

Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica sfumata nella scuola primaria¹

Luciana Delli Rocili¹, Antonio Maturò²

¹Istituto Comprensivo Statale Pescara 5,
Via Gioberti no 15, 65100 Pescara, Italy
lucianadr@live.it

²University of Chieti-Pescara,
Department of Architecture,
Viale Pindaro 42, 65127 Pescara, Italy
antomato75@gmail.com

Sunto

In occasione dei 120 anni della Mathesis, questo lavoro vuole essere un ricordo, un omaggio a due grandi Presidenti della Mathesis: Bruno de Finetti e Angelo Fadini. Entrambi hanno portato avanti l'idea della interdisciplinarietà nell'insegnamento e nella ricerca. Bruno de Finetti, con la sua "Matematica Logico Intuitiva" del 1959, e la sua "Teoria delle probabilità", del 1970, e ancora prima, con "L'invenzione della verità", del 1934, mostra un rifiuto dell'insegnamento formale, comodo, monodisciplinare, fatto di certezze, e sceglie la strada impervia dell'affrontare i problemi che sono alla base della scienza. Angelo Fadini, con la sua Teoria degli Insiemi Sfocati, mostra per primo in Italia varie questioni logiche che mette come fondamento di applicazioni pratiche nell'Architettura. Questo lavoro è un tentativo di sperimentare, in un quadro interdisciplinare, le idee di base di Bruno de Finetti e Angelo Fadini nella scuola primaria, nella convinzione che proprio nella Scuola Primaria si formano le idee, mentre nella Scuola Secondaria l'attenzione è focalizzata soprattutto a questioni specifiche

¹ Lavoro presentato al CONGRESSO NAZIONALE MATHESIS 2015 "I 120 anni della Mathesis. La storia dell'insegnamento/apprendimento della Matematica in Italia e la situazione attuale". 29, 30 e 31 ottobre 2015, Hotel Svevo – Gioia del Colle (Bari)

di Matematica. Si riporta qualche risultato di una sperimentazione ancora in atto.

Parole Chiave: Logica dell'incerto, logica fuzzy, insegnamento interdisciplinare nel primo ciclo

1. La visione interdisciplinare di de Finetti e la distinzione fra i concetti logici e quelli probabilistici

Spesso capita di trovare persone con notevoli pregiudizi sulla “*probabilità soggettiva*”; di solito si confonde la parola “soggettiva” con la parola “arbitraria”.

Le stesse persone ritengono “oggettiva” la “*probabilità assiomatica*” di Kolmogoroff, senza riflettere sul fatto che essa, più che preoccuparsi di *come assegnare* le probabilità agli eventi che occorre considerare, stabilisce *come fare calcoli* a partire da una distribuzione di probabilità assegnata ad una famiglia di eventi molto ampia (che si impone formi una σ -algebra).

In polemica con tale impostazione, *Bruno de Finetti* pubblica, nel 1970, i suoi due volumi di *Teoria delle probabilità* (de Finetti, 1970). Lo stesso titolo dell'opera, in contrasto con il titolo di *Calcolo delle probabilità* usualmente adottato dai testi sulla Probabilità, indica il programma di lavoro di *de Finetti*, rivolto ad un approfondimento, dal punto di vista della logica e del significato, degli assiomi utilizzati e delle conseguenze ottenute.

Alcuni dei maggiori meriti di *Bruno de Finetti* sono:

- la *capacità di interdisciplinarietà*, ossia di spaziare fra i vari rami della matematica e della fisica senza fossilizzarsi nel linguaggio e nelle tecniche di un solo settore, come dimostra la stessa dedica dell'opera a Beniamino Segre;
- l'aver operato una netta *distinzione fra concetti logici e concetti probabilistici* riuscendo ad evitare tutta una serie di frequenti errori logici e probabilistici, ad esempio su probabilità condizionate, indipendenza logica e probabilistica, evento caratterizzato dalla partizione a cui appartiene, incapacità di trattare eventi di probabilità nulla, etc.

Non c'è quindi da meravigliarsi se i sottili risultati e le approfondite considerazioni logiche, algebriche e geometriche che si trovano nei lavori di *de Finetti* si possono sfruttare o adattare anche in altri campi della matematica e delle sue applicazioni, quali ad esempio i *fuzzy set*, che *de Finetti* di fatto anticipa sia con tutte le sue considerazioni sulle logiche a più valori, sia con il

suo modo di trattare i numeri aleatori prima di introdurre le probabilità e sia con i ragionamenti sull'incertezza di ciò che si afferma del mondo reale.

La recente teoria dei *join spaces*, particolari iperstrutture algebriche, è inoltre una evidente generalizzazione della teoria geometrica utilizzata da *de Finetti* per previsioni e probabilità coerenti, e lo stesso si può dire per i recenti sviluppi della *teoria delle decisioni* e della *statistica multivariata*.

