Л. А. Бекларян, К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 3, 23–54

DOI: https://doi.org/10.4213/sm115

УДК 515.168.3

Л. А. Бекларян

К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры

Работа посвящена исследованию групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, общего вида. Для таких групп исследуются метрические инварианты в виде инвариантной и проективно-инвариантной меры. Принятый подход приводит к классификации таких групп гомеоморфизмов по степени сложности множества неподвижных точек элементов группы. Внутри каждого из выделенных классов групп проводится более тонкая классификация в зависимости от степени сложности топологической структуры орбит и комбинаторных свойств групп.

Библиография: 31 название.

Введение

Различные вопросы алгебры, анализа, теории динамических систем, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом приводят к необходимости исследования групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию [1], [2], [5], [8], [12], [16]–[19]. Первые работы в этом направлении связаны с исследованиями А. Пуанкаре поведения решений дифференциального уравнения на торе $\boldsymbol{T}^2$, которые породили задачу описания структуры гомеоморфизма окружности на себя. Решение этой задачи связано с именами Пуанкаре, Данжуа, Колмогорова, Арнольда, Мозера и других [1]–[4]. Гомеоморфизм окружности характеризуется важнейшим инвариантом, называемым числом вращения. Со значением этого инварианта (рациональным или иррациональным) связаны: существование неподвижных точек для какой-либо степени гомеоморфизма; существование замены переменной, приводящей данный гомеоморфизм к вращению окружности; вопрос о гладкости замены переменной, приводящей данный диффеоморфизм к вращению окружности. Всякому гомеоморфизму окружности соответствует эквивалентный ей объект – коммутативная группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, с двумя образующими. Одна из образующих является накрытием исходного гомеоморфизма, а вторая образующая – преобразование на единицу, т.е. $q(t) = t + 1$.

В теории функций комплексной переменной исследование группы квазиконформных преобразований единичного диска в себя, оставляющих неподвижной заданную точку на границе диска, изложенное в работе Альфорса [5], сводится к изучению квазисимметрических групп гомеоморфизмов прямой [5], [6].

В геометрии исследование компоненты Новикова слоения коразмерности один, сводится к изучению представления фундаментальной группы этой компоненты в

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-015113а).

группу гомеоморфизмов прямой [7], [8]. В частности, класс слоений, приспособленных для этой операции, – это слоения, порожденные потоками Аносова коразмерности один [8].

Другой класс задач связан с исследованием дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(\sigma_1(t)), \ldots, x(\sigma_s(t))\big) \qquad t \in I,$$

где I – конечный интервал, полупрямая или прямая $\mathbb{R}$, а функции отклонения $\sigma_j(\,\cdot\,)$, $j = \overline{1,s}$, задают гомеоморфизмы $\sigma_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,s}$, сохраняющие ориентацию, и образуют конечно-порожденную группу гомеоморфизмов $Q = \big\langle \sigma_j, j = \overline{1,s} \big\rangle$. Оказывается, что важнейшие свойства вариационных задач для систем с отклоняющимся аргументом и, в частности, важнейшие свойства дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, связаны со структурой группы гомеоморфизмов Q [19]–[22].

В алгебре одной из самостоятельных задач является исследование правоупорядочиваемых групп [15]. Известно, что правоупорядоченная группа может быть реализована как группа автоморфизмов упорядоченного множества. Недавно Р. И. Григорчук заметил, что правоупорядоченная счетная группа может быть реализована как группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Более того, реализации упорядочиваемых групп в виде групп гомеоморфизмов прямой обладают дополнительным важным свойством: графики различных элементов образуют кортеж, т.е. график одного из них расположен над графиком другого, хотя касание допустимо.

Работа посвящена исследованию групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, общего вида. Проводится классификация таких групп гомеоморфизмов по степени сложности множества неподвижных точек элементов группы. Внутри каждого из выделенных классов групп проводится более тонкая классификация в зависимости от степени сложности топологической структуры орбит и комбинаторных свойств групп.

Центральным в работе является исследование метрических инвариантов для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Это инвариантные и проективно-инвариантные меры. Дана эквивалентная формулировка условию существования метрического инварианта в виде условия полусопряженности такой группы некоторой подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$ (в случае инвариантной меры – это условие полусопряженности такой группы некоторой подгруппе группы сдвигов на прямой). Известные до сих пор доказательства существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, использовали те или иные комбинаторные свойства групп (субэкспоненциальность, аменабельность, конечная порожденность), либо наличие некоторых алгебраических или дифференциальных свойств (абелевость, рассмотрение специальных групп диффеоморфизмов). В этой связи, природа существования инвариантной меры не совсем ясна. Принятый в данной работе подход описания групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию (классификация множества неподвижных точек элементов группы), позволяет полностью исследовать природу существования не только инвариантной меры (априори не предполагая никаких ограничений), но и более общего метрического инварианта – проективно инвариантной меры.

В основе полученных результатов лежит некоторое естественное отношение частичного порядка в группе гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, и фундаментальная теорема Гёльдера об архимедовых группах [10].

Важно отметить, что доказательства всех полученных результатов построены на использовании внутренних конструкций для гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, и многократном использовании фундаментальной теоремы Гёльдера. Автор признателен Д. В. Аносову, который при подготовке работы [19] обратил мое внимание на важность теоремы Гёльдера для рассматриваемой там задачи.

За рамками данной статьи остались такие важные вопросы как исследование специальных групп Q, в частности: групп диффеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию (возможность уточнения структуры минимальных множеств в виде теорем Данжуа, существование инвариантной меры и другие вопросы); групп ограниченных когомологий $H_b^k(Q : \mathbb{R})$, $H_b^k(Q : \mathbb{Z})$ и связанных с ними инвариантов. Такие исследования проведены в работах [16], [17], [25]–[31].

§ 1 посвящен основным определениям и некоторым предварительным сведениям. Большинство определений – это хорошо устоявшиеся в литературе определения. Они полностью приводятся для замкнутости изложения. Определение полусопряженности, данное автором, в случае, когда гомеоморфизмы прямой являются накрытиями гомеоморфизмов окружности, эквивалентно определению из работы [29].

В § 2 приводится результат автора [23] о структуре факторгруппы гомеоморфизмов Q по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов. Теорема о структуре факторгруппы является определяющей при исследовании таких групп. Доказательство самой теоремы приводится в [23], но заметим, что оно также построено на использовании теоремы Гёльдера. Частный случай приведенной теоремы (для конечно-порожденных групп, не содержащих свободных полугрупп с более чем одной образующей, или счетных групп с общей неподвижной точкой для элементов, имеющих хотя бы одну неподвижную точку) был получен в работах [8], [26]–[28].

В § 3 детально рассматривается наиболее простой класс групп свободно действующих гомеоморфизмов прямой (неединичные элементы группы не имеют неподвижных точек). Для таких групп: исследована структура орбит; описаны минимальные множества; доказано существование непрерывной σ-конечной инвариантной борелевской меры. Хотя для таких групп, и даже в несколько более общей ситуации (для абелевых групп, содержащих неединичный элемент без неподвижных точек), существование σ-конечной инвариантной борелевской меры доказано в работе [17], мы предпочитаем, в рамках единого подхода, ее доказывать заново. Для этого приходится детально исследовать носитель конструируемой σ-конечной инвариантной борелевской меры, что оказывается существенным и в дальнейшем. В частности, это позволяет установить топологическую полусопряженность группы гомеоморфизмов прямой рассматриваемого класса некоторой подгруппе группы сдвигов прямой, исследовать условия строгой эргодичности группы.

В § 4 рассматривается следующий по сложности класс групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, а именно, групп с общей неподвижной точкой для элементов, имеющих хотя бы одну неподвижную точку (группы Q с условием

$\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$). Доказывается центральный результат об эквивалентности следующих важнейших характеристик группы Q: непустота множества $\operatorname{Fix} Q^N$; существование σ-конечной борелевской меры μ на $\mathbb{R}$, инвариантной относительно группы Q; полусопряженность группы Q некоторой подгруппе группы сдвигов на прямой. Исследованы структура носителя инвариантной меры, минимальные множества, строгая эргодичность группы, и, соответственно, условия топологической полусопряженности некоторой подгруппе группы сдвигов на прямой. Приводятся различные критерии непустоты множества $\operatorname{Fix} Q^N$. В работе [17, теорема 1.3] для конечно-порожденных групп Q получен критерий существования инвариантной меры комбинаторного характера. А именно, существование инвариантной относительно группы Q σ-конечной борелевской меры на $\mathbb{R}$ эквивалентно условию субэкспоненциального роста орбиты $Q(t)$ для какой-либо точки $t \in \mathbb{R}$.

В § 5 уточняется структура факторгруппы из § 2 (теорема о факторгруппе) в зависимости от структуры орбит. Эта теорема лежит в основе приведенной в дальнейшем классификационной схемы. Исследуются группы, не имеющие инвариантных мер. Для таких групп исследуются структура орбит и множества неподвижных точек, а также минимальные множества. В частности, к таким группам относятся некоммутативные группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$.

В § 6 для групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, изучаются гомоморфизмы из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$. В работе [17] предложен способ построения гомоморфизмов из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$ с помощью инвариантных σ-конечных борелевских мер. Там же доказано, что любые две инвариантные σ-конечные борелевские меры μ и ν порождают линейно зависимые элементы τ_μ, τ_ν из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$ с положительным коэффициентом растяжения. В данной работе для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности, изучается отображение $A\colon Q \to \mathbb{R}$, где $A(q)$ число вращения гомеоморфизма q. Доказана эквивалентность утверждений:

$A \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$;

объединение стабилизаторов Q^N образует группу;

$\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ (что эквивалентно существованию инвариантной σ-конечной борелевской меры μ).

Более того, гомоморфизмы τ_μ, A линейно зависимы с положительным коэффициентом растяжения. Таким образом, существование алгебраического инварианта в виде гомоморфизма $A \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$, где $A(q)$ для любого $q \in Q$ есть число вращения гомеоморфизма q, эквивалентно существованию метрического инварианта в виде инвариантной σ-конечной борелевской меры μ. В терминах гомоморфизма τ_μ формулируется условие, эквивалентное условию строгой эргодичности группы Q. В работе [9] для групп, являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности и не содержащих свободных подполугрупп с более чем одной образующей, доказана справедливость каждого из трех утверждений, приведенных выше, хотя вопрос об их эквивалентности не исследовался. Там же показано, что в случае $A \notin \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$ такая группа Q содержит свободную подгруппу с двумя образующими. Для конечно-порожденных групп гомеоморфизмов, являющихся накрытиями гомеоморфизмов окружности, в работе [13, глава XI] доказана эквивалентность следующих условий:

$A \in \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})$;

существует инвариантная σ-конечная мера μ;

существует точка $t \in \mathbb{R}$, орбита $Q(t)$ которой имеет субэкспоненциальный рост.

В $\S 7$ приводятся результаты по исследованию метрического инварианта в виде проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Дана эквивалентная формулировка условию существования такого метрического инварианта в виде условия полусопряженности такой группы некоторой подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$. Исследуемый метрический инвариант обобщает понятие инвариантной меры. Описаны структура носителя проективно-инвариантной меры, условия непрерывности этой меры и условия строгой проективной эргодичности группы Q. Следуя работе [17], по проективно-инвариантной мере строится гомоморфизм A_Q из пространства $\mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Описана нормальная подгруппа $C = \ker A_Q$. Приводятся достаточные условия топологической сопряженности группы Q по отношению к подгруппе группы аффинных преобразований прямой. Следует отметить работу [17], в которой изучены различные критерии существования проективно-инвариантной меры, связанные с метрическими свойствами выделенных нормальных подгрупп. Там, в частности, даны критерии существования проективно-инвариантной меры для разрешимых групп.

В $\S 8$ изучаются свойства групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, не содержащих свободных подполугрупп (групп класса $\mathscr{P}$) и групп субэкспоненциального роста (групп класса $\mathscr{L}$) [11], [12], [14], [16]. Очевидно, что $\mathscr{L} \in \mathscr{P}$, а коммутативные группы относятся к группам класса $\mathscr{L}$. Существуют примеры конечно-порожденных групп, которые не являются аменабельными [8], [14], поэтому не принадлежат классу $\mathscr{L}$. Вместе с тем, в работе [8] построена группа, которая не принадлежит классу $\mathscr{P}$, но является аменабельной. В той же работе [8] приводится важный критерий (лемма 3.1) того, что группа не принадлежит классу $\mathscr{P}$. Здесь для групп класса $\mathscr{P}$ уточняется взаиморасположение неподвижных точек произвольных двух элементов группы, даются различные критерии существования инвариантной меры для групп класса $\mathscr{P}$. В частности, теорема 8.1 является обобщением на группы класса $\mathscr{P}$ предложения 3.1 работы [17] о существовании инвариантной меры для коммутативных групп.

В $\S 9$ для произвольных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, исследуются структура минимальных множеств и критерии их существования. Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их "нетривиальности" орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов. К ранним исследованиям по минимальным множествам следует отнести работы Данжуа для гомеоморфизмов окружности. В литературе результаты такого типа известны под названием теорем Данжуа [3], [4]. Исследование минимальных множеств для счетных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в работах [26]–[28]. В них указаны критерии существования минимальных множеств, уточняется структура орбит. Указанные результаты полностью перекрываются теоремами 9.1 и 9.2, которые являются простыми следствиями результатов предыдущих параграфов и теоремы о факторгруппе из $\S 5$. В работах [26]–[28] также приводятся критерии существования минимальных множеств для некоторых счетных групп диффеоморфизмов, формулировки которых приводятся в теореме 9.3.

