

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СУПЕРПОЗИЦИЙ БЕЗДИФРАКЦИОННЫХ ПУЧКОВ БЕССЕЛЯ С КОМПЛЕКСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ

Ковалёв А.А.^{1,2}, Котляр В.В.^{1,2}, Порфирьев А.П.^{1,2}, Калинин Д.С.²

¹Институт систем обработки изображений РАН,

²Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Аннотация

Получено аналитическое выражение для расчёта нормированного орбитального углового момента (ОУМ) для суперпозиции смещённых с оптической оси пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом. Это выражение позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ. Суперпозиция двух и более пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться. Эксперимент хорошо согласуется с теорией.

Ключевые слова: бездифракционный лазерный пучок, непараксиальная мода Бесселя, орбитальный угловой момент, комплексное смещение решения уравнения Гельмгольца, модулятор света.

Введение

Пучки Бесселя, открытые в 1987 году [1, 2], обладают многими замечательными свойствами. Они распространяются без дифракции на конечном расстоянии в свободном пространстве [1], формируют световые трубки или световые полости (бутыли) на оптической оси [3,4], обладают свойством самовосстановления после искажения малым препятствием [5, 6].

Пучки Бесселя имеют орбитальный угловой момент [7, 8]. Суперпозиция пучков Бесселя может обладать продольной периодичностью (аналог эффекта Тальбота) [9, 10] или вращаться вокруг оптической оси при распространении [11, 12].

Пучки Бесселя можно генерировать с помощью цифровых голограмм [3, 4, 13], конического рефракционного аксикона [14, 15], дифракционного вихревого аксикона [16], дифракционных оптических элементов [11, 12] и пространственных модуляторов света [17]. Интересно, что простым наклоном дифракционного элемента (или при наклонном падении освещающего пучка на дифракционный вихревой аксикон) можно формировать астигматические пучки Бесселя [18].

Пучки Бесселя нашли широкое применение. Они используются для манипуляции микрочастицами: для одновременного захвата нескольких микрочастиц вдоль оптической оси [19, 20], для вращения одной или нескольких частиц вокруг оптической оси [21]. С помощью пучков Бесселя можно захватывать и ускорять отдельные охлаждённые атомы [22, 23]. Недавно открытые пучки Ханкеля–Бесселя [24] могут применяться для зондирования атмосферы, так как обладают устойчивостью к турбулентности атмосферы [25]. В [26, 27] теоретически были рассмотрены векторные пучки Бесселя, для которых были получены аналитические выражения для плотности ОУМ [7, 8, 28]. Заметим здесь, что, так как энергия всего пучка Бесселя не ограничена, полный ОУМ тоже не ограничен. Поэтому работ по анализу ОУМ полного пучка Бесселя до наших работ не было. Моды Бесселя являются также собственными функциями для кругового бильярда (circular billiards) и соответствуют резонансным геометрическим модам, также обладающим ОУМ [29].

Недавно были рассмотрены непараксиальные асимметричные моды Бесселя [30] и параксиальные асимметричные пучки Бесселя–Гаусса [31]. В их поперечном сечении распределение интенсивности имеет вид полумесяца. В [32] асимметричные моды Бесселя исследовались экспериментально с помощью цифровой матрицы микрозеркал (digital micromirror device). В [33] по аналогии с [30] рассмотрены асимметричные пучки Чебышева–Бесселя.

Суперпозиция пучков Бесселя рассматривалась только для одних осевых пучков Бесселя [10–12, 19, 28]. Суперпозиция смещённых с оптической оси лазерных пучков рассматривалась в [29], но эти пучки не являются пучками Бесселя.

В этой работе рассматривается суперпозиция смещённых с оптической оси пучков Бесселя одинакового порядка (с одинаковым топологическим зарядом). Получено общее аналитическое выражение для ОУМ такой суперпозиции. Показано, что если весовые коэффициенты суперпозиции – действительные числа, то ОУМ всей суперпозиции пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя. Это позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано, что суперпозиция множества одинаковых пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности любого радиуса, эквивалентна одному пучку Бесселя из этой суперпозиции, расположенному в центре окружности. Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ. Суперпозиция двух пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными.

1. Фурье-спектр смещённого пучка Бесселя

Известно, что комплексная амплитуда непараксиального стационарного светового поля $E(x, y, z)$, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде углового спектра плоских волн

$$E(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\xi, \eta) \times \exp \left[ik(\xi x + \eta y) + ikz\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right] d\xi d\eta, \quad (1)$$

где k – волновое число монохроматического света, $A(\xi, \eta)$ – комплексная амплитуда углового спектра плоских волн. В полярных координатах (r, φ) выражение (1) примет вид:

$$E(r, \phi, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\rho, \theta) \times \exp \left[ikr\rho \cos(\theta - \phi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2} \right] \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в Фурье-плоскости. Амплитуда углового спектра плоских волн для пучка, смещённого на вектор с декартовыми координатами (x_0, y_0) , имеет вид:

$$A'(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) \exp \left[-ik\rho(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) \right], \quad (3)$$

где $A(\rho, \theta)$ – амплитуда углового спектра плоских волн исходного несмещённого пучка. Координаты смещения (x_0, y_0) могут быть комплексными числами.

