности g_j сходятся по мере γ к вероятностной плотности g относительно γ, а отображения F_j сходятся по мере γ к отображению F. Предположим, что $F_j\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, для некоторого $\kappa\geqslant 0$ почти всюду $\langle DF_j(x)a,a\rangle\geqslant-\kappa|a|^2$ при всех $a\in\mathbf{R}^d$, а также $0<\det_2(I+DF_j)\leqslant 1$ почти всюду. Пусть θ — неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0,+\infty)$ такая, что для некоторого $\omega\in(0,(4\kappa)^{-1})$ почти всюду $\theta'\leqslant\omega\theta$. Предположим, что $\sup_j\|g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,\|_{L^1(\gamma)}<\infty$, где $\alpha>2(1-4\omega\kappa)^{-1}$. Тогда $\gamma\circ(I+F)^{-1}=g\cdot\gamma$ и*

$$\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma\leqslant\left(\frac{1}{2}-2\omega\kappa-\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\sup_j\int_{\mathbf{R}^d}g_j|\ln g_j|\,\theta(\alpha|\ln g_j|)\,d\gamma.$$

Следствие 2.2. *Пусть $T=I+F$ — оптимальный перенос между γ и $g\cdot\gamma$ для функции стоимости $h(x,y)=|x-y|^2$. Пусть функция θ — такая же, как и в теореме, где $\omega<\frac{1}{4}$. Предположим, что $g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|)\in L^1(\gamma)$, где $\alpha>2(1-4\omega)^{-1}$. Тогда*

$$\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma\leqslant\left(\frac{1}{2}-2\omega-\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{\mathbf{R}^d}g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma.$$

Доказательство. Возьмем последовательность гладких положительных вероятностных плотностей $g_j\in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$ (относительно меры γ) таких, что $g_j\to g$ почти всюду и интегралы функций $g_j|\ln g_j|\theta(\alpha|\ln g_j|)$ относительно γ сходятся к интегралу функции $g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|)$. Соответствующие оптимальные переносы $T_j=I+F_j$ сходятся по мере γ к оптимальному переносу $T=I+F$ для g ввиду леммы ниже. Кроме того, имеем $I+DF_j>0$ и $0<\det_2(I+DF_j)\leqslant 1$. Наконец, согласно теории регулярности Кафарелли, отображения T_j являются гладкими (см. [20, с. 140]).

Как и в теореме 2.1, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в обоих следствиях можно заменить $\theta(\alpha|\ln g|)$ на $\theta(\alpha\ln g)$.

Лемма 2.1. *Пусть μ — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью, локально отделенной от нуля. Предположим, что последовательность борелевских вероятностных мер ν_j на $\mathbf{R}^d$ слабо сходится к борелевской вероятностной мере ν. Пусть V_j и V — такие* *конечные выпуклые функции, что* $\mu \circ (\nabla V_j)^{-1} = \nu_j$ *и* $\mu \circ (\nabla V)^{-1} = \nu$. *Предположим, что*

$$\sup_j \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V_j| \, d\mu < \infty.$$

Тогда отображения ∇V_j *сходятся* μ*-почти всюду к* ∇V. *То же самое верно, если предположения выполнены на открытом выпуклом множестве в* $\mathbf{R}^d$.

Доказательство. Сначала проверим сходимость ∇V_j к ∇V по мере μ. Пусть U_k — замкнутый шар радиуса k с центром в начале координат. Добавляя постоянные, мы можем считать, что $\int_{U_1} V_j(x)\, dx = 0$ для всех j. Из нашего предположения и компактности вложения $W^{1,1}(U_1) \to L^1(U_1)$ вытекает, что последовательность функций $V_j|_{U_1}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L^1(U_1)$. Обозначим эту подпоследовательность снова через $\{V_j\}$. По той же причине для каждого фиксированного k последовательность функций $V_j - c_{k,j}$, где $c_{k,j} = \int_{U_k} V_j(x)\, dx$, имеет подпоследовательность $\{V_{j_n} - c_{k,j_n}\}$, которая сходится в $L^1(U_k)$. Тогда последовательность $\{c_{k,j_n}\}$ сходится, что дает сходимость $\{V_{j_n}\}$ в $L^1(U_k)$. С помощью диагонального процесса можно выбрать подпоследовательность, обозначаемую через $\{W_j\}$, которая сходится в $L^1(U_k)$ для каждого k и сходится почти всюду. Легко видеть, что если последовательность выпуклых функций на вещественной прямой сходится почти всюду, то она сходится поточечно. Применяя теорему Фубини, заключаем, что последовательность $\{W_j\}$ сходится поточечно к выпуклой функции W. Хорошо известно (см. [28, теоремы 24.5 и 25.4]), что тогда последовательность отображений ∇W_j, которые определены почти всюду, сходится почти всюду к ∇W. Значит, эта последовательность сходится в $L^1(U_k)$ для всякого k, так как она равномерно интегрируема на каждом шаре U_k с мерой Лебега ввиду оценки

$$|\partial_{x_i} \Psi(x)| \leqslant |\Psi(x + e_i)| + |\Psi(x)| + |\Psi(x - e_i)|,$$

которая выполнена для всякой выпуклой функции Ψ и всякого i. Меры $\mu \circ (\nabla W_j)^{-1}$ сходятся слабо к мере $\mu \circ (\nabla W)^{-1}$. Это означает, что $\nu = \mu \circ (\nabla W)^{-1}$. Следовательно, $\nabla V = \nabla W$ почти всюду, ибо выпуклая функция, градиент которой преобразует μ в ν, определена однозначно с точностью до постоянной. Наконец, наше рассуждение применимо ко всякой подпоследовательности в исходной последовательности, откуда следует утверждение о сходимости по мере μ.