Infine è importante notare che il criterio di *de Finetti* di assegnare probabilità agli eventi man mano che si presentano, al contrario dell'impostazione di Kolmogoroff in cui si è costretti ad assegnare probabilità ad un'ampia classe di eventi, permette un trattamento automatico, con il computer, delle informazioni, certe e probabilistiche, che via via si presentano, ciò che è fondamentale per *programmare processi decisionali*, ossia per l'intelligenza artificiale.

2. Eventi condizionati e logica a 3 valori in de Finetti

I concetti di *evento condizionato*, *probabilità condizionata* e *previsione condizionata* differenziano in maniera determinante, da un punto di vista logico e probabilistico, l'impostazione della *Teoria della probabilità* di *Bruno de Finetti* da quella del *Calcolo delle probabilità* di *Kolmogoroff*.

Nell'impostazione assiomatica di *Kolmogoroff* non si attribuisce un significato logico all'*evento condizionato*. Dati due eventi A e B, con $B \neq \emptyset$, si definisce la *probabilità condizionata* $p(A/B)$ come rapporto $p(A \cap B)/p(B)$ e si avverte che tale definizione ha senso se e solo se $p(B) \neq 0$. Quindi la definizione di *probabilità condizionata* è basata sui valori assunti dalla probabilità non condizionata e sul pregiudizio che gli eventi di probabilità nulla vadano comunque trascurati.

Al contrario, *Bruno de Finetti* parte dall'idea di assegnare un significato logico all'*evento condizionato* A/B con la semplice condizione $B \neq \emptyset$.

A tale scopo introduce una logica a tre valori: “vero”, “falso” e “indeterminato” (basandosi anche su lavori di Fisica Quantistica (Reichenbach, 1942)) e definisce l'*evento condizionato* A/B come una proposizione *vera* se si verifica $A \cap B$, *falsa* se si verifica $A^c \cap B$ e *indeterminata* se si verifica B^c . Ogni evento A può essere considerato come l'*evento condizionato* A/ Ω , con Ω evento certo.

Successivamente la *probabilità condizionata*, che ha il significato di *grado di fiducia* che un evento condizionato risulti *vero* viene assunta esistente, anche se talvolta non conosciuta, per ogni evento condizionato e, in base a

principi di coerenza che “tutti sono disposti ad accettare”, vengono stabilite le relazioni fra le varie probabilità condizionate. L’uguaglianza

$$p(A/B) = p(A \cap B/\Omega)/p(B/\Omega), \text{ per } p(B/\Omega) \neq 0 \quad (1.1)$$

è solo una di tali relazioni.

Identificando ogni evento A con l’evento condizionato A/Ω si ritrova l’uguaglianza assunta da *Kolmogoroff* come definizione di $p(A/B)$.

Ma in de Finetti la (1.1) non è una definizione, è un risultato trovato a partire da principi di coerenza. Inoltre viene sottolineato che ci sono molte motivazioni che portano a dover considerare $p(A/B)$ anche quando $p(B) = 0$. Ad esempio capita spesso di dover considerare una partizione $\Pi = \{H_i\}_{i \in I}$ di Ω in cui alcuni o addirittura tutti gli eventi hanno probabilità nulla e di dover confrontare fra loro, per un dato evento A , le probabilità condizionate $p(A/H_i)$.

Nell’assiomatica di *Dubins*, in (Dubins, 1975), coerente con le idee di *Bruno de Finetti* si richiede che, se \mathfrak{S} è un’algebra di eventi e $B \in \mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} - \{\emptyset\}$, allora:

- (1) la funzione $p_B: A \in \mathfrak{S} \rightarrow p(A/B)$ è una *probabilità finitamente additiva* con $p(B/B) = 1$.
- (2) la (1.1) viene generalizzata dalla:

$$\forall A \in \mathfrak{S}, B \cap C \in \mathfrak{S} - \{\emptyset\}, \quad p(A \cap B/C) = p(A/B \cap C) p(B/C) \quad (1.2)$$

Le varie relazioni sono ottenute utilizzando il concetto di *scommessa coerente*.

A partire da tale concetto de Finetti propone anche l’idea di trattare l’evento condizionato A/B come un numero aleatorio, che assume i valori 1, 0, $p(A/B)$, a seconda che A/B sia vero, falso o indeterminato. Questa definizione è stata criticata perché pone il problema logico di inserire la probabilità condizionata nella definizione di evento condizionato. Tali critiche, però, possono essere superate facilmente poiché si può sempre inserire in una definizione un’incognita, quando la definizione vale indipendentemente dal valore assunto dall’incognita. D’altra parte vedere l’evento condizionato come particolare numero aleatorio permette di trovare molti risultati sulle probabilità condizionate utilizzando le proprietà geometriche ed algebriche dei numeri aleatori, ad esempio la *struttura di spazio vettoriale*.

