



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Грибук, К. А. Казаков, П. И. Пронин, Калибровочная зависимость эффективного гравитационного поля, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 3, 375–391

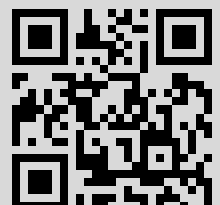
DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

5 августа 2022 г., 10:10:17



© 2004 г. Т. С. Грибук\*, К. А. Казаков\*, П. И. Пронин\*

## КАЛИБРОВОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Проблема калибровочной неоднозначности эффективного гравитационного поля рассмотрена с точки зрения процесса измерения. Движение пробной точечной частицы, играющей роль измерительного прибора, в поле гравитирующей точечной массы исследовано в однопетлевом приближении. Показано, что величина гравитационного поля, считываемого с эффективных уравнений движения прибора, явно зависит от фейнмановского калибровочного параметра. Найденная зависимость оказывается существенной в том смысле, что вариация калибровки не может быть интерпретирована как деформация системы отсчета, что приводит к калибровочной неоднозначности в значениях наблюдаемых величин. Этот результат опровергает, в частности, гипотезу о сокращении калибровочной зависимости в эффективных уравнениях движения классической точечной частицы.

**Ключевые слова:** эффективное действие, калибровочная зависимость, радиационные поправки, процесс измерения, тождества Славнова–Тейлора.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Использование формализма эффективного действия является наиболее общим методом анализа радиационных поправок к различным физическим эффектам, включая и те, что лежат за пределами стандартной теории рассеяния. Однако серьезным препятствием на пути к физической интерпретации результатов вычислений в рамках этого формализма является проблема калибровочной зависимости эффективного действия. Вкратце проблема заключается в неоднозначности результатов вычислений из-за произвола в выборе условия, фиксирующего калибровку. Это в первую очередь относится к эффективным полям, являющимся решениями эффективных уравнений движения, построенных с помощью эффективного действия. Проблема калибровочной зависимости гравитационного поля имеет те же формальные черты, что и в теории Янга–Миллса. Например, с точки зрения метода Баталина–Вилкововского [1] вариация калибровочного условия индуцирует антиканоническое преобразование полей и антиполей в обоих случаях [2]. В отличие от теории Янга–Миллса, однако, понятие калибровки в гравитации напрямую связано со свойствами физического пространства-времени, так как про-

---

\*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: kirill@phys.msu.ru, petr@phys.msu.ru

извол в выборе калибровочного условия отражает неоднозначность в выборе системы отсчета, т.е. соответствия между точками пространства-времени и телами отсчета.

Понятие системы отсчета тесно связано с понятием измерения и как таковое имеет существенно классический смысл. Поэтому свобода выбора системы отсчета в квантовой гравитации должна быть такой же, как и в классической теории. Следовательно, проблема калибровочной зависимости является по сути вопросом о том, вносит ли процедура квантования гравитационного поля неоднозначность в соответствие между калибровочными условиями и геометрией систем отсчета, или, другими словами, может ли изменение калибровки быть последовательно интерпретировано как деформация системы отсчета. Этот вопрос является далеко не тривиальным, поскольку процедура выбора калибровки в квантовой теории (например, в методе функционального интеграла) формулируется в терминах переменных интегрирования, а не в терминах, описывающих переход от одной системы отсчета к другой. Подробный анализ показывает, что в нулевом порядке по константе Планка  $\hbar$  соответствие между калибровочным условием и выбором системы отсчета является в существенном однозначным [3], [4]. Более точно, это соответствие оказывается аналогичным тому, что имеет место в классической теории с точностью до диффеоморфизма пространства-времени. Но уже в первом порядке по  $\hbar$  все существенно усложняется. Как отмечено в работах [5], последовательное решение проблемы калибровочной зависимости в этом приближении требует явного введения в рассмотрение измерительного прибора. Это связано с тем, что величина измеряемого гравитационного поля оказывается зависящей от структуры взаимодействия измерительного прибора с полем даже в случае исчезающе малой массы прибора. Дело в том, что относительная величина  $O(\hbar)$  поправок к гравитационному полю не зависит от массы источника. Поэтому вклад порядка  $O(\hbar)$  в эффективное действие прибора от его взаимодействия с гравитонами оказывается такого же порядка, как и вклад от взаимодействия гравитонов с источником внешнего поля. Путем прямого вычисления в работах [5] было показано, что калибровочно-зависимые части от этих двух вкладов взаимно сокращаются.

В связи с этим результатом следует отметить следующее. Сокращение калибровочной зависимости было продемонстрировано в работах [5] в рамках метода фонового поля, причем только в том случае, когда и источник гравитационного поля, и измерительный прибор являются точечными нерелятивистскими частицами. Обобщения этого результата нам не известны. Тем не менее утверждение о независимости эффективных уравнений движения точечного измерительного прибора от калибровки было использовано в последующих работах как надежно установленный результат. А именно, оно использовалось при определении гравитонных поправок к уравнениям Максвелла в работе [6], а также в исследовании динамики частиц в пространстве-времени Робертсона–Уокера [7]. В то же время, в работе [8] было показано, что в случае, когда роль измерительного прибора играет классическое скалярное поле, его эффективные уравнения движения оказываются калибровочно-зависимыми. Поэтому возникает вопрос о фактических условиях, при которых происходит сокращение калибровочной зависимости, и в первую очередь о роли дополнительных упрощений, связанных с использованием метода фонового поля. Как известно, фиксация калибровки в этом методе осуществляется

таким образом, что квантовое действие остается инвариантным по отношению к калибровочным преобразованиям фонового поля. В работе [8] было отмечено, что эта симметрия сокращает число диаграмм, дающих вклад в калибровочно-зависимую часть эффективного действия прибора, изменяя также их структуру. Вопрос о том, является ли сокращение калибровочной зависимости результатом использования метода фонового поля или нет, требует выхода за рамки этого метода. С формальной точки зрения это означает просто дискретное изменение калибровочного условия. Если эффективное действие прибора действительно является калибровочно-независимым, оно не должно измениться при этом.

Далее, с более общей точки зрения следует отметить следующее. Хотя проблема калибровочной зависимости важна сама по себе как фундаментальная проблема квантовой теории, она играет особую роль при установлении принципа соответствия между классической и квантовой теориями, составляющего интерпретативный базис квантовой теории. Можно было бы думать, что проблему калибровочной зависимости возможно обойти, используя с самого начала для этой цели явно калибровочно-независимый объект – матрицу рассеяния, а именно определить с помощью  $S$ -матрицы потенциал межчастичного взаимодействия и затем сравнить его с соответствующей классической величиной (потенциалом Эйнштейна–Инфельда–Хоффмана). Именно таким образом вопрос соответствия исследовался в ранних работах по гравитации (см. статью [9] и приведенные там ссылки). К сожалению, этот способ оказался неоднозначным [10]. Существует бесконечно много потенциалов, приводящих к одной и той же  $S$ -матрице, так что в каждом порядке постньютоновского разложения приходится вводить искусственные условия, обеспечивающие согласие с классической теорией. С другой стороны, в рамках формализма эффективного действия квазиклассические условия для гравитационного поля формулируются естественным образом и приводят к макроскопической формулировке принципа соответствия [11].