Чтобы увидеть, что мы имеем сходимость почти всюду всей последовательности, рассмотрим последовательность $\{\nabla V_j\}$, сходящуюся по мере μ к отображению ∇V (как показано выше), и предположим, что функции V_j и V имеют нулевые интегралы по U_1, что достигается добавлением постоянных. Тогда последовательность $\{V_j\}$ сходится к V по мере μ. Если последовательность $\{V_j(x_0)\}$ не сходится к $V(x_0)$ в некоторой точке x_0, то она содержит подпоследовательность $\{V_{j_n}(x_0)\}$, отделенную от $V(x_0)$. С помощью приведенных выше рассуждений можно найти дальнейшую подпоследовательность в $\{V_{j_n}\}$, обозначаемую тем же символом, которая сходится поточечно к выпуклой функции W, отличной от V. Это дает противоречие, так как $V(x) = W(x)$ почти всюду, ибо $\{V_{j_n}\}$ сходится по мере μ к W и к V. Как отмечено выше, поточечная сходимость функций V_j влечет сходимость почти всюду их градиентов. Лемма 2.1 доказана.

Следствие 2.3. *Пусть μ — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью, локально отделенной от нуля. Предположим, что последовательность борелевских вероятностных мер ν_j слабо сходится к борелевской вероятностной мере ν и что меры μ, ν_j и ν имеют конечные вторые моменты. Пусть T_j — оптимальные переносы между μ и ν_j для функции стоимости $h(x,y) = |x-y|^2$. Если*

$$\sup_j \int_{\mathbf{R}^d} |T_j|\, d\mu < \infty,$$

то отображения T_j сходятся μ-почти всюду к оптимальному переносу между μ и ν.

Пример 2.1. (i) Предположим, что борелевская вероятностная мера μ имеет плотность, локально отделенную от нуля, и конечный второй момент. Пусть $\mathscr{P}\mathscr{D}_2(\mu)$ обозначает класс всех таких вероятностных плотностей g относительно μ, что функция $g(x)|x|^2$ является μ-интегрируемой. Для каждой функции $g \in \mathscr{P}\mathscr{D}_2(\mu)$ пусть T_g — оптимальный перенос между μ и $g\cdot\mu$ для функции стоимости $h(x,y) = |x-y|^2$. Предположим также, что μ удовлетворяет неравенству Талаграна

$$\int_{\mathbf{R}^d} |T_g(x) - x|^2\, \mu(dx) \leqslant c\, \mathrm{Ent}_\mu(g)$$

для всех $g \in \mathscr{P}\mathscr{D}_2(\mu)$. Пусть функции $g_j \in \mathscr{P}\mathscr{D}_2(\mu)$ сходятся по мере μ к $g \in \mathscr{P}\mathscr{D}_2(\mu)$, и пусть $\sup_j \mathrm{Ent}_\mu(g_j) < \infty$. Тогда $|T_{g_j} - T_g| \to 0$ в $L^r(\mu)$ для каждого $r < 2$ и $T_{g_j} \to T_g$ почти всюду. Хорошо известно, что предположения этого примера выполнены для всякой меры μ, имеющей локально отделенную от нуля плотность и удовлетворяющую логарифмическому неравенству Соболева, например, для стандартной гауссовской меры.

(ii) Пусть μ — мера Лебега на кубе $K = [0,1]^d$. Для каждой борелевской вероятностной меры ν на K обозначим через $T_\nu\colon K \to K$ оптимальный перенос между μ и ν. Как известно, существует борелевское (даже непрерывное) отображение $\eta\colon [0,1] \to [0,1]^d$, переводящее меру Лебега λ на $[0,1]$ в меру Лебега на $[0,1]^d$ (см. [26, гл. 9]). Тогда отображения $\nu \mapsto \xi_\nu := T_\nu \circ \eta$ задают параметризацию борелевских вероятностных мер на K отображениями из $[0,1]$ в K со следующим свойством непрерывности: $\lambda \circ \xi_\nu^{-1} = \nu$ для всех ν и $\xi_{\nu_j} \to \xi_\nu$ λ-почти всюду, если $\nu_j \to \nu$ слабо. Напомним, что такое представление называется параметризацией Скорохода вероятностных мер на K и может быть получено для каждого польского пространства. Этот результат для общих польских пространств принадлежит Блэкуэллу, Даббинсу и Фернику; см. соответствующие ссылки и обсуждение в [29] и [26, гл. 8], где объяснено, как частный случай $[0,1]^3$ дает общий результат.

Теорема может быть использована для установления интегрируемости функций $|F|^r$ и $\exp(\omega|F|^2)$ при подходящих предположениях интегрируемости $g|\ln g|^p$ или g^p.

Пример 2.2. (i) Положим $\theta(t) = \exp(\omega t)$. В предположении, что почти всюду $\langle DF(x)a, a\rangle \geqslant -|a|^2$ для всех $a \in \mathbf{R}^d$ и $0 < \det_2(I + DF) \leqslant 1$ (что выполнено, если $I + DF(x)$ — неотрицательный симметричный оператор), получаем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp\left(\omega|F|^2\right) d\gamma \leqslant \left(\frac{1}{2} - 2\omega - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha} |\ln g|\, d\gamma, \tag{2.8}$$

если $\omega < \frac{1}{4} - 1/(2\alpha)$. Значит, при $\omega < (p-3)(4p-4)^{-1}$ и $g \in L^p(\gamma)$ $|F|^2 \exp(\omega|F|^2) \in L^1(\gamma)$.

(ii) Положим $\alpha = 3$ и $\omega = \frac{1}{20}$. Пусть $\theta(t) = (20r)^r + t^r$, где $r \geqslant 1$. Тогда $\theta' \leqslant \omega\theta$, и при тех же предположениях относительно DF, что и в (i), получаем, что существует такое число $C(r)$, зависящее лишь от r, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2+r}\, d\gamma \leqslant C(r) \int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|^{r+1}\, d\gamma.$$

При $0 < r < 1$ аналогичным образом получаем оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2+r}\, d\gamma \leqslant C(r) \int_{\mathbf{R}^d} g[|\ln g|^{r+1} + 1]\, d\gamma,$$

используя функцию $\theta(t) = 20r + \max(1, |t|^r)$. Наконец, взяв $\theta = 1$, приходим к оценке

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\, d\gamma \leqslant C \int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\, d\gamma,$$

которую, однако, легко усилить до оценки Талаграна

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\, d\gamma \leqslant C \int_{\mathbf{R}^d} g \ln g\, d\gamma,$$

вернувшись непосредственно к доказательству теоремы при $\theta = 1$.