3. Angelo Fadini: la Mathesis, i fuzzy sets e le Facoltà di Architettura

La Mathesis, la logica a più valori e la novità nell'insegnamento della matematica nelle Facoltà di Architettura sono legate, a Pescara, alla figura di Angelo Fadini, che oltre ad aver segnato la storia della Mathesis, ha avuto un ruolo importante nella storia della Facoltà di Architettura di Pescara ed a quella, personale, di Antonio Maturo, docente per molti anni in quella Facoltà.

Antonio Maturo racconta:

“Nell'anno accademico 1970-71, subito dopo la laurea, cominciai a collaborare, in qualità di “Laureato Addetto alle Esercitazioni”², con il corso di Analisi Matematica e Geometria Analitica I della Facoltà di Architettura di Pescara, appena riconosciuta con DPR 9/3/70 n.441. Il Corso fu assegnato per incarico ad un docente dell'Università di Napoli, il prof. Angelo Fadini.

La prima volta che Angelo Fadini venne a Pescara andai a prenderlo alla stazione. Vidi un uomo non molto alto, magro, con dei baffetti, un'età che valutai oltre ai 60 anni e con in bocca più sigarette che parole. Ispirava una gran tranquillità ed era desideroso di diffondere alcuni suoi punti di vista sulla Matematica per l'Architettura.

Angelo Fadini era un grande innovatore e precursore dei tempi attuali. Aveva avuto l'intuizione che la Matematica nella Facoltà di Architettura non poteva ridursi ai due Corsi tradizionali di Analisi Matematica e Geometria Analitica I e II, sostanzialmente finalizzati a fornire la base matematica per gli argomenti di Fisica, Statica, Scienze delle Costruzioni e simili.”

Per Angelo Fadini la Matematica non doveva avere un ruolo subordinato ad altre discipline³, ma aveva il compito di dare delle strutture logiche da utilizzare soprattutto nei Corsi che apparivano più lontani dalla Matematica, come ad esempio quelli di Composizione ed Urbanistica.

In realtà bisognava introdurre una nuova Matematica, in grado di aiutare a trattare situazioni confuse ed incerte, per le quali le tradizionali Analisi Matematica e Geometria Analitica non potevano essere di nessun aiuto. A tale scopo era riuscito, unico in Italia, a far istituire, alla Facoltà di Architettura di Napoli, un nuovo corso da tenersi nel terzo anno, denominato Complementi di Matematica.

² Si trattava di una figura di docente poi abolita. Negli anni '70 si riteneva importante che gli studenti fossero seguiti da un laureato per le esercitazioni e si era creata questa figura con incarichi didattici. Erano previsti più di 100 ore di didattica integrativa l'anno. Attualmente, nell'università, non si ritiene più importante la didattica, e non solo non sono più previste le esercitazioni, ma anche le ore di lezione sono ridotte rispetto al passato.

³ L'eterno dibattito nelle Facoltà di Architettura: la Matematica è solo propedeutica a certe discipline, oppure ha un suo ruolo formativo autonomo?

Il problema fondamentale era quello di rifondare la Matematica da un punto di vista logico: non potevano essere accettate solo le proprietà della logica binaria, dette *funzioni enunciative*, che possono assumere, per ogni elemento dell'universo di discorso, solo i valori "vero" o "falso", e da cui si ottengono gli insiemi, ma era necessario trovare anche la maniera di trattare le proprietà vaghe su cui si basa la nostra vita quotidiana come "x è povero" o "x è bello", dette, in (Fadini, 1979: 41), *pseudo funzioni enunciative*". Esse possono essere vere, false o parzialmente vere e danno luogo ad insiemi generalizzati, detti "sfocati" o "fuzzy" caratterizzati dal fatto che un elemento può appartenere anche parzialmente all'insieme.

Angelo Fadini si era occupato, come de Finetti, di logiche trivalenti, riprendendo le idee di (Reichenbach, 1942), considerando i valori "vero", "falso" e "indeterminato", e le idee di (Gentilhomme, 1968). Da tali logiche si ottengono gli *insiemi nebulosi - ensembles flous* per Gentilhomme - (per ogni elemento ci sono tre possibilità: *appartenenza, non appartenenza e semiappartenenza*) e di conseguenza l'estensione a tali insiemi delle classiche unione, intersezione e complemento.