В §10 для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, доказано существование некоторой канонической цепочки убывающих подгрупп с абелевыми факторгруппами. Используя это, приводится критерий разрешимости групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, не содержащих свободных подполугрупп с более чем одной образующей. Представление в виде цепи приводит к уточнению классификационной схемы для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию.

§1. Некоторые предварительные сведения и основные определения

В этом параграфе определяются некоторые характеристики групп гомеоморфизмов Q прямой $\mathbb{R}$. В частности, вводится определение полусопряженности группы Q к группе $.Q$ (определение 1.4). В [29] приводится определение полусопряженности для пары групп гомеоморфизмов прямой, элементы которых являются накрытием гомеоморфизма окружности. Для таких групп эти два определения эквивалентны.

Важнейшими характеристиками при классификации групп гомеоморфизмов Q прямой $\mathbb{R}$ являются:

$Q(t) = \{q(t) : q \in Q\}$ – орбита точки $t \in \mathbb{R}$;

$N(Q) = \{t : t \in \mathbb{R}; \exists\, q \in Q, q \neq e, q(t) = t\}$ – множество неподвижных точек элементов группы Q;

$\operatorname{Fix} Q = \{t : t \in \mathbb{R}; \forall\, q \in Q, q(t) = t\}$ – множество неподвижных точек группы гомеоморфизмов Q.

Наряду с группой Q будем рассматривать ее подмножество

$$Q^N = \{q : q \in Q; \exists\, t \in \mathbb{R}, q(t) = t\},$$

которое не всегда является подгруппой, а для любого $t \in \mathbb{R}$ подгруппу

$$Q_t = \{q : q \in Q, q(t) = t\}$$

(стабилизатор точки t).

Очевидно, что $Q^N = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} Q_t$. С множеством Q^N связаны важные понятия:

группа, порожденная Q^N, а именно $\overline{Q}^N = \langle Q^N \rangle$;

множество неподвижных точек объединения стабилизаторов

$$\operatorname{Fix} Q^N = \{t : t \in \mathbb{R}, \forall\, q \in Q^N, q(t) = t\}$$

Если q – гомеоморфизм $\mathbb{R}$, то через $\langle q \rangle$ будем обозначать циклическую группу. Очевидно, что для любой группы Q имеют место соотношения

$$\operatorname{Fix} Q^N = \bigcap_{q\in Q^N} \operatorname{Fix}(\langle q \rangle), \qquad N(Q) = \bigcup_{q\in Q} N(\langle q \rangle),$$

а условия $N(Q) = \varnothing$, $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, $Q^N = \langle e \rangle$ эквивалентны.

Если $A \subseteq \mathbb{R}$ – произвольное подмножество, то через $\boldsymbol{P}(A)$ будем обозначать множество предельных точек множества A. Через $\Pi_{\mathbb{R}}$ будем обозначать группу всех сдвигов на $\mathbb{R}$, т.е. для любого $\pi \in \Pi_{\mathbb{R}}$ имеет место $\pi = t + h_\pi$, где $h_\pi \in \mathbb{R}$.

Через $\Pi_{\mathbb{Z}}$ будем обозначать циклическую группу всех сдвигов на $\mathbb{Z}$, т.е. для любого $\pi \in \Pi_{\mathbb{Z}}$ имеет место $\pi = t + n_\pi$, где $n_\pi \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что группа $\Pi_{\mathbb{Z}}$ естественным образом вкладывается в группу $\Pi_{\mathbb{R}}$. Образ $\Pi_{\mathbb{Z}}$ при его вложении в $\Pi_{\mathbb{R}}$ также будем обозначать через $\Pi_{\mathbb{Z}}$. И вообще, если задано подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$, инвариантное относительно группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{Z}}$, то мы не будем различать группу сдвигов $\Pi_{\mathbb{Z}}$ на множестве A и его естественное вложение в группу сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$.

Определение 1.1. Множество $I \subseteq \mathbb{R}$ называется *Q-инвариантным*, если для любого $q \in Q$ справедливо условие $q(I) \subseteq I$.

Предложение 1.1. *Для любого $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ является Q-инвариантным подмножеством и не содержит собственных q-инвариантных подмножеств.*

Следствие 1.1. *Для любых t, $t' \in \mathbb{R}$ справедлива альтернатива: либо $Q(t) = Q(t')$; либо $Q(t) \cap Q(t') = \varnothing$.*

Предложение 1.2. *Множества $N(Q)$, $\operatorname{Fix} Q^N$, являются Q-инвариантными. Множество $\operatorname{Fix} Q^N$ замкнуто.*

Доказательство предложений и следствия непосредственно следует из определения Q-инвариантного множества.

Пусть Σ есть σ-алгебра борелевских множеств прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим пространство с σ-конечной борелевской мерой, т.е. тройку $(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$.

Определение 1.2. σ-конечная борелевская мера μ называется *инвариантной* относительно группы гомеоморфизмов Q прямой $\mathbb{R}$ (Q-инвариантной), если для любых $q \in Q$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) = \mu(q(B))$.

Определение 1.3. Группа гомеоморфизмов Q прямой $\mathbb{R}$ называется *строго эргодичной*, если существует σ-конечная борелевская мера, инвариантная относительно группы Q, и любая пара μ_1, μ_2 σ-конечных борелевских мер, инвариантных относительно группы Q, связана соотношением $\mu_1 = \lambda\mu_2$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1.4. Пусть заданы группы Q, $.Q$ гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Группа Q называется *полусопряженной группе* $.Q$, если существуют монотонно возрастающее отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с образом, состоящим из более чем одной точки, и эпиморфизм $\eta^{\#}\colon Q \to .Q$ такие, что для любого $q \in Q$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\eta^{\#}(q)} & \mathbb{R} \\ \uparrow{\scriptstyle\eta} & & \uparrow{\scriptstyle\eta} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\eta^{\#}(q)\eta = \eta q$. Если в определении полусопряженности отображение η непрерывно, то говорят о топологической полусопряженности. Если отображение η является гомеоморфизмом, и как следствие, эпиморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом, то группа Q называется топологически сопряженной группе $.Q$ или просто сопряженной.

Определение 1.5 [4]. Группа гомеоморфизмов Q прямой $\mathbb{R}$ называется *минимальной*, если для любого $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ всюду плотна, т.е. $\overline{Q(t)} = \mathbb{R}$.

Определение 1.6. Пусть Q – группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию. Элементы группы называются *взаимно-трансверсальными*, если из условия $q(t) = t$, $q \neq e$, следует, что $\dot{q}(t) \neq 1$.

Определение 1.7. Гомеоморфизм q прямой $\mathbb{R}$, сохраняющий ориентацию, удовлетворяет условию (L), если

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t - q(t)| < +\infty, \tag{L}$$

и удовлетворяет условию (P), если для любого $t \in \mathbb{R}$

$$q(t+1) = q(t) + 1. \tag{P}$$

Группа Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, удовлетворяет условию (L) или (P), если каждый элемент $q \in Q$ удовлетворяет соответствующему условию.

Следуя работе [16], введем определение. Пусть задана конечно-порожденная группа Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, с образующим симметрическим множеством Q_1, т.е. из $q \in Q_1$ следует $q^{-1} \in Q_1$. Q^n – это множество элементов Q, которые представляются в виде слов длины не больше n, составленных из элементов Q_1. Положим $Q^n(t) = \{q(t) : q \in Q^n\}$.

Определение 1.8. Группа Q имеет неэкспоненциальный рост, если

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Q^n| = 0 \qquad \big(|\ | - \text{мощность множества}\big).$$

Орбита $Q(t)$ имеет неэкспоненциальный рост, если

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Q^n(t)| = 0.$$

Произвольная группа Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, называется *субэкспоненциальной*, если любая конечно-порожденная подгруппа $Q' \subseteq Q$ является группой неэкспоненциального роста. Орбита $Q(t)$ имеет субэкспоненциальный рост, если для любой конечно-порожденной подгруппы $Q' \subseteq Q$ орбита $Q'(t)$ имеет неэкспоненциальный рост.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: K – группа всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$; K^+ – группа всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию; K^+_L – группа всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих условию (L); K^+_P – группа всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих условию (P).

Определение 1.9. Пусть $Q \subseteq K^+$. Непустое подмножество $E(Q) \subseteq \mathbb{R}$ называется *минимальным*, если оно замкнуто, Q инвариантно и не содержит собственных замкнутых Q инвариантных подмножеств.

Группы гомеоморфизмов Q по степени сложности структуры множества $N(Q)$ разбиваются на три подмножества (класса):

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A} = \bigl\{Q : Q \subseteq K^+;\ N(Q) = \varnothing \text{ (что эквивалентно условию } \operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R})\bigr\};\\
&\mathscr{B} = \bigl\{Q : Q \subseteq K^+;\ N(Q) \neq \varnothing,\ \operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing\bigr\};\\
&\mathscr{C} = \bigl\{Q : Q \subseteq K^+;\ \operatorname{Fix} Q^N = \varnothing\bigr\}.
\end{aligned}$$

Внутри каждого из указанных классов проводится более тонкая классификация в зависимости от топологической структуры орбит $Q(t)$, множеств $N(Q)$, $\operatorname{Fix} Q^N$ и комбинаторных свойств группы Q (субэкспоненциальность, существование свободных подгрупп, свободных подполугрупп и другие свойства [12], [14], [16]). Через $\mathscr{P}$ будем обозначать класс групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и не содержащих свободных подполугрупп, а через $\mathscr{L}$ – класс групп субэкспоненциального роста.

§ 2. Структура факторгруппы $Q/\overline{Q}^N$

В работе автора [23] для произвольной группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, исследована факторгруппа $Q/\overline{Q}^N$, где $\overline{Q}^N = \langle Q^N \rangle$ – группа, порожденная множеством Q^N. Получены следующие результаты.

Лемма 2.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, в которой определено отношение частичного порядка: $q_1 \leqslant q_2$, если для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно $q_1(t) \leqslant q_2(t)$. Если $q_1\overline{Q}^N \neq q_2\overline{Q}^N$ как левые смежные классы группы Q по подгруппе $\overline{Q}^N$, то между элементами q_1, q_2 существует отношение порядка. Более того, отношение порядка между любыми элементами левых смежных классов $q_1\overline{Q}^N$, $q_2\overline{Q}^N$ одно и то же.*

Лемма 2.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Тогда справедливо хотя бы одно из условий: $\overline{Q}^N = Q^N$ или $\overline{Q}^N = Q$.*

В действительности о подгруппе $\overline{Q}^N$ мы можем получить еще некоторую дополнительную информацию.

Лемма 2.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\overline{Q}^N \neq Q$. Тогда для любого $\overline{q} \in Q^N$, $\overline{q} \neq e$, множество $N(\langle\overline{q}\rangle)$ не ограничено ни снизу, ни сверху.*

Результат леммы 2.3 можно значительно усилить.

Для любого $\overline{q} \in Q^N$ множество $N(\langle\overline{q}\rangle)$ является замкнутым. Поэтому множество $\mathbb{R} \setminus N(\langle\overline{q}\rangle)$ состоит из не более чем счетного числа открытых связных интервалов $\{\Delta_{\overline{q}}^j\}_{j \in J}$, где $J \subseteq \mathbb{Z}$. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – произвольный конечный интервал. Для любого $\overline{q} \in Q^N \setminus e$ определим

$$\lambda_{\overline{q}}(I) = \max_{j \in J,\ \Delta_{\overline{q}}^j \cap I \neq \varnothing} \{\operatorname{mes} \Delta_{\overline{q}}^j\}, \qquad \lambda(I) = \sup_{\overline{q} \in Q^N \setminus e} \lambda_{\overline{q}}(I).$$

Лемма 2.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\overline{Q}^N \neq Q$. Тогда для любого конечного интервала $I \in \mathbb{R}$ справедливо условие $\lambda(I) < +\infty$.*

Теорема 2.1. *Пусть Q – группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Тогда факторгруппа $Q/\overline{Q}^N$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$.*

§ 3. Простейший класс групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и не имеющих неподвижных точек. Случай $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ $(N(Q) = \varnothing)$

Наиболее простой класс групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ – это группы, для которых $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, что эквивалентно условию $N(Q) = \varnothing$. Проводится полная классификация таких групп преобразований в зависимости от сложности топологической структуры орбит $Q(t)$. Для таких групп доказана 0-полусопряженность группы Q по отношению к группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы сдвигов на $\mathbb{R}$, что эквивалентно существованию Q-инвариантной непрерывной σ-конечной борелевской меры μ. Существование Q-инвариантной σ-конченой борелевской меры для групп Q, удовлетворяющих условию $N(Q) = \varnothing$ (и даже для более общего класса: коммутативных групп, содержащих элемент без неподвижной точки), доказано в работе [17, предложение 3.1]. Здесь мы предпочитаем провести новое доказательство этого факта, используя топологическую структуру орбит $Q(t)$. Это позволяет, в рамках единого подхода, исследовать: Q-инвариантные меры для группы с произвольной структурой множества неподвижных точек элементов группы (теорема 3.4, 3.7, а также результаты § 4); структуру носителя Q-инвариантной σ-конечной борелевской меры (леммы 3.5–3.8) и условия строгой эргодичности группы Q (леммы 3.9–3.11, теорема 3.5); условия топологической полусопряженности и сопряженности (теоремы 3.1, 3.3, 3.6). Приводятся необходимые и достаточные условия топологической сопряженности произвольной группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, группе гомеоморфизмов, элементы которого являются накрытиями гомеоморфизмов окружности (предложение 3.2). Для групп Q с условием $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ указана связь между мощностью самой группы и топологической структурой орбит (теорема 3.8).