Более внимательное рассмотрение доказательства теоремы 2.1 показывает, что оно применимо к более общим мерам. Предположим, что μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью $f = \exp(-V)$, где V — дважды дифференцируемая выпуклая функция.

Теорема 2.2. *Пусть* $D^2V \geqslant \sigma I$ *с некоторым* $\sigma > 0$, *и пусть* $T = I + F$ *— борелевское отображение в* $\mathbf{R}^d$, *инъективное на множестве полной меры и преобразующее* μ *в меру* $g \cdot \mu$. *Предположим, что* F *и* θ *удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме* 2.1. *Пусть существуют такие число* $\alpha > 0$ *с* $1/\alpha < \sigma/2 - 2\omega\kappa$ *и функция* $\Psi \in L^1(\mu)$, *что*

$$g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|) \in L^1(\mu), \qquad \ln\det_2(I + DF)\,\theta(|F|^2) \leqslant \Psi.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\theta(|F|^2)\,d\mu \leqslant \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left[\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|)\,d\mu + \int_{\mathbf{R}^d}\Psi\,d\mu\right].$$

Если $\det_2(I + DF) \leqslant 1$ *почти всюду, то*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\theta(|F|^2)\,d\mu \leqslant \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\mu.$$

Наконец, если θ *удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то можно заменить* $\theta(\alpha|\ln g|)$ *на* $\theta(\alpha\ln g)$.

Доказательство. Рассуждение аналогично. Заметим, что $\delta_\mu F = \operatorname{div} F - \langle F, \nabla V\rangle$. Формула замены переменных принимает вид

$$\ln g(T) = -\delta_\mu F + V(T) - V - \langle\nabla V, F\rangle - \ln\det_2(I + DF).$$

Из наших предположений вытекает, что

$$V(x + F(x)) - V(x) - \langle\nabla V(x), F(x)\rangle \geqslant \sigma|F(x)|^2.$$

Следовательно, в ситуации первого шага доказательства теоремы 2.1 аналогичное рассуждение дает оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} \ln g(T)\,\theta(|F|^2)\,d\mu \geqslant \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa\right)\int_{\mathbf{R}^d}|F|^2\theta(|F|^2)\,d\mu - \int_{\mathbf{R}^d}\Psi\,d\mu.$$

Оставшаяся часть доказательств совершенно аналогична рассуждениям предыдущей теоремы.

Замечание 2.1. Для некоторых специальных функций θ наша общая оценка (2.2) может быть слегка улучшена с тем же самым доказательством. Например, предположим, что в ситуации теоремы 2.1 имеем $\theta(t) = \exp(\omega t)$ (как в примере 2.2(i)). Повторим доказательство теоремы, используя неравенство $xy \leqslant e^{x-1} + y\ln y$ вместо неравенства (2.6). Тогда для всяких фиксированных $\alpha > 0$ и $\omega < \alpha/(1 + 2\alpha\kappa)$ получаем

$$\begin{aligned}\alpha\ln g(T)\theta(|F|^2) &\leqslant \frac{1}{e}\exp\left[\alpha\ln g(T)\right] + \theta(|F|^2)\,\ln\theta(|F|^2)\\ &\leqslant \frac{1}{e}\exp\left[\alpha\ln g(T)\right] + \omega|F|^2\theta(|F|^2),\end{aligned}$$

поскольку $\ln\theta(t) \leqslant \omega t$ (в общем случае $\ln\theta(t) \leqslant \omega t + \ln\theta(0)$, если $\theta(0) > 0$). Окончательно имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp(\omega|F|^2)\, d\gamma \leqslant \frac{2}{e(\alpha - 4\omega\kappa\alpha - 2\omega)} \left[\int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha}\, d\gamma + e\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \Psi\, d\gamma\right], \tag{2.9}$$

что точнее, чем (2.8). Действительно, если $\kappa = 1$, то $\exp(\omega|F|^2) \in L^1(\gamma)$ при условии, что $g \in L^{1+\alpha}(\gamma)$ и $\omega < \alpha/(4\alpha + 2)$, в то время как (2.8) требует, чтобы $\omega < (\alpha - 2)/(4\alpha)$, в частности, чтобы получить $\omega > 0$, следует брать $\alpha > 2$. Однако при $\alpha \to \infty$ оба ограничения на ω стремятся к $\frac{1}{4}$. То же самое касается теоремы 2.2.

Стоит отметить, что в общем случае функция $\exp(\omega|F|^2)$ может не быть γ-интегрируемой при $\omega > \frac{1}{2}$, даже если g ограничена. Достаточно рассмотреть функции $T(x) := x - sx$ с $s \in (0,1)$ на вещественной прямой со стандартной гауссовской мерой γ. Ограничение $s < 1$ здесь необходимо, чтобы обеспечить наше предположение, что $T' \geqslant 0$. Без этого предположения функция $\exp(\omega|F|^2)$ не обязана быть γ-интегрируемой даже при $\omega = \frac{1}{8}$ в случае сохраняющего меру γ отображения (пример: $T(x) := x - 2x = -x$).