Известен [30] вид углового спектра несмещённого пучка Бесселя n -го порядка:

$$A_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda} \exp(in\theta) \delta \left(\rho - \frac{\alpha}{k} \right), \quad (4)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, α – масштабный параметр несмещённой моды Бесселя:

$$E_n(r, \phi, z) = \exp \left(in\phi + iz\sqrt{k^2 - \alpha^2} \right) J_n(\alpha r), \quad (5)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя n -го порядка первого рода. С учётом (3) амплитуда углового спектра смещённого пучка Бесселя n -го порядка равна:

$$A'_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha\lambda} \exp(in\theta) \delta \left(\rho - \frac{\alpha}{k} \right) \times \exp \left(-ikx_0\rho \cos \theta -iky_0\rho \sin \theta \right). \quad (6)$$

2. Связь амплитуд спектра смещённого и несмещённого пучков Бесселя

Найдём коэффициенты A_{mn} ряда, который описывает разложение амплитуды спектра смещённого пучка Бесселя n -го порядка (6) по амплитудам спектра несмещённых пучков Бесселя разных порядков:

$$A'_n(\rho, \theta) = \delta \left(\rho - \frac{\alpha}{k} \right) \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn} \frac{(-i)^p}{\alpha\lambda} \exp(ip\theta). \quad (7)$$

Умножая обе части равенства (7) на $(\alpha\lambda/\delta(\rho - \alpha/k)) \exp(-im\theta)$ и интегрируя по θ от 0 до 2π , получим:

$$\int_0^{2\pi} \exp \left[i(n-m)\theta \right] \times \exp(-i\alpha x_0 \cos \theta - i\alpha y_0 \sin \theta) d\theta = i^n \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{pn} (-i)^p 2\pi \delta_{pm}. \quad (8)$$

Интеграл в левой части (8) равен

$$\int_0^{2\pi} \exp(in\theta + ia \cos \theta + ib \sin \theta) d\theta = 2\pi \left(\frac{ia - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^n J_n \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right). \quad (9)$$

С учётом (9) коэффициенты ряда в правой части (8) равны:

$$A_{mn} = \left(\frac{x_0 + iy_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right)^{n-m} J_{m-n} \left(\alpha \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right). \quad (10)$$

В частном случае, когда по одной координате смещение действительное, а по другой – чисто мнимое и по модулю оба смещения равны ($x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$), то коэффициенты (10) упрощаются:

$$A_{mn} = \begin{cases} c^{m-n}/(m-n)!, & m \geq n, \\ 0, & m < n. \end{cases} \quad (11)$$

Выражение (11) было получено из (10) с помощью предельного перехода (при малых значениях аргумента функции Бесселя). В этом частном случае амплитуда углового спектра плоских волн смещённого пучка Бесселя представляется в виде линейной комбинации мод Бесселя в виде:

$$A'_n(\rho, \theta) = \delta(\rho - (\alpha/k)) \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} \frac{(-i)^{n+p}}{\alpha\lambda} \exp[i(n+p)\theta], \quad (12)$$

где параметр c задаёт степень асимметрии смещённой моды Бесселя n -го порядка. Угловой спектр смещённого пучка Бесселя вида (12) совпадает с выражением для спектра асимметричной моды Бесселя [30]. Используя (6) и (9), из (1) получим очевидное выражение для амплитуды смещённого пучка Бесселя:

$$E'_n(x, y, z) = \exp \left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2} \right) \times \left[\frac{(x-x_0) + i(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right]^n \times J_n \left(\alpha \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right). \quad (13)$$

3. Орбитальный угловой момент смещённого пучка Бесселя

Проекцию на оптическую ось z орбитального углового момента (ОУМ) и полную мощность лазерного пучка можно рассчитать с помощью выражений:

$$iJ_z = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \phi} r dr d\phi = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta, \quad (14)$$

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E r dr d\phi = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* A \rho d\rho d\theta. \quad (15)$$

При вычислении (14) и (15) для смещённого пучка Бесселя воспользуемся (6). Тогда получим проекцию ОУМ на оптическую ось:

$$J_z = \frac{\lambda}{\alpha} \delta(0) \times \left[n I_0(2\alpha r_{0i}) + \frac{\alpha}{r_{0i}} \text{Im}(y_0 x_0^*) I_1(2\alpha r_{0i}) \right], \quad (16)$$

где $r_{0i} = [(\text{Im} x_0)^2 + (\text{Im} y_0)^2]^{1/2}$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя, а также мощность всего пучка:

$$I = \frac{\delta(0)}{k\alpha} \int_0^{2\pi} \exp[2\alpha(\text{Im} x_0 \cos \theta + \text{Im} y_0 \sin \theta)] d\theta = \frac{\lambda}{\alpha} \delta(0) I_0(2\alpha r_{0i}), \quad (17)$$

где $\delta(0)$ – дельта-функция Дирака в нуле. Из (16) и (17) следует, что проекция ОУМ на оптическую ось и мощность смещённого пучка Бесселя не ограничены, но их отношение имеет вполне определённую величину:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{\alpha}{r_{0i}} \text{Im}(x_0^* y_0) \frac{I_1(2\alpha r_{0i})}{I_0(2\alpha r_{0i})}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что если обе координаты вектора смещения (x_0, y_0) действительные или обе чисто мнимые, то нормированный ОУМ (18) не отличается от ОУМ для несмещённого пучка Бесселя:

$$\frac{J_z}{I} = n. \quad (19)$$

Нормированный ОУМ смещённого пучка Бесселя (18) будет отличаться от ОУМ несмещённого пучка Бесселя (19), только если смещение по одной координате действительное, а по другой – чисто мнимое. Например, пусть $x_0 = b/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, тогда ОУМ (18) примет вид:

$$\frac{J_z}{I} = n + b \frac{I_1(2|c|)}{I_0(2|c|)}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что ОУМ будет увеличиваться по сравнению с (19), если $b > 0$, и уменьшаться, если $b < 0$. Причём величина мнимого смещения c определяет изменение формы пучка: при небольших значениях $c < 1$ амплитуда смещённого пучка (13) будет иметь вид эллипса, при $c > 1$ амплитуда пучка (13) будет иметь вид полумесяца, и при $c \gg 1$ пучок (13) будет иметь вид астигматического Гауссова пучка [30]. При этом центр пучка Бесселя (5) смещается по оси x на величину $\Delta x = (b - c)/\alpha$.