Angelo Fadini aveva anche appena introdotto in Italia la teoria degli *insiemi sfocati o fuzzy set*, basandosi sull'articolo di Zadeh "Fuzzy Sets" su "Information and Control" del 1965, considerato da tutti il lavoro di base della teoria, e sui testi di Kaufmann, in francese. Egli riteneva che, al momento, la comunità matematica non avrebbe accolto bene la teoria e che essa si sarebbe diffusa entro 30 anni (nel 2000).

Racconta ancora Antonio Maturo:

"Angelo Fadini prevedeva che io sarei diventato professore presso la Facoltà di Architettura di Pescara e che verso il 2000 avrei contribuito alla diffusione dei fuzzy set e delle sue applicazioni all'Architettura. Io lo ringraziavo per le sue parole, ma ero piuttosto pessimista sulla possibilità di percorrere la carriera universitaria ed ero soprattutto impegnato a prepararmi per i Concorsi a Cattedre per le Scuole Medie Superiori. Quindi non studiai i fuzzy set, ma mi occupai dei problemi risolvibili con riga e compasso, delle trasformazioni quadratiche, delle superficie algebriche e dei numeri algebrici e trascendenti.

Uno dei maggiori interessi di Angelo Fadini era quello di portare avanti un'associazione di matematici di cui era presidente Bruno de Finetti e di cui sarebbe diventato presidente onorario: la Mathesis. Mi disse che era opportuno prevedere delle sezioni locali in Abruzzo. Gli diedi retta solo 15 anni dopo, fondando con degli amici la sezione di Pescara.

Circa 25 anni dopo le chiacchierate con Angelo Fadini, i fuzzy set sono venuti a trovarmi. Prima si sono presentati nel mio studio, nel 1995, sotto la forma di un lavoro sul Telerilevamento di Stefano Innamorati. Poi li ho incontrati di nuovo in convegni sulle Iperstrutture Algebriche. Infine sono

Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica sfumata nella scuola primaria

ricomparsi nelle riunioni del gruppo di ricerca nazionale a cui ho aderito dopo il 1995, in lavori presentati da alcuni docenti nelle riunioni del gruppo di ricerca. Erano Aldo Ventre e Antonio Di Nola, professori dell'Università di Napoli e allievi di Angelo Fadini!

Ad ottobre del 1996 ho finalmente presentato il mio primo lavoro sulle applicazioni dei fuzzy set all'Architettura, in collaborazione con l'architetto Barbara Ferri, in un convegno organizzato a Napoli proprio da Aldo Ventre."

4. La logica trivalente e la logica degli eventi condizionati

4.1 Richiami di logica bivalente

Un *enunciato o proposizione* è descritto, in (Behnke et al.,1968), come un "complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è vero o falso". In (Russell, 1962) un enunciato è descritto come "una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o vero o falso".

Qualunque sia la definizione o descrizione del concetto di enunciato, la sua caratteristica è la validità del *principio di bivalenza*, secondo il quale "un enunciato è o vero o falso" (Russell, op. cit.) e non può essere contemporaneamente vero e falso. Se P è una proposizione scriviamo $P = 0$ per indicare che P è falsa e $P = 1$ per indicare che è vera.

Una *funzione enunciativa* (abbreviata f.e.) è, secondo Russell, "un'espressione contenente uno o più componenti indeterminati (variabili logiche) tali che, quando si assegnano dei valori a questi componenti, l'espressione diviene un enunciato". In altre parole, una *funzione enunciativa* di n variabili logiche x_1, x_2, \dots, x_n definisce una funzione $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Una *operazione logica* è una funzione logica di una (operazione unaria) o due (operazione binaria) variabili logiche.

L'operazione logica unaria più utilizzata è la *negazione*, definita dalla formula:

$$\neg x = 1-x \quad (4.1)$$

Le operazioni logiche binarie più utilizzate sono la *coniunzione* (o *intersezione*), la *disgiunzione* (o *unione*) e l'*implicazione*.

La *coniunzione* " \wedge ", funzione di due variabili logiche x_1 e x_2 , è definita dalla tabella seguente, in cui le righe sono associate ai valori di x_1 e le colonne a quelli di x_2 :

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.2)$$

La congiunzione è anche espressa da una qualsiasi delle seguenti formule:

$$x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}, \quad (\text{formula del minimo}) \quad (4.3)$$

$$x_1 \wedge x_2 = \max\{0, x_1 + x_2 - 1\}, \quad (\text{formula della differenza limitata}) \quad (4.4)$$

$$x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2. \quad (\text{formula algebrica}) \quad (4.5)$$

La *disgiunzione* “ \vee ” è definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.6)$$

Essa è anche definita da una qualsiasi delle seguenti formule:

$$x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}, \quad (\text{formula del massimo}) \quad (4.7)$$

$$x_1 \vee x_2 = \min\{x_1 + x_2, 1\}, \quad (\text{formula della somma limitata}) \quad (4.8)$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2. \quad (\text{formula algebrica}) \quad (4.9)$$