З а м е ч а н и е 2.2. Более внимательный анализ доказательства теоремы 2.1 показывает, что можно следующим образом ослабить предположения относительно отображения T, которое преобразует γ в $g \cdot \gamma$. Достаточно предполагать лишь, что выполняется формула замены переменных

$$G(T(x)) = \exp\left[-\operatorname{Trace}\Lambda(x) + \langle F(x), x\rangle + \frac{|F(x)|^2}{2}\right] (\det\nolimits_2(I + \Lambda(x)))^{-1},$$

где $x \mapsto \Lambda(x)$ — некоторое локально интегрируемое операторнозначное отображение такое, что $\delta_\gamma F(x) := \operatorname{Trace}\Lambda(x) - \langle F(x), x\rangle$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbf{R}^d} \delta_\gamma F \theta(|F|^2)\, d\gamma \leqslant -2\kappa \int_{\mathbf{R}^d} \theta'(|F|^2)\, |F|^2\, d\gamma.$$

Реализация этого подхода могла бы основываться на неравенстве

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \operatorname{Trace}\Lambda(x)\, dx \leqslant -\int_{\mathbf{R}^d} \langle\nabla\varphi(x),\ T(x)\rangle\, dx$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, установленном в [10] для оптимальных переносов, соответствующих достаточно общим функциям стоимости (тогда Λ есть вторая производная в смысле Александрова некоторого потенциала). Было бы интересно распространить результаты [10] на более общие функции стоимости.

З а м е ч а н и е 2.3. (i) Результат К. Ферника [21] установлен при таком же ограничении на ω, как и в оценке (2.9). Однако, как отмечено выше, Ферник рассматривал несколько иные отображения, так что было неясно, будет ли верна его оценка для оптимальных переносов.

(ii) Рассмотрим обратное отображение $S = T^{-1}$, которое является оптимальным переносом между $g \cdot \gamma$ и γ в случае функции стоимости $h(x,y) = |x-y|^2$. Заметим, что S преобразует γ в $(1/g(T)) \cdot \gamma$. Значит,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |S(x)-x|^2\,\gamma(dx) \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{g(T)} \ln \frac{1}{g(T)}\,d\gamma = \int_{\mathbf{R}^d} \ln \frac{1}{g}\,d\gamma.$$

Таким же образом, как и выше, можно показать, что если $1/g \in L^{\tau}(\gamma)$ для некоторого $\tau > 0$, то существует такое $\alpha > 0$, что $\exp(\alpha|S(x)-x|^2) \in L^1(\gamma)$, а если $\ln g \in L^{1+\tau}(\gamma)$, то $|S(x)-x|^{2(1+\beta)} \in L^1(\gamma)$ при некотором $\beta > 0$.

(iii) Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, и пусть H — ее пространство Камерона–Мартина с нормой $|\cdot|_H$ (см. [27]). Можно считать, что γ является счетным произведением стандартных гауссовских мер на прямой и задана на $\mathbf{R}^\infty$, тогда $H = l^2$ с обычной нормой. Предположим, что g — такая вероятностная плотность относительно γ, что $g \ln g \in L^1(\gamma)$. Как показано в [12], существует такое борелевское отображение $T\colon X \to X$ вида $T(x) = x + F(x)$, где $F\colon X \to H$, что $\gamma \circ T^{-1} = g \cdot \gamma$ и

$$\int_X |F(x)|_H^2\,\gamma(dx) = \inf \int_X |R(x)|_H^2\,\gamma(dx),$$

где inf берется по всем таким борелевским отображениям $I + R$, что $R\colon X \to H$ и $\gamma \circ (I+R)^{-1} = g \cdot \gamma$. Используя методы работ [12] и [6], можно показать, что следствие 2.2 распространяется на эту ситуацию и

$$\int_X |F|^2 \theta(|F|_H^2)\,d\gamma \leqslant \left(\frac{1}{2} - 2\omega - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \int_X g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma.$$

Рассмотрим теперь функции стоимости $h(x,y) = p^{-1}|x-y|^p$, где $1 < p \leqslant 2$. Легко доказать, что сопряженная функция для $h_0(x) := p^{-1}|x|^p$ равна

$$h_0^*(x) = \frac{p-1}{p^{1/(p-1)}}|x|^q,$$

где $1/p + 1/q = 1$. Известно, что соответствующий оптимальный перенос T между γ и $g \cdot \gamma$ имеет вид

$$T(x) = x + \nabla h_0^*(\nabla\Phi(x))$$

для некоторого h-вогнутого локально липшицева потенциала Φ (см. [13] или [20, с. 92]). Здесь h-вогнутость Φ означает, что $\Phi = (\Phi^h)^h$, где $\psi^h(x) = \inf_y[h(x,y) - \psi(y)]$. Ренормализуя Φ, можно считать, что

$$T(x) = x + |\nabla\Phi(x)|^{q-2}\nabla\Phi(x).$$

Пусть $A_p(x) := D[|x|^{q-2}x]$. Имеем

$$(A_p(x))_{ij} = |x|^{q-2}\Big(\delta_{ij} + (q-2)\,\frac{x_i x_j}{|x|^2}\Big).$$

Предположим дополнительно, что $\nabla\Phi \in W^{1,1}_{\text{loc}}$. Тогда можно показать, что упомянутая выше h-вогнутость Φ дает

$$A_p^{-1}(\nabla\Phi) + D^2\Phi \geqslant 0.$$

Это проверено в [20, с. 103] при более ограничительных предположениях относительно h (которые не выполнены в нашем случае), но дополнительная дифференцируемость $\nabla\Phi$ позволяет прийти к тому же самому заключению. Из оценки $|x|^{q-2}I \leqslant A_p(x) \leqslant (q-1)|x|^{q-2}I$ следует, что

$$D^2\Phi \geqslant -|\nabla\Phi|^{2-q}I.$$

Теорема 2.3. *Пусть $T = I + F$ — оптимальный перенос между γ и $g\cdot\gamma$ для функции стоимости $h(x,y) = p^{-1}|x-y|^p$, где $1 < p \leqslant 2$. Предположим дополнительно, что $\nabla\Phi \in W^{1,1}_{\text{loc}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для каждого $\beta > 0$ имеем*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2(\beta+1)}\,d\gamma \leqslant 2^{\beta+1}\int_{\mathbf{R}^d} |2\beta(q-1) + \ln g|^{\beta+1} g\,d\gamma. \tag{2.10}$$

(ii) *При $\alpha > 0$ и $0 < \omega < \alpha/(2 + 4(q-1)\,\alpha)$ имеем*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp(\omega|F|^2)\,d\gamma \leqslant \frac{2}{e(\alpha - 4\alpha\omega(q-1) - 2\omega)}\int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha}\,d\gamma. \tag{2.11}$$

В частности, $\exp(\omega|F|^2) \in L^1(\gamma)$, если $g \in L^{1+\alpha}(\gamma)$.