4. Орбитальный угловой момент суперпозиции смещённых пучков Бесселя

Рассмотрим суперпозицию P смещённых пучков Бесселя n -го порядка (13). Амплитуда углового спектра плоских волн для такой суперпозиции будет иметь вид:

$$A(\rho, \theta) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p A_{pn}(\rho, \theta), \quad (21)$$

где

$$A_{pn}(\rho, \theta) = \frac{(-i)^n}{\alpha \lambda} \exp(in\theta) \delta\left(\rho - \frac{\alpha}{k}\right) \times \exp(-ikx_p \rho \cos \theta -iky_p \rho \sin \theta) \quad (22)$$

– амплитуда углового спектра p -го пучка в суперпозиции, смещённого на комплексный вектор с координатами (x_p, y_p) . С помощью (14) и (15) получим нормированный ОУМ суперпозиции (21)

$$\frac{J_z}{I} = n - i\alpha \frac{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q \frac{x_p^* y_q - x_q y_p^*}{R_{pq}} J_1(\alpha R_{pq})}{\sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{P-1} C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})}, \quad (23)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков,

$$R_{pq} = \sqrt{(x_p^* - x_q)^2 + (y_p^* - y_q)^2}, \quad (24)$$

$$R_{pp} = 2i \sqrt{(\text{Im} x_p)^2 + (\text{Im} y_p)^2}.$$

Хотя перед дробью в (23) есть множитель $i\alpha$, всё выражение является вещественным. Это следует из того, что 1) при $p = q$ в числителе величина $|C_p|^2$ вещественна, величины R_{pq} и $J_1(\alpha R_{pq})$ чисто мнимые, а разность $x_p^* y_p - x_p y_p^*$ тоже чисто мнимая, так как представляет собой разность двух комплексно-сопряжённых чисел; 2) для любых неравных друг другу p и q $R_{pq} = R_{qp}^*$, а слагаемые с номерами (p, q) и (q, p) также представляют собой разность двух комплексно-сопряжённых чисел.

Можно показать, что если все пучки Бесселя в суперпозиции (21) смещаются на действительный вектор (x_p, y_p) и все коэффициенты C_p также действительны, то числитель дроби в (23) будет равен нулю и ОУМ всей суперпозиции будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя n -го порядка (19). Это основной результат данной работы. Он позволяет формировать самые различные непараксиальные лазерные пучки, которые будут иметь разные распределения интенсивности в сечении пучка, но будут иметь один и тот же ОУМ (19) и распространяться без дифракции. Ниже в разделе моделирования будут приведены примеры таких пучков.

Из (23) следуют интересные частные случаи. Если $P = 2$, $x_0 = c/\alpha$, $y_0 = ic/\alpha$, $x_1 = -c/\alpha$, $y_1 = ic/\alpha$, то $R_{00} = R_{11} = 2ic/\alpha$, $R_{01} = R_{10} = 0$ и получим для нормированного ОУМ простую формулу (коэффициенты в (21) – произвольные комплексные числа C_0, C_1):

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c(|C_0|^2 - |C_1|^2) I_1(2|c|)}{(|C_0|^2 + |C_1|^2) I_0(2|c|) + 2 \text{Re}\{C_0^* C_1\}}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что при сложении двух пучков Бесселя n -го порядка, смещение которых хоть и комплексное (чисто мнимое по одной координате), но согласованное между собой, при одинаковых по модулю коэффициентах $|C_0| = |C_1|$ нормированный ОУМ

(25) будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя n -го порядка (19). То есть при равных коэффициентах $|C_0|=|C_1|$ можно менять распределение интенсивности в поперечном сечении суперпозиции двух смещённых пучков Бесселя (так как при изменении величины c изменяется форма пучка Бесселя), хотя их общий ОУМ не будет меняться.

5. Суперпозиция трёх смещённых пучков Бесселя

Рассмотрим 3 пучка Бесселя n -го порядка, смещённых так, что центры их находятся в углах равностороннего треугольника. То есть $P=3, R_{01}=R_{02}=R_{12}$, весовые коэффициенты суперпозиции (21) C_0, C_1, C_2 – произвольные комплексные числа, и пусть координаты комплексного вектора смещения заданы выражением:

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{3}\right) + \frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{3}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\frac{2\pi p}{3}\right) + i\frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{3}\right), \end{cases} \quad (26)$$

где R_0 – радиус окружности, на которой расположены центры сингулярности смещённых пучков Бесселя, c задаёт асимметрию смещённого пучка Бесселя, γ – угол поворота асимметричного смещённого пучка Бесселя. Тогда ОУМ будет равен выражению:

$$\begin{aligned} J_z/I = n + \\ \frac{\pm D_1 \xi I_1(2c) + \text{Im}\left\{D_2(\xi \mp ic\sqrt{3})J_1(\sqrt{3}\xi \pm ic)\right\}}{D_1 I_0(2c) + 2\text{Re}\left\{D_2 J_0(\sqrt{3}\xi \pm ic)\right\}}, \end{aligned} \quad (27)$$

где верхний знак берётся для $\gamma=0$ и нижний знак берётся для $\gamma=\pi$ (для других значений γ выражение для нормированного ОУМ будет более громоздким),

$$\begin{cases} D_1 = |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2, \\ D_2 = C_0^* C_1 + C_1^* C_2 + C_2^* C_0, \end{cases} \quad (28)$$

где $\xi = \alpha R_0 \pm c$.