Предложение 3.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$. Тогда группа Q коммутативная.*

Доказательство. Так как $N(Q) = \varnothing$, то $Q^N = \langle e \rangle$. В таком случае $Q/Q^N = Q$ и в силу теоремы 2.1 группа Q коммутативная.

Лемма 3.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Для того чтобы $N(Q) = \varnothing$ и орбита $Q(t^\cdot)$ какой-либо точки $t^\cdot \in \mathbb{R}$ не имела предельных точек, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ не имела предельных точек.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $N(Q) = \varnothing$ и для точки $t^\cdot \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t^\cdot)$ не имеет предельных точек. Если $Q = \langle e \rangle$, то доказательство очевидно. Рассмотрим случай $Q \neq \langle e \rangle$. Тогда множество $\mathbb{R} \setminus Q(t^\cdot)$ состоит из счетного числа связных открытых интервалов (любое компактное множество на $\mathbb{R}$ пересекается только лишь с конечным числом таких интервалов), а любое преобразование $q \in Q$

действует как перекладывание этих интервалов. Из условия $N(Q)=\varnothing$ следует, что для любой точки $t\in\mathbb{R}$, $t\neq t^{\cdot}$, каждому из указанных интервалов принадлежит ровно одна точка орбиты, откуда и следует доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть для любого $t\in\mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ не имеет точек сгущения, но при этом $N(Q)\neq\varnothing$. В таком случае, $Q^N\neq\langle e\rangle$. Рассмотрим произвольный элемент $q\in Q^N$, $q\neq e$. Очевидно, что $N(\langle q\rangle)\neq\mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную точку $t'\in N(\langle q\rangle)\cap\overline{[\mathbb{R}\setminus N(\langle q\rangle)]}$. Тогда найдется точка $t\in\mathbb{R}\setminus N(\langle q\rangle)$ такая, что точка t' является предельной для одной из последовательностей точек $q^n(t)$, $q^{-n}(t)$, $n=1,2,\dots$, но это противоречит условию леммы. Следовательно, $N(Q)=\varnothing$.

Лемма 3.2. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$. Для цикличности группы Q необходимо и достаточно, чтобы для какой-либо точки $t\in\mathbb{R}$ орбита $Q(t^{\cdot})$ не имела предельных точек.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть $Q(t^{\cdot})$ не имеет точек сгущения. Если $Q=\langle e\rangle$, то доказательство очевидно. Пусть $Q\neq\langle e\rangle$. Тогда множество $\mathbb{R}\setminus Q(t^{\cdot})$ состоит из счетного семейства связных открытых интервалов. Пронумеруем полученную систему интервалов с помощью множества целых чисел в том же порядке, в каком они следуют на прямой. Для определенности номер нуль присвоим тому интервалу, внутренности которого принадлежит точка 0 (если $0\notin Q(t^{\cdot})$), или 0 является левым концом интервала (если $0\in Q(t^{\cdot})$). Полученную систему интервалов обозначим через $\{\Delta_j\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Действие произвольного элемента q есть перекладывание интервалов Δ_j, при котором интервал Δ_j переходит в интервал Δ_{j+r}, где r – некоторое целое число, не зависящее от j, т.е. элемент q индуцирует сдвиг π_q на множестве $\mathbb{Z}$. В таком случае, существует морфизм $\varphi\colon Q\to\Pi_{\mathbb{Z}}$ группы Q в циклическую группу всех сдвигов на $\mathbb{Z}$. Так как $N(Q)=\varnothing$, то морфизм φ является мономорфизмом. Так как концы интервалов $\{\Delta_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ суть точки орбиты $Q(t^{\cdot})$, то найдется элемент $\hat q$, для которого $\varphi(\hat q)$ является сдвигом с числом $r=1$. Но тогда морфизм φ является эпиморфизмом. Следовательно, φ является изоморфизмом, откуда и следует цикличность группы Q.

Следствие 3.1. *В условиях леммы группа Q изоморфна циклической группе целочисленных сдвигов.*

Теорема 3.1. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$, и орбита $Q(t^{\cdot})$ какой-либо точки $t^{\cdot}\in\mathbb{R}$ не имеет точек сгущения, т.е. $\boldsymbol{P}\bigl(Q(t^{\cdot})\bigr)=\varnothing$. Если преобразования $q\in Q$ задают диффеоморфизмы класса $C^{(k)}$, $k=0,1,\dots$, то группа Q k-сопряжена группе $\Pi_{\mathbb{Z}}$, где $\Pi_{\mathbb{Z}}$ – циклическая группа целочисленных сдвигов.*

Доказательство. Из леммы 3.2 и следствия 3.1 следует, что группа Q изоморфна группе $\Pi_{\mathbb{Z}}$. Если $\widetilde q$ – образующая группы Q, то элементу $\widetilde q$ при изоморфизме φ (см. конструкцию леммы 3.2) соответствует сдвиг $\varphi(\overline{q})=\pi_{\overline{q}}=t+1$. Не нарушая общности, в конструкциях леммы 3.2 можем положить $t^{\cdot}=0$.

Тогда точка 0 будет левым концом открытого интервала Δ_0. Положим $\Delta=\overline{\Delta}_0$.

Пусть $\eta_\Delta^{-1}\colon [0,1]\to\Delta$ – диффеоморфизм класса $C^{(k)}$, $k=0,1,\ldots$, удовлетворяющий условиям

$$\eta_\Delta^{-1}(0)=0,\qquad \frac{d^r}{dt^r}\overline{q}\big(\eta_\Delta^{-1}(t)\big)\big|_{t=0}=\frac{d^r}{dt^r}\eta_\Delta^{-1}(t)\big|_{t=1},\quad (r=\overline{0,k}).$$

Тогда отображение η, определенное по правилу:

$$\forall\, m\in\mathbb{Z},\quad \forall\, t\in[m,m+1]\qquad \eta^{-1}(t)=\big(\overline{q}\big)^m\big((\eta_\Delta^{-1}(\pi_{\overline{q}}^{-m}(t)))\big),$$

и задает искомый диффеоморфизм. При этом заметим, что $\eta^{\#}=\varphi,\ .Q=\Pi_{\mathbb{Z}}$. Следовательно, группа Q k-сопряжена группе $\Pi_{\mathbb{Z}}$.

Лемма 3.3. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$ и $N(Q)=\varnothing$. Тогда для любого $t\in\mathbb{R}$ либо орбита $Q(t)$ нигде не плотна, т.е. $\operatorname{Int}\overline{Q(t)}=\varnothing$, либо всюду плотна, т.е. $\overline{Q(t)}=\mathbb{R}$.*

Доказательство. Если для любого $t\in\mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ нигде не плотна, то лемма доказана. Пусть существует $\bar t\in\mathbb{R}$, для которой $\operatorname{Int}\overline{Q(\bar t)}\neq\varnothing$, но $\overline{Q(\bar t)}\neq\mathbb{R}$. Заметим, что $\overline{Q(\bar t)}$ также Q-инвариантно. Тогда множество $\mathbb{R}\setminus\overline{Q(\bar t)}$ не пусто, открыто и состоит из счетного числа открытых интервалов. Элементы группы Q в силу условия $N(Q)=\varnothing$ действуют как перекладывания этих интервалов. Если $t^{\cdot}$ – точка из какого-либо из указанных интервалов, то в каждом интервале имеется не более одной точки орбиты $Q(t^{\cdot})$. Следовательно, орбита $Q(t^{\cdot})$ нигде не плотна. Множество $\mathbb{R}\setminus\overline{Q(t^{\cdot})}$ не пусто и состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов. Элементы группы Q, в силу условия $N(Q)=\varnothing$, действуют на них как перекладывание интервалов, и орбита любой точки из этих интервалов в каждом интервале имеет не более одной точки. В таком случае, орбита $Q(t)$ любой точки $t\in\mathbb{R}$ нигде не плотна, а это противоречит условию $\operatorname{Int}\overline{Q(\bar t)}\neq\varnothing$.

Следствие 3.2. *Пусть выполняются условия леммы 3.3. Если орбита какой-либо точки $t^{\cdot}\in\mathbb{R}$ нигде не плотна (всюду плотна), то орбита любой точки $t\in\mathbb{R}$ нигде не плотна (всюду плотна).*

Доказательство. В ходе доказательства леммы, после получения точки $t^{\cdot}$, орбита которой $Q(t^{\cdot})$ нигде не плотна, был установлен факт, что орбита любой точки нигде не плотна.

Лемма 3.4. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$. Орбита $Q(t^{\cdot})$ точки $t^{\cdot}\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\boldsymbol{P}\big(Q(t^{\cdot})\big)=\varnothing$;
б) $\boldsymbol{P}\big(Q(t^{\cdot})\big)\neq\varnothing$, $\operatorname{Int}\boldsymbol{P}\big(Q(t^{\cdot})\big)=\varnothing$;
в) $\boldsymbol{P}\big(Q(t^{\cdot})\big)=\mathbb{R}$;

тогда и только тогда, когда орбита $Q(t)$ любой точки $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям а), б), в), *соответственно.*

Доказательство леммы следует из лемм 3.1, 3.3 и следствия 3.1.

Ниже формулируется теорема, которая приводится в [20] и была независимо получена в работе [18].

Теорема 3.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$. Тогда*:

1) *множество $\boldsymbol{P}(Q(t))$ не зависит от $t \in \mathbb{R}$ и обозначается через $\mathbb{P}(Q)$*;
2) *$\mathbb{P}(Q)$ инвариантно относительно группы Q*;
3) *либо $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{P}(Q)$ совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$*;
4) *$\mathbb{P}(Q) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда группа Q циклическая.*

Доказательство. Из леммы 3.4 следует, что орбиты $Q(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ одновременно либо всюду плотны, либо нигде не плотны. Если орбиты $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, всюду плотны, то доказательство теоремы очевидно. В случае $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$ доказательство также очевидно.

Пусть орбита $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, нигде не плотна и $\boldsymbol{P}(Q(t)) \neq \varnothing$.

1) Для выбранного $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество $\mathbb{R} \setminus \overline{Q(t)}$. Это множество не пусто, открыто и состоит из счетного числа открытых интервалов. Элементы группы Q действуют как перекладывания этих интервалов. Если t_1, t_2 – точки орбиты $Q(t)$ и $t_1 < t_2$, то для любой точки $t^{\cdot} \in \mathbb{R}$, $t^{\cdot} \notin Q(t)$ в интервале $]t_1, t_2[$ содержится хотя бы одна точка орбиты $Q(t^{\cdot})$. Действительно, пусть $q \in Q$ такой элемент, что $q(t_1) = t_2$. Очевидно, что элемент q не совпадает с единичным. Тогда из условия $N(Q) = \varnothing$ следует, что

$$\bigcup_{-\infty}^{+\infty} \left[q^k(t_1), q^k(t_2)\right] = \mathbb{R}.$$

Поэтому из условия $Q(t^{\cdot}) \cap \,]t_1, t_2[\, = \varnothing$ следует $t^{\cdot} \in Q(t)$. Полученное противоречие и доказывает тот факт, что $Q(t^{\cdot}) \cap \,]t_1, t_2[\, \neq \varnothing$. Из доказанного свойства и следует, что множество $\mathbb{P}(Q)$ от $t \in \mathbb{R}$ не зависит.

2) Q-инвариантность множества $\mathbb{P}(Q)$ очевидна.

3) Остается показать, что если $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то оно совершенное множество. Пусть $t \in \mathbb{P}(Q)$. Тогда $t = \lim_{k \to +\infty} q_k(t)$ для некоторой последовательности элементов $q_k \in Q$. Так как множество $\mathbb{P}(Q)$ инвариантно относительно группы Q, то для любого $q_k \in Q$ справедливо условие $q_k(t) \in \mathbb{P}(Q)$, т.е. t предельная точка для $\mathbb{P}(Q)$.

4) Доказательство следует из леммы 3.2.

Лемма 3.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$ и $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Если σ-конечная борелевская мера μ инвариантна относительно группы Q, то носитель меры μ принадлежит множеству $\mathbb{P}(Q)$.*

Доказательство. Если $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{R}$, то доказательство очевидно. Пусть $\mathbb{P}(Q) \neq \mathbb{R}$. Тогда множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q)$ состоит из счетного числа открытых связных интервалов (конечных), причем множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q)$ также Q-инвариантно. Обозначим полученное семейство интервалов через Δ_j, $j = 1, 2, \ldots$. Всякое преобразование $q \in Q$ действует как перекладывание интервалов Δ_j, $j = 1, 2, \ldots$. Так как $N(Q) = \varnothing$, то для любых q_1, $q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$, $j = 1, 2, \ldots$, имеет место условие $q_1(\Delta_j) \cap q_2(\Delta_j) = \varnothing$. Так как $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то для любого фиксированного $j = 1, 2, \ldots$ существует последовательность $q_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что последовательность множеств $q_k(\Delta_j)$, $k=1,2,\dots$, принадлежит некоторому компакту. Тогда в силу σ-конечности меры μ следует, что $\mu(\Delta_j)=0$. Так как это справедливо для любого $j=1,2,\dots$, то отсюда следует $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{P}(Q))=0$.