Ниже мы будем следовать методу вычисления калибровочно-зависимой части эффективного действия прибора, разработанному в работе [3]. У этого метода есть ряд важных преимуществ. Во-первых, он позволяет избежать явного вычисления среднего гравитационного поля. Во-вторых, в случае, когда вклад прибора в среднее гравитационное поле мал, что представляет основной интерес и будет предполагаться ниже, он позволяет избежать необходимости производить преобразование Лежандра от источников к средним полям для построения эффективного действия прибора. И, наконец, использование тождеств Славнова–Тейлора делает структуру различных вкладов в калибровочно-зависимую часть эффективного действия прибора особенно наглядной. В связи с последним следует отметить, что причины, оправдывающие использование тождеств Славнова–Тейлора при исследовании калибровочной зависимости эффективного действия прибора, идут намного дальше соображений удобства. Если сокращение калибровочной зависимости в эффективных уравнениях движения есть фундаментальное свойство классического прибора, то должна существовать формальная математическая причина, лежащая в основе этого сокращения. Естественно ожидать, что подобная причина должна была бы иметь свои корни в исходной калибровочной инвариантности классической теории, выражаемой на квантовом уровне в форме тождеств Славно-

ва–Тейлора.

Как правило, мы пользуемся конденсированными обозначениями, опуская знаки четырехмерных интегралов, подразумевая, что интегрирование производится вместе с суммированием по повторяющимся индексам. Одномерные интегралы вдоль мировых линий точечных частиц везде выписываются явно. Производные по нечетным переменным понимаются как левые. Предполагается также, что все встречающиеся расходимости регуляризуются с помощью размерной техники.

## 2. ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ И ТОЖДЕСТВА СЛАВНОВА–ТЕЙЛОРА

В этом разделе излагается наш подход к вычислению калибровочно-зависимого вклада в эффективное действие измерительного прибора. В п. 2.1 показывается, что эта задача сводится к исследованию калибровочно-зависимого вклада прибора в производящий функционал связанных функций Грина. В свою очередь, этот вклад наиболее просто вычисляется с использованием тождеств Славнова–Тейлора для функций Грина составных операторов, представляющих собой БРСТ-вариации действия прибора и источника поля. Эти тождества получены в п. 2.2.

**2.1. Роль производящего функционала связанных функций Грина.** Поскольку мы интересуемся зависимостью эффективного гравитационного поля от калибровки, а не его конкретной величиной, вычисление калибровочно-зависимой части эффективного действия измерительного прибора может быть упрощено следующим образом. Эта часть является суммой двух вкладов, один из которых происходит от явной калибровочной зависимости эффективного действия прибора, а другой – от его неявной зависимости от калибровки через среднее поле. Именно эта зависимость среднего поля от калибровки не позволяет дать ему непосредственную физическую интерпретацию.

Предположим, что масса  $m$  пробной частицы достаточно мала, чтобы пренебречь ее вкладом в среднее значение гравитационного поля  $\langle h_{\mu\nu} \rangle$ , где  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  есть отклонение пространства-времени от метрики Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ . Величина эффективного гравитационного поля, измеряемого частицей, “считывается” с ее эффективных уравнений движения

$$\frac{\delta \Gamma_m [x(\tau), h(\tau)]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0,$$

где  $\Gamma_m$  обозначает эффективное действие прибора (вклад в производящий функционал вершин, пропорциональный массе прибора).  $\Gamma_m$  является функцией пространственно-временного положения частицы  $x(\tau) \equiv \{x^\mu(\tau)\}$ , параметризованного с помощью ее собственного времени, построенного исходя из метрики плоского пространства-времени,  $d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , а также величины среднего гравитационного поля, вычисленного в точке нахождения частицы,  $h(\tau) \equiv \{\langle h_{\mu\nu}[x(\tau)] \rangle\}$ . Таким образом, вопрос о калибровочной зависимости измеряемого гравитационного поля сводится к вопросу о калибровочной зависимости эффективного действия прибора. Обозначив через  $T \equiv \{T^{\mu\nu}\}$  источник гравитационного поля, имеем следующее выражение для полной вариации эф-

эффективного действия прибора при малом изменении  $\delta\xi$  калибровочного параметра  $\xi$ :

$$\delta\Gamma_m[x, h, \xi] = \frac{\partial\Gamma_m}{\partial\xi} \Big|_{x, h} \delta\xi + \frac{\delta\Gamma_m}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial\xi} \Big|_{x, T} \delta\xi \equiv \frac{d\Gamma_m}{d\xi} \delta\xi, \quad (1)$$

где мы для краткости опустили угловые скобки у  $h_{\mu\nu}$ , символизирующие усреднение.

Заметим теперь, что если мы определим величину  $W_m$  по аналогии с  $\Gamma_m$ , т.е. как часть производящего функционала *связных* функций Грина, пропорциональную  $m$ , то, учитывая малость вклада прибора, получим

$$\Gamma_m(x, h, \xi) = W_m(x, h, \xi) \Big|_{T \rightarrow T(h, \xi)}. \quad (2)$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), приходим к следующему важному соотношению:

$$\frac{d\Gamma_m(x, h, \xi)}{d\xi} \Big|_{h \rightarrow h(T, \xi)} = \frac{\partial W_m(x, T, \xi)}{\partial\xi}. \quad (3)$$

Таким образом, при исследовании вопроса о калибровочной зависимости эффективного действия прибора необходимость в получении тождеств Славнова–Тейлора для сильно связанных функций Грина отпадает.

**2.2. Тождества Славнова–Тейлора.** Определим производящий функционал связанных функций Грина  $W$  как

$$e^{iW} = \int dh dC d\bar{C} \exp\{i(\Sigma + \bar{\beta}^\alpha C_\alpha + \bar{C}^\alpha \beta_\alpha + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma = S_{\text{FP}} + \int d^4x K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha - \int d^4x \frac{L^\gamma}{2} f_\gamma^{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta + \\ + \int d^4x \left[ J_m \frac{\delta S_m}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + J_M \frac{\delta S_M}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$S_{\text{FP}}$  обозначает квантовое действие Фаддеева–Попова

$$S_{\text{FP}} = S + S_m + S_M + S_{\text{gf}} + \int d^4x \bar{C}^\beta F_\beta^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha, \quad (6)$$

$S$ ,  $S_m$  и  $S_M$  – функционалы действия для гравитации, измерительного прибора и источника, соответственно<sup>1)</sup>:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (7)$$

$$S_m = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -m \int d\tau \sqrt{1 + h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad (8)$$

$$S_M = -M \int \sqrt{g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu} = -M \int d\theta \sqrt{1 + h_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\theta} \frac{dz^\nu}{d\theta}}, \quad (9)$$

<sup>1)</sup>Мы используем следующие определения:  $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \dots$ ,  $R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ ,  $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu} = \text{sgn}(+, -, -, -)$ . Единицы измерения выбраны так, что  $c = \hbar = 16\pi G = 1$ , где  $G$  есть гравитационная постоянная Ньютона. Индексы поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ .

$S_{\text{gf}}$  – член, фиксирующий калибровку:

$$S_{\text{gf}} = \int d^4x \frac{F_\alpha F^\alpha}{2\xi}, \quad (10)$$

а  $\xi$  есть фейнмановский параметр веса калибровочного условия  $F_\alpha$ . Функции  $K^{\mu\nu}(x)$  (нечетная) и  $L^\alpha(x)$  (четная) являются источниками БРСТ-преобразований гравитационного поля и духов Фаддеева–Попова  $C_\alpha$ , соответственно [12]. Функционалы  $S$ ,  $S_M$ ,  $S_m$  инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= \xi^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}) \partial_\nu \xi^\alpha + (\eta_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) \partial_\mu \xi^\alpha \equiv D_{\mu\nu}^\alpha \xi_\alpha, \\ \delta x^\mu(\tau) &= -\xi^\mu [x(\tau)] \equiv D_\alpha^\mu \xi^\alpha, \quad \delta z^\mu(\theta) = -\xi^\mu [z(\theta)] \equiv \overline{D}_\alpha^\mu \xi^\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

( $\xi^\alpha$  – инфинитезимальные калибровочные функции), образующих замкнутую алгебру

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{\alpha,\sigma\lambda} D_{\sigma\lambda}^\beta - D_{\mu\nu}^{\beta,\sigma\lambda} D_{\sigma\lambda}^\alpha &= f_\gamma^{\alpha\beta} D_{\mu\nu}^\gamma, \\ D_{\alpha,\nu}^\mu D_\beta^\nu - D_{\beta,\nu}^\mu D_\alpha^\nu &= f_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma^\mu, \\ \overline{D}_{\alpha,\nu}^\mu \overline{D}_\beta^\nu - \overline{D}_{\beta,\nu}^\mu \overline{D}_\alpha^\nu &= f_{\alpha\beta}^\gamma \overline{D}_\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (12)$$

где “структурные константы”  $f_\gamma^{\alpha\beta}$  определены согласно формуле

$$f_\gamma^{\alpha\beta} \xi_\alpha \eta_\beta = \xi_\alpha \partial^\alpha \eta_\gamma - \eta_\alpha \partial^\alpha \xi_\gamma. \quad (13)$$

Следуя работе [8], мы ввели нечетные постоянные источники  $J_m$  и  $J_M$  для “квантовой” БРСТ-вариации действия прибора и источника, соответственно. Наконец,  $T^{\mu\nu}$ ,  $\bar{\beta}$  и  $\beta$  обозначают обычные линейные источники гравитационного поля и полей духов Фаддеева–Попова  $C$  и  $\overline{C}$ .

Как уже было отмечено выше, проблема калибровочной зависимости есть вопрос о том, может ли изменение калибровочного условия быть однозначно интерпретировано как деформация системы отсчета. Ниже этот вопрос будет изучен в случае, когда деформация вызвана изменением калибровочного параметра  $\xi$ . Этот параметр является потенциальным источником калибровочной неоднозначности наблюдаемых величин. В классической теории гравитационное поле не зависит от  $\xi$ . В квантовой теории в нулевом порядке по  $\hbar$  вариации этого параметра индуцируют пространственно-временные диффеоморфизмы, сохраняя таким образом  $\xi$ -независимость наблюдаемых [3], [4]. Чтобы выяснить структуру  $\xi$ -зависимости гравитационного поля в первом порядке по  $\hbar$ , в соответствии с уравнением (1) следует определить величину  $\partial W_m / \partial \xi$ . Наиболее удобный путь вычисления этой производной состоит в использовании тождеств Славнова–Тейлора для функционала  $W$ , модифицированного добавлением члена  $Y \int d^4x \overline{C}^\alpha F_\alpha$  к квантовому действию  $\Sigma$  [13]. Здесь  $Y$  – новый постоянный нечетный параметр. Обозначая модифицированный таким образом производящий функционал связанных функций Грина через  $\mathfrak{W}$ , имеем

$$e^{i\mathfrak{W}} = \int dh dC d\overline{C} \exp\{i(\Sigma + Y \overline{C}^\alpha F_\alpha + \bar{\beta}^\alpha C_\alpha + \overline{C}^\alpha \beta_\alpha + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\}. \quad (14)$$

Функционал  $\Sigma$  инвариантен относительно следующих БРСТ-преобразований [14]:

$$\delta h_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha \lambda, \quad (15)$$

$$\delta C_\gamma = -\frac{1}{2} f_\gamma^{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta \lambda, \quad (16)$$

$$\delta \bar{C}^\alpha = \frac{1}{\xi} F^\alpha \lambda, \quad (17)$$

$$\delta x^\mu = D_\alpha^\mu C^\alpha \lambda, \quad (18)$$

$$\delta z^\mu = \bar{D}^\mu C^\alpha \lambda, \quad (19)$$

где  $\lambda$  – постоянный антикоммутирующий параметр.

Для того чтобы получить тождества Славнова–Тейлора, производим в функциональном интеграле (14) “квантовое” БРСТ-преобразование (15)–(17) переменных интегрирования. Приравнявая нулю коэффициент при  $\lambda$ , находим

$$\int dh dC d\bar{C} \left[ \frac{\delta S_m}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + \frac{\delta S_M}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + Y \bar{C}^\alpha F_\alpha^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\beta C_\beta + \frac{Y}{\xi} F_\alpha^2 + T^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha - \frac{\bar{\beta}^\gamma}{2} f_\gamma^{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta - \beta_\alpha \frac{F^\alpha}{\xi} \right] \exp\{i(\Sigma + Y F_\alpha \bar{C}^\alpha + \bar{\beta}^\alpha C_\alpha + \bar{C}^\alpha \beta_\alpha + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\} = 0. \quad (20)$$

Третий член в квадратных скобках этого тождества может быть преобразован с помощью квантовых уравнений движения поля  $\bar{C}^\alpha$

$$\int dh dC d\bar{C} [F_\gamma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha - Y F_\gamma + \beta_\gamma] \times \exp\{i(\Sigma + Y F_\alpha \bar{C}^\alpha + \bar{\beta}^\alpha C_\alpha + \bar{C}^\alpha \beta_\alpha + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\} = 0,$$

получающихся сдвигом  $\bar{C} \rightarrow \bar{C} + \delta \bar{C}$  переменных интегрирования в формуле (14). Функциональная дивергенция последнего уравнения по источнику  $\beta$  имеет вид

$$Y \int dh dC d\bar{C} \left[ i \bar{C}^\gamma F_\gamma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + \beta_\gamma \frac{\delta}{\delta \beta_\gamma} \right] \exp\{\dots\} = 0,$$

где использовано свойство  $Y^2 = 0$  и опущен пропорциональный  $\delta \beta_\gamma / \delta \beta_\gamma \sim \delta(0)$  член, равный нулю в размерной регуляризации. Используя это уравнение и заменяя первый и второй члены в квадратных скобках тождества (20) на производные соответственно по  $J_m$  и  $J_M$ , приводим его к виду

$$T^{\mu\nu} \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta K^{\mu\nu}} + \bar{\beta}^\alpha \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta L^\alpha} - \frac{1}{\xi} \beta_\alpha F^{\alpha,\mu\nu} \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta T^{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial J_M} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial J_m} - Y \beta_\alpha \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta \beta_\alpha} - 2Y \xi \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \xi} = 0. \quad (21)$$

Полагая в этом тождестве  $T^{\mu\nu} = L = \beta = \bar{\beta} = 0$  и собирая члены, пропорциональные  $Y$ , имеем

$$2\xi \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial J_M} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial J_m}, \quad (22)$$