В частном случае, когда $\gamma=\pi, c=\alpha R_0$, параметр ξ равен нулю, и вместо (27) получим:

$$\frac{J_z}{I} = n + \frac{c\sqrt{3}I_1(c)\text{Im}\{D_2\}}{D_1 I_0(2c) + 2I_0(c)\text{Re}\{D_2\}}. \quad (29)$$

Из (29) следует, что если коэффициенты C_0, C_1, C_2 действительные, то множитель $\text{Im}\{D_2\}$ в (29) равен нулю и ОУМ суперпозиции из трёх пучков Бесселя n -го порядка будет равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя (19). На рис. 1 для примера показана интенсивность и фаза суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=3$. ОУМ суперпозиции равен $J_z/I=3$.

На рис. 2 показана кодированная фаза (рис. 2а) суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n=3$ (рис. 1б). Эта фаза подавалась на пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение – 1920×1080 пикселей, размер пикселя – 8 мкм).

На рис. 2б–г показаны распределения интенсивности, сформированные SLM, при отражении линейно-поляризованной плоской волны с длиной 633 нм на разных расстояниях. Из рис. 2 видно, что пучок сохраняет свою структуру при распространении и распределение интенсивности согласуется с расчётным (рис. 1а). Интенсивность регистрировалась с помощью CMOS-камеры MDCE-5A (1/2", разрешение – 1280×1024 пикселей).

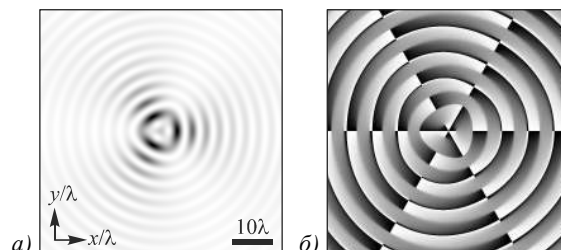


Рис. 1. Интенсивность (а) (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль) и фаза (б) (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) суперпозиции из трёх смещённых мод Бесселя с параметрами: $n=3, R_0=4\lambda, \alpha=1/\lambda, c=4, \gamma=\pi$, вектор весовых коэффициентов $C=[1, 1, 1]$. Размер кадра $2R=60\lambda$

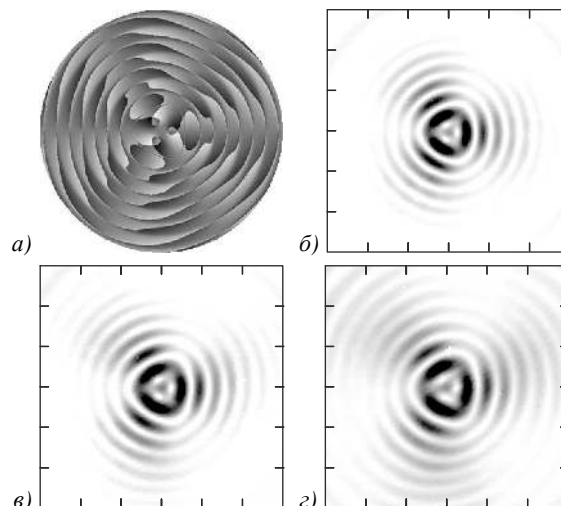


Рис. 2. Кодированная фаза (рис. 1б, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура равностороннего треугольника (а) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях от плоскости $z=0$: 0 мм (б); 200 мм (в); 400 мм (г). Шаг сетки равен 0,5 мм

На рис. 3 показано распределение интенсивности и фазы суперпозиции из трёх смещённых пучков Бесселя с одинаковыми единичными весовыми коэффициентами $C=[1, 1, 1]$, но для других значений параметров: $n=5, R_0=8\lambda, c=3$. Картина дифракции такого пучка совсем иная – вместо светового треугольника формируются три световых пятна. Для такого пучка $c \neq \alpha R_0$, поэтому ОУМ не может быть определён с помощью формулы (29). Согласно формуле (27), ОУМ этого пучка дробный и равен

$$\frac{J_z}{I} = 5 + \frac{\text{Im}\left\{(5+i\sqrt{3})J_1(5\sqrt{3}-3i)\right\} - 5I_1(6)}{I_0(6) + 2\text{Re}\left\{J_0(5\sqrt{3}-3i)\right\}} \approx 0,62.$$

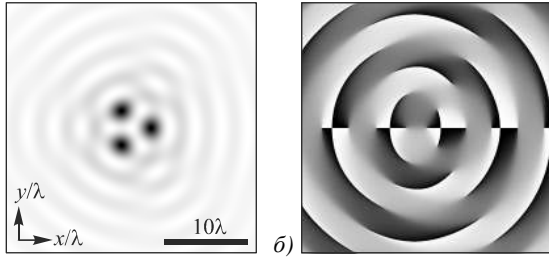


Рис. 3. Интенсивность (а) (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль) и фаза (б) (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) суперпозиции из трёх пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$, вектор весовых коэффициентов $C = [1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 30\lambda$

На рис. 4 показана фаза (а) и распределения интенсивности (б–д), сформированные SLM, для суперпозиции из 3 пучков Бесселя с параметрами $n = 5$, $R_0 = 8\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 3$, $\gamma = \pi$. Из рис. 4 видно, что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис. 3а.

$$\frac{J_z}{I} = n + \alpha \frac{2R_0 \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{q=0}^{p-1} \text{Im}\{C_p^* C_q\} \sin\left[\frac{\pi(p-q)}{P}\right] I_1 \left\{ 2\alpha R_0 \cos\left[\frac{\pi(p-q)}{P}\right] \right\}}{\sum_{p=0}^{P-1} |C_p|^2 I_0(2\alpha r_{pi}) + 2 \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{q=0}^{p-1} \text{Re}\{C_p^* C_q J_0(\alpha R_{pq})\}} \quad (32)$$