L'*implicazione* \rightarrow è definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.10)$$

A differenza delle altre due operazioni non è commutativa. Essa è anche definita da una qualsiasi delle seguenti formule:

$$x_1 \rightarrow x_2 = 1 \text{ per } x_1 \leq x_2, \quad x_1 \rightarrow x_2 = 0 \text{ per } x_1 > x_2, \quad (4.11)$$

o, con una formulazione più debole,

$$x_1 \rightarrow x_2 = 1 \text{ per } x_1 \leq x_2, \quad x_1 \rightarrow x_2 < 1 \text{ per } x_1 > x_2. \quad (4.12)$$

L'implicazione si può ricondurre alla disgiunzione con la formula:

$$x_1 \rightarrow x_2 = (-x_1) \vee x_2, \quad (4.13)$$

che, in base alle (4.7), (4.8), (4.9) si può particolarizzare in una delle seguenti:

$$x_1 \rightarrow x_2 = \max\{x_1, x_2\}, \quad (4.14)$$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \min\{1, 1 - x_1 + x_2\}. \quad (4.15)$$

$$x_1 \rightarrow x_2 = (1 - x_1) + x_2 - (1 - x_1) x_2 = 1 - x_1 + x_1 x_2 \quad (4.16)$$

Un *evento* A è una proposizione di cui può essere “non conosciuto” il valore di verità (de Finetti, 1970: 38). Se tale valore è conosciuto ed è 1, l'evento si dice *certo*, se è 0, si dice *impossibile*, se non è conosciuto si dice *aleatorio*. Quindi un evento aleatorio può essere considerato come una variabile logica e si possono estendere agli eventi i vari concetti logici considerati.

Una *partizione dell'evento certo* è una famiglia di eventi incompatibili tali che la loro disgiunzione è l'evento certo (ossia una tautologia).

4.2 La logica trivalente

Generalizzando il concetto di proposizione descritto nel paragrafo 4.1, possiamo descrivere una *proposizione ternaria* (o della logica trivalente) come un “complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è vero o falso o vale una alternativa intermedia fra il vero ed il falso”. L'opportunità di considerare una logica trivalente è messa in evidenza da vari autori, fra cui (de Finetti, 1970: 164-165). Precisamente l'evento condizionato E/H è definito come il “trievento” $\{EH, \backslash EH, \backslash H\}$ che assume i valori 1, 0, $i = vuoto$ (o *indeterminato*), a seconda che si verificano EH, $\backslash EH, \backslash H$.

Indichiamo con i il valore intermedio. Appare ragionevole supporre che i appartenga ad un insieme parzialmente ordinato S contenente $\{0, 1\}$ tale che risulti $0 < i < 1$.

Molti autori hanno posto $i = 1/2$ (Fadini, 1979:57), altri hanno associato ad i altri numeri con ragionamenti probabilistici.

Un'alternativa potrebbe essere di porre $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$ con le seguenti condizioni: la coppia (0, 0), indicata con 0, rappresenta il valore “falso”; la coppia (1, 1), indicata con 1, rappresenta il valore “vero”; le coppie (0, 1) e (1, 0) rappresentano entrambe il valore “ i ”. Inoltre, assumendo $(a, b) \leq (c, d)$ se e solo se $a \leq b$ e $c \leq d$, si ottiene $0 < i < 1$. Infine, per ogni elemento (a, b) di S chiamiamo *complemento* di (a, b) , denotato con $-(a, b)$, la coppia $(1-a, 1-b)$. In particolare risulta

$$-0 = 1, -1 = 0, -i = i. \quad (4.17)$$

Il fatto di porre $i = (0, 1)$, si può interpretare pensando che i è “un numero che è un po’ zero e un po’ uno”, concetto che trova sistemazione logica nell’ambito delle teorie della fisica quantistica e dei fuzzy set. L’attualità del terzo valore di verità e l’opportunità di considerarlo uguale alla coppia $(0, 1)$, o, se si preferisce, all’insieme $\{0, 1\}$ è confermato dalle attuali ricerche sul computer quantistico e sulla sostituzione dei “bit” con i “qubit” in cui ci può essere una “sovrapposizione” dei valori 0 e 1. Si veda, ad esempio l’articolo di (Rivista “Focus”, 2006: 40 – 46), dal titolo “*Dai bit ai qubit*”, in cui si mostra come, a partire da tali ricerche è in atto una vera rivoluzione dell’informatica.

