Л. А. Бекларян, К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 4, 3–28

DOI: https://doi.org/10.4213/sm121

УДК 515.168.3

Л. А. Бекларян

К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры

Работа посвящена исследованию групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, общего вида. Для таких групп исследуется метрический инвариант в виде проективно-инвариантной меры. Принятый подход приводит к классификации таких групп гомеоморфизмов по степени сложности множества неподвижных точек элементов группы. Внутри каждого из выделенных классов групп проводится более тонкая классификация в зависимости от степени сложности топологической структуры орбит и комбинаторных свойств групп.

Библиография: 11 названий.

Данный текст является продолжением работы [11], использует принятые там обозначения и имеет сплошную нумерацию параграфов.

§ 6. Пространство $\mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$. Число вращения гомеоморфизма

Вводится хорошо известное понятие числа вращения гомеоморфизмов $\mathbb{R}$. Для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию и удовлетворяющих условию (P) (гомеоморфизмы, являющиеся накрытиями гомеоморфизмов окружности), исследуется отображение $A\colon Q \to \mathbb{R}$, где $A(q)$ – число вращения гомеоморфизма q. В терминах условий на структуру множества Q^N сформулировано необходимое и достаточное условие того, что $A \in \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$ (теорема 6.4). Другой способ построения гомоморфизмов из $\mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$ с помощью Q-инвариантных мер описан в работе [7]. Там же доказано, что любые две Q-инвариантные меры μ и ν порождают линейно зависимые элементы τ_μ, τ_ν из $\mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$ с положительным коэффициентом растяжения. В рамках развитой техники этот факт заново доказывается в предложении 6.3. Далее доказано, что условие $A \in \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$ эквивалентно существованию Q-инвариантной меры μ, а гомоморфизмы τ_μ, A линейно зависимы с положительным коэффициентом растяжения (теорема 6.7). Таким образом, существование алгебраического инварианта в виде гомоморфизма $A \in \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R})$, где $A(q)$ для любого $q \in Q$ есть число вращения гомеоморфизма q, эквивалентно существованию метрического инварианта в виде Q-инвариантной меры μ. Для группы $Q \subseteq K^+$ с Q-инвариантной мерой μ в терминах гомоморфизма τ_μ формулируется условие, эквивалентное условию строгой эргодичности группы Q (теорема 6.8).

Хорошо известному отображению окружности в себя соответствует коммутативная группа гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, с двумя образующими $\mathscr{T}_q = \langle q, \widehat{q} \rangle$, где $\widehat{q}(t) = t + 1$, а q является накрытием исследуемого

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 94-01-015113а, № 94-01-00820).

гомеоморфизма окружности. Изучается отображение $A\colon \mathscr{T}_q \to \mathbb{R}$ (обозначаемое через A_q), а также связь между значением числа вращения гомеоморфизма (рациональное или иррациональное) и свойствами отображения A_q.

Определение 6.1 [1], [2]. Пусть $q \in K^+$. Предел, если он существует и не зависит от $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \alpha(q)$$

называется *числом вращения гомеоморфизма* q.

Очевидно, что гомеоморфизм $\widehat{q}(t) = t+1$ удовлетворяет условию (P) и перестановочен с любым гомеоморфизмом q, удовлетворяющим условию (P). Поэтому, если гомеоморфизм q удовлетворяет условию (P), то группа $\mathscr{T}_q = \langle q, \widehat{q}\rangle$ коммутативна.

Для любого $q \in K^+$ через I_q обозначается автоморфизм группы K^+, называемый сопряжением и действующий по правилу $\forall\, \overline{q} \in K^+ \;\; I_q(\overline{q}) = q\overline{q}q^{-1}$.

Сформулируем несколько простых предложений.

Предложение 6.1. *Если $q \in K_L^+$ и для $\overline{q} \in K^+$ существует число вращения $\alpha(\overline{q})$, то для $I_q(\overline{q})$ также существует число вращения и $\alpha(\overline{q}) = \alpha(I_q(\overline{q}))$.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha(q\overline{q}q^{-1}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(q\overline{q}q^{-1})^n(t)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{q(\overline{q})^n q^{-1}(t)}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\overline{q})^n(q^{-1}(t))}{n} = \alpha(\overline{q}).\end{aligned}$$

Для числа вращения хорошо известен следующий результат [1], [2], доказательство которого проводится в рамках развитой техники.

Теорема 6.1. *Для любого $q \in K_p^+$ число вращения $\alpha(q)$ существует.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай первый. Пусть $N(\langle q\rangle) \neq \varnothing$. Так как $q \in K_p^+$, то множество $N(\langle q\rangle)$ не ограничено ни снизу, ни сверху. Для любого $t \in N(\langle q\rangle)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{t}{n} = 0.$$

Рассмотрим множество $\mathbb{R}\setminus N(\langle q\rangle)$, состоящее из счетного числа открытых связных интервалов $\{\Delta_j\}_{-\infty}^{+\infty}$. Пусть t_0^j, t_1^j – левый и правый концы интервала Δ_j. Тогда для любого $t \in \Delta_j$, $\lim_{n\to+\infty} q^n(t) = t_1^j$, поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n(t)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{t_1^j}{n} = 0.$$

Таким образом, для таких q число вращения $\alpha(q)$ существует и равно 0.

Случай второй. Пусть $N(\langle q\rangle) = \varnothing$. Тогда, повторяя дословно доказательство теоремы 3.1, мы можем добиться того, чтобы гомеоморфизм η принадлежал группе K_L^+. В итоге получим, что существует циклическая группа $.Q = \langle .q\rangle$, $.q(t) = t + .h_q$ такая, что группа $\langle q\rangle$ 0-сопряжена группе $.Q$. Из этого, в частности, следует, что $q = \eta\cdot .q\cdot \eta^{-1}$. Но для сдвига $.q(t) = t + .h_q$ очевидно, что $\alpha(.q) = .h_q$. Тогда по предложению 6.1 для q число вращения $\alpha(q)$ существует и $\alpha(q) = .h_q$.

Лемма 6.1. *Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q) = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Fix}\langle q\rangle \neq \varnothing$.*

Доказательство. Очевидно, что в случае $q \neq e$ имеет место соотношение $\operatorname{Fix}\langle q\rangle = N(\langle q\rangle)$, а в случае $q = e$ справедливо условие $\operatorname{Fix}\langle q\rangle = \mathbb{R}$. Для $q = e$ доказательство леммы очевидно. Пусть $q \neq e$. Предположим, что $\alpha(q) = 0$ и при этом $N(\langle q\rangle) = \varnothing$. Не нарушая общности, будем полагать, что $q > e$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $q^n(0) > 1$. В таком случае для любого $k = 1, 2, \dots, q^{kn}(0) > k$ и, соответственно,

$$\alpha(q) = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^{kn}(0)}{kn} > \frac{k}{kn} = \frac{1}{n}.$$

Противоречие. Следовательно, $N(\langle q\rangle) \neq \varnothing$.

Доказываем обратное утверждение. Пусть $N(\langle q\rangle) \neq \varnothing$. Рассмотрим точку $\bar{t} \in N(\langle q\rangle)$. Так как $q(\bar{t}) = \bar{t}$, то

$$\alpha(q) = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n(\bar{t})}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\bar{t}}{n} = 0.$$

Теорема 6.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$ такая, что $N(Q) = \varnothing$. Тогда отображение $A\colon Q \to \mathbb{R}$, где $A(q) = \alpha(q)$ для любого $q \in Q$, определяет гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$. В силу леммы 3.2 группа q циклическая. Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\alpha(q^n) = n\alpha(q)$. Если положить $A(q^n) = n\alpha(q)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то A определяет гомоморфизм группы Q в группу $\mathbb{R}$.

Рассмотрим случай $N(Q) = \varnothing$, $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$. Пусть гомоморфизм $\eta^\#$ и непрерывное отображение η те же, что и в конструкции теоремы 3.4. Из доказательства теоремы 3.4 следует, что отображение η определяется Q-инвариантной мерой μ, которая в силу строгой эргодичности группы Q определяется с точностью до положительного множителя. Так как $Q \in K_p^+$, то очевидно, что $\mathbb{P}(Q) \cap [0,1] \neq \varnothing$. По лемме 3.6 имеем $\mu([0,1]) > 0$. Нормируем μ таким образом, чтобы $\mu([0,1]) = 1$.

В теореме 3.4 определялся гомоморфизм $\eta^\#(q) = .q$, где $.q = t + .h_q$, $.h_q = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})))$,

$$\widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t}))) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, q(\bar{t}))), & \text{если } \bar{t} < q(\bar{t}), \\ -\mu([q(\bar{t}), \bar{t})), & \text{если } \bar{t} \geqslant q(\bar{t}). \end{cases}$$

Не нарушая общности, будем полагать, что $e < q$. Тогда в силу Q-инвариантности меры μ для любого $q \in Q$

$$.h_q = \mu\bigl([\bar{t}, q(\bar{t}))\bigr) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\bigl([q^k(\bar{t}), q^{k+1}(\bar{t}))\bigr) = \frac{1}{n}\mu\bigl([\bar{t}, q^n(\bar{t}))\bigr).$$

Пусть $lk_n < q^n(\bar{t}) < l(k_n + 1)$, где k_n – целое число. Тогда в силу Q-инвариантности меры μ и условия ее нормировки

$$lk_n < \mu\bigl([0, \bar{t})\bigr) + \mu\bigl([\bar{t}, q^n(\bar{t}))\bigr) < l(k_n + 1).$$

Отсюда

$$\alpha(q) = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n(\bar{t})}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{lk_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu([\bar{t}, q^n(\bar{t})))}{n} = .h_q\,.$$

Так как $\eta^\#$ является гомоморфизмом, то $A(q) = \alpha(q)$ также определяет гомоморфизм.

Определение 6.2. Числа $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ называются *несоизмеримыми*, если не существуют $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = 0$. В противном случае такие числа называются *соизмеримыми*.

Теорема 6.3. *Пусть $Q = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$ – конечно-порожденная подгруппа группы K_p^+ и $N(Q) = \varnothing$. Для того чтобы $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, были попарно соизмеримыми.*

Доказательство. Если группа Q тривиальная, то доказательство очевидно. Пусть $Q \neq \langle e \rangle$. Предположим, что $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$. Тогда по теореме 3.2 группа Q циклическая. Пусть элемент $q \in Q$ является ее образующей. Тогда существуют $n^j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, s}$, такие, что $q_j = q^{n^j}$. В таком случае для любого $j = \overline{1, s}$ $\alpha(q_j) = n^j \alpha(q)$, откуда и следует, что $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы.

Пусть числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы. Тогда, повторяя доказательство теорем 3.4 и 6.2, получим, что группа Q является 0-полусопряженной к группе $.Q$, где $.Q = \langle .q_j, j = \overline{1, s} \rangle$, $.q_j(t) = t + \alpha(q_j)$. Тогда, в частности, отображение $\eta^{\#} \colon Q \to .Q$ определяет изоморфизм. Так как числа $\alpha(q_j)$, $j = \overline{1, s}$, попарно соизмеримы, то группа $.Q$ циклическая. Следовательно, группа Q также циклическая и по теореме 3.2 $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$.

Выясним, для каких еще подгрупп $Q \subset K_p^+$ функция числа вращения $\alpha(q)$ задает гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

Теорема 6.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Отображение $A \colon Q \to \mathbb{R}$, где $A(q) = \alpha(q)$ для любого $q \in Q$, задает гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\overline{Q}^N = Q^N$.*

Доказательство. Пусть $\overline{Q}^N = Q^N$. Если $Q^N = \langle e \rangle$, то доказательство следует из теоремы 6.2.