Лемма 3.6. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$ и $\mathbb{P}(Q)\neq\varnothing$. Если μ – σ-конечная борелевская мера, инвариантная относительно группы Q, то для любого непустого открытого множества $W\subseteq\mathbb{R}$ такого, что $W\cap\mathbb{P}(Q)\neq\varnothing$, справедливо условие $\mu(W)>0$.*

Доказательство. Найдется точка $\bar t\in\mathbb{R}$, для любой окрестности $V(\bar t)$ которой $\mu(V(\bar t))>0$. Действительно, если бы для каждой точки $t\in\mathbb{R}$ нашлась окрестность, имеющая нулевую меру, отсюда следовало бы, что $\mu(\mathbb{R})=0$. Рассмотрим орбиту $Q(\bar t)$ точки $\bar t$. Так как $\mathbb{P}(Q)\subset\overline{Q(\bar t)}$, то для множества W найдутся $q\in Q$ и окрестность $V(\bar t)$ такие, что $q\big(V(\bar t)\big)\subseteq W$. Из Q-инвариантности меры μ получим, что $\mu(W)\geqslant\mu\big(q(V(\bar t))\big)=\mu(V(\bar t))>0$.

Лемма 3.7. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$ и $\mathbb{P}(Q)\neq\varnothing$. Для любых $t\in\mathbb{R}$, q_1, $q_2\in Q$, $q_1<q_2$, справедливо условие*

$$[q_1(t),q_2(t)]\cap\mathbb{P}(Q)\neq\varnothing.$$

Доказательство. Пусть $[q_1(t),q_2(t)]\cap\mathbb{P}(Q)=\varnothing$ для каких-либо $t\in\mathbb{R}$, $q_1,q_2\in Q$, $q_1<q_2$. Рассмотрим элемент $\overline{q}=q_2q_1^{-1}$. В силу теоремы 2.1 группа Q линейно упорядочена и архимедова. Поэтому, из условия $[q_1(t),q_2(t)]\cap\mathbb{P}(Q)=\varnothing$ следует, что $\overline{q}$ – минимальный строго положительный элемент. Тогда по теореме Гёльдера [10] группа Q циклическая. Но в таком случае $\mathbb{P}(Q)=\varnothing$, что противоречит условию леммы.

Лемма 3.8. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$ и $\mathbb{P}(Q)\neq\varnothing$. Если μ – σ-конечная борелевская мера, инвариантная относительно группы Q, то минимальное замкнутое множество F такое, что для любого открытого множества W $\mu(F\cap W)=\mu(W)$, совпадает с множеством $\mathbb{P}(Q)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 и минимальности множества F следует, что $F\subseteq\mathbb{P}(Q)$. Предположим, что F строго содержится в $\mathbb{P}(Q)$, т.е. $\mathbb{P}(Q)\setminus F\neq\varnothing$. Рассмотрим открытое множество $W=\mathbb{R}\setminus F$. Очевидно, что $F\cap W=\varnothing,\mathbb{P}(Q)\cap W\neq\varnothing$. Тогда в силу определения множества F получим, что $\mu(F\cap W)=\mu(W)=\varnothing$. С другой стороны, в силу леммы 3.5 имеем $\mu(W)>0$. Полученное противоречие и доказывает, что $\mathbb{P}(Q)=F$.

Теорема 3.3. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)=\varnothing$. Тогда*:

a) *для того чтобы группа Q была полусопряженной по отношению к группе $.Q$, где $.Q$ является подгруппой группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$, а гомоморфизм $\eta^{\#}$ из определения полусопряженности являлся изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы существовала σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы Q;*

б) *для того чтобы группа Q была 0-полусопряженной по отношению к группе $.Q$, где $.Q \subseteq \Pi_{\mathbb{R}}$, а гомоморфизм $\eta^{\#}$ из определения полусопряженности являлся изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы Q.*

Доказательство. а) *Необходимость.* Из полусопряженности следует, что $\ker \eta^{\#} = \langle e \rangle$, (где $\eta^{\#}$ – из определения полусопряженности). Борелевская мера определена своими значениями на полуинтервалах, поэтому для любого полуинтервала $[t_0, t_1]$ определим меру μ

$$\mu\big([t_0, t_1)\big) = \operatorname{mes}\big([\eta(t_0), \eta(t_1))\big),$$

где η – из определения полусопряженности. Из определения полусопряженности следует, что каждому элементу $q \in Q$ соответствует число h_q так, что $\eta(q(t)) \equiv \eta(t) + h_q$. В таком случае

$$\mu\big([q(t_0), q(t_1))\big) = \operatorname{mes}\big([\eta(q(t_0)), \eta(q(t_1)))\big) = \operatorname{mes}\big([\eta(t_0), \eta(t_1))\big) = \mu\big([t_0, t_1)\big),$$

откуда и следует, что мера μ инвариантна относительно группы Q. Необходимость доказана.

Достаточность. Если группа Q тривиальная, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$, а мера μ инвариантна относительно группы Q. Заметим, так как группа Q не тривиальна, то $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$. Зафиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ положим $\eta(t) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t))$, где

$$\widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \widetilde{\mu}([\bar{t}, t)), & t \geqslant \bar{t}, \\ -\widetilde{\mu}([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение η монотонно возрастающее.

Для любых $t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mu}([\bar{t}, t_2)) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t_1)) + \widetilde{\mu}([t_1, t_2))$. В таком случае для произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ и любого $q \in Q$

$$\begin{aligned} \eta(q(t)) &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(t))) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([q(\bar{t}), q(t))) \\ &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \eta(t) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))). \end{aligned}$$

Для любого $q \in Q$ положим $h_q = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})])$. Определим подгруппу группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$

$$.Q = \big\{ .q : .q = t + h_q, q \in Q \big\}$$

и эпиморфизм $\eta^{\#} \colon Q \to .Q$, где для любого $q \in Q$ положим $\eta^{\#}(q) = .q$, $.q = t + h_q$.

Тогда преобразование η и эпиморфизм $\eta^{\#}$ задают условия полусопряженности группы Q к группе $.Q$. Более того, в силу лемм 3.6 и 3.7 для любых $q_1,\, q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$, справедливо условие $h_{q_1} \neq h_{q_2}$. Следовательно, эпиморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом.

б) Доказательство этого пункта повторяет доказательство пункта а) данной теоремы. Следует лишь заметить, что мера μ и отображение η непрерывны одновременно.

Теорема 3.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$. Тогда существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера.*

Доказательство. В силу теоремы 3.3 достаточно доказать полусопряженность группы Q некоторой подгруппе группы сдвигов. Если группа Q циклическая, $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, то доказательство следует из теоремы 3.1. Пусть $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. По теореме 2.1 группа Q архимедова (упорядоченность была описана в § 2) и изоморфна некоторой подгруппе $.Q$ аддитивной группы $\mathbb{R}$. Этот изоморфизм обозначим через $\eta^{\#}$. Построим отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Фиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{P}(Q)$. Для любого $q \in Q$ положим $\eta(q(\bar{t})) = \eta^{\#}(q)$. В силу упорядоченности, описанной в § 2, таким образом определенная функция на орбите $Q(\bar{t})$ будет монотонной. Более того, она может быть по непрерывности продолжена на все множество $\mathbb{P}(Q)$. Так как группа Q, а вместе с ней и группа $.Q$, не циклическая, то $\eta(\mathbb{P}(Q)) = \mathbb{R}$. В таком случае, значение функции η на концах связных интервалов, принадлежащих множеству $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q)$, совпадают. Доопределив на этих интервалах функцию η с сохранением условия монотонности, мы построим непрерывное монотонное отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Заметим, что для любых $t \in T$ и $q \in Q$ справедливо соотношение $\eta(q(t)) = t - \bar{t} + \eta^{\#}(q)$, откуда и следует, что группа Q 0-полусопряжена группе сдвигов $\langle t + \alpha, \alpha \in .Q \rangle$.

Через ρ будем обозначать нормированную меру Лебега, т.е. меру Лебега на $\mathbb{R}$ такую, что $\rho([0,1]) = 1$. Сформулируем один хорошо известный результат.

Лемма 3.9. *Пусть $.Q$ подгруппа группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$ такая, что $\mathbb{P}(.Q) \neq \varnothing$. Тогда группа $.Q$ строго эргодична с инвариантной мерой ρ, где ρ – нормированная мера Лебега.*

Используя конструкции из [4], докажем следующую важную лемму.

Лемма 3.10. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Тогда группа Q является строго эргодичной.*

Доказательство. Пусть μ_1, μ_2 σ-конечные борелевские меры, инвариантные относительно группы Q, существование которых гарантируется теоремой 3.4. Найдется интервал $I \subset \mathbb{R}$ такой, что $\mu_1(I) > 0$, $\mu_2(I) > 0$. Рассмотрим нормированные меры $\mu_1' = \mu_1/\mu(I)$, $\mu_2' = \mu_2/\mu(I)$, $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1' + \mu_2')$. Ясно, что μ также инвариантна относительно группы Q. Заметим, так как группа Q не тривиальна, то $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$. Зафиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ положим $\eta(t) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t))$, где

$$\widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t)), & t \geqslant \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Так как $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то мера μ непрерывна и, следовательно, отображение η непрерывно. Действительно, из условия $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$ следует, что для любой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ имеет предельную точку. В таком случае из инвариантности меры μ относительно группы Q следует, что $\mu([t]) = 0$, в противном случае нарушилось бы условие σ-конечности меры μ.

Для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mu}([\bar{t}, t_2)) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t_1)) + \widetilde{\mu}([t_1, t_2))$. В таком случае для произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ и любого $q \in Q$

$$\begin{aligned} \eta(q(t)) &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(t))) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([q(\bar{t}), q(t))) \\ &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \eta(t) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))). \end{aligned}$$

Для любого $q \in Q$ положим $h_q = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})])$. Определим подгруппу группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$

$$.Q = \{.q : .q = t + h_q, q \in Q\}$$

и эпиморфизм $\eta^{\#} : Q \to .Q$, где для любого $q \in Q$ положим $\eta^{\#}(q) = .q$, $.q = t + h_q$.

Тогда преобразование η и эпиморфизм $\eta^{\#}$ задают условия 0-полусопряженности группы Q к группе $.Q$. В действительности в силу лемм 3.6 и 3.7 для любых q_1, $q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$, справедливо условие $h_{q_1} \neq h_{q_2}$. Следовательно, эпиморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом. Так как группа Q не циклическая, то и группа $.Q$ не циклическая. В таком случае $\mathbb{P}(.Q) \neq \varnothing$, и группа $.Q$ строго эргодичная, т.е. с единственной инвариантной мерой Лебега $\lambda\rho$, где $\lambda \in \mathbb{R}_+$, ρ – нормированная мера Лебега.

Если ν – σ-конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$, то под действием отображения η мера ν переходит в меру $\eta\nu$, где, по определению, для любого борелевского множества $B \in \Sigma$ $(\eta\nu)(B) = \nu(\eta^{-1}(B))$, где $\eta^{-1}(B)$ – полный прообраз множества B.

Пусть $\mathscr{B}_\eta \subseteq \Sigma$ – σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}$, являющихся полными прообразами относительно η всевозможных борелевских множеств. В таком случае на множествах $B_\eta \in \Sigma_\eta$ меры μ_1' и μ_2' совпадают. Действительно, если $B_\eta = \eta^{-1}(B)$, $B \in \Sigma$, то

$$\mu_1'(B_\eta) = \mu_1'(\eta^{-1}(B)) = (\eta\mu_1)(B) = \lambda\rho(B)$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{R}_+$. При том же λ в силу нормировки μ_1' и μ_2', аналогично предыдущему, $\mu_2'(B_\eta) = \lambda\rho(B)$, т.е. $\mu_1'(B_\eta) = \mu_2'(B_\eta)$.

Пусть $\Delta =]a, b[$ – произвольный интервал. Из определения отображения η следует, что $\eta(\Delta)$ – также некоторый интервал $]c, d[$ (возможно, что $c = d$). Полный прообраз $\Delta' = \eta^{-1}(\eta(\Delta))$ также является некоторым интервалом $]a', b'[$, причем $\Delta \subseteq \Delta'$. Равенство $\eta(\Delta) = \eta(\Delta')$ означает, что $\eta(a) = \eta(a') = c$, $\eta(b) = \eta(b') = d$. Отсюда следует, что

$$\mu(\Delta' \setminus \Delta) = \mu\big(]a', a[\cup]b, b'[\big) = 0.$$

Так как меры μ_1', μ_2' абсолютно непрерывны относительно меры μ, то $\mu_1'(\Delta' \setminus \Delta) = \mu_2'(\Delta' \setminus \Delta) = 0$, т.е. $\mu_1'(\Delta') = \mu_1'(\Delta)$, $\mu_2'(\Delta') = \mu_2'(\Delta)$. Так как $\Delta' \in \Sigma_\eta$, то $\mu_1'(\Delta') = \mu_2'(\Delta')$, откуда следует, что $\mu_1'(\Delta) = \mu_2'(\Delta)$. Борелевская мера определяется своими значениями на интервалах, поэтому $\mu_1' = \mu_2'$. Следовательно, $\mu_1 = \overline{\lambda}\mu_2$ при некотором $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 3.11. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$. Если для любой конечно-порожденной подгруппы $Q' \subseteq Q$ выполняется условие $\mathbb{P}(Q') = \varnothing$, а группа Q не является конечно-порожденной, то $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$ и группа Q является строго эргодичной.*

Доказательство. Выберем произвольную цепочку строго вложенных конечно-порожденных подгрупп Q_n, где

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n \subset \cdots \subset Q, \qquad Q_0 = \langle e \rangle, \quad Q_n = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle.$$

Рассмотрим подгруппу Q_1. Пусть для группы Q_1 отображение η_Δ и интервал Δ те же, что и в конструкциях доказательства теоремы 3.1, которые в данном доказательстве будем обозначать через $\eta_{\Delta 1}$ и $\Delta 1$ соответственно. Для любого $n \in \mathbb{Z}^+$

точками орбиты $Q_n(t^\cdot)$, $t^\cdot = 0$, интервал $\Delta 1$ делится на k_n интервалов. Интервал, левый конец которого совпадает с точкой 0, обозначим через $\Delta 0$. Так как семейство подгрупп является строго расширяющимся, то $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, и так как они вложены друг в друга, то для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ число k_n является делителем числа k_{n+1}.