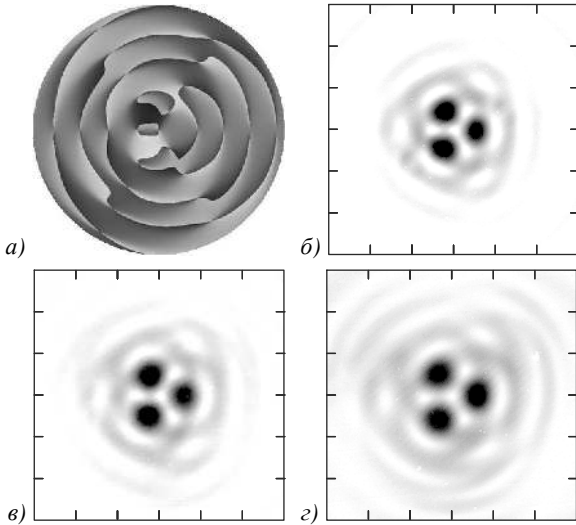


Рис. 4. Кодированная фаза для формирования пучка Бесселя в виде трёх световых пятен (рис. 3б, негатив) (а) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях от плоскости $z = 0$: (б) 0 мм; (в) 200 мм; (г) 400 мм. Шаг сетки равен 0,5 мм

Если все коэффициенты C_p действительные, то числитель в (32) равен нулю и ОУМ такой суперпозиции смещённых пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещённого пучка Бесселя (19). В качестве примера на рис. 5 показана интенсивность и фаза суперпозиции из четырёх смещённых пучков Бесселя с топологическими зарядами $n = 7$. Нормированный ОУМ этой суперпозиции равен $J_z/I = 7$. Из рис. 5б видно, что внутри основного светлого кольца, похожего на квадрат, имеются 7 оптических вихрей с топологическим зарядом +1.

6. Суперпозиция пучков Бесселя, расположенных в углах правильного многоугольника

Как и в предыдущем случае, рассмотрим суперпозицию из P смещённых пучков Бесселя n -го порядка, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного многоугольника (аналогично (26)):

$$\begin{cases} x_p = R_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{P}\right) + \frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{P}\right), \\ y_p = R_0 \sin\left(\frac{2\pi p}{P}\right) + i\frac{c}{\alpha} \exp\left(-i\gamma - i\frac{2\pi p}{P}\right), \end{cases} \quad (30)$$

где $p = 0, \dots, P - 1$.

Пусть для определённости $\gamma = \pi$ и $c = \alpha R_0$. В этом случае вместо (30) будет:

$$\begin{cases} x_p = iR_0 \sin(2\pi p/P), \\ y_p = -iR_0 \cos(2\pi p/P). \end{cases} \quad (31)$$

Общая формула для ОУМ (23) примет вид:

На рис. 6 показана кодированная фаза (а) и распределения интенсивности (б–д), сформированные SLM, для суперпозиции из четырёх смещённых пучков Бесселя (рис. 5) с топологическими зарядами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $C = [1, 1, 1, 1]$. Из рис. 6 видно, что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис. 5а.

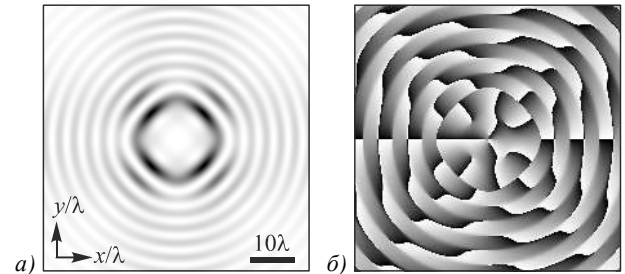


Рис. 5. Интенсивность (а) (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль) и фаза (б) (чёрный цвет – π , белый цвет – $-\pi$) суперпозиции из четырёх ($P = 4$) смещённых пучков Бесселя с параметрами $n = 7$, $R_0 = 6\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 6$, $\gamma = \pi$, $C = [1, 1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 60\lambda$

На рис. 7 показан другой пример: интенсивность (а) и фаза (б) суперпозиции из шести ($P = 6$) смещённых пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом $n = 10$, центры сингулярности которых расположены в вершинах правильного шестиугольника. Нормированный ОУМ такой суперпозиции равен $J_z/I = 10$.

На рис. 8 показана кодированная фаза (а) и распределение интенсивности (б–д), сформированные SLM на разных расстояниях, для суперпозиции из шести ($P = 6$) смещённых пучков Бесселя (рис. 7) с одинаковым топологическим зарядом $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $C = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Из рис. 8 видно,

что картины дифракции согласуются с расчётной интенсивностью на рис. 7а.

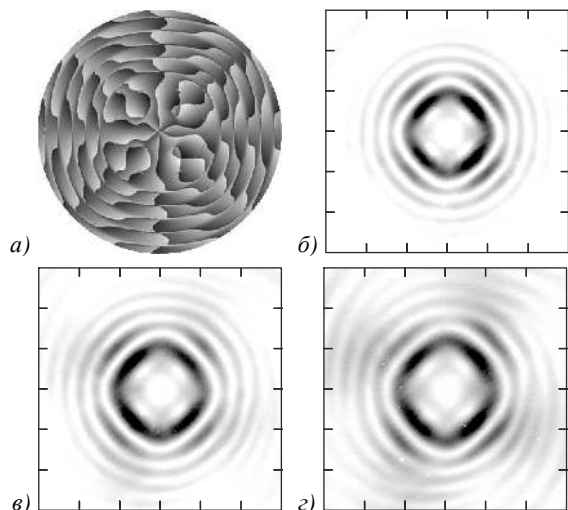


Рис. 6. Кодированная фаза (рис. 5б, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура квадрата (а) и экспериментально сформированные распределения интенсивности на различных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (б); 200 мм (в); 400 мм (г). Шаг сетки равен 0,5 мм