Предположим, что $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если $Q^N = Q$, то по лемме 6.1 для любого $q \in Q$ $\alpha(q) = 0$ и доказательство очевидно. Остается исследовать случай $Q^N \neq \langle e \rangle$, $Q^N \neq Q$. Так как по предположению $Q^N = \overline{Q}^N$, а факторгруппа Q/Q^N не тривиальна, то в силу последнего утверждения теоремы о факторгруппе из § 5 $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ и факторгруппа Q/Q^N изоморфна группе $\widetilde{Q}_F$ (конструкция доказательства леммы 4.2). Более того, элементы группы можно так сконструировать, чтобы они также принадлежали группе K_p^+. Для группы $\widetilde{Q}_F$ выполняется условие $N(\widetilde{Q}_F) = \varnothing$. Тогда по теореме 6.2 существует гомоморфизм $\widetilde{A} \colon \widetilde{Q}_F \to \mathbb{R}$, где $\widetilde{A}(\widetilde{q}) = \alpha(\widetilde{q})$ для любого $\widetilde{q} \in \widetilde{Q}_F$. Пусть $\tau \colon Q \to Q/Q^N$ – естественный гомоморфизм, а $\delta \colon Q/Q^N \to \widetilde{Q}_F$ – изоморфизм, описанный выше. Для любого элемента $\overline{q}$ из левого смежного класса qQ^N его действие на инвариантном множестве $\operatorname{Fix} Q^N$ совпадает с действием элемента $\delta(\tau(\overline{q}))$. Но по определению числа вращения оно не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$ и поэтому $\alpha(\overline{q}) = \widetilde{A}(\delta(\tau(\overline{q})))$. Следовательно, $A \colon Q \to \mathbb{R}$, где $A = \widetilde{A}\delta\tau$, и есть искомый гомоморфизм.

Докажем обратное утверждение. Пусть отображение A задает гомоморфизм. Ядро любого гомоморфизма образует подгруппу. По лемме 6.1 $\ker A = Q^N$. Следовательно, $\overline{Q}^N = Q^N$.

Теорема 6.5. *Пусть $q \in K_p^+$. Тогда $\operatorname{Fix} \mathscr{T}_q^N \neq \varnothing$ и справедлива альтернатива: либо $\operatorname{Fix} \mathscr{T}_q^N = \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию $N(\mathscr{T}_q) = \varnothing$); либо $\operatorname{Fix} \mathscr{T}_q^N = N(\mathscr{T}_q) \neq \mathbb{R}$ и подгруппа $\mathscr{T}_q^N$ циклическая.*

Доказательство. Очевидно, что группа $\mathcal{T}_q$ коммутативная. Легко заметить, что $\mathrm{Fix}\,\mathcal{T}_q^N \neq \varnothing$ и, соответственно, $\mathcal{T}_q^N$ является подгруппой.

Если $\mathcal{T}_q^N = \langle e\rangle$, то $\mathrm{Fix}\,\mathcal{T}_q^N = \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e\rangle$. Очевидно, что $\mathcal{T}_q^N \neq \mathcal{T}_q$. По теореме 6.4 отображение $\alpha\colon \mathcal{T}_q \to \mathbb{R}$ задает гомоморфизм. Тогда для любых $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\alpha(q^n \cdot \widehat{q}^{\,-m}) = n\alpha(q) - m\alpha(\widehat{q}) = n\alpha(q) - m.$$

Элемент $\overline{q} \in \mathcal{T}_q^N$ тогда и только тогда, когда существуют $n, m \in \mathbb{Z}$ такие, что $\overline{q} = q^n q^{-m}$ и $n\alpha(q) - m = 0$. Так как $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e\rangle$, то n не равно нулю и, следовательно, $\alpha(q)$ – рациональное число. Пусть $\alpha(q) = m'/n'$ – несократимая дробь. Тогда для любого $\overline{q} = q^n \widehat{q}^{\,-m}$ такого, что $\overline{q} \in \mathcal{T}_q^N$, получим $m = km'$, $n = kn'$ для некоторого k. Следовательно, любой элемент $\overline{q} \in \mathcal{T}_q^N$ имеет представление $\overline{q} = (q^{n'} \widehat{q}^{\,-m'})^k$, т.е. подгруппа $\mathcal{T}_q^N$ циклическая. Из цикличности подгруппы $\mathcal{T}_q^N$ и следует, что $\mathrm{Fix}\,\mathcal{T}_q^N = N(\mathcal{T}_q)$.

Приведем новое доказательство хорошо известного факта [1], [2].

Теорема 6.6. *Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q)$ рационально тогда и только тогда, когда: либо $N(\mathcal{T}_q) \neq \varnothing$ (что эквивалентно условию $\mathrm{Fix}\,\mathcal{T}_q^N \neq \mathbb{R}$); либо $N(\mathcal{T}_q) = \varnothing$ (что эквивалентно условию $\mathrm{Fix}\,\mathcal{T}_q^N = \mathbb{R}$) и $\mathcal{T}_q$ – циклическая группа.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\alpha(q)$ – рациональное число и $\alpha(q) = m/n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, и дробь несократимая.

Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \varnothing$, то необходимость доказана.

Предположим, что $N(\mathcal{T}_q) = \varnothing$. Тогда $\mathcal{T}_q^N = \langle e\rangle$. По теореме 6.4 существует мономорфизм $A\colon \mathcal{T}_q \to \mathbb{R}$, где для любого $\overline{q} \in \mathcal{T}_q$ $A(\overline{q}) = \alpha(\overline{q})$. Так как группа $\mathcal{T}_q$ с двумя образующими q и $\widehat{q}$, а $\alpha(\widehat{q}) = 1$, то в силу рациональности числа $\alpha(q)$ образ мономорфизма A, т.е. $\mathrm{Im}\,A$, является циклической группой. Так как группа $\mathcal{T}_q$ и $\mathrm{Im}\,A$ изоморфны, то и группа $\mathcal{T}_q$ циклическая.

Достаточность. Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \varnothing$, то существует элемент $\overline{q} \in \mathcal{T}_q^N$, $\overline{q} \neq e$. Элемент $\overline{q}$ имеет представление $\overline{q} = q^n \widehat{q}^{\,-m}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда в силу леммы 6.1 $\alpha(\overline{q}) = 0$, т.е.

$$\alpha(\overline{q}) = \alpha(q^n \widehat{q}^{\,-m}) = n\alpha(q) - m = 0,$$

откуда и следует рациональность числа $\alpha(q)$.

Пусть $N(\mathcal{T}_q) = \varnothing$ и $\mathcal{T}_q$ – циклическая группа. Так как $\mathcal{T}_q^N = \langle e\rangle$, то по теореме 6.4 существует мономорфизм $A\colon \mathcal{T}_q \to \mathbb{R}$, где для любого $\overline{q} \in \mathcal{T}_q$, $A(\overline{q}) = \alpha(\overline{q})$. Так как группа $\mathcal{T}_q$ циклическая, то циклической будет и группа $\mathrm{Im}\,A = \langle \alpha(q), \alpha(\widehat{q})\rangle$, откуда и следует рациональность числа $\alpha(q)$.

Следствие 6.2. *Пусть $q \in K_p^+$ и число вращения $\alpha(q)$ рациональное. Если $N(\mathcal{T}_q) \neq \varnothing$, то $\mathcal{T}_q^N \neq \langle e\rangle$ и любой элемент $\overline{q} \in \mathcal{T}_q^N$ имеет представление: при некоторых $n, m \in \mathbb{R}$ $\overline{q} = q^n \widehat{q}^{\,-m}$ и справедливо условие $\alpha(q) = m/n$. Числа m и n взаимно простые тогда и только тогда, когда элемент $\overline{q} = q^n \widehat{q}^{\,-m}$ является образующей циклической группы $\mathcal{T}_q^N$.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 6.5 и 6.6 и схемы доказательства теоремы 6.5.

Для любого $q \in K_p^+$ через A_q будем обозначать гомоморфизм $A_q\colon \mathcal{T}_q \to \mathbb{R}$, где для любого $\overline{q} \in \mathcal{T}_q$ $A_q(\overline{q}) = \alpha(\overline{q})$. (Так как по теореме 6.5 $\operatorname{Fix}\mathcal{T}_q^N \neq \varnothing$, то $\mathcal{T}_q^N$ является подгруппой. Тогда по теореме 6.4 отображение A_q определяет гомоморфизм.)

Следствие 6.3. *Пусть $q \in K_p^+$. Число вращения $\alpha(q)$ рационально тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} A_q$ – циклическая группа.*

Для группы $Q \subseteq K_p^+$ определим новую группу $\mathcal{T}_Q = \langle Q, \widehat{q}\rangle$, где $\widehat{q} = t + 1$. Установим связь между свойствами этих групп.

Предложение 6.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Условия $\overline{Q}^N = Q^N$, $\overline{\mathcal{T}}_Q^N = \mathcal{T}_Q^N$ эквивалентны.*

Доказательство. Если $\overline{Q}^N = Q^N$, то отображение A из теоремы 6.4, определенное для группы Q, является гомоморфизмом и для любых $q_1, q_2 \in Q$ $\alpha(q_1 q_2) = \alpha(q_1) + \alpha(q_2)$. В силу теоремы 6.5 для любого $q \in Q$ отображение A_q также является гомоморфизмом и для любых $q \in Q, m \in \mathbb{Z}$ $\alpha(\widehat{q}^m q) = \alpha(\widehat{q}^m) + \alpha(q) = m + \alpha(q)$. Любой элемент группы $\mathcal{T}_Q$ имеет представление $\widehat{q}^m q$, где $m \in \mathbb{Z}$, а q – некоторый элемент группы Q. Тогда для любых элементов $f_1, f_2 \in \mathcal{T}_Q$, имеющих представление $f_1 = \widehat{q}^m q_1$, $f_2 = \widehat{q}^n q_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, справедлива цепочка соотношений

$$\alpha(f_1 f_2) = \alpha(\widehat{q}^{(m+n)} q_1 q_2) = \alpha(\widehat{q}^{(m+n)}) + \alpha(q_1 q_2) = (m+n) + \alpha(q_1) + \alpha(q_2),$$

откуда и следует, что отображение A из теоремы 6.4, определенное для группы $\mathcal{T}_Q$, также является гомоморфизмом. В таком случае по теореме 6.4 $\overline{\mathcal{T}}_Q^N = \mathcal{T}_Q^N$.

Доказательство в обратную сторону очевидно.

Итак, с помощью числа вращения $\alpha(q)$ для группы $Q \subseteq K_p^+$, удовлетворяющей условию $Q^N = \overline{Q}^N$, можно построить элемент $A \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$, где для любого $q \in Q$ $A(q) = \alpha(q)$.

Заметим, если для группы $Q \in K_p^+$ имеет место условие $Q^N = \overline{Q}^N$ (условие существования гомоморфизма A), то выполнено условие $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ (существование инвариантной меры).

Другой способ построения элементов $A \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$, связанный с существованием инвариантных мер, предложен в работе [7].

Пусть $Q \subseteq K^+$ и существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Тогда можно определить гомоморфизм: $\forall\, q \in Q$

$$\tau_\mu(q) = \begin{cases} \mu([t, q(t))), & \text{если } q(t) > t; \\ 0, & \text{если } q(t) = t; \\ -\mu([q(t), t)), & \text{если } q(t) < t. \end{cases}$$

Определение гомоморфизма τ_μ в силу теоремы о факторгруппе (см. § 5) не зависит от выбора точки $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\ker \tau_\mu = Q^N$ и τ_μ является тривиальным элементом $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $Q = Q^N$.

Мы здесь дадим новое доказательство предложения из [7].

Предложение 6.3. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Если μ и ν две Q-инвариантные σ-конечные борелевские меры, то существует константа $c > 0$ такая, что $\tau_\mu = c\tau_\nu$.*

Доказательство. Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Если $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то предложение следует из условия строгой эргодичности группы Q (см. теорему 3.4). Если $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, то группа Q циклическая и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если факторгруппа Q/Q^N циклическая, то доказательство также очевидно. Пусть факторгруппа Q/Q^N не циклическая. Тогда доказательство следует из строгой эргодичности группы Q (следствие 4.1).

Теорема 6.7. *Пусть задана группа $Q \subseteq K_p^+$. Отображение $A\colon Q \to \mathbb{R}$, где для любого $q \in Q$ $A(q)$ есть число вращения $\alpha(q)$, является гомоморфизмом (т.е. $A \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$) тогда и только тогда, когда существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Более того, найдется константа $c > 0$ такая, что $A = c\tau_\mu$.*

Доказательство. Из существования меры μ по теореме 4.1 следует, что $Q^N = \overline{Q}^N$, т.е. гомоморфизм A корректно определен. Обратное. Если гомоморфизм A корректно определен, то по теореме 6.4 $Q^N = \overline{Q}^N$. Так как группа Q содержится в K_p^+, то $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, что эквивалентно существованию меры.