(iii) *Если θ — неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0,+\infty)$, причем $\theta' \leqslant \omega\theta$ для некоторого $\omega < (\alpha-1)\times(4\alpha(q-1))^{-1}$, где $\alpha > 1$, то*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2\theta(|F|^2)\,d\gamma \leqslant 2\Big(1 - 4\omega q + 4\omega - \frac{1}{\alpha}\Big)^{-1}\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\,\theta(\alpha|\ln g|)\,d\gamma. \tag{2.12}$$

Доказательство. Рассуждение совершенно такое же, как и выше. Заметим лишь, что $F = |\nabla\Phi|^{q-2}\nabla\Phi$, значит, $|F| = |\nabla\Phi|^{q-1}$. Следовательно, в случае (iii) имеем

$$\begin{aligned}\langle\nabla\theta\,(|\nabla\Phi|^{2q-2}),\ F\rangle &= (2q-2)\,\theta'(|\nabla\Phi|^{2q-2})\,|\nabla\Phi|^{3q-6}\langle D^2\Phi\cdot\nabla\Phi,\ \nabla\Phi\rangle \\ &\geqslant -(2q-2)\,\omega\theta\,(|\nabla\Phi|^{2q-2})\,|\nabla\Phi|^{2q-2} = -(2q-2)\,\omega\,|F|^2\,\theta(|F|^2).\end{aligned}$$

Важно также, что $0 \leqslant \det_2 DT \leqslant 1$, поскольку $DT = A_p(\nabla\Phi)(A_p^{-1}(\nabla\Phi) + D^2\Phi)$ есть произведение двух неотрицательных матриц. Оставшаяся часть доказательства повторяет рассуждения из теоремы 2.1 применительно к оцениванию интеграла от функции $\ln g(T)\,\theta(|\nabla\Phi|^{2(q-1)})$, дающей в итоге неравенство для интеграла от функции

$$|\nabla\Phi|^{2(q-1)}\theta(|\nabla\Phi|^{2(q-1)}) = |F|^2\theta(|F|^2).$$

Теорема 2.3 доказана.

Как отмечено выше, предположение $\nabla\Phi \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ является довольно ограничительным и представляется необязательным. По-видимому, избавиться от этого предположения можно с помощью приближения $\nabla\Phi$ в общем случае переносами с более хорошими свойствами дифференцируемости (что, однако, все еще нуждается в обосновании) или путем развития идеи из замечания 2.2 в настоящей ситуации.

3. Случай мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева. В этом пункте мы рассматриваем только квадратичную функцию стоимости. Покажем, что результат предыдущего пункта верен (качественно) также для мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева. Оценки, которые мы получаем здесь для произвольных мер μ, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева, в общем слабее, чем в гауссовском случае. Однако выполнено то же самое соотношение: если $g \in L^{1+\varepsilon}(\mu)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то функция $\exp(\omega|T(x) - x|^2)$ интегрируема для достаточно малых ω. Похожий результат установлен для степенных оценок.

Мы применим следующий замечательный результат, доказанный С. Г. Бобковым и Ф. Гётце в [3]: для всякой меры, удовлетворяющей (1.1), выполняется неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\Big[f - \int_{\mathbf{R}^d} f\,d\mu\Big]\,d\mu \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \exp(C|\nabla f|^2)\,d\mu. \tag{3.1}$$

В гауссовском случае это неравенство было доказано в [30] с худшей постоянной (см. также [27, § 5.6]).

Для доказательства основного результата этого пункта нам понадобится вспомогательная оценка. Предположим, что μ удовлетворяет (1.1). Пусть V — такая выпуклая функция, что $T = \nabla V$ есть оптимальный перенос между μ и $g\cdot\mu$. Заметим, что $|\nabla V| \in L^2(\mu)$, так как μ и ν обладают конечными вторыми моментами, так что $|T| \in L^2(\mu)$. Функции V и V^* выпуклы, значит, $V(x) \geqslant M_1 - M_2|x|$ и $V^*(x) \geqslant M_1 - M_2|x|$ для некоторых чисел M_1 и M_2. Это показывает, что функции $\exp[t(x^2/2 - V(x))]$ и $\exp[t(x^2/2 - V^*(x))]$ являются μ-интегрируемыми, если $t < C^{-1}$. Более того, справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\Big[\frac{1}{C}\Big(\frac{x^2}{2} - V^*(x)\Big)\Big]\,\mu(dx) \leqslant \exp\Big[\frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(V(x) - \frac{x^2}{2}\Big)\,\mu(dx)\Big]. \tag{3.2}$$

Обоснование аналогично доказательству неравенства инфимум-свертки в [22, гл. 6]. Для простоты обозначений предположим, что $C = 1$. Для данной вещественной функции f на $\mathbf{R}^d$ положим

$$\tilde{f}(x) = \inf_y \left[f(y) + \frac{|x-y|^2}{2}\right].$$

В [22, гл. 6] показано, что для всякой ограниченной измеримой функции f имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \tilde{f}\, d\mu \leqslant \exp \int_{\mathbf{R}^d} f\, d\mu. \tag{3.3}$$

Желаемый результат формально получается подстановкой $f(x) := V(x) - x^2/2$, поскольку тогда $\tilde{f}(x) - x^2/2 = -V^*(x)$. Однако сведение к ограниченным функциям не является непосредственным и легче модифицировать соответствующее рассуждение. Таким образом, для заданной функции $f \in L^1(\mu)$ нам надо показать, что $\exp \tilde{f} \in L^1(\mu)$ и выполнено (3.3). Можно считать, что интеграл f относительно μ равен нулю. Пусть

$$g_n := \exp\min(\tilde{f}, n)\Bigl(\int_{\mathbf{R}^d} \exp\min(\tilde{f}, n)\, d\mu\Bigr)^{-1}.$$