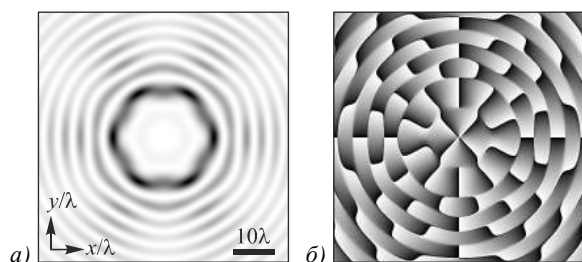


Рис. 7. Интенсивность (а) и фаза (б) (чёрный цвет – $-\pi$, белый цвет – π) суперпозиции из 6 смещённых пучков Бесселя с параметрами: $P = 6$, $n = 10$, $R_0 = 12\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$, $c = 12$, $\gamma = \pi$, $C = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$. Размер кадра $2R = 60\lambda$

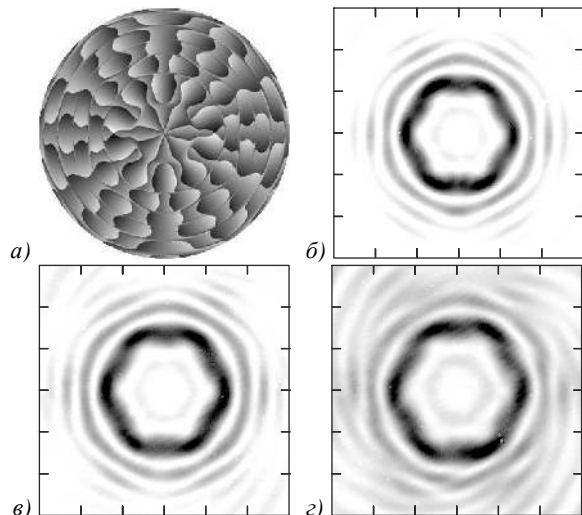


Рис. 8. Кодированная фаза (рис. 7а, негатив) для формирования пучка Бесселя в виде контура шестиугольника (а) и экспериментально сформированные распределения интенсивности на разных расстояниях от плоскости $z = 0$: 0 мм (б); 200 мм (в); 400 мм (г). Шаг сетки равен 0,5 мм

7. Суперпозиция большого числа пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности

В этом разделе показано, что если в каждой точке окружности радиуса R_0 расположить центр смещённого пучка Бесселя n -го порядка и рассмотреть суперпозицию бесконечного числа таких пучков с одинаковыми весовыми коэффициентами, то вся суперпозиция сформирует обычный несмещённый пучок Бесселя n -го порядка.

Используя представление функции Бесселя в виде ряда, несмещённый пучок Бесселя (5) в начальной плоскости ($z = 0$) можно также представить в виде ряда:

$$E(x, y, z = 0) = \exp(in\varphi) J_n(\alpha r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} (x-iy)^p (x+iy)^{n+p}. \quad (33)$$

Рассмотрим непрерывную суперпозицию смещённых пучков Бесселя (33), центры которых расположены на окружности радиуса R_0 :

$$E(x, y, z = 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \int_0^{2\pi} [(x - R_0 \cos \theta) - i(y - R_0 \sin \theta)]^p \times [(x - R_0 \cos \theta) + i(y - R_0 \sin \theta)]^{n+p} d\theta. \quad (34)$$

В полярных координатах (34) будет иметь вид:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \int_0^{2\pi} [r \exp(-i\varphi) - R_0 \exp(-i\theta)]^p \times [r \exp(i\varphi) - R_0 \exp(i\theta)]^{n+p} d\theta. \quad (35)$$

Представим оба множителя под интегралом в (35) в виде биномиального разложения:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2p} \times \sum_{m=0}^p \sum_{k=0}^{n+p} \binom{p}{m} \binom{n+p}{k} (-R_0)^{m+k} r^{2p-m+n-k} \times \exp[i(n+p-k)\varphi - i(p-m)\varphi] \times \int_0^{2\pi} \exp[i(k-m)\theta] d\theta. \quad (36)$$

Так как интеграл по θ не равен нулю только при $k = m$, сумма по k пропадает, и вместо (36) получим:

$$E(r, \varphi, z = 0) = 2\pi \exp(in\varphi) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \times \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} \binom{n+p}{m} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m}. \quad (37)$$

Изменим порядок суммирования в (37), тогда получим:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z = 0) &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m} \times \right. \\
 &\times \left. \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} \binom{n+p}{m} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \right] = \\
 &= 2\pi \exp(in\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^{2m} \times \\
 &\times \sum_{p=m}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(m!)^2 (p-m)!(n+p-m)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Заменим $p - m$ на p и перегруппируем сомножители в двух рядах так, что станет видно, что эти ряды равны функциям Бесселя:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z = 0) &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(R_0/r)^{2m}}{(m!)^2} \times \right. \\
 &\times \left. \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+m}}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p+2m} \right] = \\
 &= 2\pi \exp(in\varphi) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha R_0}{2}\right)^{2m} \right] \times \\
 &\times \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{n+2p} \right] = \\
 &= 2\pi J_0(\alpha R_0) J_n(\alpha r) \exp(in\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Амплитуда (39) отличается от амплитуды обычного пучка Бесселя множителем $2\pi J_0(\alpha R_0)$. На рис. 9 показаны интенсивности суперпозиции из 5, 8, 10, 20, 40 и 60 смещённых пучков Бесселя с топологическим зарядом $n = 7$, центры которых лежат на окружности радиуса $R_0 = 100\lambda$. Параметры расчёта для всех рис. 9а–е одинаковы: $n = 7$, $R_0 = 100\lambda$, $\alpha = 1/\lambda$. Размер кадров $2R = 240\lambda$.