Докажем последний пункт теоремы. Пусть $Q^N = \langle e \rangle$. Если $\mathbb{P}(Q) \neq \varnothing$, то предложение следует из строгой эргодичности группы Q (см. теорему 3.4) и последнего пункта доказательства теоремы 6.2. Если $\mathbb{P}(Q) = \varnothing$, то группа Q циклическая и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если факторгруппа Q/Q^N циклическая, то доказательство очевидно. Пусть факторгруппа Q/Q^N не циклическая. Тогда группы Q и $\widetilde{Q}_F$ строго эргодичны (см. следствие 4.1 и конструкции доказательства леммы 4.2) с одной и той же мерой μ. Из конструкций доказательства теоремы 6.4 следует, что $A = \widetilde{A}\delta\tau$ ($\widetilde{A}$ – гомоморфизм, определенный в теореме 6.4 для группы $\widetilde{Q}_F$). Так как для группы $\widetilde{Q}_F$ имеют место условия $\widetilde{Q}_F^N = \langle e \rangle$, $\mathbb{P}(\widetilde{Q}_F) \neq \varnothing$, то для нее доказательство следует из предыдущего пункта, т.е. $\widetilde{A} = c\tau_\mu$. Тогда $A = c\tau_\mu\delta\tau$. Вместе с тем для любого элемента $q \in \ker\delta\tau$ имеет место условие $\tau_\mu(q) = 0$, т.е. $\ker\delta\tau \in \ker\tau_\mu$. Поэтому $A = c\tau_\mu$.

Из доказанной теоремы следует, что метрический инвариант в виде Q-инвариантной меры и топологический инвариант в виде числа вращения гомеоморфизма порождают линейно зависимые элементы пространства $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Теорема 6.8. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ с Q-инвариантной σ-конечной борелевской мерой μ. Группа Q строго эргодична тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\tau_\mu$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из теоремы о факторгруппе (см. § 5) и следствия 4.1 получим, что группа Q строго эргодична тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}_F \neq \varnothing$, что эквивалентно условию не цикличности факторгруппы Q/Q^N. Так как $\ker\tau_\mu = Q^N$, то факторгруппа Q/Q^N изоморфна образу $\operatorname{Im}\tau_\mu$, откуда и следует утверждение теоремы.

В работе [7, предложение 2.2] доказывается слабая форма теоремы о строгой эргодичности группы Q.

§ 7. Проективно-инвариантные меры

В этом параграфе для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приводятся результаты по исследованию метрического инварианта в виде проективно-инвариантной меры. Дана эквивалентная формулировка условию существования такого метрического инварианта в виде условия полусопряженности такой группы некоторой подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$ (теорема 7.1). Исследуемый метрический инвариант обобщает понятие инвариантной меры. Описаны структура носителя проективно-инвариантной меры, условия непрерывности этой меры (леммы 7.2, 7.3, теорема 7.2), условия строгой проективной эргодичности группы Q (теорема 7.4). Следуя работе [7], по проективно-инвариантной мере строится гомоморфизм $A_Q \in \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Описана нормальная подгруппа $C = \ker A_Q$ (теорема 7.3). Приводятся достаточные условия топологической сопряженности группы Q подгруппе аффинных преобразований прямой (теоремы 7.5, 7.6). Из исследований по проективно-инвариантной мере следует отметить работу [7], в которой изучены различные критерии существования проективно-инвариантной меры, связанные с метрическими свойствами некоторых выделенных нормальных подгрупп. Там, в частности, даны критерии существования проективно-инвариантной меры для разрешимых групп.

Пусть μ – σ-конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Если q – гомеоморфизм $\mathbb{R}$, сохраняющий ориентацию, то определим меру $.q\mu$: для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ положим $.q\mu(E) = \mu(q^{-1}(E))$. Если $q, \overline{q} \in K^+$, то $(q\overline{q}).\mu = q.(\overline{q}.\mu)$. Заметим, что мера μ является q-инвариантной, если $q.\mu = \mu$.

Следуя работе [7], введем определение.

Определение 7.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Борелевская σ-конечная мера μ называется Q-проективно-инвариантной, если для любого $q \in Q$ существует константа $c(q) > 0$ такая, что $.q\mu = c(q)\mu$.

Если для любого $q \in Q$, $c(q) = 1$, то, очевидно, такая мера является Q-инвариантной.

Если существует Q-проективно-инвариантная мера μ, то отображение $A_Q \colon Q \to \mathbb{R}$, где для любого $q \in Q$ $A_Q(q) = \log c(q)$, определяет гомоморфизм группы Q в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

Предложение 7.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Q-проективно-инвариантная мера μ является Q-инвариантной тогда и только тогда, когда $A_Q = 0$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 7.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Если для конечного интервала $[t_1, t_2]$ существует элемент $q \in Q$ такой, что $q(t_1) = t_1$, $q(t_2) = t_2$ и для любого $t \in]t_1, t_2[$ $q(t) \neq t$, то $]t_1, t_2[\cap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$. Более того, если при этом $A_Q(q) \neq 0$, то $[t_1, t_2] \cap \operatorname{supp} \mu = \varnothing$.*

Доказательство. Первая часть доказательства непосредственно следует из σ-конечности меры μ. Вторая часть доказательства следует из того, что t_1, t_2 – неподвижные точки, а $c(q) \neq 1$.

Пусть $Q \subseteq K^+$. Для любого $q \in Q^N$ определим

$$T_q = \sup\{t : t \in \mathrm{Fix}\langle q\rangle\}, \qquad t_q = \inf\{t : t \in \mathrm{Fix}\langle q\rangle\},$$

и для любого $q \in Q \setminus Q^N$ положим $T_q = t_q = -\infty$.

Лемма 7.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Тогда*:

а) *для любого $q \notin \ker A_Q$ справедливо включение*

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \,]-\infty, t_q[\, \cup \,]T_q, +\infty[\,;$$

б) *если для некоторого $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$ выполняется условие*

$$\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_q, +\infty[\, \neq \varnothing \qquad (\operatorname{supp}\mu \cap \,]-\infty, t_q[\, \neq \varnothing),$$

то для любого $\overline{q} \in \ker A_Q \cap Q^N$ $T_{\overline{q}} = +\infty$ $(t_{\overline{q}} = -\infty)$ и $T_q \in N(\langle q\rangle) \cap N(\langle \overline{q}\rangle)$ $(t_q \in N(\langle q\rangle) \cap N(\langle \overline{q}\rangle))$.

Доказательство. а) Так как $c(q) \neq 1$, то по лемме 7.1 $\mu([t_q, T_q]) = \varnothing$.

б) Пусть $\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_q, +\infty[\, \neq \varnothing$. Так как мера μ является $\overline{q}$-инвариантной, то $\operatorname{supp}\mu \subseteq \operatorname{Fix}\langle\overline{q}\rangle$. Из определения точки T_q следует, что для любого $M > T_q$ $\operatorname{supp}\mu \cap \,]M, +\infty[\, \neq \varnothing$. Следовательно, $\operatorname{Fix}\langle\overline{q}\rangle \cap \,]M, +\infty[\, \neq \varnothing$, т.е. $T_{\overline{q}} = +\infty$. Свойство $T_q \in N(\langle q\rangle) \cap N(\langle\overline{q}\rangle)$ непосредственно следует из того, что $\operatorname{supp}\mu \subseteq \operatorname{Fix}\langle\overline{q}\rangle$ и для любого $\varepsilon > 0$ $\operatorname{supp}\,]T_q, T_q+\varepsilon[\, \neq \varnothing$. Случай, указанный в скобках, доказывается аналогичным образом.

Лемма 7.3. *Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Тогда для любых $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$ справедливо одно из условий*:

а) $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} \neq T_{q_2}$, $\operatorname{supp}\mu \subseteq \,]-\infty, t_{q_1}[$;
б) $t_{q_1} \neq t_{q_2}$, $T_{q_1} = T_{q_2}$, $\operatorname{supp}\mu \subseteq \,]T_{q_1}, +\infty[$;
в) $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} = T_{q_2}$, $\operatorname{supp}\mu \subseteq \,]-\infty, t_{q_1}[\, \cup \,]T_{q_2}, +\infty[$;
г) $t_{q_2} > T_{q_1}$, $t_{q_1}, T_{q_2} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}\mu \cap \,]-\infty, t_{q_1}[\, \neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_{q_2}, +\infty[\, \neq \varnothing$;
д) $t_{q_1} > T_{q_2}$, $t_{q_2}, T_{q_1} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}\mu \cap \,]-\infty, t_{q_2}[\, \neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_{q_1}, +\infty[\, \neq \varnothing$.

Доказательство. а) Пусть $t_{q_1} = t_{q_2}$, $T_{q_1} \neq T_{q_2}$. Для определенности положим, что $T_{q_1} > T_{q_2}$. Предположим, что $\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_{q_2}, +\infty[\, \neq \varnothing$. По лемме 7.1 $T_{q_2} \neq +\infty$ и $\mu([t_{q_1}, T_{q_1}]) = 0$. Но в силу Q-проективно-инвариантности меры μ для любого $\varepsilon > 0$ $\mu(]T_{q_2}, T_{q_2}+\varepsilon[) > 0$. Противоречие. Следовательно, $\operatorname{supp}\mu \cap \,]T_{q_2}, +\infty[\, = \varnothing$.

б) Доказывается аналогично случаю а).

в) Доказательство очевидно.

г) Пусть $t_{q_2} > T_{q_1}$. Предположим, что $t_{q_1} = -\infty$.

Тогда по лемме 7.1 $\mu(]-\infty, T_{q_1}]) = 0$. В силу Q-проективно-инвариантности меры μ должны выполняться условия: $\mu(]-\infty, t_{q_2}[) = 0$; для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\mu(]T_{q_1}, T_{q_1}+\varepsilon[) > 0$. Противоречие. Следовательно, $t_{q_1} \neq -\infty$. Точно также доказывается, что $T_{q_2} \neq +\infty$. Остальные условия следуют из условия Q-проективно-инвариантности меры μ, взаимного расположения точек t_{q_1}, T_{q_1} и свойства а) леммы 7.2.

д) Доказательство аналогично доказательству пункта г). Все остальные случаи нереализуемы в силу Q-проективно-инвариантности меры μ.

Предложение 7.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_q$, такие, что $t_{q_2} > T_{q_1}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда в силу предложения 5.2 для любого $M > 0$ $\operatorname{supp}\mu \cap]-\infty, M[\neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap]M, +\infty[\neq \varnothing$. Из предложения 7.1 и условия $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ следует, что $A_Q \neq 0$. Из условий $A_Q \neq 0$, $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ следует, что $Q^N \setminus \ker A_Q \neq \varnothing$. Если бы не существовало элементов $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, со свойством $t_{q_2} > T_{q_1}$, то по лемме 7.3 выполнялось бы условие б), что в свою очередь приводит к условию $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Полученное противоречие и доказывает наличие элементов q_1, q_2 с нужными свойствами. Обратное утверждение очевидно.

Предложение 7.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ и $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$. Тогда*:

а) *для любого $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$, имеют место условия*: $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$, $\mu(]-\infty, t_q[) = +\infty$, $\mu(]T_q, +\infty[) = +\infty$;

б) *для любого $q \in \ker A_Q \cap Q^N$ имеют место условия $t_q = -\infty$, $T_q = +\infty$.*

Доказательство. а) Этот пункт непосредственно следует из пункта г) леммы 7.3.

б) Этот пункт непосредственно следует из пункта а) доказываемой леммы и пункта б) леммы 7.2.

Предложение 7.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Если для $q \in Q^N$, $q \notin \ker A_Q$, имеют место условия $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$, $\operatorname{supp}\mu \cap]-\infty, t_q[\neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap]T_q, +\infty[\neq \varnothing$, то для любых $t \in]-\infty, t_q[$, $T \in]T_q, +\infty[$ справедливо соотношение*

$$\operatorname{sign}[q(t) - t] = -\operatorname{sign}[q(T) - T].$$

Доказательство. Предположим, что для некоторых $\overline{t} \in]-\infty, t_q[$, $\overline{T} \in]T_q, +\infty[$ выполняется условие $\operatorname{sign}[q(\overline{t}) - \overline{t}] = \operatorname{sign}[q(\overline{T}) - \overline{T}]$. Но в силу определения точек t_q, T_q тогда и для любых $t \in]-\infty, t_q[$, $T \in]T_q, +\infty[$ справедливы условия: $\operatorname{sign}[q(t) - t] = \operatorname{sign}[q(T) - T]$. Для определенности предположим, что $\operatorname{sign}[q(T) - T] = +$. Так как $c(q) \neq 1$, то получим, что $\mu(]t_q - \varepsilon, t_q[) = +\infty$ при некотором $\varepsilon > 0$. Но это противоречит σ-конечности меры μ, что и доказывает предложение.