Для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ определим гомеоморфизм $\eta_{\Delta n}^{-1} \colon [0, 1/k_n] \to \Delta n$, удовлетворяющий условию $\eta_{\Delta n}^{-1}(0) = 0$.

Если для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ элемент $\widetilde{q}_n$ является образующей группы Q_n, то определим отображение η_n по следующему правилу:

$$\forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, t \in \left[\frac{m}{k_n}, \frac{m+1}{k_n}\right] \qquad \eta_n^{-1}(t) = \widetilde{q}_n^{\,m}\left(\eta_{\Delta n}^{-1}\left(t - \frac{m}{k_n}\right)\right).$$

Пусть $.Q_n$ – циклическая подгруппа группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$ с образующей $.\widetilde{q}_n = t + 1/k_n$. Тогда группа Q_n является 0-сопряженной группе $.Q_n$ с гомеоморфизмом η_n и изоморфизмом $\eta_n^{\#}$, при котором $\eta_n^{\#}(\widetilde{q}_n) = .\widetilde{q}_n$. Так как для любых $n, n' \in \mathbb{Z}$, $n' < n$, $\eta_n^{-1}(1/k_{n'}) = \eta_{n'}^{-1}(1/k_{n'})$, то справедлива цепочка включений

$$.Q_0 \subset .Q_1 \subset \cdots \subset .Q_n \subset \cdots.$$

Более того, ограничение изоморфизма $\eta_n^{\#}$ на подгруппу Q_n совпадает с изоморфизмом $\eta_{n'}^{\#}$.

Из определения семейства гомеоморфизмов $\{\eta_n\}_1^{+\infty}$ следует, что это семейство на любом замкнутом конечном интервале равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно. Тогда по теореме Арцела существует непрерывное монотонно возрастающее отображение $\overline{\eta} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что на конечных интервалах отображения η_n при $n \to +\infty$ равномерно стремятся к $\overline{\eta}$. Заметим, что в силу определения $\overline{\eta}$ для любых $n \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ имеют место условия

$$\overline{\eta}^{-1}\left(\frac{m}{k_n}\right) = \eta_n^{-1}\left(\frac{m}{k_n}\right).$$

Для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ определим изоморфизм $\overline{\eta}_n^{\#} \colon Q_n \to .Q_n$ следующим образом: $\overline{\eta}_n^{\#}(\widetilde{q}_n) = .\widetilde{q}_n$. Тогда группа Q_n 0-сопряжена группе $.Q_n$ с гомеоморфизмом $\overline{\eta}$ и изоморфизмом $\overline{\eta}_n^{\#}$. Более того, для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ имеет место равенство $\overline{\eta}_n^{\#} = \eta_n^{\#}$, и для любых $n' < n$ ограничение изоморфизма $\overline{\eta}_n^{\#}$ на подгруппу $Q_{n'}$ совпадает с изоморфизмом $\overline{\eta}_{n'}^{\#}$.

Определим группы

$$\widetilde{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q_n, \qquad .\widetilde{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} .Q_n$$

и изоморфизм

$$\overline{\eta}^{\#} \colon \widetilde{Q} \to .\widetilde{Q}$$

по следующему правилу: для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ ограничение изоморфизма $\overline{\eta}^{\#}$ на подгруппу Q_n совпадает с $\overline{\eta}_n^{\#}$.

Тогда группа $\widetilde{Q}$ 0-сопряжена группе $.\widetilde{Q}$ с непрерывным отображением $\overline{\eta}$ и изоморфизмом $\overline{\eta}^{\#}$. Группа $.\widetilde{Q}$ является группой с счетным числом образующих $.\widetilde{Q} = \left\langle \widetilde{q}_n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\rangle$, где $.\widetilde{q}_n = t + 1/k_n$. Так как при $n \to +\infty$, $k_n \to +\infty$, то $\mathbb{P}(.\widetilde{Q}) = \mathbb{R}$.

При отображении $\overline{\eta}$ прообраз любого интервала является интервалом. Поэтому из 0-полусопряженности группы $\widetilde{Q}$ по отношению к группе $.\widetilde{Q}$ и условия $\mathbb{P}(.\widetilde{Q}) = \mathbb{R}$ следует, что $\mathbb{P}(\widetilde{Q}) \neq \varnothing$. Так как $\widetilde{Q} \subseteq Q$, то отсюда следует, что $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. В силу леммы 3.10 группа Q строго эргодична.

Теорема 3.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$ и $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Тогда*:

1) *группа Q является строго эргодичной*;
2) *если для какой-либо подгруппы $Q' \subseteq Q$, $\mathbb{P}(Q') \neq \varnothing$, то $\mathbb{P}(Q') = \mathbb{P}(Q)$.*

Доказательство. 1) Утверждение непосредственно следует из леммы 3.10.

2) Пусть мера μ – единственная Q-инвариантная мера, гарантированная пунктом 1. Если бы $\mathbb{P}(Q) \setminus \mathbb{P}(Q') \neq \varnothing$, то $\mathbb{P}(Q) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q')] \neq \varnothing$ и по лемме 3.6 $\mu\big(\mathbb{P}(Q) \cap [\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q')]\big) > 0$, что в силу леммы 3.5 противоречит условию $\operatorname{supp} \mu \subseteq \mathbb{P}(Q')$. Следовательно, $\mathbb{P}(Q) \setminus \mathbb{P}(Q') = \varnothing$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, а Q' ее подгруппа. Если для произвольно выбранной точки $t \in \mathbb{R}$ имеет место строгое включение $\boldsymbol{P}(Q'(t)) \subset \boldsymbol{P}(Q(t))$ и условие $\boldsymbol{P}(Q'(t)) \neq \varnothing$, то $N(Q) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если бы $N(Q) = \varnothing$, то по пункту 2 теоремы 3.4 получим, что $\mathbb{P}(Q') = \boldsymbol{P}(Q(t))$, что противоречит условию следствия.

Теорема 3.6. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Тогда*:

1) *существуют непрерывное отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, подгруппа $.Q$ группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$ и изоморфизм $\eta^{\#}\colon Q \to .Q$ такой, что группа Q является 0-полусопряженной группе $.Q$*;
2) *отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда группа Q является минимальной (что эквивалентно условию $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{R}$).*

Доказательство. 1) По теореме 3.4 существует σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы Q. Так как группа Q не тривиальна, то $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$. Зафиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ положим $\eta(t) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t))$, где

$$\widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t)), & t \geqslant \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Так как $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то мера μ непрерывна и, следовательно, отображение η непрерывно.

Действительно, из условия $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$ следует, что для любой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ имеет предельную точку. В таком случае из инвариантности меры μ относительно группы Q следует, что $\mu([t]) = 0$, в противном случае нарушилось бы условие σ-конечности меры μ.

Для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mu}([\bar{t}, t_2)) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t_1)) + \widetilde{\mu}([t_1, t_2))$. Поэтому, для произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ и любого $q \in Q$

$$\begin{aligned} \eta(q(t)) &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(t))) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([q(\bar{t}), q(t))) \\ &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \eta(t) + \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))). \end{aligned}$$

Для любого $q \in Q$ положим $.h_q = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))$. Определим подгруппу $.Q$ группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$

$$.Q = \{.q : .q = t + .h_q, q \in Q\}$$

и эпиморфизм $\eta^{\#}: Q \to .Q$, где для любого $q \in Q$ положим $\eta^{\#}(q) = .q$, $.q = t + .h_q$. Тогда преобразование η и эпиморфизм $\eta^{\#}$ задают условия 0-полусопряженности группы Q по отношению к группе $.Q$. В действительности в силу лемм 3.6 и 3.7 для любых $q_1, q_2 = Q$, $q_1 \neq q_2$, справедливо условие $h_{q_1} \neq h_{q_2}$. Следовательно, эпиморфизм $\eta^{\#}$ является изоморфизмом. Первый пункт доказан.

2) Если η – гомеоморфизм, то из условия $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$ следует, что в группе $.Q$, как и в группе Q, нет минимального строго положительного элемента. Так как элементы группы $.Q$ это сдвиги $.q = t + .h_q$, $q \in Q$, $.h_q \in \mathbb{R}$, то в $.Q$ существует сдвиг со сколь угодно малым $.h_q$. В таком случае группа $.Q$ минимальна, а вместе с ней минимальна и группа Q.

Обратно. Пусть группа Q минимальна. Из конструкций предыдущего пункта следует, что при фиксированной точке $\bar{t} \in \mathbb{R}$ по отображению η Q-инвариантная мера μ однозначно восстанавливается. Так как группа Q минимальна, то в силу леммы 3.6 для любого интервала $[t', t'']$ имеет место условие $\mu([t', t'']) > 0$. В таком случае преобразование η взаимно однозначно, откуда и следует, что η – гомеоморфизм.

Замечание 3.1. Случай, когда $N(Q) = \varnothing$ и $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$ полностью описывается теоремой 3.1.

Следствие 3.4. *Пусть $N(Q) = \varnothing$. Если для любой конечно-порожденной подгруппы $Q' \subseteq Q$ выполняется условие $\mathbb{P}(Q') = \varnothing$, то группа Q не более чем счетна.*

Доказательство. Если $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, то группа Q циклическая и доказательство очевидно. Пусть $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Тогда по теореме 3.5 группа Q изоморфна подгруппе $.Q = \{.q : .q = t + .h_q, q \in Q\}$ группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$. Для любой подгруппы $.Q' = \langle .q_1, .q_2 \rangle$ группы $.Q$ в силу условий леммы справедливы условия $N(.Q') = \varnothing$, $\mathbb{P}(.Q') = \varnothing$, и поэтому подгруппа Q' циклическая. Тогда $.h_{q_1}$, $.h_{q_2}$ соизмеримы, т.е. существуют $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $k_1 \cdot .h_{q_1} + k_2 \cdot .h_{q_2} = 0$. Так как это справедливо для любой пары элементов $q_1, q_2 \in Q$, то отсюда и следует, что группа Q не более чем счетна.

Теперь мы можем сформулировать результат, который уточняет теорему 3.4.

Теорема 3.7. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $N(Q) = \varnothing$. Тогда существует непрерывная σ-конечная борелевская мера μ, инвариантная относительно группы Q.*

Доказательство. В силу теорем 3.1 и 3.6 группа Q является 0-полусопряженной к группе $.Q$, где $.Q$ подгруппа группы $\Pi_{\mathbb{R}}$, с непрерывным отображением $\eta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и изоморфизмом $\eta^{\#}: Q \to .Q$. Непрерывность меры μ следует из непрерывности отображения η.

Через $m(Q)$ будем обозначать мощность минимального числа образующих группы Q. Через $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$ будем обозначать мощность натурального ряда и мощность континуума, соответственно.

Теорема 3.8. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$, *для которой* $N(Q) = \varnothing$. *Тогда*:

а) *если* $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, *то* $m(Q) = 1$;

б) *если* $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \mathbb{R}$, *то* $1 < m(Q) \leqslant \aleph_0$;

в) *если* $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{R}$, *то* $1 < m(Q) \leqslant \mathbb{N}$.

Доказательство. а) Данное утверждение является следствием теоремы 1.

б) Рассмотрим множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q)$. Это открытое множество, состоящее из счетного числа открытых интервалов. Любой элемент $q \in Q$ действует как перекладывание этих интервалов с сохранением порядка следования. Зафиксируем один из таких интервалов и обозначим через Δ. Так как $N(Q) = \varnothing$, то для любых $q_1, q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$, имеет место условие $q_1(\Delta) \cap q_2(\Delta) = \varnothing$. Так как множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}(Q)$ состоит из счетного числа открытых интервалов, то и различных элементов в группе Q может быть не более чем счетное число. Утверждение доказано.

в) В силу теоремы 3.4 группа Q изоморфна некоторой подгруппе $.Q$ группы $\Pi_{\mathbb{R}}$, откуда и следует утверждение теоремы.

Приведем результат, в котором формулируются условия, при которых группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, сопряжена с группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, каждый элемент которой есть накрытие гомеоморфизма окружности.

Предложение 3.2. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$. *Группа* Q 0-*сопряжена группе* $.Q$, *где группа* $.Q$ *удовлетворяет условию* (P) *тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм* $\overline{q} \neq e$ *прямой* $\mathbb{R}$, *сохраняющий ориентацию такой, что* $N\big(\langle \overline{q} \rangle\big) = \varnothing$ *и* $\overline{q}$ *перестановочен с любым элементом* $q \in Q$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть группа Q 0-сопряжена группе $.Q$, и $.Q$ удовлетворяет условию (P). Очевидно, что любой элемент $.q \in .Q$ перестановочен с гомеоморфизмом $\widehat{q}(t) = t+1$. Если $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гомеоморфизм из определения 0-сопряженности, то гомеоморфизм $\overline{q} = \eta \widehat{q} \eta^{-1}$ перестановочен с любым элементом $q \in Q$ и $N\big(\langle \overline{q} \rangle\big) = \varnothing$.