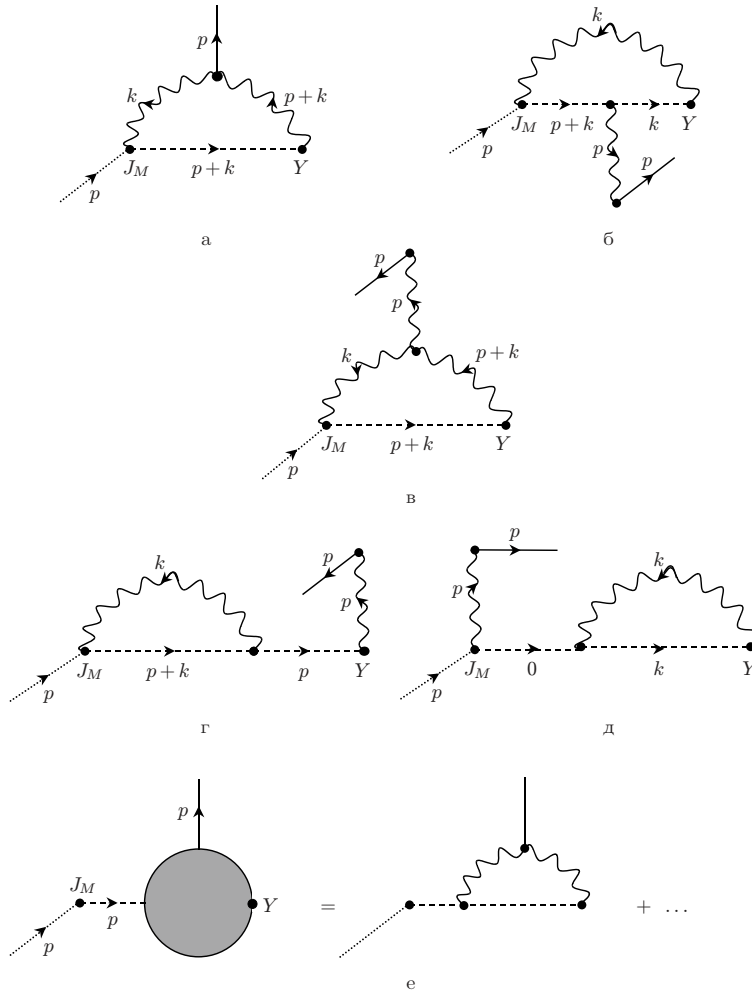


Рис. 1. Однопетлевые диаграммы, соответствующие первому члену в правой части тождества (23). Волнистые линии обозначают гравитоны, пунктирные соответствуют духам, сплошные и точечные линии сопоставляются коэффициентным функциям  $Q_m^{\mu\nu\alpha\beta}(T_m^{\mu\nu})$  и  $T_M^{\mu\nu}$  измерительного прибора и источника поля, соответственно. Диаграммы представленного на рис. 1е типа равны нулю в силу сохранения тензора энергии-импульса источника поля.

где  $W, \mathcal{W}$  определены как

$$\mathfrak{W} = W + Y\mathcal{W},$$

а источники  $J_m$  и  $J_M$  после дифференцирования также положены равными нулю. Наконец, выделяя вклад измерительного прибора в уравнении (22), получаем искомое выражение для полной производной по  $\xi$  от эффективного действия прибора:

$$2\xi \frac{d\Gamma_m}{d\xi} = -\frac{\partial W_m}{\partial J_M} - \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial J_m}. \tag{23}$$

### 3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

Перейдем к вычислению правой части уравнения (23). В однопетлевом приближении вклады первого и второго членов представляются диаграммами на рис. 1 и 2, соответственно.

Диаграммы, изображенные схематически на рис. 1е и 2л, тождественно равны нулю. Действительно, они пропорциональны 4-дивергенции тензора энергии-импульса источника поля  $T_M^{\mu\nu}$ , который в линейном по гравитационному полю приближении сохраняется:

$$\frac{\partial T_M^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Далее, вклад диаграмм, представленных на рис. 1д и 2з, также равен нулю. В отношении последней диаграммы это следует просто из того факта, что через линейно расходящийся фейнмановский интеграл нет потока внешнего импульса, тогда как для первой мы имеем неопределенность вида  $0/0$ . Однако нетрудно видеть, что этот “головастик” должен быть положен равным нулю. Для этого нужно представить постоянный антикоммутирующий источник  $Y$  как предел последовательности функций с неограниченно расширяющимися носителями, на которых они имеют одно и то же заданное постоянное значение, за исключением малой области, непосредственно прилегающей к границе, где они быстро спадают до нуля. Тогда указанная неопределенность раскрывается как  $q^3/q^2$ , где  $q$  – стремящийся к нулю импульс духовой линии, входящей в вершину  $\mathcal{J}_M$ .

Для дальнейшего упрощения структуры диаграмм используем тождество Славнова–Тейлора для двухточечных функций Грина. А именно, дифференцируя дважды тождество (21) по  $\beta_\alpha$  и  $T^{\mu\nu}$ , полагая в конце все источники равными нулю и отбрасывая вклады точечных частиц, получаем

$$\left[ \frac{\delta^2 W}{\delta \beta_\alpha \delta K^{\mu\nu}} - \frac{1}{\xi} F^{\alpha, \sigma\lambda} \frac{\delta^2 W}{\delta T^{\sigma\lambda} \delta T^{\mu\nu}} \right]_{M=m=0} = 0. \quad (24)$$

В древесном приближении это тождество принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} F^{\alpha, \mu\nu} G_{\mu\nu\sigma\lambda} &= D_{\sigma\lambda}^{(0)\beta} \tilde{G}_\beta^\alpha, \\ D_{\mu\nu}^{(0)\alpha} &\equiv D_{\mu\nu}^\alpha(0) \end{aligned} \quad (25)$$

и легко может быть проверено непосредственной подстановкой явных выражений для пропагаторов гравитонов и духов, приведенных ниже (см. уравнения (27), (28)). Оно позволяет заменить пропагатор гравитона, исходящего из вершины  $Y$ , на пропагатор духов. Более того, в результате этой замены тройная гравитонная вершина на рис. 1в и 2а, 2ж может быть выражена через вторую вариацию действия для гравитации при помощи тождества

$$\frac{\delta^3 S}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\sigma\lambda} \delta h_{\rho\tau}} \Big|_{h=0} D_{\mu\nu}^{(0)\alpha} + \frac{\delta^2 S}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\rho\tau}} \Big|_{h=0} \frac{\delta D_{\mu\nu}^\alpha}{\delta h_{\sigma\lambda}} + \frac{\delta^2 S}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\sigma\lambda}} \Big|_{h=0} \frac{\delta D_{\mu\nu}^\alpha}{\delta h_{\rho\tau}} = 0,$$