Предложение 7.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ.*

а) *Если $\mu(]-\infty, 0[) = \mu(]0, +\infty[) = +\infty$, то $Q \setminus Q^N \subseteq \ker A_Q$.*

б) *Если при сколь угодно большом $M > 0$ $\operatorname{supp}\mu \cap]-\infty, -M[\neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap]M, +\infty[\neq \varnothing$ и $\mu(]-\infty, -M[) < +\infty$ или $\mu(]M, +\infty[) < +\infty$, то $Q^N = \ker A_Q$.*

Доказательство. а) Пусть $\mu(]-\infty, 0[) = \mu(]0, +\infty[) = +\infty$. Рассмотрим элемент $q \in Q \setminus Q^N$. Если бы $c(q) \neq 1$, т.е. $q \notin \ker A_Q$, то либо $\mu(]-\infty, 0[) < +\infty$, либо $\mu(]0, +\infty[) < +\infty$. Следовательно, $c(q) = 1$, т.е. $q \in \ker A_Q$.

б) Для любого $\overline{q} \in Q \setminus Q^N$ должно быть $c(\overline{q}) \neq 1$, т.е. $\overline{q} \notin \ker A_Q$, иначе для любого $M > 0$ $\mu(]-\infty, -M[) = \mu(]M, +\infty[) = +\infty$. Следовательно, $\ker A_Q \subseteq Q^N$. Предположим, что существует элемент $q \in Q^N \setminus \ker A_Q$. По свойству а) леммы 7.2 $t_q \neq -\infty$, $T_q \neq +\infty$. Так как $c(q) \neq 1$, то $\mu(]-\infty, t_q[) = \mu(]T_q, +\infty[) = +\infty$. Противоречие. Следовательно, $c(q) = 1$, т.е. $q \in \ker A_Q$.

Для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, с Q-проективно-инвариантной σ-конечной борелевской мерой μ определим подгруппы

$$C = \ker A_Q, \qquad H = \ker A_Q \cap Q^N.$$

Следствие 7.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Если при сколь угодно большом $M > 0$ $\operatorname{supp}\mu \cap {]-\infty, -M[} \neq \varnothing$, $\operatorname{supp}\mu \cap {]M, +\infty[} \neq \varnothing$ и $\mu(]-\infty, -M[) < +\infty$ или $\mu(]M, +\infty[) < +\infty$, то $Q^N = \overline{Q}^N$ и существует Q-инвариантная мера (это эквивалентно условию $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$).*

Доказательство. Так как по предложению 7.5 $Q^N = \ker A_Q$, то мера μ является Q^N-инвариантной, т.е. $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, а это по теореме 4.1 эквивалентно условию существования некоторой Q-инвариантной меры ν.

Замечание 7.1. Пусть выполняются условия следствия 7.1. Если $\mu(]-\infty, 0[) = \mu(]0, +\infty[) = +\infty$, то для любых двух элементов $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, справедливы утверждения в), г) и д) леммы 7.3.

Теорема 7.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Q-проективно-инвариантная мера μ существует тогда и только тогда, когда группа Q полусопряжена подгруппе $.Q$ группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$. Более того, Q-инвариантная мера μ существует (что эквивалентно условию $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$) тогда и только тогда, когда в формулировке теоремы $.Q$ является подгруппой группы сдвигов на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Зафиксируем точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Определим

$$\widetilde{\mu}([\bar{t}, t)) = \begin{cases} \mu([\bar{t}, t)), & t > \bar{t}, \\ 0, & t = \bar{t}, \\ -\mu([t, \bar{t})), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Каждому элементу $q \in Q$ поставим в соответствие аффинное преобразование $.q(t) = h_q + c(q)t$, где $h_q = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})))$, а коэффициент $c(q)$ из определения Q-проективно-инвариантности меры μ. Через $.Q$ обозначим группу аффинных преобразований, определенных таким образом. Отображение $\eta^{\#} \colon Q \to .Q$, где $\eta^{\#}(q) = .q$, определяет эпиморфизм.

Определим отображение $\eta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где для любого $t \in \mathbb{R}$ $\eta(t) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, t))$. Тогда для любых $q \in Q$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(q(t)) &= \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(t))) = \widetilde{\mu}([\bar{t}, q(\bar{t})) + \widetilde{\mu}([q(\bar{t}), q(t))) \\ &= h_q + c(q)\eta(t) = .q(\eta(t)), \end{aligned}$$

откуда и следует, что группа Q будет полусопряжена группе $.Q$.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть существуют подгруппа $.Q$ группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$, монотонное отображение $\eta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, эпиморфизм $\eta^{\#} \colon Q \to .Q$ такие, что группа Q полусопряжена группе $.Q$, и множество $\eta(\mathbb{R})$ состоит из более чем одной точки. Для любых $\bar{t}, t \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \leqslant t$, определим функцию $\mu([\bar{t}, t)) = \eta(t) - \eta(\bar{t})$. Так как мера определяется своими значениями на полуинтервалах вида $[a,b)$, то таким образом определенная μ задает нетривиальную меру на $\mathbb{R}$.

Для любого $q \in Q$ имеет место перестановочное соотношение $\eta \cdot q = .q \cdot \eta$, где $.q = \eta^{\#}(q)$. Поэтому

$$\mu\big([q(\bar{t}), q(t))\big) = |\eta(q(\bar{t})) - \eta(q(t))| = |.q(\eta(\bar{t})) - .q(\eta(t))| \\ = c(q)|\eta(\bar{t}) - \eta(t)| = c(q)\mu\big([\bar{t}, t)\big),$$

откуда и следует Q-проективно-инвариантность меры μ.

Наконец, проведем доказательство последнего абзаца. Если мера μ является Q-инвариантной, то по предложению 7.1 $A_Q = 0$ и поэтому $.Q$ является подгруппой группы сдвигов на $\mathbb{R}$.

Пусть $.Q$ является подгруппой группы сдвигов. Тогда мера $\mu([\bar{t},t))=\big|\eta(\bar{t})-\eta(t)\big|$, определенная выше, такова, что для всех $q \in Q$ $\mu([q(\bar{t}), q(t))) = \mu([\bar{t}, t))$, т.е. она является Q-инвариантной.

Следствие 7.2. *Пусть задана группа $Q \in K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная мера μ. Тогда C и H – нормальные подгруппы группы Q, а факторгруппа C/H изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $H = \ker \eta^{\#}$, где $\eta^{\#}$ – гомоморфизм из теоремы* 7.1.

Доказательство. Нормальность подгруппы C следует из определения группы $C = \ker A_Q$. Очевидно, что мера μ является C-инвариантной. Из конструкции группы C и H следует, что $C^N = H$. Из C-инвариантности меры μ следует, что $\overline{C}^N = C^N$. Тогда утверждение о факторгруппе C/H следует из теоремы 2.1. С другой стороны, из C-инвариантности меры μ и условия $C^N = H$ следует, что для любых $q \in H$ и только для них выполняются условия $c(q) = 1$, $h_q = 0$, откуда и следует $H = \ker \eta^{\#}$ (определение $c(q)$, h_q, $\eta^{\#}$ смотри в доказательстве теоремы 7.1).

Замечание 7.2. Отображение η и Q-проективно-инвариантная мера μ непрерывны одновременно.

Теорема 7.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$, то мера μ непрерывная и группа Q топологически полусопряжена группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$, то не существует Q-инвариантной меры и, соответственно, $A_Q \neq 0$. По предложению 7.2 существуют элементы $q_1, q_2 \in Q^N$, $q_1, q_2 \notin \ker A_Q$, для которых $t_{q_2} > T_{q_1}$. Группа Q полусопряжена группе аффинных преобразований $.Q$ (смотри теорему 7.1), причем элементы $.q_1(t) = c(q_1)t + h_{q_1}$, $.q_2(t) = c(q_2)t + h_{q_2}$ соответствуют элементам q_1, q_2. Очевидно, что $c(q_1) \neq 1$, $c(q_2) \neq 1$. Определим подгруппу $.C = \{.q : .q \in {}_*Q, c(.q) = 1\}$.

Рассмотрим случай, когда элементы $.q_1$, $.q_2$ не коммутируют. Тогда элемент $.\overline{q} = .q_1 \cdot .q_2 \cdot .q_1^{-1} \cdot .q_2^{-1}$ нетривиален и $\operatorname{Fix}(.\overline{q}) = \varnothing$, т.е. $\overline{q} \in .C$. Более того, несложно заметить, что группа $.C$ не циклическая. Заметим, что группа $(\eta^{\#})^{-1}(.C)$ совпадает с группой C. Тогда факторгруппа C/C^N (напомним, что $C^N = H$) также будет не циклической, а мера μ C-инвариантной. По следствию 4.1 мера μ является непрерывной.

Случай, когда нетривиальные элементы $.q_1$, $.q_2$ коммутируют, не реализуем, так как в этом случае $t_{q_2} = T_{q_1}$, что противоречит условию $t_{q_2} > T_{q_1}$.

Следствие 7.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^{+}$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если* $\operatorname{Fix} Q^{N} = \varnothing$, *то $H \neq C$, $C \neq Q$, а факторгруппа C/H не циклическая.*

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 7.2 был построен элемент .$\overline{q} \in \ker A_{Q} \setminus Q^{N}$, откуда и следует условие $H \neq C$. Условие $C \neq Q$ следует из предложения 7.2. Не цикличность факторгруппы C/H была установлена в ходе доказательства теоремы 7.2.

Определим множества

$$\begin{aligned} Q^{N}_{+\infty} &= \{q : q \in Q^{N}, \sup\{t : q(t) = t\} = +\infty\}, \\ Q^{N}_{-\infty} &= \{q : q \in Q^{N}, \inf\{t : q(t) = t\} = -\infty\}, \end{aligned} \qquad Q^{N}_{\infty} = Q^{N}_{+\infty} \cap Q^{N}_{-\infty}.$$

Лемма 7.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^{+}$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если $H \neq C$, то $Q^{N}_{\infty} = Q^{N}_{-\infty} = Q^{N}_{+\infty} = H$. Более того, $Q \setminus Q^{N} \neq \varnothing$ и $Q \setminus Q^{N} \subseteq C$.*

Доказательство. Пусть $H \neq C$. Заметим, что мера μ является C-инвариантной и $C^{N} = H$. Тогда первая часть доказываемого утверждения следует из леммы 2.3. Так как $C \setminus H \neq \varnothing$, то $C \setminus H \subseteq Q \setminus Q^{N}$ и по утверждению a) предложения 7.5 выполняется условие $Q \setminus Q^{N} \subseteq C$.

Теорема 7.3. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^{+}$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Тогда $H \subseteq C \subseteq Q$, H и Q – нормальные подгруппы группы Q, факторгруппа Q/H изоморфна группе аффинных преобразований $\mathbb{R}$, а факторгруппы C/H, Q/C изоморфны подгруппам аддитивной группы $\mathbb{R}$. Более того, $C^{N} = H$, $\operatorname{Fix} C^{N} \neq \varnothing$, для любого $t \in \operatorname{Fix} C^{N}$ множество $\boldsymbol{P}(C(t))$ не зависит от t, обозначается через $\mathbb{P}_{F}(C)$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *либо $\mathbb{P}_{F}(C) = \varnothing$ и факторгруппа C/H циклическая;*
2) *либо $\mathbb{P}_{F}(C)$ является совершенным нигде не плотным множеством и факторгруппа C/H не циклическая, но не более чем счетна;*
3) *либо $\mathbb{P}_{F}(C) = \mathbb{R}$ (что эквивалентно каждому из условий $H = \langle e \rangle$, $\operatorname{Fix} C^{N} = \mathbb{R}$), факторгруппа $C/H = C$ не циклическая, а группа Q топологически сопряжена группе аффинных преобразований прямой. Множества $N(C)$, $\operatorname{Fix} C^{N}$, $\mathbb{P}_{F}(C)$ являются Q-инвариантными. Если $\mathbb{P}_{F}(C) \neq \varnothing$, то $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{P}_{F}(C)$.*

Доказательство. Нормальность подгрупп C, H и утверждение о факторгруппе C/H доказана в следствии 7.2. Утверждение о факторгруппе Q/C непосредственно следует из определения группы $C = \ker A_{Q}$, $A_{Q} \in \operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Утверждение о факторгруппе Q/H следует из теоремы 7.1 и условия $H = \ker \eta^{\#}$. Пункты 1), 2) и условие $\operatorname{Fix} C^{N} = \mathbb{R}$ из пункта 3) следуют из леммы 4.2, примененной к группе C.