Una *variabile logica ternaria* (o *variabile proposizionale ternaria*) x è un simbolo che indica una arbitraria proposizione ternaria. Essa può assumere ciascuno dei valori 1, 0 e i , a seconda che sostituendo a x una proposizione P , la P è vera o falsa oppure ha il “valore intermedio” i . Una *funzione logica ternaria* di n variabili è una funzione $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, i, 1\}^n \rightarrow \{0, i, 1\}$.

Una *operazione logica ternaria* è una funzione logica ternaria di una o due variabili logiche ternarie. Il “criterio di prolungamento” impone che, se una operazione ternaria α^* ha lo stesso nome di una binaria α deve assegnare lo stesso valore di α se le variabili assumono valori dell’insieme $\{0, 1\}$.

La maggior parte degli autori considera come negazione “-“ nella logica ternaria quella definita dalla formula (4.17), che soddisfa il criterio di prolungamento. Essa è l’unica che garantisce la “proprietà di involuzione”:

$$-(-x) = x.$$

Estensione della congiunzione nella logica ternaria. Quasi tutti gli autori, ad es. Lukasiewicz, Kleene, Heyting, Reichenbach, (cfr. de Finetti, 1970; Fadini, 1979, Klir, Yuan, 1995); assumono la *congiunzione* \wedge definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 0 & i & 1 \\ \begin{array}{c} 0 \\ i \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \end{array} & (4.18) \end{array}$$

ossia dalla formula:

$$x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}. \quad (4.19)$$

Per Bochvar, invece, $x_1 \wedge x_2 = i$ ogni volta che almeno uno fra x_1 e x_2 è uguale a i .

Estensione della disgiunzione nella logica ternaria. Quasi tutti gli autori (Lukasiewicz, Kleene, Heyting, Reichenbach) assumono la *disgiunzione* \vee definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} 0 \quad i \quad 1 \\ 0 \left[\begin{array}{ccc} 0 & i & 1 \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \end{array} \quad (4.20)$$

ossia dalla formula:

$$x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}. \quad (4.21)$$

Per Bochvar, invece, $x_1 \vee x_2 = i$ ogni volta che almeno uno fra x_1 e x_2 è uguale a i .

Estensione della implicazione nella logica ternaria. Si hanno maggiori differenze fra i vari autori nel definire l'implicazione \rightarrow nella logica trivalente. L'estensione alla logica trivalente di ciascuna delle formule (4.11) – (4.16) porta a risultati differenti.

Alcune tabelle di implicazione ternaria accettate sono:

- L'implicazione di Lucasiewicz e Reichenbach, definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} 0 \quad i \quad 1 \\ 0 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ i & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{array} \right]. \end{array} \quad (4.22)$$

- L'implicazione di Kleene, definita dalla tabella:

$$\begin{array}{c} 0 \quad i \quad 1 \\ 0 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ i & i & i \\ 1 & 0 & i \end{array} \right]. \end{array} \quad (4.23)$$

Essa differisce dall'implicazione di Lukasiewicz – Reichenbach per il valore di $i \rightarrow i$ considerato uguale a i per Kleene e a 1 per Lukasiewicz e Reichenbach.

4.3 La logica degli eventi condizionati

Scrivendo $H \rightarrow_c E$ per indicare l'evento condizionato E/H si può notare che si tratta di una "implicazione modificata" in cui risulta ancora $1 \rightarrow_c 1 = 1$ e $1 \rightarrow_c 0 = 0$, ma a differenza dell'implicazione si ha $0 \rightarrow_c 1 = i$ e $0 \rightarrow_c 0 = i$.

De Finetti si chiede se "il fastidio dell'introduzione di algoritmi basati su tale ordine di idee può essere compensato da servizi tanto vantaggiosi". Però de Finetti era affascinato dall'idea del terzo valore di verità, per cui riprende ampiamente l'argomento nell'Appendice di (de Finetti, 1970), da pag. 638 in

poi, cercando di capire quali significati potrebbe avere il valore i . Il punto di partenza per le sue considerazioni è il testo (Reichenbach, 1942), sui *Fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, in cui il terzo valore è chiamato “*indeterminato*”.

Per quanto riguarda gli eventi condizionati, nell’appendice del testo (de Finetti, 1970) si osserva che, considerando il condizionamento $(E/H)/(E'/H')$ fra due eventi condizionati E/H e E'/H' si deve pensare ad una scommessa *vinta* se e solo se sono veri entrambi gli eventi condizionati, *persa* se è vero E'/H' ed è falso E/H ed *annullata* negli altri casi.