Из рис. 9 видно, что уже при $P = 60$ почти формируется несмещённая мода Бесселя с амплитудой (39). Нормированный ОУМ для всех суперпозиций на рис. 9а–е одинаковый и равен $J_2 I = 7$. Из (39) видно, что при $\alpha R_0 = \gamma_{0,s}$, ($\gamma_{0,s}$ – s -й корень функции Бесселя нулевого порядка) комплексная амплитуда равна нулю (т.е. все пучки Бесселя испытывают деструктивную интерференцию). Численное моделирование это подтверждает: для суперпозиции из $P = 360$ пучков при $R_0 = 100\lambda$ и при $R_0 = \gamma_{0,32}\lambda = 99,74682\lambda$ получаются изображения, аналогичные рис. 9е, однако интенсивность во втором случае в 3×10^{12} раз меньше.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение для расчёта нормированного ОУМ для суперпозиции смещённых с оптической оси пучков Бесселя с одинаковым топологическим зарядом (выражение (23)). Показано, что если весовые коэффициенты суперпозиции действительны, то ОУМ всей суперпозиции пучков Бесселя равен ОУМ одного несмещённого

пучка Бесселя. Это позволяет формировать бездифракционные пучки с разным распределением интенсивности, но с одинаковым ОУМ. Показано, что суперпозиция множества одинаковых пучков Бесселя, центры которых расположены на окружности любого радиуса, эквивалентна одному пучку Бесселя из этой суперпозиции, расположенному в центре окружности (выражение (39)). Показано также, что комплексное смещение пучка Бесселя приводит к изменению распределения интенсивности в сечении пучка и изменению его ОУМ (выражения (18), (20)). Суперпозиция двух пучков Бесселя с комплексным смещением может не менять ОУМ, хотя распределение интенсивности будет меняться (выражение (25)). Эксперимент хорошо согласуется с теорией (рис. 2, 4, 6, 8).

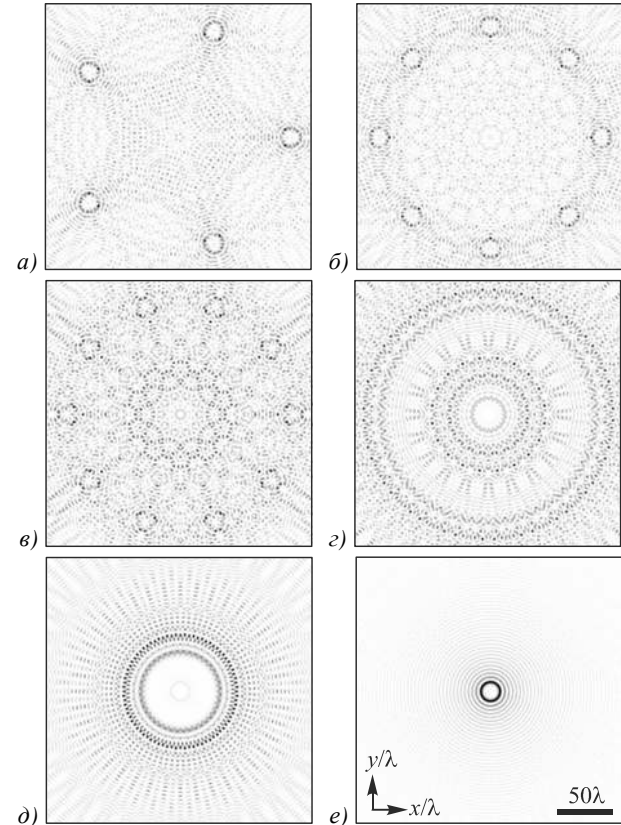


Рис. 9. Интенсивность суперпозиции P пучков Бесселя при $P = 5$ (а), 8 (б), 10 (в), 20 (г), 40 (д), 60 (е) (чёрный цвет – максимум, белый цвет – ноль)

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9), а также грантов РФФИ 13-07-97008, 14-29-07133, 14-07-31092, 15-07-01174 и 15-37-20723.

Литература (References)

1. **Durnin, J.** Exact solution for nondiffractive beams. I. The scalar theory / J. Durnin // Journal of the Optical Society of America A. – 1987. – Vol. 4, Issue 4. – P. 651-654.
2. **Durnin, J.** Diffractive-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 58, Issue 15. – P. 1499-1501.