Докажем последнее утверждение сформулированной теоремы. Если $t \in N(C)$, то найдется элемент $q \in C$, для которого $q(t) = t$. Покажем, что для любого элемента $\overline{q} \in Q$ выполняется условие $\overline{q}(t) \in N(C)$. Построим элемент $\widetilde{q} = \overline{q} \cdot q \cdot (\overline{q})^{-1}$, принадлежащий C. Очевидно, что $\widetilde{q}(\overline{q}(t)) = \overline{q}(t)$, и поэтому $\overline{q}(t) \in N(C)$. Следовательно, множество $N(C)$ является Q-инвариантным. Пусть

$t \in \operatorname{Fix} C^N$. Тогда для любого $q \in C^N$ выполняется условие $q(t) = t$. Предположим, что для некоторых $q \in C^N$, $\overline{q} \in Q$, $t \in \operatorname{Fix} C^N$ имеет место условие $q(\overline{q}(t)) \neq \overline{q}(t)$. Очевидно, что элемент $\widetilde{q} = (\overline{q})^{-1} \cdot q \cdot \overline{q}$ принадлежит C^N, но вместе с тем $\widetilde{q}(t) \neq t$. Противоречие. Следовательно, множество $\operatorname{Fix} C^N$ является Q-инвариантным. Пусть $\mathbb{P}_F(C) \neq \varnothing$. Так как мера μ является C-инвариантной, то по лемме 4.3 $\operatorname{supp} \mu \subseteq \operatorname{Fix} C^N$. Образуем Q-инвариантное замкнутое множество $\boldsymbol{P}(Q(\mathbb{P}_F(C)))$ (множество предельных точек орбитального множества $Q(\mathbb{P}_F(C))$). Очевидно, что $\mathbb{P}_F(C) \subseteq \boldsymbol{P}(Q(\mathbb{P}_F(C)))$. Покажем справедливость обратного включения. Предположим, что обратное включение неверно. Тогда найдется открытая окрестность W и элемент $q \in Q$ такие, что $W \cap \mathbb{P}_F(C) \neq \varnothing$, $q(W) \cap \mathbb{P}_F(C) = \varnothing$, $q(W) \cap \boldsymbol{P}(Q(\mathbb{P}_F(C))) \neq \varnothing$. По лемме 3.6 $\mu(W) > 0$, и, следовательно, $\mu(q(W)) > 0$. Но это противоречит лемме 3.8. Следовательно, множество $\mathbb{P}_F(C)$ является Q-инвариантным. Так как мера μ является C-инвариантной, то по следствию 4.1 $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{P}_F(C)$.

Остается доказать последнее утверждение пункта 3). Так как в этом случае мера μ непрерывна и $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R}$, то отображение η из теоремы 7.1 является гомеоморфизмом, откуда и следует последнее утверждение пункта 3).

Сформулируем результат, аналогичный следствию 4.1 и связывающий структуру множества неподвижных точек с условием строгой проективной эргодичности. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 7.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ и либо $\operatorname{Fix} Q^N$ состоит из более чем одной точки, либо $\operatorname{Fix} Q^N = N(Q)$. Тогда такая группа Q не является строго проективно-эргодичной.*

Доказательство. По теореме 4.1 условие $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ эквивалентно существованию Q-инвариантной σ-конечной борелевской меры μ. Рассмотрим два случая.

Случай первый: $Q \neq Q^N$. Определим монотонно возрастающее отображение $\widehat{\eta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу: для любого $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\eta}(t) = \exp\bigl(\widetilde{\mu}([0,t))\bigr)$, где

$$\widetilde{\mu}\bigl([\overline{t},t)\bigr) = \begin{cases} \mu\bigl([\overline{t},t)\bigr), & t \geqslant \overline{t}, \\ -\mu\bigl([t,\overline{t})\bigr), & t < \overline{t}. \end{cases}$$

В силу условия $Q \neq Q^N$ функция $\widehat{\eta}(t)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \to -\infty} \widehat{\eta}(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \widehat{\eta}(t) = +\infty.$$

Определим коммутативную группу аффинных преобразований

$$.\widehat{Q} = \bigl\{ .\widehat{q} = at : \exists\, q \in Q,\ a = \widehat{\eta}(q(0)) \bigr\}$$

и эпиморфизм $\widehat{\eta}^{\#}\colon Q \to .\widehat{Q}$ по правилу: для любого $q \in Q$, $\widehat{\eta}^{\#}(q) = .\widehat{q}$, где $.\widehat{q} = at$, $a = \widehat{\eta}(q(0))$. В силу условия $Q \neq Q^N$ группа $.\widehat{Q}$ не тривиальная. Простая проверка показывает, что группа Q полусопряжена нетривиальной группе $.\widehat{Q}$, не являющейся группой сдвигов (с монотонным отображением $\widehat{\eta}$ и эпиморфизмом $\widehat{\eta}^{\#}$). Тогда по теореме 7.1 существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера $\widehat{\mu}$. Более того, эта мера не является Q-инвариантной. Следовательно, группа Q имеет хотя бы одну Q-инвариантную меру μ и одну Q-проективно-инвариантную (не являющуюся инвариантной) меру $\widehat{\mu}$. Следовательно, группа Q не является проективно строго эргодичной.

Случай второй: $Q = Q^N$. Если множество $\mathrm{Fix}\, Q^N$ состоит из более чем одной точки, то, выбрав две из них t_1 и t_2, определим меры: для любого борелевского множества $B \in \mathscr{B}$

$$\mu_1(B) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, t_1 \in B, \\ 0, & \text{если}\, t_1 \notin B, \end{cases} \qquad \mu_2(B) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, t_2 \in B, \\ 0, & \text{если}\, t_2 \notin B. \end{cases}$$

Очевидно, что $\mu_1 \neq \mu_2$, но вместе с тем эти меры являются Q-инвариантными, что и доказывает утверждение леммы.

Пусть множество $\mathrm{Fix}\, Q^N$ состоит из одной точки. Легко заметить, что в этом случае группа Q коммутативная. Для определенности будем полагать, что множество $\mathrm{Fix}\, Q^N$ совпадает с точкой 0. Очевидно, что полупрямые $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ являются Q-инвариантными множествами. Рассмотрим ограничение элементов группы Q на полуось $]0, +\infty[$. Они образуют группу Q^+. Пусть $\theta\colon\ ]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ – произвольное монотонное возрастающее непрерывное отображение, образ которого совпадает со всем $\mathbb{R}$. Образуем группу $\widehat{Q}$ гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, по правилу:

$$\widehat{Q} = \bigl\{\widehat{q} : \exists\, \overline{q} \in Q^+,\ \widehat{q} = \theta \overline{q} \theta^{-1}\bigr\}.$$

Очевидно, что для группы $\widehat{Q}$ выполняется условие $N(\widehat{Q}) = \varnothing$. Тогда по теореме 3.7 для нее существует $\widehat{Q}$-инвариантная σ-конечная борелевская мера $\widehat{\mu}$. Определим монотонно возрастающее непрерывное отображение $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\eta(t) = \begin{cases} \exp\bigl(\widetilde{\mu}([0, \theta(t)))\bigr), & \text{если}\, t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если}\, t < 0, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{\mu}([0, t)) = \begin{cases} \widehat{\mu}\bigl([0, t)\bigr), & t \geqslant 0, \\ -\widehat{\mu}\bigl([t, 0)\bigr), & t < 0. \end{cases}$$

Образуем коммутативную группу аффинных преобразований

$$.Q = \bigl\{.q = at : q \in Q, a = \eta(q(\theta^{-1}(0)))\bigr\}$$

и определим эпиморфизм $\eta^{\#}\colon Q \to .Q$ по правилу: для любого $q \in Q$, $\eta^{\#}(q) = .q$, где $.q = at$, $a = \eta(q(\theta^{-1}(0)))$. Очевидно, что группа $.Q$ нетривиальная. Простая проверка показывает, что группа q полусопряжена нетривиальной группе $.Q$ аффинных преобразований, не являющейся группой сдвигов. Тогда по теореме 7.1 существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Более того, эта мера не является Q-инвариантной. С другой стороны, определим новую меру $\widetilde{\mu}$, сосредоточенную в точке 0. Очевидно, что мера $\widetilde{\mu}$ является Q-инвариантной и поэтому $\mu \neq \widetilde{\mu}$. Следовательно, группа Q не является строго проективно-эргодичной.

Теорема 7.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathrm{Fix}\, Q^N = \varnothing$;
б) $H \neq C$ *и* $C \neq Q$;
в) *факторгруппа* Q/H *не коммутативная*;
г) *группа* Q *является строго проективно-эргодичной, а мера* μ *непрерывной.*

Доказательство. Докажем эквивалентность условий а) и б). По следствию 7.3 из а) следует б). Пусть выполняются условия б). По лемме 7.4 из условия $H \neq C$ следует, что $Q \setminus Q^N \neq \varnothing$ и $Q \setminus Q^N \subseteq C$. Тогда $\mathrm{Fix}\, Q^N = \varnothing$, иначе из леммы 2.3 следовало бы, что $Q^N = Q^N_\infty$ и, соответственно, $C = Q$. Пусть справедливо условие а) или эквивалентное ему условие б).

Эквивалентность условий б) и в) очевидна.

Покажем, что из условия а) следует г). Предположим, что $\overline{\mu}$ – произвольная Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера. Для этой меры можем также определить гомоморфизм $\overline{A}_Q$, подгруппы $\overline{C} = \ker \overline{A}_Q$, $\overline{H} = \ker \overline{A}_Q \cap Q^N$. По следствию 7.3 из условия а) следует, что $\overline{H} \neq \overline{C}$ и $\overline{C} \neq Q$. Из леммы 7.4 и условий $\overline{H} \neq \overline{C}$, $H \neq C$ следует, что $Q^N_\infty = \overline{H} = H$, $Q \setminus Q^N \neq \varnothing$, $Q \setminus Q^N \subseteq C$, $Q \setminus Q^N \subseteq \overline{C}$. В таком случае $C = \overline{C} = Q^N_\infty \cup (Q \setminus Q^N)$. По следствию 7.3 факторгруппа C/H не циклическая. Меры $\mu, \overline{\mu}$ являются C-инвариантными, а по следствию 4.1 группа C строго эргодична. Условие строгой проективной эргодичности группы Q следует из строгой эргодичности группы C, а непрерывность меры μ следует из теоремы 7.2.

Остается показать, что из условия г) следует а). Но это следует из леммы 7.5.

Следствие 7.4. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если $C = \langle e \rangle$, то $\mathrm{Fix}\, Q^N \neq \varnothing$, что эквивалентно существованию инвариантной меры.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 7.4.

Теорема 7.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Группа Q минимальна тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*:

1) $C \neq \langle e \rangle$ *и* $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$;
2) $C = \langle e \rangle$ *и* $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть группа Q минимальна. Покажем, что из минимальности группы Q следует, что $H = \langle e \rangle$. Действительно, из условия $H \neq \langle e \rangle$ следует, что $\mathrm{Fix}\, H \neq \mathbb{R}$. Но $\mathrm{Fix}\, C^N = \mathrm{Fix}\, H$ является замкнутым множеством, а по теореме 7.3 и Q-инвариантным. Но условие $\mathrm{Fix}\, C^N \neq \mathbb{R}$ противоречит минимальности группы Q. Следовательно, $H = \langle e \rangle$.

Предположим, что $C \neq \langle e \rangle$. Тогда $C \neq H$. Если $Q = C$, то из условия минимальности группы $Q = C$ следует, что $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$ и доказательство следует из пункта 3) теоремы 7.3. Если $Q \neq C$, то из теоремы 7.4 и следствия 7.3 следует нецикличность факторгруппы C/H. В таком случае $\mathbb{P}_F(C) \neq \varnothing$. Из Q-инвариантности множества $\mathbb{P}_F(C)$ и минимальности группы Q следует, что $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$.

Если $C = \langle e \rangle$, то по следствию 7.4 $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Тогда из леммы 4.2 в силу минимальности группы Q следует, что $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть выполняются предположения 1). Из условия $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$ и леммы 4.2 следует, что $\operatorname{Fix} C^N = \mathbb{R}$ и C-орбита любой точки $t \in \operatorname{Fix} C^N$ всюду плотна в $\mathbb{R}$. Очевидно, что Q-орбита любой точки $t \in \mathbb{R}$ тем более будет плотна в $\mathbb{R}$. Пусть выполняются предположения 2). Из условия $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$ и леммы 4.2 следует, что $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ и Q-орбита любой точки $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ всюду плотна в $\mathbb{R}$.