Ciò porta all’uguaglianza:

$$(E/H)/(E'/H') = E/(E'HH'). \quad (4.24)$$

Considerando il condizionamento come un’implicazione (*quasi implicazione* nella notazione di Reichenbach), introduciamo il simbolo $E'/H' \rightarrow_c E/H$ per indicare $(E/H)/(E'/H')$. La tabella di verità di $E'/H' \rightarrow_c E/H$ è:

$$\begin{array}{c}
 0 \quad i \quad 1 \\
 0 \left[\begin{array}{ccc} i & i & i \\ i & i & i \\ 1 \left[\begin{array}{ccc} 0 & i & 1 \end{array} \right] \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (4.25)$$

La tabella (4.25) non è una implicazione poiché non è una estensione della tabella dell’implicazione della logica binaria, ossia non assegna valore 1 a $0 \rightarrow_c 0$ e $0 \rightarrow_c 1$. Tuttavia tale tabella nasce come estensione della “implicazione modificata” $H \rightarrow_c E$, che traduce il concetto di evento condizionato e quindi può avere applicazioni in ambito probabilistico e statistico, in particolare nell’inferenza bayesiana.

5. Sperimentazione nella scuola primaria

Il lavoro si basa sull’idea che l’impostazione soggettiva del calcolo delle probabilità di de Finetti (Kyburg, Smokler, 1964; de Finetti, 1970; Scozzafava, 1996, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002; Maturo, 2008) possa essere particolarmente efficace per la formazione degli studenti della scuola primaria.

Infatti, a differenza di altre impostazioni basate essenzialmente su formule e calcoli, la probabilità soggettiva si basa sui concetti logici e sul concetto di relazione. Si parte dall’approfondimento del concetto di enunciato della logica binaria e di quello più generale di enunciato linguistico. Successivamente, si mostra come, in assenza di completa informazione,

l'incertezza sul valore di verità dell'enunciato porta alla logica dell'incerto che generalizza quello di proposizione della logica classica o logica del certo.

La prima fase di lavoro in classe consiste quindi nel riconoscimento dei vari tipi di enunciati. Un approfondimento di questa prima fase, possibile con classi particolarmente reattive, può essere la comprensione e l'uso delle principali regole di inferenza.

La seconda fase consiste nell'introdurre le relazioni di preferenza – indifferenza e successivamente la probabilità qualitativa come particolare relazione di preferenza – indifferenza. I bambini dovranno essere addestrati al confronto a coppie di eventi, ossia a valutare la maggiore, minore o uguale “facilità di verificarsi” di due eventi e a fare un controllo di coerenza di tali valutazioni.

Nella terza fase si sperimenta l'efficacia dell'impostazione di de Finetti, consistente nell'introdurre la probabilità a partire da una scommessa, coerentemente con le valutazioni di probabilità qualitativa precedentemente espresse. Le valutazioni di probabilità sono fatte da tre punti di vista: valutazioni fatte da singoli individui, valutazioni di gruppo in cui gli individui possono comunicare fra loro e valutazioni di gruppo come aggregazione di valutazioni indipendenti di singoli individui. Nell'ultimo caso, se vi sono opinioni molto divergenti, si potranno attivare procedure per il raggiungimento del consenso.

Nell'ultima fase si fanno lavorare i bambini su valutazioni di probabilità legate a situazioni in cui occorre prendere decisioni. Ci si interessa soprattutto alle situazioni ludiche che attraggono particolarmente i bambini, ma essi vengono indotti a riflettere anche sulle decisioni in condizione di incertezza più importanti, legate al lavoro, al benessere, alla scelta dei valori della loro vita. L'importanza delle valutazioni di probabilità soggettiva per prendere decisioni è evidenziata con varie argomentazioni in (Lindley, 1990).

In una prima sperimentazione effettuata, in riferimento alla prima fase, sono state sottoposte ai bambini di 4 classi, due prime e due quarte, 20 frasi, con varie alternative di risposta. I bambini dovevano capire se si trattava di non enunciati, enunciati della logica classica, enunciati linguistici.

In riferimento alla seconda fase i bambini, quando hanno valutato che si trattava di *eventi*, hanno dovuto esprimere un giudizio qualitativo di probabilità, quando invece hanno visto che si trattava di *enunciati fuzzy*, hanno dovuto assegnare un valore di verità.

Alcune delle frasi proposte sono le seguenti:

1. DAVIDE DI BLASIO E' IL PIU' ALTO DELLA SUA CLASSE
2. ELISEO MIRABELLA IN BICICLETTA
3. TUTTI ABBIAMO VISTO UN FILM
4. FRANCESCO HA GLI OCCHI AZZURRI
5. FREQUENTIAMO UNA SCUOLA A TEMPO PIENO
6. MIRKO GUETTI E' BRAVO

- 7. GIOVANNI E' UN CARCIOFO
- 8. MICHELA FINOCCHIO HA PRESO 'BRAVISSIMA'
- 9 LEONARDO UNA MELA E UNA PERA
- 10 DOMENICA IL PESCARA VINCERA'
- 11 ALFREDO E' ASSENTE
- 12 I GATTI HANNO LE ALI
- 13 I RICCHI HANNO DUE CASE GRANDI
- 14 NEL MESE DI APRILE FA FREDDO
- 15 UN POVERO MANGIA POCO

Le risposte proposte, fra cui scegliere, erano le seguenti:

- a. vero;
- b. falso;
- c. vero o falso, ma non so quale dei due;
- d. più vero che falso;
- e. più falso che vero;
- f. a metà fra vero e falso;
- g. non è un enunciato linguistico;
- h. altro.