Тогда $\nu_n := g_n \cdot \mu$ является вероятностной мерой и $\tilde{f} \in L^1(\nu_n)$, ибо $\tilde{f} \leqslant f$ и потому $\max(\tilde{f}, 0) \in L^1(\mu)$, а если $\tilde{f}(x) < 0$, то $\tilde{f}(x)\exp\tilde{f}(x) \leqslant 1$. Известно (см. [22, гл. 6]), что логарифмическое неравенство Соболева дает оценку $K(\mu,\nu) \leqslant \mathrm{Ent}_\mu(d\nu/d\mu)$, где $K(\mu,\nu) := K(\mu,\nu,h)$ с $h(x,y) = |x-y|^2/2$. Поскольку $\tilde{f}(x) \leqslant f(y) + |x-y|^2/2$, то мы имеем, согласно неравенству Канторовича–Рубинштейна (см. [20, с. 19]),

$$\int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f}\, d\nu_n = \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f}\, d\nu_n - \int_{\mathbf{R}^d} f\, d\mu \leqslant K(\mu, \nu_n) \leqslant \mathrm{Ent}_\mu(g_n).$$

Значит,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f}\exp\min(\tilde{f}, n)\, d\mu + \ln\|\exp\min(\tilde{f}, n)\|_{L^1(\mu)} \\ \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \min(\tilde{f}, n)\exp\min(\tilde{f}, n)\, d\mu.$$

Так как $\min(\tilde{f}, n) \leqslant \tilde{f}$, то заключаем, что $\|\exp\min(\tilde{f}, n)\|_{L^1(\mu)} \leqslant 1$. По теореме Фату это дает интегрируемость $\exp\tilde{f}$ и оценку $\|\exp\tilde{f}\|_{L^1(\mu)} \leqslant 1$.

Теорема 3.1. *Пусть μ удовлетворяет* (1.1), *и пусть $T(x) = x + \nabla\Phi(x)$ — оптимальный перенос между μ и $g \cdot \mu$. Тогда*

$$\sqrt{\frac{\omega}{4C}}\,(1 - \sqrt{16\,\omega C})\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\Phi|^2 \exp(\omega|\nabla\Phi|^2)\, d\mu + \int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega|\nabla\Phi|^2)\, d\mu \\ \leqslant \Bigl(\int_{\mathbf{R}^d} g^p\, d\mu\Bigr)^{1/p},$$

где $\omega \geqslant 0$, $16\omega C < 1$ *и* $p = 1/(1-\sqrt{\omega C})$. *В частности, функция* $|\nabla\Phi|^2 \exp(\omega|\nabla\Phi|^2)$ *входит в* $L^1(\mu)$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, (1.1) дает включение $\exp(\varepsilon x^2) \in L^1(\mu)$ для всякого $\varepsilon < (2C)^{-1}$. Так как $g \in L^p(\mu)$, то функция $|x|^2 g(x)$ является μ-интегрируемой. По формуле замены переменных имеем $|T|^2 \in L^1(\mu)$, т.е. $|\nabla\Phi| \in L^2(\mu)$. Как хорошо известно, ввиду (1.1) это дает $\Phi \in L^2(\mu)$. Поскольку потенциал Φ определен с точностью до постоянной, можно выбрать Φ так, что $\int_{\mathbf{R}^d} \Phi\, d\mu = 0$. Напомним, что $\Phi(x) + x^2/2 = V(x)$ для некоторой выпуклой функции V. Зафиксируем число r, $0 < r < C^{-1}$. Неравенство (3.2) дает

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[\frac{1}{C}\left(\frac{x^2}{2} - V^*(x)\right)\right]\mu(dx) \leqslant \exp\left[\frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\left(V(x) - \frac{x^2}{2}\right)\mu(dx)\right] = 1. \tag{3.4}$$

Используя (1.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2)\,\mu(dx) \\
&\quad = r\int_{\mathbf{R}^d}\left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2}\right] \\
&\qquad \times \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

В силу неравенства $xy \leqslant x\ln x - x + e^y$ последнее не превосходит

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV(x)\right]\mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^d}\exp\left[r\,\frac{|\nabla V(x)|^2}{2} - rV^*(\nabla V(x))\right]\mu(dx) \\
&\quad + 2\omega\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega\,|\nabla V(x) - x|^2)\,\mu(dx) \\
&\quad - 2\int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{r}{2} - 2\omega\right)\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2)\,d\mu \\
&\quad + 2\int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2)\,d\mu \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV(x)\right]\mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^d}\exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV^*(x)\right] g(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Выражение в правой части конечно, согласно неравенству Гёльдера,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV^*(x)\right] g(x)\,\mu(dx) \\
&\quad \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[rq\,\frac{x^2}{2} - rq\,V^*(x)\right]\mu(dx)\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbf{R}^d} g^p\,d\mu\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

где $1/p+1/q=1$ и $rq \leqslant 1/C$. Согласно (3.4), имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV^*(x)\right] g(x)\,\mu(dx) \leqslant \|g\|_{L^p(\mu)}.$$

Применив (3.1), находим

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r\,\frac{x^2}{2} - rV(x)\right] \mu(dx) \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \exp[Cr^2|x-\nabla V(x)|^2]\,\mu(dx).$$

Выбрав $r^2 = \omega/C$ (что дает $r < C^{-1}$, поскольку $\omega C < 1$), получаем желаемый результат.

Отметим, что требование $\omega < (16C)^{-1}$ ограничительнее условий в п. 2.