Следствие 7.5. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если группа Q минимальна, то $H = \langle e \rangle$.*

Теорема 7.6. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$, для которой существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ. Если группа Q минимальная, то мера μ непрерывная и группа Q топологически сопряжена группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований.*

Доказательство. По теореме 7.5 возникают два случая:

1) $C \neq \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(C) = \mathbb{R}$;
2) $C = \langle e \rangle$ и $\mathbb{P}_F(Q) = \mathbb{R}$.

Если выполняется случай 1), то доказательство следует из пункта 3) теоремы 7.3. Если выполняется случай 2), то для такой группы $N(Q) = \varnothing$ и доказательство следует из теоремы 3.6.

Если Q – нетривиальная группа класса $(\mathscr{A})$, т.е. $N(Q) = \varnothing$, то существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская непрерывная мера μ, и элемент τ_μ всегда определяет нетривиальный элемент из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Если Q – группа класса $(\mathscr{B})$, т.е. $N(Q) \neq \varnothing$, $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, то существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ, однако в случае $Q^N = Q$ гомоморфизм τ_μ тривиальный. Вместе с тем, в этом случае могут существовать Q-проективно-инвариантные σ-конечные борелевские меры μ, для которых A_Q определяет нетривиальный элемент из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

Если Q – группа класса $(\mathscr{C})$, т.е. $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$ и существует Q-проективно-инвариантная σ-конечная борелевская мера μ, то A_Q определяет нетривиальный элемент из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$.

§ 8. Группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, класса $\mathscr{P}$. Коммутативные группы

В этом параграфе изучаются свойства групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, не содержащих свободных подполугрупп (групп класса $\mathscr{P}$) и групп субэкспоненциального роста (групп класса $\mathscr{L}$) [4]–[6]. Напомним, что группа класса $\mathscr{P}$ – это такая группа, которая не имеет свободных подполугрупп с более чем одной образующей. Под свободной полугруппой мы понимаем такую полугруппу, в которой нет соотношений вида $G_1 = G_2$, где G_1 и G_2 – нетривиально тождественные произведения положительных степеней образующих. Очевидно, что $\mathscr{L} \in \mathscr{P}$, а коммутативные группы относятся к группам класса $\mathscr{L}$. Существуют примеры конечнопорожденных групп, которые не являются аменабельными [3], [5], поэтому не принадлежат классу $\mathscr{L}$. Вместе с тем в работе [3] построена группа, которая не принадлежит классу $\mathscr{P}$, но является аменабельной. В той же работе [3, лемма 3.1] приводится важный критерий того, что группа не принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Здесь для групп класса $\mathscr{P}$ уточняется взаиморасположение неподвижных точек произвольных двух элементов группы (лемма 8.1), даются различные критерии существования инвариантной меры (теоремы 8.1–8.4) для групп класса $\mathscr{P}$. В частности, теорема 8.1 является обобщением на группы класса $\mathscr{P}$ предложения 3.1 работы [7] о существовании инвариантной меры для коммутативных групп, содержащих элемент без неподвижной точки.

Лемма 8.1. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$ *класса* $\mathscr{P}$. *Тогда*:

1) *если для* $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$, $t_1, t_2 \in N(\langle q_1\rangle)$ $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_1\rangle) = \varnothing$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2\rangle) \neq \varnothing$, *то* $t_1, t_2 \in N(\langle q_2\rangle)$ *и* $t_1, t_2 \in \boldsymbol{P}(N(\langle q_2\rangle) \cap]t_1, t_2[)$;
2) *если для* $\overline{q} \in Q^N$, $\overline{t} = \sup\{t : t \in N(\langle \overline{q}\rangle)\} < +\infty$ $(\overline{t} = \inf\{t : t \in N(\langle \overline{q}\rangle) > -\infty)$, *то для любого* $q \in Q^N$ $\overline{t} \in N(\langle q\rangle)$. *Более того, если* $N(\langle q\rangle) \cap]\overline{t}, +\infty[\neq \varnothing$ $\big(N(\langle q\rangle) \cap]-\infty, \overline{t}[\neq \varnothing\big)$, *то* $\overline{t} \in \boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle) \cap]\overline{t}, +\infty[\big)$ $\big(\overline{t} \in \boldsymbol{P}(N(\langle q\rangle) \cap]-\infty, \overline{t}[)\big)$.

Доказательство. 1) Докажем от противного. Пусть $t_1, t_2 \in N(\langle q_1\rangle)$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_1\rangle) = \varnothing$, $]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2\rangle) \neq \varnothing$ и для определенности $t_1 \notin N(\langle q_2\rangle)$. Рассмотрим точку $\overline{t} = \inf\{t : t \in]t_1, t_2[\cap N(\langle q_2\rangle)\}$. Из замкнутости множества $N(\langle q_2\rangle)$ следует, что $\overline{t} \in N(\langle q_2\rangle)$. Очевидно, что $[t_1, \overline{t}[\cap N(\langle q_2\rangle) = \varnothing$, $]t_1, t] \cap N(\langle q_1\rangle) = \varnothing$. Тогда [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими. Противоречие. Следовательно, $t_1 \in N(\langle q_2\rangle)$.

Предположим, что $t_1 \notin \boldsymbol{P}(N(\langle q_2\rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Рассмотрим точку $\overline{t}$, определенную выше. Так как $t_1 \notin \boldsymbol{P}(N(\langle q_2\rangle) \cap]t_1, t_2[)$, то $\overline{t} > t_1$. Тогда для некоторой степени q_2^n найдется точка $\widetilde{t} \in]t_1, \overline{t}[$ такая, что $\widetilde{t} = \sup\{t : q_1(t) = q_2^n(t), t \in]t_1, \overline{t}[\}$. Очевидно, что $\widetilde{t} < \overline{t}$ и $q_1(\widetilde{t}) = q_2^n(\widetilde{t})$. Определим элемент $q_1^{-1} \cdot q_2^n$. Очевидно, что для этого элемента $q_1^{-1} q_2^n(\widetilde{t}) = \widetilde{t}$, и для любых $t \in]\widetilde{t}, \overline{t}]$ $q_1^{-1} q_2^n(t) \neq t$. Тогда в интервале $[\widetilde{t}, \overline{t}[$ нет неподвижных точек для q_2, а в интервале $]\widetilde{t}, \overline{t}]$ нет неподвижных точек для элемента $q_1^{-1} q_2^n$. Следовательно, [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Поэтому должно выполняться условие $t_1 \in \boldsymbol{P}(N(\langle q_2\rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Точно так же доказывается, что $t_2 \in N(\langle q\rangle)$, $t_2 \in \boldsymbol{P}(N(\langle q_2\rangle) \cap]t_1, t_2[)$. Первая часть утверждения доказана.

2) Пусть $\overline{q} \in Q^N$ и $\overline{t} = \sup\{t : t \in N(\langle \overline{q}\rangle)\} < +\infty$. Рассмотрим произвольное $q \in Q^N$. Если $q = e$, то доказательство очевидно. Пусть $q \in Q^N \setminus e$. Предположим, что $\widetilde{t} < \overline{t}$, где $\widetilde{t} = \sup\{t : t \in N(\langle q\rangle)\}$. Тогда найдутся $n \in \mathbb{Z}$, $t' \in]\overline{t}, +\infty[$ такие, что $q^{-n}(t') = q(t')$ и для любого $t \in [\overline{t}, t'[$ $q^{-n}(t) \neq q(t)$. Для элемента $\overline{q}$ на интервале $]\overline{t}, t']$ нет неподвижных точек, а на интервале $[\overline{t}, t'[$ нет неподвижных точек для элемента $q^{-1}q^{-n}$. В таком случае [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Следовательно, должно выполняться условие $\widetilde{t} \geqslant \overline{t}$.

Предположим, что $\overline{t} \notin N(\langle q\rangle)$. Пусть $t' = \inf\{t : t \in N(\langle q\rangle), t > \overline{t}\}$. На интервале $[\overline{t}, t'[$ нет неподвижных точек для q. На интервале $]\overline{t}, t']$ нет неподвижных точек для $\overline{q}$. В таком случае [3, лемма 3.1] группа Q содержит свободную подполугруппу с двумя образующими, чего не может быть. Следовательно, $\overline{t} \in N(\langle q\rangle)$.

Покажем, что в случае $N(\langle q\rangle) \cap]\overline{t}, +\infty[\neq \varnothing$, $\overline{t} \in \boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle) \cap]\overline{t}, +\infty[\big)$. Докажем от противного. Пусть $t' \in N(\langle q\rangle)$, $t' > \overline{t}$ и на интервале $]\overline{t}, t'[$ нет подвижных точек для q. Тогда найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что элемент $q^n \cdot (\overline{q})^{-1}$ имеет неподвижные точки на интервале $]\overline{t}, t'[$ и, более того, $\widetilde{t} < t'$, $\widetilde{t} = \sup\{t : t \in]\overline{t}, t'[\,,\ q^n(\overline{q})^{-1}(t) = t\}$. Но это противоречит свойству 1 леммы 8.1. Следовательно, $\overline{t} \in \boldsymbol{P}\big(N(\langle q\rangle) \cap]\overline{t}, +\infty[\big)$.

Случай $\overline{t} = \inf\{t : t \in N(\langle\overline{q}\rangle)\} > -\infty$ доказывается аналогичным образом.

Следствие 8.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathscr{P}$. Тогда*

1) *для любых $q_1, q_2 \in Q^N$ $\ N(\langle q_1\rangle) \cap N(\langle q_2\rangle) \neq \varnothing$;*
2) *для группы Q справедливо условие $\overline{Q}^N = Q^N$.*

Доказательство непосредственно следует из пункта 1) леммы.

Предложение 8.1. *Пусть задана коммутативная группа $Q \subseteq K^+$. Тогда*

1) *группа Q относится к классу $\mathscr{P}$;*
2) *для любого $q \in Q$ множество $N(\langle q\rangle)$ инвариантно относительно группы Q.*

Доказательство. 1) Очевидно, что всякая коммутативная группа является группой субэкспоненциального роста. В таком случае она не может содержать свободную подполугруппу с двумя образующими, иначе была бы группой экспоненциального роста. Следовательно, $Q \in \mathscr{P}$.

2) Пусть $q_1, q_2 \in Q$ – произвольные элементы. Покажем, что $N(\langle q_1\rangle)$ инвариантно относительно q_2. Если $N(\langle q_1\rangle) = \varnothing$, то доказательство очевидно. Пусть $N(\langle q_1\rangle) \neq \varnothing$ и $\overline{t} \in N(\langle q_1\rangle)$. Рассмотрим точку $q_2(\overline{t})$. Тогда $q_1(q_2(\overline{t})) = q_2(q_1(\overline{t})) = q_2(\overline{t})$, откуда и следует, что $q_2(\overline{t}) \in N(\langle q_1\rangle)$. Так как $q_1, q_2 \in Q$ – произвольные элементы, то отсюда следует Q-инвариантность множества $N(\langle q\rangle)$ для любого $q \in Q$.

Теорема 8.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathscr{P}$. Если $Q \neq Q^N$, то* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ *(что эквивалентно существованию Q-инвариантной σ-конечной борелевской меры μ).*

Доказательство. В случае $Q^N = \langle e\rangle$ $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ и доказательство очевидно.

Пусть $Q^N \neq \langle e\rangle$. Рассмотрим элемент $q \in Q \setminus Q^N$. Выберем точку $\overline{t} = 0$. Точками орбиты $\langle q\rangle(\overline{t})$, т.е. точками последовательности $\{q^k(\overline{t})\}_{k\in\mathbb{Z}}$, которая не имеет предельных точек, прямая $\mathbb{R}$ разбивается на счетное число интервалов $\{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Действие элемента q есть перекладывание интервалов $\{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ на один интервал влево или вправо. Зафиксируем интервал Δ_0. По следствию 8.1 $\overline{Q}^N = Q^N$. Тогда по лемме 2.4 $\lambda(\overline{\Delta}_0) < +\infty$. Более того, очевидно, что $\lambda(\overline{\Delta}_0) \leqslant \operatorname{mes}(\overline{\Delta}_0)$. В таком случае для любого $\overline{q} \in Q^N$ $\ N(\langle\overline{q}\rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$.