которое получается двойным дифференцированием основного тождества

$$\frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (26)$$

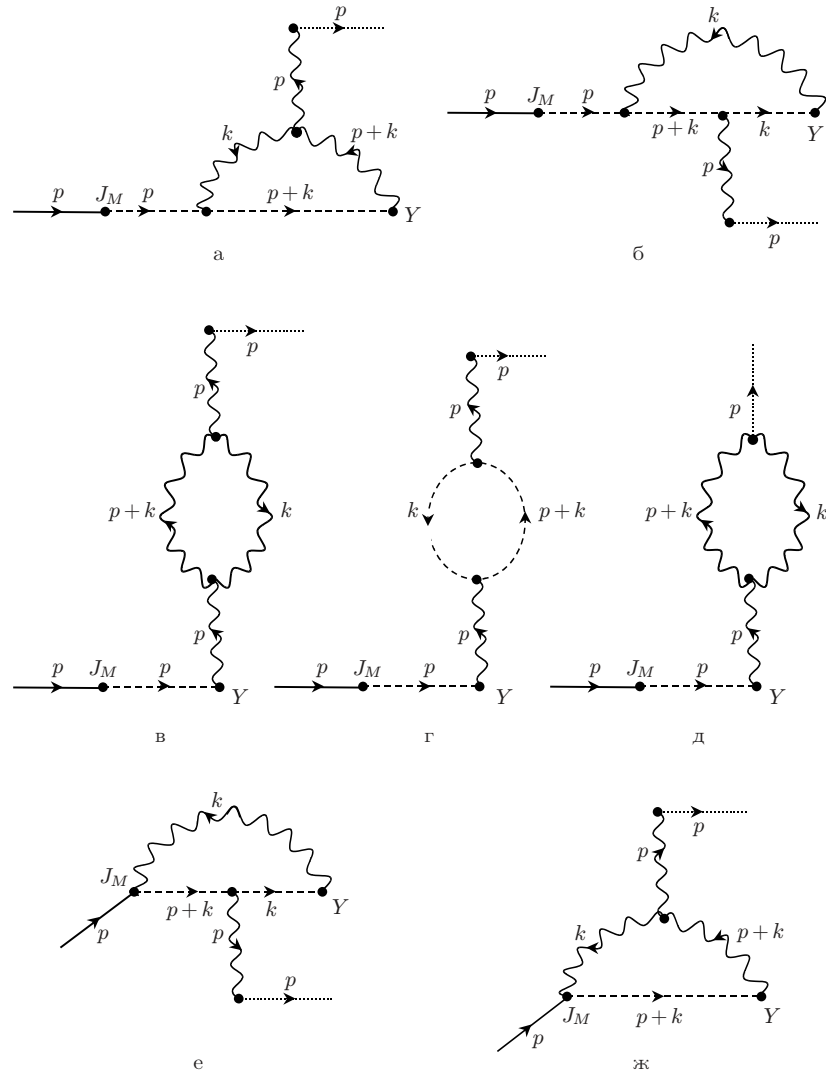


Рис. 2. Диаграммы, соответствующие второму члену в правой части тождества (23). Диаграммы на рис. 2л равны нулю в силу сохранения тензора энергии-импульса источника.

Действуя аналогично, можно показать, что сумма диаграмм, изображенных на рис. 2в, 2г, 2д, равняется диаграмме на рис. 1г. В самом деле, дифференцируя тождество (21) по  $\beta_\alpha$ , полагая все источники равными нулю и выделяя члены, линейные по  $M$ , видим, что левая часть этого тождества представляется суммой вертикальных составляющих диаграмм 2в, 2г, 2д, тогда как правая часть совпадает с горизонтальной частью диаграммы 1г. Преобразуя при помощи соотношения (25) вертикальную часть последней диаграммы, убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

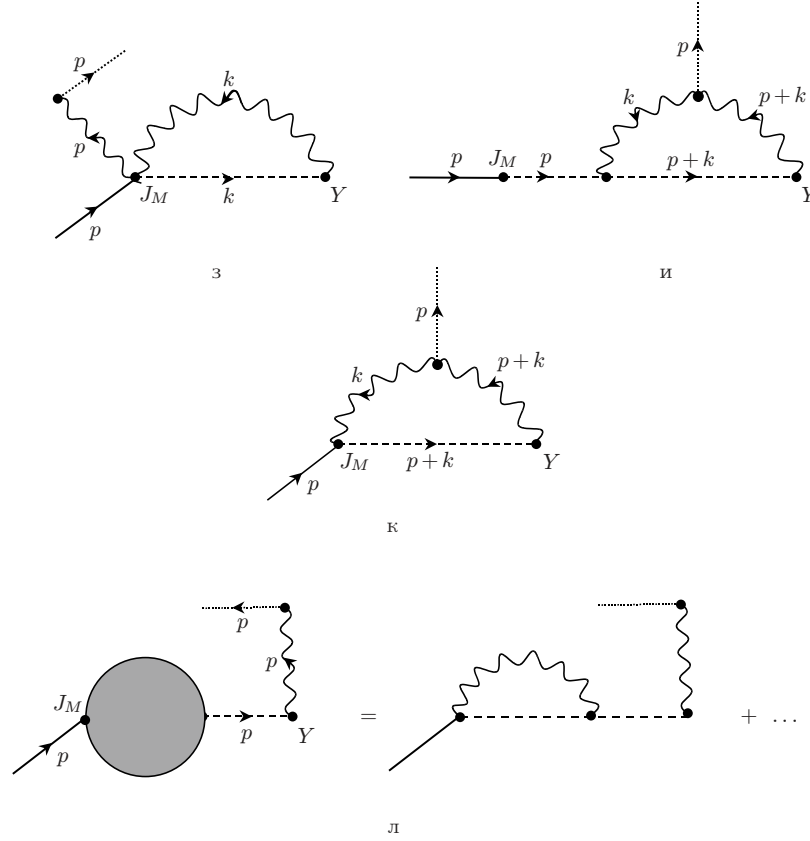


Рис. 2 (продолжение)

Определим теперь основные элементы диаграмм. Вторая вариация действия Эйнштейна имеет вид

$$S^{,\mu\nu\sigma\lambda}(k) = \left\{ \frac{1}{4}(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} - 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\lambda})k^2 + \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\lambda}k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}k^\sigma k^\lambda) - \frac{1}{4}(\eta^{\sigma\mu}k^\lambda k^\nu + \eta^{\lambda\mu}k^\sigma k^\nu + \eta^{\sigma\nu}k^\lambda k^\mu + \eta^{\lambda\nu}k^\sigma k^\mu) \right\}.$$

Калибровочное условие выберем в виде

$$F_\alpha = \partial^\mu h_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h, \quad h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}.$$

Определяя пропагаторы гравитонов  $G_{\mu\nu\alpha\beta}$  и духов  $\tilde{G}_\beta^\alpha$  как

$$(S + S_{\text{gf}})^{,\mu\nu\sigma\lambda}G_{\sigma\lambda\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \quad \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu),$$

$$F_\alpha^{,\mu\nu}D_{\mu\nu}^{(0)\beta}\tilde{G}_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma,$$