Достаточность. Пусть существует гомеоморфизм $\overline{q} \neq e$ прямой $\mathbb{R}$, сохраняющий ориентацию, который перестановочен с любым элементом $q \in Q$ и удовлетворяет условию $N\big(\langle \overline{q} \rangle\big) = \varnothing$. Так как $N\big(\langle \overline{q} \rangle\big) = \varnothing$, то по теореме 3.1 группа $\langle \overline{q} \rangle$ 0-сопряжена циклической группе $\langle q' \rangle$ с образующей $q'(t) = t+1$. Пусть $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гомеоморфизм из определения 0-сопряженности. Тогда существует группа $.Q$ гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, такая, что гомеоморфизм η определяет некоторую 0-сопряженность между группами Q и $.Q$. Так как $\overline{q}$ перестановочен с любым элементом $q \in Q$, то q' перестановочен с любым элементом $.q \in .Q$. Из перестановочности элементов q' и $.q \in .Q$ следует, что группа $.Q$ удовлетворяет условию (P). Действительно, если для любого $.q \in .Q$, $.q \cdot q' = q' \cdot .q$, то

$$.q(q'(t)) = .q(t+1) = q'(.q(t)) = .q(t) + t.$$

§ 4. Класс групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, для которых $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Инвариантные меры

Следующий по сложности класс групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, это расширение простейшего класса групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ со свойством $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию $N(Q) = \varnothing$) до класса групп со свойством $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Заметим, что в общем случае любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ может быть множеством $\operatorname{Fix} Q^N$ для некоторой группы Q. Доказывается центральная теорема об эквивалентности непустоты множества $\operatorname{Fix} Q^N$ условию существования σ-конечной борелевской меры μ на $\mathbb{R}$, инвариантной относительно группы Q (теорема 4.1). Исследованы структура носителя Q-инвариантной меры и условия строгой эргодичности группы Q (следствие 4.1). Дана другая эквивалентная формулировка условию существования Q-инвариантной меры в виде условия полусопряженности группы Q группе сдвигов на прямой (теорема 4.1). Для конечно-порожденных групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ приводится еще одна эквивалентная формулировка условию существования Q-инвариантной меры (теорема 4.3) в виде условия субэкспоненциальности роста какой-либо заданной орбиты, доказанной в работе [17, теорема 1.3]. Сформулированы различные критерии непустоты множества $\operatorname{Fix} Q^N$ (теорема 4.2). Для рассматриваемых групп гомеоморфизмов, в наиболее простом случае, уточняется структура нормальной подгруппы Q^N, а также некоторых канонически выделенных подгрупп в зависимости от топологической структуры множества $\operatorname{Fix} Q^N$ (предложения 4.2–4.4).

Определение 4.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Наделим множество $\operatorname{Fix} Q^N$ топологией $\mathbb{R}$. В силу Q-инвариантности множества $\operatorname{Fix} Q^N$ ограничения гомеоморфизмов $q \in Q$ на множество $\operatorname{Fix} Q^N$, т.е. $q\big|_{\operatorname{Fix} Q^N}$, также образуют группу гомеоморфизмов топологического пространства $\operatorname{Fix} Q^N$, которую будем обозначать через Q_F, т.е. $Q_F = \bigl\{\widehat{q} : \exists q \in Q,\ \widehat{q} = q|_{\operatorname{Fix} Q^N}\bigr\}$. Определим эпиморфизм $\xi\colon Q \to Q_F$.

Лемма 4.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Тогда $\ker \xi = Q^N$ и, следовательно, Q^N – нормальная подгруппа, а факторгруппа Q/Q^N изоморфна группе Q_F.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $\overline{q} \in Q^N$, $\xi(\overline{q}) = e$. Пусть $\overline{q} \in \xi^{-1}(e)$. Тогда, по определению эпиморфизма ξ, всякая точка множества $\operatorname{Fix} Q^N$ принадлежит $N\bigl(\langle q\rangle\bigr)$, и, следовательно, $N\bigl(\langle q\rangle\bigr) \neq \varnothing$. Но это и означает, что $\overline{q} \in Q^N$.

Замечание 4.1. Для любой точки $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ имеет место соотношение

$$Q_F(t) = Q(t).$$

Лемма 4.2. *Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Тогда:*

1) *для всякого $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ множество $\boldsymbol{P}(Q(t))$ не зависит от точки t и обозначается $\mathbb{P}_F(Q)$;*
2) *$\mathbb{P}_F(Q) \subseteq \operatorname{Fix} Q^N$ и инвариантно относительно группы Q;*
3) *либо $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{P}_F(Q)$ – совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$;*
4) *$\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда группа $Q_F \cong Q/Q^N$ циклическая.*

Доказательство. Если $N(Q)=\varnothing$, т.е. $\operatorname{Fix} Q^N=\mathbb{R}$, то утверждение леммы следует из теоремы 3.2.

Пусть $N(Q)\neq\varnothing$, $\operatorname{Fix} Q^N\neq\varnothing$. Для любого элемента $\widehat{q}$ коммутативной группы Q_F определим его продолжение с множества $\operatorname{Fix} Q^N$ на все $\mathbb{R}$ следующим образом. Множество $\mathbb{R}\setminus\operatorname{Fix} Q^N$ состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов, и каждый элемент $q\in Q$ действует как перекладывание этих интервалов. В силу определения группы Q_F любой элемент $\widehat{q}\in Q_F$ можем доопределить на каждом из указанных интервалов как линейное растяжение. Таким образом, определенная группа $\widetilde{Q}_F$ является коммутативной и для нее $N(\widetilde{Q}_F)=\varnothing$. Для группы $\widetilde{Q}_F$ справедливы утверждения теоремы 3.2. В частности, для группы $\widetilde{Q}_F$ корректно определено множество $\mathbb{P}(\widetilde{Q}_F)$, и очевидно, что оно содержится в множестве $\operatorname{Fix} Q^N$. На множестве $\operatorname{Fix} Q^N$ действия групп Q_F и $\widetilde{Q}_F$ совпадают, поэтому множество $\mathbb{P}_F(Q)$ также корректно определено и совпадает с множеством $\mathbb{P}(\widetilde{Q}_F)$. Все остальные утверждения непосредственно следуют из соответствующих утверждений теоремы 3.2.

Предложение 4.1. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$, для которой $N(Q)\neq\varnothing$. Для того чтобы $\operatorname{Fix} Q^N\neq\varnothing$, достаточно, чтобы существовала точка $t'\in N(Q)$, для которой $\boldsymbol{P}(Q(t'))=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть для точки $t'\in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t'))=\varnothing$. В таком случае $t'\in\operatorname{Fix} Q^N$, иначе имело бы место условие $\boldsymbol{P}(Q(t'))\neq\varnothing$.

Лемма 4.3. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$. Если μ – σ- конечная борелевская мера, инвариантная относительно группы Q, то носитель меры μ принадлежит множеству $\operatorname{Fix} Q^N$, т.е. $\operatorname{supp}\mu\subseteq\operatorname{Fix} Q^N$.*

Доказательство. В случае $\operatorname{Fix} Q^N=\mathbb{R}$ (что эквивалентно условию $N(Q)=\varnothing$) доказательство очевидно. Пусть $\operatorname{Fix} Q^N\neq\mathbb{R}$. Тогда очевидно, что $N(Q)\neq\varnothing$, т.е. $Q^N\neq\langle e\rangle$. Предположим, что существует множество $W\subset\mathbb{R}\setminus\operatorname{Fix} Q^N$, для которого $\mu(W)>0$.

Рассмотрим множество $\mathbb{R}\setminus\operatorname{Fix} Q^N$. Оно состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов. В таком случае, найдется открытый интервал $\Delta\subset\mathbb{R}\setminus\operatorname{Fix} Q^N$, для которого $\mu(W\cap\Delta)>0$. Но из этого условия непосредственно следует, что $\mu(\Delta)=+\infty$, что противоречит σ-конечности меры μ. Следовательно, $\operatorname{supp}\mu\subseteq\operatorname{Fix} Q^N$.

Теорема 4.1. *Пусть задана группа $Q\subseteq K^+$. Тогда*:

а) $\operatorname{Fix} Q^N\neq\varnothing$ *тогда и только тогда, когда существует σ-конечная борелевская мера μ, инвариантная относительно группы Q*;

б) *для того чтобы группа Q была полусопряженной по отношению к группе $.Q$, где $.Q$ является подгруппой группы сдвигов $\Pi_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы Q*;

в) *для того чтобы группа Q была 0-полусопряженной по отношению к группе $.Q$, где $.Q\subseteq\Pi_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная σ-конечная мера μ, инвариантная относительно группы Q.*

Доказательство. а) Если $N(Q) = \varnothing$, то очевидно, что $\mathrm{Fix}\, Q^N = \mathbb{R}$, и утверждение следует из теоремы 3.6.

Пусть $N(Q) \neq \varnothing$, $\mathrm{Fix}\, Q^N \neq \varnothing$. Воспользуемся конструкциями из доказательства леммы 4.2. Если группа Q_F циклическая, то определим меру μ, сосредоточенную в точках орбиты $Q(t')$, так, чтобы для любого $t \in Q(t')$ $\mu(t) = \alpha$, где $\alpha > 0$. Определенная таким образом мера и будет искомой. Если группа Q_F, а с ней и группа $\widetilde{Q}_F$, не циклическая, то по теореме 3.4 существует непрерывная $\widetilde{Q}_F$-инвариантная мера μ. По лемме 3.5 $\mathrm{supp}\, \mu = \mathbb{P}(\widetilde{Q}_F)$, откуда и следует, что $\mathrm{supp}\, \mu \subseteq \mathrm{Fix}\, Q^N$. Так как на множестве $\mathrm{Fix}\, Q^N$ действия элементов группы Q и $\widetilde{Q}_F$ совпадают, то мера μ будет одновременно и Q-инвариантной.

Докажем обратное. Если существует мера μ, то по предложению 4.3 $\mathrm{supp}\, \mu \subseteq \mathrm{Fix}\, Q^N$, откуда и следует, что $\mathrm{Fix}\, Q^N \neq \varnothing$.

б) *Необходимость.* Из полусопряженности следует, что $\ker \eta^{\#} = Q^N$ (где $\eta^{\#}$ из определения полусопряженности). В таком случае Q^N является подгруппой и $Q^N = \overline{Q}^N$. Если $Q = \langle e \rangle$ или $Q^N = Q$, то доказательство очевидно.

Пусть $Q \neq \langle e \rangle$, $Q \neq Q^N$. Борелевская мера определена своими значениями на полуинтервалах, поэтому для любого полуинтервала $[t_0, t_1)$ определим меру μ

$$\mu\big([t_0, t_1)\big) = \mathrm{mes}\big([\eta(t_0), \eta(t_1))\big),$$

где η взято из определения полусопряженности. Очевидно, что мера μ и инвариантна относительно группы Q. Необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство получается буквальным повторением доказательства первого абзаца теоремы 3.5.

в) Доказательство необходимости дословно повторяет доказательство п. б). Следует только заметить, что из 0-полусопряженности следует непрерывность меры μ.

Доказательство достаточности получается буквальным повторением доказательства первого абзаца теоремы 3.5.

Следствие 4.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\mathrm{Fix}\, Q^N \neq \varnothing$. Если факторгруппа Q/Q^N не циклическая, то группа Q является строго эргодичной, Q-инвариантная мера μ непрерывна и $\mathrm{supp}\, \mu = \mathbb{P}_F(Q)$.*

Доказательство. Так как действия элементов групп Q и $\widetilde{Q}_F$ на множестве $\mathrm{Fix}\, Q^N$ совпадают, то по лемме 4.3 любая Q-инвариантная мера является $\widetilde{Q}_F$-инвариантной и наоборот (группа $\widetilde{Q}_F$ из конструкции доказательства леммы 4.2). Так как факторгруппа Q/Q^N не циклическая, то такова и изоморфная ей группа $\widetilde{Q}_F$. Для таких групп $\mathbb{P}(\widetilde{Q}_F) = \mathbb{P}_F(Q) \neq \varnothing$. В силу леммы 3.10 и теоремы 3.6 для группы $\widetilde{Q}_F$ существует непрерывная инвариантная мера, и группа $\widetilde{Q}_F$ является строго эргодичной. Из леммы 3.8 следует, что $\mathrm{supp}\, \mu = \mathbb{P}_F(Q)$.

Теорема 4.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Для справедливости условия $\mathrm{Fix}\, Q^N \neq \varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный интервал Δ такой, что для любых q_1, $q_2 \in Q^N \setminus e$, $\mathrm{Fix}\, .Q^N \cap \Delta \neq \varnothing$, где $.Q = \langle q_1, q_2 \rangle$.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Из условий $\operatorname{Fix}.Q^N \cap \Delta \neq \varnothing$, $\operatorname{Fix}.Q^N \subseteq \operatorname{Fix}(\langle q_1\rangle)$, $\operatorname{Fix}.Q^N \subseteq \operatorname{Fix}(\langle q_2\rangle)$ следует, что $\operatorname{Fix}(\langle q_1\rangle) \cap \operatorname{Fix}(\langle q_2\rangle) \cap \Delta \neq \varnothing$. В таком случае система множеств

$$\bigl\{\operatorname{Fix}(\langle q\rangle) \cap \Delta\bigr\}_{q\in Q^N}$$

образует центрированную систему компактных множеств и по теореме Тихонова

$$\bigcap_{q\in Q^N} \bigl[\operatorname{Fix}(\langle q\rangle) \cap \Delta\bigr] \neq \varnothing,$$

откуда и следует, что $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

На основании теоремы 4.1, доказанной выше, и теоремы 1.3 работы [17] получим следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть задана конечно-порожденная группа $Q \subseteq K^+$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$;
2) *существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ*;
3) *для некоторой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ имеет субэкспоненциальный рост.*

Вместе с тем, существует пример счетно-порожденной абелевой группы, для которой $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$.