La discussione in classe dei risultati è stata molto stimolante. In qualche caso i ragionamenti e le osservazioni dei bambini sono stati molto acuti, facendo rilevare aspetti non presi in considerazione dai docenti in quanto ritenuti scontati o sottointesi. Il risultato dell'indagine è stato un soddisfacente approfondimento dei concetti non solo per i bambini, ma anche per i docenti.

Nella terza fase, di valutazione della probabilità come scommessa i risultati ottenuti appaiono un po' incoerenti, in quanto i bambini, nello scommettere, sono influenzati da aspetti emozionali che fanno perdere il comportamento razionale. Tuttavia il percorso didattico sembra molto soddisfacente. L'idea definetiana di introdurre la probabilità attraverso le scommesse ha avuto un successo entusiastico da parte dei bambini, che, vedendo la scommessa come un gioco, hanno avuto lo stimolo per l'avvio alla comprensione dei fondamenti e delle procedure della probabilità. Da ribadire, fra gli aspetti positivi, che la probabilità soggettiva è meno dipendente dal calcolo rispetto alle altre impostazioni, mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico, non è legata ad assunzioni, più o meno sottointese, di equiprobabilità di eventi di una particolare partizione dell'evento certo né a formule precostituite, e, come ha mostrato la sperimentazione, può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica.

Per quanto riguarda l'incoerenza nell'assegnare le probabilità, essa può essere superata valutando dapprima, in maniera analitica, le probabilità qualitative, partendo dai confronti fra tutte le coppie di eventi considerati. Se (A, B) è una coppia ordinata di eventi fra cui si ritiene che A non è meno probabile di B , si chiede di esprimere uno dei seguenti giudizi:

Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica sfumata nella scuola primaria

- A e B sono egualmente probabili,
- A è un po' più probabile di B,
- A è più probabile di B,
- A è molto più probabile di B,
- A è assolutamente più probabile di B.

Successivamente si rielaborano i risultati ottenuti basandosi su particolari procedure logiche, algoritmi e relativi software, ottenendo probabilità quantitative su famiglie di eventi che sono partizioni dell'evento certo.

D'altra parte i primi esperimenti di assegnazione di probabilità sono stati fatti in una classe prima, ora sono in corso esperimenti con gli stessi bambini che ora frequentano la terza, e ci si aspetta un comportamento più razionale.

Inoltre è importante notare che nell'impostazione soggettiva della probabilità, viene esaltato il collegamento interdisciplinare in quanto lo sforzo di comprensione logica degli enunciati, del loro collocamento spaziale e temporale, porta ad uno spontaneo approfondimento dei concetti grammaticali, sintattici, storici, ottenendo in particolare un arricchimento del vocabolario e una velocizzazione nel processo di assimilazione dei concetti espressi in forma analitica, scritta o verbale.

Bibliografia

- Behnke and alii, (1968), *Matematica 1 and 2*, Feltrinelli Editore Milano.
- Coletti, G., Scozzafava, R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.
- de Finetti, B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.
- Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science&Philosophy* Vol. 1, No 1, (2013) pp. 37 – 58.
- Dubins, L.E., (1975), Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations, *The Annals of Probability*, 3, 89-99.
- Fadini, A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori, Napoli.
- Fuchs, A., Nanopoulos, P., (1985), Measures invariants par translation, classes de Dynkin first-digit problem, *Advances in Mathematics*, 55, 24-74.
- Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquée*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.
- Kaufmann A., (1975), *Theory of fuzzy subsets*, Vol I, Academic Press, New York.
- Kaufmann A., (1975), *Introduction a la théorie des sous-ensemble flous*, Vol II e Vol III, Masson, Paris.
- Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.
- Kyburg H. E., Smokler H. E., (1964), *Studies in Subjective Probability*, John Wiley, New York.
- Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano
- Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.
- Maturo, A., (2000), Fuzzy events and their probability assessments, *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography*, Vol. 3, Nos 1-3, 83-94.
- Reichenbach H., (1942), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1954
- Rivista "Focus", (2006), N. 168, Ottobre 2006
- Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.
- Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.
- Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.