Пусть $q_1, q_2 \in Q^N$ – произвольные элементы. Если один из элементов q_1 или q_2 равен e, то очевидно, что $N(\langle q_1\rangle) \cap N(\langle q_2\rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$. Если $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$, то по указанному выше свойству $N(\langle q_1\rangle) \cap \overline{\Delta} \neq \varnothing$, $N(\langle q_2\rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$, а по свойству 1) леммы 8.1 следует, что

$$N(\langle q_1\rangle) \cap N(\langle q_2\rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing.$$

В таком случае система множеств $\{N(\langle\overline{q}\rangle) \cap \overline{\Delta}_0\}_{\overline{q}\in Q^N}$ образует центрированную систему компактных множеств и в силу теоремы Тихонова

$$\bigcap_{\overline{q}\in Q^N} N(\langle\overline{q}\rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing,$$

откуда и следует, что $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Теорема 8.1 обобщает предложение 3.1 работы [7]. Сформулируем результат, который для групп класса $\mathscr{P}$ усиливает теорему 4.2.

Теорема 8.2. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$ *класса* $\mathscr{P}$. $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ *тогда и только тогда, когда существует конечный замкнутый интервал* $\overline{\Delta}_0$ *такой, что для любого* $q \in Q^N \setminus e$ $N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$.

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность Для любых $q_1, q_2 \in Q^N \setminus e$ из условий $N(\langle q_1 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$, $N(\langle q_2 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$ в силу пункта 1) леммы 8.1 следует $N(\langle q_1 \rangle) \cap N(\langle q_2 \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing$. В таком случае $\left\{N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0\right\}_{q \in Q^N}$ образует центрированную систему компактных множеств и в силу теоремы Тихонова

$$\bigcap_{q \in Q^N} N(\langle q \rangle) \cap \overline{\Delta}_0 \neq \varnothing,$$

откуда и следует, что $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Теорема 8.3. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$ *класса* $\mathscr{P}$. *Если группа* Q *конечно-порожденная, то* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Доказательство. В случае $Q^N = \langle e \rangle$ имеем $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$ и теорема доказана.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$. Если $Q \neq Q^N$, то по теореме 8.1 $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$ и утверждение доказано.

Пусть $Q^N \neq \langle e \rangle$ и $Q = Q^N$. В силу условия 1) из следствия 8.1 и конечной порожденности группы Q получим, что $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Следствие 8.2. *Пусть задана группа* $Q \subseteq K^+$. *Если* $\operatorname{Fix} Q^N = \varnothing$, *а группа* Q *конечно-порождена или* $Q \neq Q^N$, *то* Q *не принадлежит классу* $\mathscr{P}$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 8.1 и 8.3.

В частности, любая некоммутативная группа аффинных преобразований не принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Теорема 8.4. *Пусть задана группа* $Q \in K^+$, *для которой выполняется одно из условий*:

а) *группа* Q *удовлетворяет условию* (P);

б) *существует* $\overline{q} \in Q^N$, *для которого множество* $N(\langle \overline{q} \rangle)$ *ограничено*;

в) *существует конечно-порожденная подгруппа с неограниченной орбитой.*

Если группа Q *класса* $\mathscr{P}$, *то* $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть выполняется условие а). Очевидно, что гомеоморфизм $\widehat{q}(t) = t + 1$ перестановочен с любым гомеоморфизмом $q \in Q$. Заметим, что для любого $q \in Q$ множество $N(\langle q \rangle)$ инвариантно относительно гомеоморфизма $\widehat{q}$. По теореме 8.3 для любых $q_1, q_2 \in Q$ $\operatorname{Fix} \widehat{Q}^N \neq \varnothing$, где $\widehat{Q} = \langle q_1, q_2, \widehat{q} \rangle$. Так как $\operatorname{Fix} \widehat{Q}^N$ также инвариантно относительно преобразования $\widehat{q}$, то $\operatorname{Fix} \widehat{Q}^N \cap [0,1] \neq \varnothing$. В таком случае система компактных множеств $\left\{N(\langle q \rangle) \cap [0,1]\right\}_{q \in Q^N}$ является центрированной и по теореме Тихонова $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай б). Доказательство этого пункта дословно повторяет доказательство пункта а), в котором элемент $\widehat{q}$ заменяется на элемент $\overline{q}$, а множество $[0,1]$ на конечный замкнутый интервал, содержащий множество $N(\langle \overline{q} \rangle)$.

Рассмотрим случай в). Если $Q \neq Q^N$, то доказательство следует из теоремы 8.1. Пусть $Q = Q^N$, а $H = \langle q_1, \ldots, q_k \rangle$ – конечно-порожденная подгруппа, для которой орбита $H(t)$ при некотором $t \in \mathbb{R}$ не ограничена. Для любого $q \in Q$ образуем группу $\widehat{H} = \langle q, H \rangle$. По теореме 8.3 $\operatorname{Fix} \widehat{H}^N \neq \varnothing$. Так как множество $\operatorname{Fix} \widehat{H}^N$ является $\widehat{H}$-инвариантным, а орбита $H(t)$ не ограничена, то найдется замкнутый интервал Δ, зависящий только от элементов $q_1, \dots, q_k$, такой, что $N(\langle q \rangle) \cap \Delta \neq \varnothing$. В таком случае система компактных множеств $\{N(\langle q \rangle) \cap [0,1]\}_{q \in Q^N}$ является центрированной и по теореме Тихонова $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.

Предложение 8.2. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ класса $\mathscr{P}$ с $Q^N \neq \langle e \rangle$ и для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$. Тогда для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\operatorname{Fix} Q^N = N(Q) = N(\langle q \rangle)$ и $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$.*

Доказательство. Так как для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$, то в силу леммы 8.1 для любого $q \in Q^N \setminus e$ $N(\langle q \rangle) = N(Q) = \operatorname{Fix} Q^N$, откуда и следует, что $\boldsymbol{P}(\operatorname{Fix} Q^N) = \boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$.

Следствие 8.3. *Пусть Q – группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ класса $C^{(1)}$, сохраняющих ориентацию, элементы группы Q взаимно-трансверсальны, $Q^N \neq \langle e \rangle$, и группа Q принадлежит классу $\mathscr{P}$. Тогда для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\operatorname{Fix} Q^N = N(Q) = N(\langle q \rangle)$ и $\boldsymbol{P}(N(Q)) = \varnothing$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $q \in Q^N \setminus e$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$. Действительно, пусть для некоторого $q \in Q^N \setminus e$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) \neq \varnothing$. Выберем $\bar{t} \in \boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle))$. Существует последовательность из $N(\langle q \rangle)$ такая, что $t_k \to \bar{t}$, $k \to +\infty$. Из замкнутости множества $N(\langle q \rangle)$ следует, что $\bar{t} \in N(\langle q \rangle)$. В таком случае $\dot{q}(\bar{t}) = 1$, что противоречит условию следствия.

В случае гладкости $C^{(2)}$ справедлива следующая теорема.

Теорема (Plante [7]). *Пусть задана коммутативная группа $Q \subseteq K^+$. Если для любого $q \in Q$ $q \in \operatorname{Diff}^2(\mathbb{R})$, то $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$.*

Сформулируем один результат, который усиливает лемму 3.2 работы [3].

Предложение 8.3. *Если $q_1, q_2 \in K^+$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 > t_1$, $q_1(t_1) = t_1$, $q_2(t_2) = t_2$ или $t_2 = \infty$, гомеоморфизм q_2 не имеет неподвижных точек в интервале $(\bar{t}, t_2)$, $t_1 \in (\bar{t}, t_2)$, а гомеоморфизм q_1 – в интервале (t_1, t_2), то группа, порожденная q_1, q_2, имеет свободную подполугруппу с двумя образующими.*

Доказательство. Пусть $t_2 \neq +\infty$. Если гомеоморфизм q_1 не имеет неподвижных точек в интервале (t_1, t_2), то выполняются все условия леммы 3.1 работы [3], откуда и следует доказательство. Если точка t_2 является неподвижной для гомеоморфизма q_1, то, не нарушая общности, можем полагать, что для всех $t \in (t_1, t_2)$ имеют место условия $q_1(t) > t$, $q_2(t) > t$. В таком случае для некоторой положительной степени n существует точка $\bar{t} \in (t_1, t_2)$, для которой $q_1^n(\bar{t}) = q_2(\bar{t})$. Для элемента $q_1^n q_2^{-1}$ выполняются условия $q_1^n q_2^{-1}(t_2) = t_2$, $q_1^n q_2^{-1}(t_1) \neq t_1$, и найдется точка $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, для которой $q_1^n q_2^{-1}(\tilde{t}) = \tilde{t}$. Из полученных условий в силу свойства 1) леммы 8.1 для точки t_1 также должно выполняться условие $q_1^n q_2^{-1}(t_1) = t_1$. Противоречие. Следовательно, для таких групп условие того, что точка t_2 является неподвижной для гомеоморфизма q_1, не реализуемо.

В лемме 3.2 работы [3] утверждалось, что группа, порожденная q_1, q_2, имеет всего лишь экспоненциальный рост.

§ 9. Минимальные множества и структура орбит

Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их "нетривиальности" орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов. К ранним исследованиям по минимальным множествам следует отнести работы Данжуа для гомеоморфизмов окружности. В литературе результаты такого типа известны под названием теорем Данжуа [1], [2]. Исследование минимальных множеств для счетных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в работах [8]–[10]. В них указаны критерии существования минимальных множеств, и в этих условиях уточняется структура орбит. Аналогичные результаты для произвольных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в теоремах 9.1 и 9.2, которые являются следствиями из результатов предыдущих параграфов. В работах [8]–[10] также исследуются критерии существования минимальных множеств для счетных групп диффеоморфизмов, формулировки которых приводятся в теореме 9.3.

Теорема 9.1. *Пусть для группы $Q \subseteq K^+$ существует минимальное множество $E(Q)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $E(Q)$ – *дискретное множество*, $E(Q) \subseteq \operatorname{Fix} Q^N$, *и множество* $\operatorname{Fix} Q^N$ *состоит из объединения замкнутых орбит*;
2) $E(Q)$ – *совершенное нигде не плотное подмножество*, *является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты* $\overline{Q(t)}$ *произвольной точки* $t \in \mathbb{R}$;
3) $E(Q) = \mathbb{R}$ (*что эквивалентно условию минимальности группы* Q).

Доказательство. 1) Так как $E(Q)$ – дискретное множество, то для любого элемента $q \in Q^N$ и любой точки $t \in E(Q)$ выполняется условие $q(t) = t$, откуда и следует, что $E(Q) \subseteq \operatorname{Fix} Q^N$. Из дискретности множества $E(Q)$ следует, что множество $\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$ (лемма 4.2), а факторгруппа Q/Q^N циклическая, откуда и следует, что множество $\operatorname{Fix} Q^N$ состоит из объединения замкнутых орбит.

2) Пусть $E(Q)$ – не дискретное множество. Покажем, что в случае $E(Q) \neq \mathbb{R}$ множество $E(Q)$ является совершенным нигде не плотным подмножеством. Действительно, предположим, что $\operatorname{Int} E(Q) \neq \varnothing$. Тогда существует некоторый максимальный открытый интервал $\Delta = (\alpha, \beta)$ такой, что $\Delta \subseteq \operatorname{Int} E(Q)$ и один из концов интервала Δ конечный. Для определенности предположим, что β конечно. В таком случае выполняются условия:

a) $\beta \in E(Q), \overline{Q(\beta)} = E(Q)$;
b) для любого элемента $q \in Q$ либо $q(\Delta)$ совпадает с Δ, и, соответственно, $q(\beta) = \beta$, либо $q(\Delta) \cap \Delta = \varnothing$.

Но тогда $\overline{Q(\beta)} \cap \Delta = \varnothing$, что противоречит условию $\overline{Q(\beta)} = E(Q)$. Следовательно, $\operatorname{Int} E(Q) = \varnothing$, и множество $E(Q)$ является совершенным нигде не плотным подмножеством. В частности, для всякого $t \in \mathbb{R}$ минимальное множество $E(Q)$ содержится в замыкании точки t, т.е. $E(Q) \subseteq \overline{Q(t)}$.

3) Если $E(Q) = \mathbb{R}$, то доказательство минимальности группы Q следует из определения минимального множества $E(Q)$.

Теорема 9.2. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Для существования минимального множества $E(Q)$ достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий*:

a) $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$;

б) *для любого* $q \in Q$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q\rangle) = \varnothing$;

в) Q *содержит конечно-порожденную подгруппу* H, *имеющую неограниченную орбиту* (*в частности, существует элемент* $q \in Q$, *для которого* $N(\langle q\rangle) = \varnothing$).