Приведем несколько результатов, в которых при дополнительных условиях уточняется структура нормальной подгруппы Q^N.

Предложение 4.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$. Тогда $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, а нормальная подгруппа Q^N является коммутативной. Более того, выполняется одно из условий*: *либо $N(Q) = \varnothing$, либо $N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$.*

Доказательство. Если $N(Q) = \varnothing$, что эквивалентно условию $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, то $Q^N = \langle e\rangle$ и доказательство очевидно.

Пусть $N(Q) \neq \varnothing$. Тогда множество $N(Q)$ состоит из не более чем счетного числа точек, причем на каждом конечном интервале их конечное число. Очевидно, что множество $N(Q)$ инвариантно относительно группы гомеоморфизмов Q.

Если $t' \in N(Q)$ является неподвижной точкой для элемента $q \in Q$, т.е. $q(t') = t'$, то для q неподвижными являются все точки множества $N(Q)$, т.е. $N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$. Действительно, пусть $q(t') = t'$ и $q(\widetilde{t}) \neq \widetilde{t}$, где $t', \widetilde{t} \in N(Q)$ и $\widetilde{t}$ ближайшая к t' точка из множества $N(Q)$. Тогда для последовательности $\{q^k(\widetilde{t})\colon k \in \mathbb{Z}\}$ точка t' является предельной точкой, чего не может быть в силу условия $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$. Следовательно, $N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$. То, что Q^N – нормальная подгруппа, следует из леммы 4.1.

Докажем коммутативность подгруппы Q^N. Прямая $\mathbb{R}$ точками множества $N(Q)$ делится на не более чем счетное число открытых интервалов. Пронумеруем полученные интервалы в порядке их следования. Номер 0 присвоим интервалу, для которого точка 0 либо является внутренней точкой, либо является ее левым концом. Множество индексов в нумерации обозначим через $J \subseteq \mathbb{Z}$, а интервалы через $\Delta_j, j \in J$.

Ограничение любого элемента $q \in Q^N$ на интервале Δ_j, $j \in J$, является гомеоморфизмом. Группу преобразований, полученную как ограничение элементов Q^N на интервал Δ_j, $j \in J$, обозначим через Q_j^N, $j \in J$. Заметим, что группа Q^N естественным образом изоморфно вкладывается в полное прямое произведение $\overline{\prod}_{j\in J} Q_j^N$. Очевидно, что для любого $j \in J$ множество

$$N(Q_j^N) = \{t : t \in \Delta_j,\, \exists\, q_j \in Q_j^N,\, q_j \neq e,\, q_j(t) = t\}$$

является пустым.

Пусть $\eta_j : \Delta_j \to \mathbb{R}$, $j \in J$, – произвольный гомеоморфизм. Рассмотрим группу $.Q_j^N$ такую, что для любого $.q_j \in .Q_j^N$ справедливо представление $.q = \eta \cdot q_j \cdot \eta^{-1}$ для какого-либо $q_j \in Q_j^N$. В таком случае, гомеоморфизм η_j очевидным образом индуцирует изоморфизм $\eta_j^{\#} : Q_j^N \to .Q_j^N$ групп Q_j^N и $.Q_j^N$. Из условия $N(Q_j^N) = \varnothing$ следует, что $N(.Q_j^N) = \varnothing$. Тогда в силу предложения 3.1 группа $.Q_j^N$ коммутативная, откуда следует коммутативность группы Q_j^N. Из коммутативности групп Q_j^N, $j \in J$, следует коммутативность группы $\overline{\prod}_{j\in J} Q_j^N$, откуда и следует коммутативность группы Q^N.

Напомним, что для любой точки $t \in \mathbb{R}$ через Q_t^N обозначается подгруппа группы Q такая, что $Q_t^N = \{q : q \in Q^N,\ q(t) = t\}$.

Предложение 4.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Если для любого $q \in Q \setminus e$ $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle)\big) = \varnothing$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ группа Q_t коммутативна и для любого $\overline{q} \in Q_t \setminus e$ $\operatorname{Fix} Q_t = N(Q_t) = N\big(\langle\overline{q}\rangle\big)$ и $\boldsymbol{P}(\operatorname{Fix} Q_t) = \boldsymbol{P}(N(Q_t)) = \varnothing$.*

Доказательство. В группе Q_t введем отношение частичного порядка. Для любых элементов $q_1, q_2 \in Q_t$ $q_1 \leqslant q_2$, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\bar{t} \in\,]t, t+\varepsilon[$, $q_1(\bar{t}) \leqslant q_2(\bar{t})$. В силу условия $\boldsymbol{P}(N(\langle q\rangle)) = \varnothing$, группа Q_t линейно упорядочена и архимедова. Тогда по теореме Гёльдера [10] группа Q_t коммутативная. Остальные свойства следуют из коммутативности группы Q_t и свойства $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle)\big) = \varnothing$.

Следствие 4.2. *Пусть Q – группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию, и элементы группы Q взаимно трансверсальны. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ подгруппа Q_t коммутативна.*

Доказательство. Для указанного класса групп $\boldsymbol{P}(N(\langle q\rangle)) = \varnothing$ для любого $q \in Q \setminus e$, и доказательство следует из предложения 4.3.

Следствие 4.3. *Пусть выполняются условия предложения 4.3. Если $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, то нормальная подгруппа Q^N коммутативна.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, то для любого $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ справедливо условие $Q^N = Q_t^N$ и доказательство следует из предложения 4.3.

Следствие 4.4. *Пусть выполняются условия предложения* 4.3. *Если* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, *то* $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$ *и выполняется одно из условий*: *либо* $N(Q) = \varnothing$ (*что эквивалентно условию* $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$), *либо* $N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$.

Доказательство. Фиксируем $t \in \operatorname{Fix} Q^N$. Тогда $Q^N = Q_t$. Так как $N(Q^N) = N(Q)$, то по предложению 4.3 $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$. Остальные условия также следуют из предложения 4.3.

Предложение 4.4. *Пусть* Q *группа диффеоморфизмов* $\mathbb{R}$ *класса* $C^{(1)}$, *сохраняющих ориентацию*, $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, *и элементы группы* Q *взаимно трансверсальны. Если для какой-либо точки* $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ *множество предельных точек орбиты* $Q(t)$, *т.е.* $\boldsymbol{P}(Q(t))$, *принадлежит множеству* $N(Q)$, *то и для любой точки* $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) \subseteq N(Q)$, *а нормальная подгруппа* Q^N *является коммутативной и циклической.*

Доказательство. Если $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, что эквивалентно условию $N(Q) = \varnothing$, то доказательство следует из лемм 3.1 и 3.3. Пусть $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, $\operatorname{Fix} Q^N \neq \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, $N(Q) \neq \varnothing$). По следствию 4.3 и предложению 4.2 для таких групп имеют место условия $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$, $N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$. Если для какой-либо точки $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ выполняется условие $\boldsymbol{P}(Q(t)) \subseteq N(Q)$, то по конструкциям предложения 4.2 точка t принадлежит какому-либо интервалу Δ_j, $j \in J$, и $\mathbb{P}(Q_j^N) = \varnothing$. Тогда в силу леммы 3.2 и по конструкциям отображения η_j, $j \in J$, из предложения 4.2 получим, что группа Q_j^N циклическая. Так как элементы группы Q^N принадлежат классу $C^{(1)}$ и взаимно трансверсальны, то из цикличности группы Q_j^N при заданном $j \in J$ и условия гладкости любого преобразования $q \in Q^N$ в концах интервалов Δ_j, $j \in J$, следует цикличность любой группы Q_j^N, $j \in J$, и группы Q^N. В частности, из цикличности любой группы Q_j^N, $j \in J$, следует, что для любой точки $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ справедливо условие $\boldsymbol{P}(Q_j^N(t)) \subseteq N(Q)$, и, следовательно, $\boldsymbol{P}(Q(t)) \subseteq N(Q)$.

Следствие 4.5. *Пусть выполняются условия предложения* 4.4. *Если для какой-либо точки* $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ *множество предельных точек орбиты* $Q(t)$, *т.е.* $\boldsymbol{P}(Q(t))$, *принадлежит множеству* $N(Q)$, *то для любой точки* $t \in \mathbb{R} \setminus N(Q)$ *справедливо условие* $\boldsymbol{P}(Q(t)) \subseteq N(Q)$.

Доказательство непосредственно следует из последнего абзаца доказательства предложения 4.4.

§ 5. Уточнение структуры факторгруппы $Q/\overline{Q}^N$. Класс групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, для которых $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$

В предыдущих параграфах исследовался случай, когда $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Заметим, что при $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ справедливо условие $\overline{Q}^N = Q^N$, а замкнутое множество $\operatorname{Fix} Q^N$ может иметь произвольную структуру. Здесь уточняется структура факторгруппы $Q/\overline{Q}^N$, описанная в теореме 2.1, в зависимости от структуры орбит $Q(t)$. Далее, в этом параграфе в случае $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ исследуется топологическая структура множества $N(Q)$, а также орбит $Q(t)$ (теорема 5.1, предложения 5.1, 5.2). В частности, к таким группам относятся некоммутативные группы аффинных преобразований.

Теорема о факторгруппе. *Пусть Q – группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Тогда факторгруппа $Q/\overline{Q}^N$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, для любого $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ множество $\boldsymbol{P}(Q(t))$ не зависит от точки t, обозначается через $\mathbb{P}_F(Q)$ (очевидно, что $\mathbb{P}_F(Q) \subseteq \operatorname{Fix} Q^N$) и выполняется одно из следующих условий*:

1) *либо $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, $\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$ и факторгруппа Q/Q^N циклическая*;
2) *либо $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, $\mathbb{P}_F(Q)$ является совершенным нигде не плотным множеством, а факторгруппа Q/Q^N не циклическая, но не более чем счетна*;
3) *либо $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$ (соответственно $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, что эквивалентно условию $Q^N = \langle e \rangle$), а $Q \cong Q/Q^N$ – коммутативная не циклическая группа*:
4) *либо $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$, $\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$ и факторгруппа $Q/\overline{Q}^N$ тривиальна.*

Доказательство. Начальное утверждение теоремы следует из теоремы 2.1. Утверждения 1)–3) следуют из леммы 4.2, конструкции группы $\widetilde{Q}_F$ (доказательства леммы 4.2) и теоремы 3.7.

Докажем утверждение 4). Пусть $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Из $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ следует, что для любого интервала I справедливо условие $\lambda(I) = +\infty$. Тогда в силу леммы 2.4 $\overline{Q}^N = Q$ и факторгруппа $Q/\overline{Q}^N$ тривиальна.

Лемма 5.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ такая, что $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) \cap N(Q) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$, то $N(Q) \neq \varnothing$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется $q \in Q^N$, для которого $q(t) \neq t$. В таком случае множество $\{q^k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ имеет предельную точку, принадлежащую множеству $N(Q)$, и, следовательно, $\boldsymbol{P}(Q(t)) \cap N(Q) \neq \varnothing$.

Предложение 5.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ такая, что $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда не существует конечного замкнутого интервала I такого, что $\boldsymbol{P}(N(Q)) \subseteq I$.*

Доказательство. Очевидно, что $Q^N \neq \langle e \rangle$. Пусть существует такой интервал. В таком случае существует минимальный замкнутый интервал $\widehat{I}$ с концевыми точками t_0, t_1, для которого $\boldsymbol{P}(N(Q)) \subseteq \widehat{I}$. Из условия минимальности интервала $\widehat{I}$ следует, что для любого $q \in Q$ $q(t_0) = t_0$, $q(t_1) = t_1$. В таком случае $Q = Q^N$ и $t_0, t_1 \in \operatorname{Fix} Q^N$, т.е. $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Противоречие. Следовательно, такого интервала не существует.

Лемма 5.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ такая, что для любого $q \in Q^N$, $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q \rangle\big) = \varnothing$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{P}(N(Q)) \subseteq \boldsymbol{P}(Q(t))$.*

Доказательство. Если $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, то по следствию 4.4 $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$, откуда и следует доказательство.