находим

$$G_{\mu\nu\sigma\lambda}(k) = -(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\lambda})\frac{1}{k^2} - (\xi - 1)(\eta_{\mu\sigma}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\sigma + \eta_{\nu\sigma}k_\mu k_\lambda + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\sigma)\frac{1}{k^4}, \quad (27)$$

$$\tilde{G}_\beta^\alpha = \frac{\delta_\beta^\alpha}{k^2}. \quad (28)$$

Наконец, вершины взаимодействия гравитонов с материей получаются разложением действия точечной частицы (8) по степеням  $h_{\mu\nu}$ :

$$S_m = -m \int d\tau \left[ 1 + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \frac{1}{8}h_{\mu\nu}h_{\sigma\rho}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho + \dots \right] \equiv \\ \equiv -m \int d\tau + \int d^4y h_{\mu\nu}(y)T_m^{\mu\nu}(y) + \frac{1}{2} \int d^4y h_{\mu\nu}(y)h_{\sigma\rho}(y)Q_m^{\mu\nu\sigma\rho}(y) + \dots, \quad (29)$$

где

$$T_m^{\mu\nu}(y) = -\frac{m}{2} \int d\tau \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \delta^4(y - x(\tau)), \quad (30)$$

$$Q_m^{\mu\nu\sigma\rho}(y) = \frac{m}{4} \int d\tau \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho \delta^4(y - x(\tau)), \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}. \quad (31)$$

В случае частицы-источника в этих формулах следует заменить  $m \rightarrow M$ ,  $x^\mu \rightarrow z^\mu$ ,  $\tau \rightarrow \theta$ . После всех вышеуказанных преобразований аналитические выражения для диаграмм приобретают вид

$$\mathcal{J}_j = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} I_j(p),$$

где<sup>2)</sup>

$$I_{1a}(p) = i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} Q_m^{\tau\rho\sigma\lambda}(-p) G_{\tau\rho\chi\theta}(k) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) \times \\ \times \left\{ T_M^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\chi\theta} - \delta_{\mu\alpha}^{\chi\theta}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\chi\theta}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\ \left. - Q_M^{\chi\theta\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\} \times \\ \times \{ \eta_{\sigma\gamma}(p_\lambda + k_\lambda) + \eta_{\lambda\gamma}(p_\sigma + k_\sigma) \}, \quad (32)$$

$$I_{1b}(p) = -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^{\varphi\psi}(-p) G_{\chi\theta\varphi\psi}(p) \tilde{G}_\delta^\gamma(k) \xi \tilde{G}^{\delta\zeta}(k) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \times \\ \times \frac{1}{2} \{ (p^\beta + k^\beta) \eta^{\tau\rho} - (p^\tau + k^\tau) \eta^{\beta\rho} - (p^\rho + k^\rho) \eta^{\beta\tau} \} \{ \eta_{\sigma\zeta} k_\lambda + \eta_{\lambda\zeta} k_\sigma \} \times \\ \times \{ -p_\gamma \delta_{\tau\rho}^{\chi\theta} - \delta_{\tau\gamma}^{\chi\theta} k_\rho - \delta_{\rho\gamma}^{\chi\theta} k_\tau \} \left\{ T_M^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} - \delta_{\mu\alpha}^{\sigma\lambda}(p_\nu + k_\nu) - \right. \\ \left. - \delta_{\nu\alpha}^{\sigma\lambda}(p_\mu + k_\mu)] - Q_M^{\sigma\lambda\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\}, \quad (33)$$

<sup>2)</sup> Здесь и далее нижние индексы обозначают соответствующие диаграммы.

$$\begin{aligned}
 I_{1b}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^{\kappa\omega}(-p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) \times \\
 & \times \left( S^{\sigma\lambda\tau\rho}(p) \{ -k_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\chi\theta} + \delta_{\sigma\gamma}^{\chi\theta}(p_\lambda + k_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\chi\theta}(p_\sigma + k_\sigma) \} + \right. \\
 & \left. + S^{\sigma\lambda\chi\theta}(k) \{ -p_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\tau\rho} + \delta_{\sigma\gamma}^{\tau\rho}(p_\lambda + k_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\tau\rho}(p_\sigma + k_\sigma) \} \right) \times \\
 & \times G_{\chi\theta\varphi\psi}(k) G_{\tau\rho\kappa\omega}(p) \left\{ T_M^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\varphi\psi} - \delta_{\mu\alpha}^{\varphi\psi}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\varphi\psi}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\
 & \left. - Q_M^{\varphi\psi\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{1r}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^{\sigma\lambda}(-p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) G_{\kappa\omega\chi\theta}(k) \tilde{G}_\delta^\gamma(p) \xi \tilde{G}^{\delta\zeta}(p) \times \\
 & \times \left\{ T_M^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\chi\theta} - \delta_{\mu\alpha}^{\chi\theta}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\chi\theta}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\
 & \left. - Q_M^{\chi\theta\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\} \{ -k_\gamma \delta_{\tau\rho}^{\kappa\omega} - \delta_{\tau\gamma}^{\kappa\omega} p_\rho - \delta_{\rho\gamma}^{\kappa\omega} p_\tau \} \times \\
 & \times \frac{1}{2} \{ (p^\beta + k^\beta) \eta^{\tau\rho} - (p^\tau + k^\tau) \eta^{\beta\rho} - (p^\rho + k^\rho) \eta^{\beta\tau} \} \{ \eta_{\sigma\zeta} p_\lambda + \eta_{\lambda\zeta} p_\sigma \}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2a}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^\xi \eta(p) p_\xi \tilde{G}_\eta^\delta(p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) \times \\
 & \times \left( S^{\sigma\lambda\tau\rho}(p) \{ -k_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\chi\theta} + \delta_{\sigma\gamma}^{\chi\theta}(k_\lambda + p_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\chi\theta}(k_\sigma + p_\sigma) \} + \right. \\
 & \left. + S^{\sigma\lambda\chi\theta}(k) \{ -p_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\tau\rho} + \delta_{\sigma\gamma}^{\tau\rho}(k_\lambda + p_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\tau\rho}(k_\sigma + p_\sigma) \} \right) \times \\
 & \times h_{\tau\rho}(-p) G_{\chi\theta\varphi\psi}(k) \{ p^\delta \eta^{\mu\nu} - p^\mu \eta^{\delta\nu} - p^\nu \eta^{\delta\mu} \} \times \\
 & \times \{ k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\varphi\psi} - \delta_{\mu\alpha}^{\varphi\psi}(k_\nu + p_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\varphi\psi}(k_\mu + p_\mu) \}, \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2c}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^\xi \eta(p) p_\xi \tilde{G}_\eta^\epsilon(p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \tilde{G}_\delta^\gamma(k) \xi \tilde{G}^{\delta\zeta}(k) \times \\
 & \times \frac{1}{2} \{ (p^\beta + k^\beta) \eta^{\tau\rho} - (p^\tau + k^\tau) \eta^{\beta\rho} - (p^\rho + k^\rho) \eta^{\beta\tau} \} \{ \eta_{\sigma\zeta} k_\lambda + \eta_{\lambda\zeta} k_\sigma \} \times \\
 & \times \{ -p_\gamma h_{\tau\rho}(-p) - h_{\tau\gamma}(-p) k_\rho - h_{\rho\gamma}(-p) k_\tau \} \{ p^\epsilon \eta^{\mu\nu} - p^\mu \eta^{\epsilon\nu} - p^\nu \eta^{\epsilon\mu} \} \times \\
 & \times \{ k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} - \delta_{\mu\alpha}^{\sigma\lambda}(k_\nu + p_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\sigma\lambda}(k_\mu + p_\mu) \}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2e}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} \left\{ T_m^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} - \delta_{\mu\alpha}^{\sigma\lambda}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\sigma\lambda}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\
 & \left. - Q_m^{\sigma\lambda\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\} \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \{ \eta_{\sigma\zeta} k_\lambda + \eta_{\lambda\zeta} k_\sigma \} \times \\
 & \times \frac{1}{2} \{ (p^\beta + k^\beta) \eta^{\tau\rho} - (p^\tau + k^\tau) \eta^{\beta\rho} - (p^\rho + k^\rho) \eta^{\beta\tau} \} \times \\
 & \times \{ -p_\gamma h_{\tau\rho}(-p) - h_{\tau\gamma}(-p) k_\rho - h_{\rho\gamma}(-p) k_\tau \} \tilde{G}_\delta^\gamma(k) \xi \tilde{G}^{\delta\zeta}(k), \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{2ж}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} h_{\tau\rho}(-p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) G_{\chi\theta\varphi\psi}(k) \times \\
 & \times \left( S^{\sigma\lambda\tau\rho}(p) \{ -k_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\chi\theta} + \delta_{\sigma\gamma}^{\chi\theta}(k_\lambda + p_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\chi\theta}(k_\sigma + p_\sigma) \} + \right. \\
 & \left. + S^{\sigma\lambda\chi\theta}(k) \{ -p_\gamma \delta_{\sigma\lambda}^{\tau\rho} + \delta_{\sigma\gamma}^{\tau\rho}(k_\lambda + p_\lambda) + \delta_{\lambda\gamma}^{\tau\rho}(k_\sigma + p_\sigma) \} \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ T_m^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\varphi\psi} - \delta_{\mu\alpha}^{\varphi\psi}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\varphi\psi}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\ & \left. - Q_m^{\varphi\psi\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} I_{2и}(p) = & -i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} T_m^\xi \eta(p) p_\xi Q_M^{\tau\rho\sigma\lambda}(-p) G_{\tau\rho\chi\theta}(k) \tilde{G}_{\eta\delta}(p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) \times \\ & \times \{ \eta_{\sigma\gamma}(p_\lambda + k_\lambda) + \eta_{\lambda\gamma}(p_\sigma + k_\sigma) \} \{ p^\delta \eta^{\mu\nu} - p^\mu \eta^{\delta\nu} - p^\nu \eta^{\delta\mu} \} \times \\ & \times \{ k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\chi\theta} - \delta_{\mu\alpha}^{\chi\theta}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\chi\theta}(p_\mu + k_\mu) \}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} I_{2к}(p) = & i\mu^\varepsilon \int \frac{d^{4-\varepsilon}k}{(2\pi)^4} Q_M^{\chi\theta\sigma\lambda}(-p) \tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) \xi \tilde{G}^{\beta\gamma}(p+k) \times \\ & \times G_{\chi\theta\omega\xi}(k) \{ \eta_{\sigma\gamma}(p_\lambda + k_\lambda) + \eta_{\lambda\gamma}(p_\sigma + k_\sigma) \} \times \\ & \times \left\{ T_m^{\mu\nu}(p) [k_\alpha \delta_{\mu\nu}^{\omega\xi} - \delta_{\mu\alpha}^{\omega\xi}(p_\nu + k_\nu) - \delta_{\nu\alpha}^{\omega\xi}(p_\mu + k_\mu)] - \right. \\ & \left. - Q_m^{\omega\xi\mu\nu}(p) [\eta_{\mu\alpha}(p_\nu + k_\nu) + \eta_{\nu\alpha}(p_\mu + k_\mu)] \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Как видно, все фейнмановские интегралы, которые требуется вычислить, имеют вид