3. **Turunen, J.** Holographic generation of diffractive-free beams / J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg // *Applied Optics*. – 1988. – Vol. 27, Issue 19. – P. 3959-3962.
4. **Vasara, A.** Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A.T. Friberg // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1989. – Vol. 6, Issue 11. – P. 1748-1754.
5. **MacDonald, R.P.** Interboard optical data distribution by Bessel beam shadowing / R.P. MacDonald, S.A. Boothroyd, T. Okamoto, J. Chrostowski, B.A. Syrett // *Optics Communications*. – 1996. – Vol. 122. – P. 169–177.
6. **McQueen, C.A.** An experiment to study a “nondiffracting” light beam / C.A. McQueen, J. Arlt, K. Dholakia // *American Journal of Physics*. – 1999. – Vol. 67. – P. 912–915.
7. **Barnett, S.M.** Orbital angular momentum and nonparaxial light-beams / S.M. Barnett, L. Allen // *Optics Communications*. – 1994. – Vol. 110. – P. 670-678.
8. **Volke-Sepulveda, K.** Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4. – P. S82-S89.
9. **Kotlyar, V.V.** Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1995. – Vol. 42, Issue 6. – P. 1231-1239.
10. **Kotlyar, V.V.** An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1997. – Vol. 44, Issue 7. – P. 1409-1416.
11. **Paakkonen, P.** Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics / P. Paakkonen, J. Lautanen, M. Honkanen, M. Kuittinen, J. Turunen, S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, A.T. Friberg // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45, Issue 11. – P. 2355-2369.
12. **Khonina, S.N.** Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen // *Optik*. – 1999. – Vol. 110, Issue 3. – P. 137-144.
13. **Lee, H.S.** Holographic nondiffracting hollow beam / H.S. Lee, B.W. Stewart, K. Choi, H. Fenichel // *Physical Review A*. – 1994. – Vol. 49, Issue 6. – P. 4922-4927.
14. **Herman, R.M.** Production and uses of diffractionless beams / R.M. Herman, T.A. Wiggins // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1991. – Vol. 8, Issue 6. – P. 932-942.
15. **Arlt, J.** Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon / J. Arlt, K. Dholakia // *Optics Communications*. – 2000. – Vol. 177. – P. 297-301.
16. **Kotlyar, V.V.** Trochoson / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev, M.V. Shinkarev // *Optics Communications*. – 1992. – Vol. 91, Issue 3-4. – P. 158-162.
17. **Devis, J.A.** Intensity and phase measurements of nondiffracting beams generated with a magneto-optic spatial light modulator / J.A. Devis, E. Carcole, D.M. Cottrell // *Applied Optics*. – 1996. – Vol. 35, Issue 4. – P. 593-598.
18. **Khonina, S.N.** Astigmatic Bessel laser beams / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, P. Paakkonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 677-686.
19. **MacDonald, M.P.** Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures / M.P. MacDonald, L. Paterson, K. Volke-Sepulveda, J. Arlt, W. Sibbett, K. Dholakia // *Science*. – 2002. – Vol. 296. – P. 1101-1103.
20. **Garcés-Chavez, V.** Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam / V. Garcés-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, K. Dholakia // *Nature*. – 2002. – Vol. 419. – P. 145-147.
21. **Khonina, S.N.** Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 14. – P. 2167-2184.
22. **Arlt, J.** Atom guiding long Laguerre-Gaussian and Bessel beams / J. Arlt, T. Hitomi, K. Dholakia // *Applied Physics B: Lasers and Optics*. – 2000. – Vol. 71, Issue 4. – P. 549-554.
23. **Arlt, J.** Optical dipole traps and atomic waveguides based on Bessel light beams / J. Arlt, K. Dholakia, J. Soneson, E.M. Wright // *Physical Review A*. – 2001. – Vol. 63. – P. 063602.
24. **Kotlyar, V.V.** Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29, Issue 5. – P. 741-747.
25. **Zhu, Y.** Probability density of the orbital angular momentum mode of Hankel-Bessel beams in an atmospheric turbulence / Y. Zhu, X. Liu, J. Gao, Y. Zhang, F. Zhao // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 7. – P. 7765-7772.
26. **Bouchal, Z.** Non-diffractive vector Bessel beams / Z. Bouchal, M. Olivik // *Journal of Modern Optics*. – 1995. – Vol. 42, Issue 8. – P. 1555-1566.
27. **Yu, Y.Z.** Vector analysis of nondiffracting Bessel beams / Y.Z. Yu, W.B. Dou // *Progress In Electromagnetics Research Letters*. – 2008. – Vol. 5. – P. 57-71.
28. **Litvin, I.A.** Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams / I.A. Litvin, A. Dudley, A. Forbes // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19, Issue 18. – P. 16760-16771.
29. **Chen, Y.F.** Generation of large orbital angular momentum from superposed Bessel beams corresponding to resonant geometric modes / Y.F. Chen, Y.C. Lin, W.Z. Zhuang, H.C. Liang, K.W. Su, K.F. Huang // *Physical Review A*. – 2012. – Vol. 85. – P. 043833.
30. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398.
31. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 9. – P. 1977-1983.
32. **Gong, L.** Observation of the asymmetric Bessel beams with arbitrary orientation using a digital micromirror device / L. Gong, X. Qui, Y. Ren, H. Zhu, W. Liu, J. Zhou // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 22. – P. 26763-26776.
33. **Sheppard, C.J.R.** Two-dimensional complex source point solutions: application to propagationally invariant beams, optical fiber modes, planar waveguides, and plasmonic devices / C.J.R. Sheppard, S.S. Kou, J. Lin // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31, Issue 12. – P. 2674-2679.

RESEARCH OF ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF SUPERPOSITIONS OF DIFFRACTION-FREE BESSEL BEAMS WITH A COMPLEX SHIFT

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}, D.S. Kalinkina²

¹ Image Processing Systems Institute,
Russian Academy of Sciences,

² Samara State Aerospace University

Abstract

We derive an analytical relationship for calculating the normalized orbital angular momentum (OAM) of the superposition of off-axis Bessel beams characterized by the same topological charge. This relationship enables generating nondiffractive beams with different intensity distribu-

tions but identical OAM. As a result of a complex shift of the Bessel beam, the transverse intensity distribution and OAM of the beam are also shown to change. We show that in the superposition of two or more complex-shifted Bessel beams, the OAM may remain unchanged, while the intensity distribution is changed. Numerical simulation is in good agreement with theory.

Keywords: diffraction-free laser beam, nonparaxial Bessel mode, orbital angular momentum, complex shift of solution of the Helmholtz equation.

Сведения об авторах

Сведения об авторах Ковалёв Алексей Андреевич и Котляр Виктор Викторович – см. стр. 171 этого номера.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Ассистент кафедры технической кибернетики СГАУ, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН). Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование.

E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Physics and Mathematics. Candidate in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an assistant professor in Technical Cybernetics department of SSAU and a researcher in Micro- and Nanotechnologies laboratory of the Image Processing Systems Institute of the RAS (IPSI RAS). His current research interests include diffractive optics and optical manipulation.

Калинкина Дарья Сергеевна, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика.

E-mail: dskalinkina@gmail.com.

Darya Sergeevna Kalinkina (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering faculty. She is a post graduate student of the Technical Cybernetics department in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics.

*Поступила в редакцию 11 марта 2015 г.
Окончательный вариант – 26 марта 2015 г.*