Теорема 3.2. *Для каждого* $\beta > 0$ *найдутся такие числа* $A = A(\beta, C)$ *и* $B = B(\beta, C)$, *зависящие только от* β *и* C, *что если* μ *удовлетворяет* (1.1) *и* $T(x) = x + \nabla\Phi(x)$ *есть оптимальный перенос между* μ *и* $g\cdot\mu$, *то*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla\Phi|^{2(1+\beta)}\,d\mu \leqslant A + B\left(\int_{\mathbf{R}^d} |\ln g|^{1+\beta} g\,d\mu\right)^2.$$

Доказательство. Заметим, что функция $|T(x)|^{2+2\beta}$ является μ-интегрируемой в силу формулы замены переменных и μ-интегрируемости функции $|x|^{2+2\beta}g(x)$, которая вытекает из оценки

$$|x|^{2+2\beta}g(x) \leqslant |x|^{2+2\beta}\exp(\varepsilon x^2) + |\varepsilon^{-1}\ln g|^{1+\beta} g,$$

где $0 < \varepsilon < (2C)^{-1}$. Таким же образом, как и в теореме 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2C}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)}\,\mu(dx)\\
&\quad= \frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2}\right]|\nabla V(x) - x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\quad= \frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\left[\frac{x^2}{2} - V(x)\right]|\nabla V(x) - x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\qquad+ \frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\left[\frac{x^2}{2} - V^*(x)\right]|\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} g(x)\,\mu(dx).
\end{aligned}$$

Считая, что $\int_{\mathbf{R}^d}(V(x) - x^2/2)\,\mu(dx) = 0$ и используя неравенство $xy \leqslant e^y + x\ln x - x$ и оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[\frac{1}{C}\left(\frac{x^2}{2} - V^*\right)\right]\mu(dx) \leqslant \exp\left[\frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\left(V(x) - \frac{x^2}{2}\right)\mu(dx)\right],$$

находим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{C}\int_{\mathbf{R}^d}\Big[\frac{x^2}{2}-V^*(x)\Big]\,|\nabla V^*(x)-x|^{2\beta}g(x)\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant \int_{\mathbf{R}^d}\exp\Big[\frac{1}{C}\Big(\frac{x^2}{2}-V^*(x)\Big)\Big]\,\mu(dx)\\
&\qquad+\int_{\mathbf{R}^d} g(x)\,|\nabla V^*(x)-x|^{2\beta}\,\ln\big(g(x)|\nabla V^*(x)-x|^{2\beta}\big)\,\mu(dx)\\
&\qquad-\int_{\mathbf{R}^d} g(x)\,|\nabla V^*(x)-x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant 1+\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\ln\big(g(\nabla V(x))|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\big)\,\mu(dx)\\
&\qquad-\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant 1+\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\ln|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\qquad+\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx)\Big)^{\beta/(1+\beta)}\\
&\qquad\times\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\ln g(\nabla V(x))|^{\beta+1}\,\mu(dx)\Big)^{1/(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\beta}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\ln|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2\beta+1}\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx)\Big)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Кроме того, согласно неравенству Гёльдера и (1.3), имеем

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d}\Big[\frac{x^2}{2}-V(x)\Big]|\nabla V(x)-x|^{2\beta}\,\mu(dx)\\
&\quad\leqslant\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2(1+\beta)}\,\mu(dx)\Big)^{\beta/(1+\beta)}\\
&\qquad\times\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\Big|\frac{x^2}{2}-V(x)\Big|^{1+\beta}\,\mu(dx)\Big)^{1/(1+\beta)}\\
&\quad\leqslant\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2(1+\beta)}\,\mu(dx)\Big)^{\beta/(1+\beta)}\\
&\qquad\times\Big(\int_{\mathbf{R}^d}\Big|\frac{x^2}{2}-V(x)\Big|^{2(1+\beta)}\,\mu(dx)\Big)^{1/(2(1+\beta))}\\
&\quad\leqslant K(\beta,C)\Big(\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla V(x)-x|^{2(1+\beta)}\,\mu(dx)\Big)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Положив

$$t = \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)}\, \mu(dx),$$

получаем

$$\frac{t}{2C} \leqslant 1 + t^{\beta/(1+\beta)} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\ln g|^{1+\beta} g\, d\mu \right)^{1/(1+\beta)} + (2\beta + K(\beta, C)) t^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.$$

Это соотношение влечет наше утверждение.

4. Случай мер, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре. В общем случае функция $|\nabla\Phi|^2$ не является экспоненциально интегрируемой для мер, удовлетворяющих классическому неравенству Пуанкаре. Действительно, рассмотрим следующие меры на вещественной прямой: $\mu = \frac{1}{2} e^{-|x|}\, dx$ и $\nu = e^{-2|x|}\, dx$. В этом случае $T(x) = 2x$ и $T(x) - x = x$. Ясно, что $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^p(\mu)$ для каждого $p > 0$, но функция $\exp(\omega |T(x) - x|^2)$ не является μ-интегрируемой, если $\omega > 0$. Однако известно (см., например, [15], [31]), что если μ удовлетворяет классическому неравенству Пуанкаре, то $K(\mu, g \cdot \mu, h)$ с $h(x, y) = |x - y|^2$ можно оценить через $\|g\|^2_{L^2(\mu)}$. Здесь мы доказываем L^p-оценки для оптимальных переносов в случае мер, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре (1.2). Идея доказательства видна из следующего простого рассуждения в случае $p = 2$. Сохраняя обозначения из предыдущего пункта и выбирая V так, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(V(x) - \frac{x^2}{2} \right) \mu(dx) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2\, \mu(dx) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} \right] \mu(dx) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right] g(x)\, \mu(dx) \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right] g(x)\, \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right] (g(x) - 1)\, \mu(dx) \\
&\quad \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} (g-1)^2\, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right]^2 \mu(dx) \right)^{1/2} \\
&\quad = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (g^2 - 1)\, d\mu \right)^{1/2} \left(C_2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2\, \mu(dx) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2\, \mu(dx) \leqslant 4C_2 \int_{\mathbf{R}^d} (g^2 - 1)\, d\mu.$$

Теорема 4.1. *Пусть μ удовлетворяет* (1.2). *Тогда для каждого $\beta > 0$ имеем*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx)\right]^{1/(2(\beta+1))} \\
&\qquad \leqslant C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))}\left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2\,d\mu\right)^{1/(2(1+\beta))} + C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Сначала заметим, что функция $|T(x)|$ входит во все $L^p(\mu)$. Это легко усмотреть из формулы замены переменных и μ-интегрируемости функции $|x|^p g(x)$, которая вытекает из неравенства Коши и μ-интегрируемости функции $|x|^{2p}$, даваемой неравенством Пуанкаре. Таким же образом, как и выше, оцениваем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta}\left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2}\right]\mu(dx).
\end{aligned}
$$