$$I(p) = \mu^\varepsilon \int d^{4-\varepsilon}k f(p, k), \quad (42)$$

где  $f(p, k)$  представляет собой свертку пропагаторов гравитонов, духовых полей и вершинных факторов. Поскольку пропагаторы полей не содержат никаких размерных параметров, то по размерным соображениям  $I(p)$  имеют следующую структуру:

$$I = c_1 p^N \left( \frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{\varepsilon/2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + c_2 \right] = c_1 p^N \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right) + c_2 + O(\varepsilon) \right], \quad (43)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $N$  – некоторые числа, зависящие от конкретной формы  $f(p, k)$ . Таким образом, логарифмический вклад диаграмм можно восстановить по их расходимостям с помощью подстановки

$$\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{-p^2}{\mu^2} \right). \quad (44)$$

Хотя все фигурирующие интегралы Фейнмана имеют ультрафиолетовые расходимости, важно, что они свободны от инфракрасных расходимостей. В самом деле, все входящие в них петлевые интегралы имеют неотрицательную размерность, причем внешний импульс  $p$  входит в них всегда в линейной комбинации с петлевым импульсом  $k$ . Переписывая тождественно  $p$  как  $(p+k) - k$ , можно представить все диаграммы в виде сумм произведений  $(p+k)^n$  и  $k^m$ . Поскольку размерность диаграмм неотрицательна, имеем  $n + m \geq -4$ . С другой стороны, инфракрасные особенности могли бы появиться лишь при условии  $n \leq -4$  либо  $m \leq -4$ , т.е. должно быть либо  $n \geq 0$ , либо  $m \geq 0$ . В обоих случаях петлевые интегралы обращаются в нуль в силу свойств размерной регуляризации.

Вклад расходимостей при больших импульсах может быть найден разложением пропагаторов по степеням отношения  $p/k$  и выделением членов порядка  $k^{-4}$  в подынтегральных выражениях. В силу тождества (25) разлагать достаточно только пропагатор

дúхов. В случае диаграммы 2и соответствующие знаменатели необходимо разложить до третьего порядка включительно:

$$\tilde{G}_\beta^\alpha(p+k) = \frac{\delta_\beta^\alpha}{k^2} \left( 1 - \frac{2pk}{k^2} - \frac{p^2}{k^2} + \frac{4(pk)^2}{k^4} + \frac{4(pk)p^2}{k^4} - \frac{8(pk)^3}{k^6} \right),$$

тогда как в оставшихся диаграммах достаточно ограничиться меньшим числом членов. Принимая во внимание, что петлевое интегрирование сводится к усреднениям по углам в импульсном пространстве, т.е. к подстановкам  $\langle k^\mu \rangle = 0$ ,  $\langle k^\mu k^\nu \rangle = \eta^{\mu\nu} k^2/4$  и т.д., что удобно выполнить с помощью программного пакета [15], получаем