Пусть $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда $N(Q) \neq \varnothing$ и по лемме 5.1 для любого $t \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{P}(Q(t))$. Оно состоит из не более чем счетного числа открытых связных интервалов $\{\Delta_j\}_{j\in J}$, $J \in \mathbb{Z}$. Для любого $j \in J$ рассмотрим множество

$$Q_j^N = \{q:\ q \in Q^N;\ \exists \widetilde{t} \in \Delta_j,\ q(\widetilde{t}) = \widetilde{t}\}.$$

Если $N(Q)\cap\Delta_j \neq \varnothing$, то $Q_j^N \neq \langle e\rangle$. Очевидно, что один из концов интервала Δ_j, t_{0j} или t_{1j} обязательно конечный. Пусть для определенности $t_{1j} \neq +\infty$. В силу определения множества $\boldsymbol{P}(Q(t))$ для любого $q \in Q_j^N$ выполняется условие $q(t_{1j}) = t_{1j}$. Следовательно, $Q_j^N = Q_{t_{1j}}^N$ (определение группы $Q_{t_{1j}}^N$ смотри перед предложением 4.3). По предложению 4.3 $Q_{t_{1j}}^N$ – коммутативная группа, а по следствию 4.4 получим, что $\boldsymbol{P}\big(N(Q_{t_{1j}}^N)\big) = \varnothing$. Заметим, что для любого $j \in J$

$$N(Q) \cap \Delta_j = N\big(Q_{t_{1j}}^N\big) \cap \Delta_j,$$

откуда и следует, что $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$. Так как это справедливо для любого $j \in J$ такого, что $N(Q) \cap \Delta_j \neq \varnothing$, то лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ такая, что для любого $q \in Q^N$ $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle)\big) = \varnothing$ и $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда орбита $Q(t')$ точки $t' \in N(Q)$ удовлетворяет условиям*:

a$'$) *либо* $\boldsymbol{P}(Q(t')) \neq \varnothing$, $\operatorname{Int} \boldsymbol{P}(Q(t')) = \varnothing$;
б$'$) *либо* $\boldsymbol{P}(Q(t')) = \mathbb{R}$;

тогда и только тогда, когда орбита $Q(t)$ любой точки $t \in N(Q)$ удовлетворяет, соответственно, условиям:

а) *либо* $\boldsymbol{P}(Q(t)) \neq \varnothing$, $\operatorname{Int} \boldsymbol{P}(Q(t)) = \varnothing$;
б) *либо* $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Из леммы 5.1 следует, что для любого $t \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) \neq \varnothing$. Если для любого $t \in N(Q)$ орбита $Q(t)$ нигде не плотна, то лемма доказана. Пусть существует $\bar{t} \in N(Q)$, для которой $\operatorname{Int} \boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \varnothing$, но $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \mathbb{R}$. Заметим, что множество $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t}))$ также Q-инвариантно. Так как $\operatorname{Int} \boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \varnothing$ и $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \mathbb{R}$, то существует максимальный связный замкнутый интервал Δ со свойством $\Delta \subset \boldsymbol{P}(Q(\bar{t}))$. Очевидно, что один из концов интервала Δ, t_0 или t_1, обязательно конечный. Пусть для определенности $t_1 \neq +\infty$. Рассмотрим множество

$$Q_\Delta^N = \{q:\ q \in Q^N;\ \exists t \in \Delta,\ q(t) = t\}.$$

Очевидно, что $Q_\Delta^N \neq \langle e\rangle$. В силу максимальности интервала Δ для любого $q \in Q_\Delta^N$ выполняется условие $q(t_1) = t_1$, т.е. $Q_\Delta^N = Q_{t_1}^N$. Из определения Q_Δ^N следует, что для группы Q_Δ^N справедливо условие $\boldsymbol{P}\big(N(Q_\Delta^N)\big) \cap \Delta \neq \varnothing$. С другой стороны, по предложению 4.4 группа $Q_{t_1}^N$ коммутативна, выполняются соотношения

$$\operatorname{Fix} Q_{t_1}^N = N\big(Q_{t_1}^N\big), \qquad \boldsymbol{P}\big(\operatorname{Fix} Q_{t_1}^N\big) = \boldsymbol{P}\big(N(Q_{t_1}^N)\big) = \varnothing.$$

Но это противоречит условию $\boldsymbol{P}\big(N(Q_{t_1}^N)\big) \cap \Delta \neq \varnothing$. Следовательно, орбита $Q(\bar{t})$ должна быть всюду плотна, т.е. из условия $\operatorname{Int} \boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \varnothing$ следует, что $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) = \mathbb{R}$. Остается показать, что из условия $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) = \mathbb{R}$ для какого-либо $t \in N(Q)$ следует, что $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$ для любого $t \in N(Q)$. Но это следует из леммы 5.2.

Следствие 5.2. *Пусть задана группа* $Q \in K^+$ *такая, что* $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ *и для любого* $q \in Q^N$ *выполняются условия* $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q \rangle)\big) = \varnothing$. *Для того чтобы* $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$ *для любой точки* $t \in \mathbb{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала точка* $t' \in N(Q)$, *для которой* $\boldsymbol{P}(Q(t')) = \mathbb{R}$.

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Действительно, если для $t' \in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t')) = \mathbb{R}$, то по лемме 5.2 для любого $t \in N(Q)$ имеет место $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$. В силу леммы 5.1 для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо условие $\boldsymbol{P}(Q(t)) \cap N(Q) \neq \varnothing$ и так как $\boldsymbol{P}(Q(t))$ является Q-инвариантным множеством, то $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$.

Сформулируем результат, который в случае диффеоморфизмов с взаимно трансверсальными элементами обобщает теорему 3.2.

Теорема 5.1. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$ *такая, что для любого* $q \in Q^N$ $\boldsymbol{P}\big(N(\langle q \rangle)\big) = \varnothing$. *Тогда*:

1) *для всякого* $t \in N(Q) \cup \operatorname{Fix} Q^N$ *множество* $\boldsymbol{P}(Q(t))$ *не зависит от точки* t *и обозначается через* $\mathbb{P}_N(Q)$;
2) $\mathbb{P}_N(Q)$ *инвариантно относительно группы* Q;
3) *либо* $\mathbb{P}_N(Q) = \mathbb{R}$, *либо* $\mathbb{P}_N(Q)$ *совершенное нигде не плотное подмножество* $\mathbb{R}$, *либо* $\mathbb{P}_N(Q) = \varnothing$;
4) $\mathbb{P}_N(Q) = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, *а факторгруппа* Q/Q^N *циклическая*;
5) *если* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, *то* $\mathbb{P}_N(Q) = \mathbb{P}_F(Q)$.

Доказательство. 1) Если $N(Q) = \varnothing$, т.е. $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$, то доказательство следует из теоремы 3.2. Если $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ и $\operatorname{Fix} Q^N \neq \mathbb{R}$, то по следствию 4.4 для любого $t \in N(Q)$ имеет место $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \varnothing$ и, соответственно, $\mathbb{P}_N(Q) = \varnothing$. Если $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ и для какой-либо точки $t \in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$, то по следствию 5.2 для любого $t \in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{R}$ и предложение доказано.

Пусть $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ и для некоторого $t \in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) \neq \mathbb{R}$. Очевидно, что для фиксированного $t \in N(Q)$ множество $\boldsymbol{P}(Q(t))$ не пусто, инвариантно относительно группы Q и замкнуто. Рассмотрим точку $\bar{t} \in N(Q)$, $\bar{t} \neq t$. Тогда множество $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{P}(Q(t))$ состоит из счетного числа связных открытых интервалов.

Покажем, что $\boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \subseteq \boldsymbol{P}(Q(t))$. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{P}(Q(t)) \setminus \boldsymbol{P}(Q(\bar{t})) \neq \varnothing.$$

Тогда найдутся открытый интервал $\Delta \subset \mathbb{R} \setminus \boldsymbol{P}(Q(t))$ и точка $t' \in \boldsymbol{P}(Q(t))$ такие, что $t' \in \Delta$. Так как t' – предельная точка орбиты $Q(t)$, то найдется последовательность $t_n \in Q(t)$ такая, что $t_n \in \Delta$, $t_n \to t'$. Очевидно, что действие любого элемента группы Q является перекладыванием интервалов множества $\mathbb{R} \setminus \boldsymbol{P}(Q(t))$. Рассмотрим множество

$$Q^N_\Delta = \big\{q : q \in Q^N,\ q(\Delta) \subseteq \Delta\big\}.$$

Так как $t_n \in Q(t) \cap \Delta$, то множество $Q^N_\Delta \neq \langle e \rangle$. Если t_0, t_1 – концы интервала Δ, то очевидно, что для любого $q \in Q^N_\Delta$ $q(t_0) = t_0$, $q(t_1) = t_1$ или иначе $Q^N_{t_0} = Q^N_{t_1} = Q^N_\Delta$ (определение группы Q^N_t смотри перед предложением 4.3). Очевидно, что $t_n \in N\big(Q_{t_1}^N\big)$. Но $\operatorname{Fix} Q_{t_1}^N \neq \varnothing$, и в силу следствия 4.4 $\boldsymbol{P}\big(N(Q_{t_1}^N)\big) = \varnothing$. Противоречие, ибо t_n имеет предельную точку t'. Следовательно, для любых $t, \bar{t} \in N(Q)$ должно быть выполнено условие $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \boldsymbol{P}(Q(\bar{t}))$. Пункт 1) доказан.

2) Так как для $t \in N(Q)$ $\boldsymbol{P}(Q(t)) = \mathbb{P}_N(Q)$, то Q-инвариантность множества $\mathbb{P}_N(Q)$ следует из Q-инвариантности $\boldsymbol{P}(Q(t))$.

3) Доказательство этого пункта следует из пункта 1), леммы 5.2 и следствия 4.4.

4) Доказательство этого пункта следует из следствия 4.4, леммы 4.2 и теоремы 3.2.

5) Утверждение данного пункта очевидно.

Определение 5.1. Пусть Q – группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию ($Q \subseteq K^+$). Группа Q называется *топологически свободной*, если $\operatorname{Int} N(Q) = \varnothing$.

Предложение 5.2. *Пусть Q – группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию, элементы которой взаимно трансверсальны. Группа Q топологически свободна тогда и только тогда, когда $N(Q) \neq \mathbb{R}$.*

Доказательство. Если группа Q топологически свободна, то очевидно, что $N(Q) \neq \mathbb{R}$. Докажем обратное.

Пусть $N(Q) \neq \mathbb{R}$. Предположим, что при этом $\operatorname{Int} N(Q) \neq \varnothing$. Тогда существует некоторый максимальный открытый интервал Δ, $\Delta \subseteq \operatorname{Int} N(Q)$, один из концов которого конечен. Предположим для определенности, что правый конец t_1 интервала Δ конечен. Рассмотрим множество

$$Q_{\Delta}^N = \big\{q : q \in Q^N,\ \exists\, t \in \Delta,\ q(t) = t\big\}.$$

Очевидно, что $Q_{\Delta}^N \neq \langle e \rangle$. Из условия максимальности интервала Δ следует, что $Q_{\Delta}^N = Q_{t_1}^N$. Тогда по предложению 4.4 группа $Q_{t_1}^N$ коммутативна, а по следствию 4.4 для группы $Q_{t_1}^N$ выполняется соотношение $\boldsymbol{P}\big(N(Q_{t_1}^N)\big) = \varnothing$. С другой стороны, очевидно, что $\Delta \subseteq N\big(Q_{t_1}^N\big)$. Противоречие. Следовательно, $\operatorname{Int} N(Q) = \varnothing$.

Список литературы

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. I, II. М.: Наука, 1972.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №1. С. 21–86.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
5. *Альфорс Л. В.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
6. *Hinkkanen A.* The structure of certain quasisymmetrik groups // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. №422. P. 85.
7. *Новиков С. П.* Топология слоений // Труды ММО. 1965. Т. 14. С. 248–278.
8. *Солодов В. В.* Гомеоморфизмы прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 1047–1060.
9. *Солодов В. В.* Гомеоморфизмы окружности и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №3. С. 599–613.
10. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

12. *Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф.* Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 58, 1990. С. 191–256.
13. *Hector G., Hirst U.* Introduction to the geometric theory of foliations. Part II. Vizbaden: Wiley, 1983.
14. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
15. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
16. *Plante I. F.* Foliations with measure preserving holonomy // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 327–361.
17. *Plante I. F.* Solvable groups acting on the line // Transl. of the Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 401–414.
18. *Карлович Ю. И.* C-алгебра операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. 1988. Т. 302. №3. С. 535–540.
19. *Бекларян Л. А.* О приводимости дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом к уравнению с постоянными соизмеримыми отклонениями // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №5. С. 561–565.
20. *Бекларян Л. А.* Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система // Препринт: Вычислительный центр АН СССР, 1989.
21. *Бекларян Л. А.* Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР. 1991. Т. 317. №5. С. 1033–1038.
22. *Бекларян Л. А.* Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения // ДАН СССР. 1991. Т. 317. №6. С. 1289–1294.
23. *Бекларян Л. А.* Структура факторгруппы группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов // ДАН. 1993. Т. 331. №2. С. 137–139.
24. *Бекларян Л. А.* Инвариантные и проективно-инвариантные меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию // ДАН. 1993. Т. 332. №6. С. 679–681.
25. *Imanishi H.* Structure of codimention 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group // J. of Math. Kyoto Univ. 1979. V. 19. №3. P. 481–495.
26. *Salhi E.* Sur les ensembles locaux // C.R.A.S. Paris. 1982. V. 295. Ser. I. №12. P. 691–694.
27. *Salhi E.* Sur une theorie de structure de feuilletage de codimension // C.R.A.S. Paris. 1985. V. 300. Ser. I. №18. P. 635–638.
28. *Salhi E.* Niveau defeuilles // C.R.A.S. Paris. 1985. V. 301. Ser. I. №5. P. 219–222.
29. *Matsumoto S.* Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1986. V. 98. №1. P. 163–168.
30. *Matsumoto S.* Some remarks on foliated S^1 bundles // Invent. Math. 1987. V. 90. P. 343–358.
31. *Chys E.* Groupes d'homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée. Part III // Contemporary Mathematics. 1987. V. 58. P. 81–105.

Центральный экономико-математический институт РАН

Поступила в редакцию 26.05.1993 и 22.08.1995