Доказательство. а) Пусть $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$. Если $\mathbb{P}_F(Q) = \varnothing$ (лемма 4.2), то для любого $t \in \operatorname{Fix} Q^N$ орбита $Q(t)$ является минимальным множеством. Если $\mathbb{P}_F(Q) \neq \varnothing$ (лемма 4.2), то множество $\mathbb{P}_F(Q)$ и является минимальным множеством.

б) Пусть для любого $q \in Q$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q\rangle)) = \varnothing$. По теореме 5.1 в случае $\mathbb{P}_N(Q) \neq \varnothing$ множество $\mathbb{P}_N(Q)$ и является минимальным множеством. Если $\mathbb{P}_N(Q) = \varnothing$, то по той же теореме 5.1 $\operatorname{Fix} Q^N \neq \varnothing$, и доказательство следует из пункта а).

в) Пусть Q содержит конечно-порожденную подгруппу H, имеющую неограниченную орбиту. Рассмотрим множество замыканий орбит $\overline{Q(t)}$ всех точек t прямой $\mathbb{R}$. На этом множестве введем отношение частичного порядка: $\overline{Q(t_1)} \leqslant \overline{Q(t_2)}$, если $\overline{Q(t_1)} \subseteq \overline{Q(t_2)}$. Выберем произвольную точку $t \in \mathbb{R}$ и возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t)}$. Фиксируем произвольную точку $t_1 \in \overline{Q(t)}$ и возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t_1)}$. Очевидно, что $\overline{Q(t_1)} \leqslant \overline{Q(t)}$ и они образуют цепь. По лемме Цорна такая цепь содержится в некоторой максимальной цепи $\{\overline{Q(t_\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, где A – некоторое множество индексов. Образуем пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} \overline{Q(t_\alpha)}$. В силу условия в) теоремы существует конечный замкнутый интервал Δ такой, что для любой точки $t \in \mathbb{R}$ пересечение $\Delta \cap \overline{Q(t)}$ не пусто. Тогда множества $\Delta \cap \overline{Q(t_\alpha)}$, $\alpha \in A$, образуют центрированную систему множеств, и поэтому пересечение $\bigcap_{\alpha\in A}(\overline{Q(t_\alpha)} \cap \Delta)$ не пусто. Следовательно, пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} \overline{Q(t_\alpha)}$ также не пусто и, как несложно заметить, оно образует минимальное множество.

Приведем результат, принадлежащий Salhi [8]–[10].

Теорема 9.3. *Пусть* $Q \subseteq K^+$ – *счетная группа. Если* Q *абелева и содержится в* $\operatorname{Diff}^2(\mathbb{R})$ *или* Q *содержится в* $\operatorname{Diff}^\omega(\mathbb{R})$, *то существует минимальное множество* $E(Q)$.

§ 10. Представление группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, в виде цепи

Здесь для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, доказано существование некоторой канонической цепочки убывающих подгрупп с абелевыми факторгруппами (теорема 10.1). Используя это, приводится критерий разрешимости групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, не содержащих свободных подполугрупп с более чем одной образующей (предложение 10.1). Представление в виде цепи приводит к уточнению классификационной схемы для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию.

Определение 10.1. Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ и ее подгруппа G. Q и G связаны цепью ((*Q,G)-цепь*), если существует система подгрупп Q_α группы Q, удовлетворяющая следующим условиям:

1. индексы α составляют вполне упорядоченное множество с первым элементом 0 и последним элементом γ;
2. $Q_0 = Q$, $Q_\gamma = G$;
3. если $\alpha < \beta$, то $Q_\beta \subset Q_\alpha$;

4. если индекс, непосредственно следующий за $\alpha \neq \gamma$, обозначить через $\alpha+1$, то для всех $\alpha \neq \gamma$ $Q_{\alpha+1}$ – нормальная подгруппа группы Q_α и $Q_\alpha/Q_{\alpha+1}$ – абелева группа;
5. если индекс α предельный, то $Q_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} Q_\beta$.

(Q,Q)-цепь называется *тривиальной*.

Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Тогда множество $X = \operatorname{Fix} Q$ состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов $\{\Delta_j\}_{j\in J}$, $J \subseteq \mathbb{Z}$. Через Q_j, $j \in J$, обозначим ограничение группы Q на открытый интервал Δ_j (ограничение задается естественным гомоморфизмом $\varphi_j : Q \to Q_j$, $j \in J$, $J \subseteq \mathbb{Z}$).

Определение 10.2. Группа G называется *F-неприводимой*, если для любого $j \in J$ $\operatorname{Fix} G_j^N = \varnothing$. (Q,G)-цепь называется *F-неприводимой*, если подгруппа G является F-неприводимой. (Q,G)-цепь называется *N-исчерпываемой*, если $N(Q) \subseteq \operatorname{Fix} G^N$.

Очевидно, что всякая N-исчерпываемая цепь является F-неприводимой.

Теорема 10.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$. Тогда существует подгруппа $G \subseteq Q$ такая, что (Q,G) образует F-неприводимую цепь.*

Доказательство. Рассмотрим множество Φ всевозможных подгрупп группы Q и введем в этом множестве отношение частичного порядка. Между подгруппами G_1, G_2 группы Q существует отношение порядка $G_1 \leqslant G_2$, если $G_2 \subseteq G_1$ и (G_1, G_2) образует цепь. По теореме Хаусдорфа группа Q содержится в некоторой максимальной цепи с началом Q и конечным элементом G. Остается показать, что группа G является F-неприводимой.

Действительно, пусть G не является F-неприводимой. Тогда существует $j \in J$ (определение 9.2), для которого $\operatorname{Fix} G_j^N \neq \varnothing$. В таком случае $G_j \neq G_j^N$, G_j^N образует группу и по теореме 2.1 G_j/G_j^N – коммутативная группа. Так как $\varphi_j : G \to G_j$ – гомоморфизм (см. определение 10.2), то $\varphi_j^{-1}(G_j^N)$ – нормальная подгруппа группы G и факторгруппа $G/\varphi_j^{-1}(G_j^N)$ также является коммутативной группой. Но в таком случае цепь с началом Q и конечным элементом G не является максимальной. Противоречие. Следовательно, G является F-неприводимой.

Определим классы групп

$$\mathscr{A}_{\text{loc}} = \big\{Q : Q \subseteq K^+;\ \text{существует } N\text{-исчерпываемая } (Q,G)\text{-цепь}\big\},$$
$$\mathscr{C}_{\text{loc}} = \big\{Q : Q \subseteq K^+,\ Q \notin \mathscr{A}_{\text{loc}}\big\}.$$

Мы скажем, что группа $Q \subseteq K^+$ “локально” принадлежит классу $\mathscr{A}$ $(\mathscr{C})$, если она принадлежит $\mathscr{A}_{\text{loc}}$ $(\mathscr{C}_{\text{loc}})$.

Лемма 10.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq K^+$ и ее подгруппа G, образующие (Q,G)-цепь. Если (Q,G)-цепь является N-исчерпывающей (т.е. группа Q принадлежит классу $\mathscr{A}_{\text{loc}}$), то группа G коммутативна.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{R}\setminus \operatorname{Fix} G$. Оно состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов $\{\Delta_j\}_{j\in J}$, $J \subseteq \mathbb{Z}$. Каждый интервал Δ_j является инвариантным относительно группы G. Если G_j, $j \in J$, – ограничение группы G на интервал Δ_j, то из условия N-исчерпываемости следует, что для любого $j \in J$ $N(G_j) = \varnothing$. В силу предложения 3.1 группа G_j, $j \in J$, коммутативна, откуда и следует доказываемое утверждение.

Предложение 10.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq \mathscr{P}$, в которой для любого $q \in Q$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$. Тогда группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.*

Доказательство. В силу предложения 8.2 для группы Q выполняется условие $Q^N = \overline{Q}^N$ и существует N-исчерпываемая (Q, G)-цепь длины один, в которой $G = Q^N$. Тогда по лемме 10.1 группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.

Следствие 9.1. *Пусть задана группа $Q \subseteq \mathscr{P}$, в которой элементы $q \in Q$ являются диффеоморфизмами класса $C^{(1)}$ и взаимно-трансверсальны. Тогда группа Q разрешима, ступени разрешимости не больше двух.*

Доказательство. Так как элементы группы Q взаимно-трансверсальны, то для любого $q \in Q$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$, и доказательство следует из предложения 10.1.

§ 11. Заключение

Группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, в зависимости от структуры множества неподвижных точек элементов группы (множества $N(Q)$) и множества неподвижных точек группы (множества $\operatorname{Fix} Q^N$) допускают грубую классификацию на три непересекающихся класса $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$.

Наиболее простой класс $\mathscr{A}$ состоит из коммутативных групп Q, для которых множество $N(Q)$ пусто (что эквивалентно условию $\operatorname{Fix} Q^N = \mathbb{R}$).

Для групп Q классов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ существует Q-инвариантная σ-конечная борелевская мера. Исследован метрический инвариант, обобщающий понятие Q-инвариантной меры – это Q-проективно-инвариантная мера. Существование Q-проективно-инвариантной меры эквивалентно условию полусопряженности группы Q группе $.Q$, где $.Q$ – подгруппа группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$. С помощью Q-проективно-инвариантных мер строятся нетривиальные элементы из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$. Для групп Q, удовлетворяющих условию (P) (групп гомеоморфизмов, элементы которых являются накрытиями гомеоморфизмов окружности), исследованы гомоморфизмы из $\operatorname{Hom}(Q, \mathbb{R})$, порожденные числом вращения гомеоморфизма. Показано, что существование гомоморфизма, порожденного топологическим инвариантом – числом вращения гомеоморфизма, эквивалентно существованию метрического инварианта – Q-инвариантной меры. Группы с Q-проективно-инвариантной мерой могут принадлежать всем трем классам $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$.

Класс $\mathscr{C}$ состоит из групп Q, для которых множество $\operatorname{Fix} Q^N$ пусто. Это наиболее сложный для исследования класс групп гомеоморфизмов. Группы Q, принадлежащие классу $\mathscr{C}$, допускают представление в виде (Q, G)-цепи, в которой подгруппа G "локально" принадлежит либо классу $\mathscr{A}$, либо классу $\mathscr{C}$. В силу этого возникает иная классификация групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, на два непересекающихся класса $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$.

Две упомянутые выше классификации связаны между собой следующим образом:

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}, \qquad \mathscr{B} \subset (\mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}), \qquad \mathscr{C} \subset (\mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}).$$

Если для группы Q выполняется условие $Q^N \neq \overline{Q}^N$, то она принадлежит классу $\mathscr{C}$ и содержит свободную подполугруппу с двумя образующими.

Группы из указанных выше классов допускают более детальное исследование в зависимости от топологических свойств орбит и множества неподвижных точек элементов группы, условия гладкости гомеоморфизмов, а также некоторых комбинаторных свойств исследуемых групп. В частности, если группа Q не содержит свободных подполугрупп с двумя образующими и для любого $q \in Q$ $\boldsymbol{P}(N(\langle q \rangle)) = \varnothing$, то такая группа принадлежит классу $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ и разрешима, ступени разрешимости не больше двух.

В дальнейшем для уточнения классификационной схемы следует провести более детальное исследование групп класса $\mathscr{C}$. Отметим еще раз, что все полученные результаты являются следствием существования частичного порядка в группах Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, определенного в лемме 2.1, и фундаментальной теоремы Гёльдера.

Автор признателен всем участникам семинаров "Динамические системы" (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова), "Теория групп" (Московский институт инженеров транспорта) и их руководителям Д.В. Аносову и Р.И. Григорчуку за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
3. *Солодов В.В.* Гомеоморфизмы прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 1047–1060.
4. *Григорчук Р.И., Курчанов П.Ф.* Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1990. Т. 58. С. 191–256.
5. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
6. *Plante I.F.* Foliations with measure preserving holonomy // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 327–361.
7. *Plante I.F.* Solvable groups acting on the line // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 401–414.
8. *Salhi E.* Sur les ensembles locaux // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1982. V. 295. №12. P. 691–694.
9. *Salhi E.* Sur un theorie de structure de feuilletage de codimension // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1985. V. 300. №18. P. 635–638.
10. *Salhi E.* Niveau de feuilles // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1985. V. 301. P. 219–222.
11. *Бекларян Л.А.* К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №3. С. 23–54.

Центральный экономико-
математический институт РАН

Поступила в редакцию
26.05.1993 и 22.08.1995