Используя неравенство Гёльдера, оценку

$$
V(x) + V^*(x) \geqslant x^2
$$

и формулу замены переменных, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta}\left[\frac{|\nabla V(x)|^2}{2} - V^*(\nabla V(x))\right]\mu(dx) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta}\left[\frac{x^2}{2} - V^*(x)\right] g(x)\,\mu(dx) \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta}\left[V(x) - \frac{x^2}{2}\right] g(x)\,\mu(dx) \\
&\quad \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2(\beta+1)} g(x)\,\mu(dx)\right)^{\beta/(1+\beta)} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left|V(x) - \frac{x^2}{2}\right|^{1+\beta} g(x)\,\mu(dx)\right)^{1/(1+\beta)} \\
&\quad \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx)\right)^{\beta/(1+\beta)} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left|V(x) - \frac{x^2}{2}\right|^{2(1+\beta)}\mu(dx)\right)^{1/(2(1+\beta))}\left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2\,d\mu\right)^{1/(2(1+\beta))} \\
&\quad \leqslant C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))}\left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)}\,\mu(dx)\right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)} \\
&\qquad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2\,d\mu\right)^{1/(2(1+\beta))}
\end{aligned}
$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \left[\frac{x^2}{2} - V(x)\right] \mu(dx) \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx)\right)^{\beta/(1+\beta)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left|V(x) - \frac{x^2}{2}\right|^{1+\beta} \mu(dx)\right)^{1/(1+\beta)} \\
&\leqslant C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx)\right)^{\beta/(1+\beta)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx)\right)^{1/(2(1+\beta))} \\
&\leqslant C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx)\right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Наше утверждение вытекает из этих оценок.

Ряд оценок для оптимальных переносов в случае мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева или неравенству Пуанкаре, можно найти в [31] и [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agueh M.*, *Ghoussoub N.*, *Kang X.* Geometric inequalities via a general comparison principle for interacting gases. — Geom. Funct. Anal., 2004, v. 14, № 1, p. 215–244.
2. *Bobkov S. G.*, *Gentil I.*, *Ledoux M.* Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations. — J. Math. Pures Appl., 2001, v. 80, № 7, p. 669–696.
3. *Bobkov S. G.*, *Götze F.* Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. — J. Funct. Anal., 1999, v. 163, № 1, p. 1–28.
4. *Богачев В. И.*, *Колесников А. В.* Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — Докл. РАН, 2004, т. 397, № 2, с. 155–159.
5. *Богачев В. И.*, *Колесников А. В.* Нелинейные преобразования выпуклых мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 27–51.
6. *Bogachev V. I.*, *Kolesnikov A. V.* On the Monge–Ampère equation in infinite dimensions. — BiBoS Preprint № 05-01-175. Bielefeld: Universität Bielefeld, 2005.
7. *Богачев В. И.*, *Колесников А. В.*, *Медведев К. В.* О треугольных преобразованиях мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 6, с. 727–732.
8. *Богачев В. И.*, *Колесников А. В.*, *Медведев К. В.* Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005, т. 196, № 3, с. 3–30.
9. *Brenier Y.* Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions. — Comm. Pure Appl. Math., 1991, v. 44, № 4, p. 375–417.
10. *Cordero-Erausquin D.* Non-smooth differential properties of optimal transport. — Contemp. Math., 2004, v. 353, p. 61–71.
11. *Cordero-Erausquin D.*, *Nazaret B.*, *Villani C.* A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities. — Adv. Math., 2004, v. 182, № 2, p. 307–332.
12. *Feyel D.*, *Üstünel A. S.* Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 128, № 3, p. 347–385.

13. *Gangbo W., McCann R. J.* The geometry of optimal transportation. — Acta Math., 1996, v. 177, №2, p. 113–161.
14. *Колесников А. В.* Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, №3, с. 300–304.
15. *Kolesnikov A. V.* Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl. (9), 2004, v. 83, №11, p. 1373–1404.
16. *McCann R. J.* Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps. — Duke Math. J., 1995, v. 80, №2, p. 309–323.
17. *Otto F., Villani C.* Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality. — J. Funct. Anal., 2000, v. 173, №2, p. 361–400.
18. *Rachev S. T., Rüschendorf L.* Mass Transportation Problems. V. I, II. New York: Springer-Verlag, 1998, 508 p., 430 p.
19. *Talagrand M.* Transportation cost for Gaussian and other product measures. — Geom. Funct. Anal., 1996, v. 6, №3, p. 587–600.
20. *Villani C.* Topics in Optimal Transportation. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2003, 370 p.
21. *Fernique X.* Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires. II. Intégrabilité des densités. — High Dimensional Probability, III (Sandjberg, 2002). Basel: Birkhäuser, 2003, p. 95–102. (Progr. Probab., v. 55.)
22. *Ledoux M.* The Concentration of Measure Phenomenon. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2001, 181 p.
23. *Wang F. Y.* Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. — Probab. Theory Related Fields, 1997, v. 109, №3, p. 417–424.
24. *Bobkov S. G.* Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. — Ann. Probab., 1999, v. 27, №4, p. 1903–1921.
25. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions. — Colloq. Math., 1993, v. 64, №1, p. 93–101.
26. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
27. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
28. *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
29. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Открытые отображения вероятностных мер и теорема представления Скорохода. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 3–27.
30. *Pisier G.* Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. — Lecture Notes in Math., 1986, v. 1206, p. 167–241.
31. *Wang F. Y.* Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces. — J. Funct. Anal., 2004, v. 206, №1, p. 167–190.
32. *Blower G.* The Gaussian isoperimetric inequality and transportation. — Positivity, 2003, v. 7, №3, p. 203–224.

Поступила в редакцию
30.V.2005