$$I_j^{\text{log}}(p) = \frac{mM\xi}{16\pi^2} \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \int d\theta \int d\tau \exp\{ip_\mu[x^\mu(\tau) - z^\mu(\theta)]\} \mathcal{J}_j(\tau, \theta, p), \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{1a}(\tau, \theta, p) &= \frac{2\xi+1}{48} \{2(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^4 - (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 - 1\}, \\ \mathcal{J}_{1б}(\tau, \theta, p) &= \frac{\xi-2}{6p^2} (\dot{x}^\mu p_\mu)^2 - \frac{2(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 + 1}{12}, \\ \mathcal{J}_{1в}(\tau, \theta, p) &= \frac{6\xi-1}{48} + \frac{16\xi+1}{24p^2} (\dot{x}^\mu p_\mu)^2 + \frac{3\xi+1}{12} (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2, \\ \mathcal{J}_{1г}(\tau, \theta, p) &= \frac{\xi-1}{6p^2} (\dot{x}^\mu p_\mu)^2, \\ \mathcal{J}_{2a}(\tau, \theta, p) &= \frac{2\xi+1}{3p^2} (\dot{x}^\mu p_\mu)^2, \\ \mathcal{J}_{2б}(\tau, \theta, p) &= -\frac{(\dot{x}^\mu p_\mu)^2}{4p^2}, \\ \mathcal{J}_{2e}(\tau, \theta, p) &= -\frac{1}{24p^2} \{2(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 + 1\} \{2p^2 + (\dot{x}^\alpha p_\alpha)^2\}, \\ \mathcal{J}_{2ж}(\tau, \theta, p) &= \frac{3\xi+1}{12} (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 - \frac{2(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 + 7}{24p^2} (\dot{x}^\alpha p_\alpha)^2 + \frac{6\xi-1}{48}, \\ \mathcal{J}_{2и}(\tau, \theta, p) &= \frac{-4\xi+1}{24} \frac{(\dot{x}^\mu p_\mu)^2}{p^2}, \\ \mathcal{J}_{2к}(\tau, \theta, p) &= \frac{2\xi+1}{48} \{2(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^4 - (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 - 1\}. \end{aligned}$$

Приводя результат петлевого интегрирования к виду (45), мы учли, что  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \eta_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu = 1$ , а также  $\dot{z}^\nu p_\nu = 0$ . Суммируя все вклады (удваивая при этом вклад диаграммы 1г), окончательно получаем следующее выражение для полной производной эффективного действия прибора по калибровочному параметру  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_m^{\text{loop}}}{d\xi} &= \frac{mM}{32\pi^2} \int d\tau \int d\theta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\{ip_\mu[x^\mu(\tau) - z^\mu(\theta)]\} \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{\xi}{6} - \frac{1}{4}\right) + \frac{5(2\xi-1)}{6} \left[ \frac{(\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2}{4} + \frac{(\dot{x}^\mu p_\mu)^2}{p^2} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \frac{(\dot{x}^\alpha p_\alpha)^2}{p^2} (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^2 + \frac{2\xi+1}{12} (\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu)^4 \right\}. \end{aligned}$$



Сравнивая правую часть этого уравнения с линейным по гравитационному полю членом разложения действия прибора (см. (29)), мы видим, что калибровочно-зависимая часть эффективного гравитационного поля не может быть представлена в виде  $D_{\mu\nu}^{(0)\alpha} \Xi_\alpha$  с некоторой функцией  $\Xi_\alpha$ , что означает появление неоднозначности в значениях физических величин. В частности, наличие такой неоднозначности наиболее отчетливо видно при рассмотрении измерения статического поля с помощью нерелятивистской частицы. В этом случае имеем  $z^\mu(\theta) = (\theta, \mathbf{z}_0)$ ,  $\dot{x}^\mu \approx \delta_0^\mu$ ,  $\dot{x}^\mu \dot{z}_\mu \approx 1$ ,  $\dot{x}^\mu p_\mu \approx 0$ . Выполняя элементарные интегрирования и используя формулу

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \ln \mathbf{p}^2 = -\frac{1}{2\pi r^3}, \quad r \equiv |\mathbf{r}|,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_m^{\text{loop}}}{d\xi} &= mM \frac{3(2\xi - 1)}{256\pi^2} \int dt \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \exp\{-i\mathbf{p}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}_0]\} \ln\left(\frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2}\right) = \\ &= -mM \frac{3(2\xi - 1)}{512\pi^3} \int \frac{dt}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}_0|^3}. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, величина потенциала гравитационного поля покоящейся массивной частицы оказывается зависящей от калибровки:

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{3(2\xi - 1)}{2\pi} \frac{G^2 \hbar M}{c^3 r^3}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{z}_0|. \quad (47)$$

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что, как и в случае рассмотренного в работе [8] скалярного поля, вклад порядка  $\hbar$  в эффективное действие точечной частицы является  $\xi$ -зависимым, причем эта зависимость оказывается существенной в том смысле, что вариация параметра  $\xi$  не может быть интерпретирована как деформация системы отсчета, приводя к зависимости от калибровки наблюдаемых величин. По нашему мнению, этот результат является достаточным основанием для того, чтобы заключить: явное введение точечной частицы в рассмотрение не решает проблемы калибровочной зависимости. Все же по этому поводу стоит сделать еще несколько замечаний. Использованный нами метод позволяет прояснить взаимоотношения между явным и неявным вкладами в калибровочно-зависимую часть эффективного действия измерительного прибора. Рассмотрим тождество (23). Очевидно, что первый член в правой части описывает явную зависимость  $\Gamma_m$  от калибровки, тогда как второй соответствует калибровочной зависимости среднего гравитационного поля, т.е. представляет собой неявный вклад. Анализ, проведенный в разделе 3, выявляет тенденцию этих вкладов скорее к сложению друг с другом, нежели к вычитанию, подрывая тем самым изначальную идею о сокращении калибровочной зависимости. Действительно, как было показано выше, диаграммы 2в, 2г, 2д удваивают вклад диаграммы 1г, а не сокращаются с ним. Аналогично обстоит дело и с диаграммами 1а и 2к. Следует отметить, однако, что связь между остальными диаграммами

оказывается более интересной. А именно, нетрудно проверить, что их сумма тождественно равна нулю, если диаграммы 1б и 2ж, 2и взять с обратными знаками. С другой стороны, даже если бы члены  $\partial\mathcal{W}_m/\partial J_m$ ,  $\partial\mathcal{W}_m/\partial J_M$  входили в правую часть тождества (23) с противоположными знаками, действие  $\Gamma_m$  было бы по-прежнему существенно калибровочно-зависимым.

Приведенные выше общие рассуждения применимы в равной степени и к случаю фоновых калибровок, использованных в работах [5]–[7], и ставят, таким образом, под сомнение полученные в них результаты. К сожалению, проверка этих результатов затруднительна, поскольку в работах [5] приведены лишь окончательные выражения для расходимостей функциональных детерминантов, тогда как в работах [6], [7] калибровочная зависимость эффективного гравитационного поля вообще не вычислялась.

Отметим в заключение, что хотя основной вывод данной статьи совпадает с тем, что был получен в работе [8], явные выражения для калибровочно-зависимой части эффективного действия скалярного поля и точечной частицы оказываются различными. Поэтому не стоит исключать той возможности, что решение проблемы калибровочной зависимости может быть найдено в рамках обсуждавшегося выше подхода путем надлежащего изменения модели процесса измерения.

**Благодарности.** Мы благодарны проф. И. В. Тютину за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей работе.

#### Список литературы

- [1] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27.
- [2] *И. М. Лаэров, И. В. Тюмин, Б. Л. Воронов.* ЯФ. 1982. Т. 36. С. 498.
- [3] *K. A. Kazakov.* Class. Q. Grav. 2002. V. 19. P. 3017.
- [4] *K. A. Kazakov.* Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 044003.
- [5] *D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli.* Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 7779; Quantum corrections to the geodesic equation. In: Talk presented at the meeting “Trends in Theoretical Physics II”. Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [6] *D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli, C. Molina-Paris.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 084023.
- [7] *D. A. R. Dalvit, F. D. Mazzitelli.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 084018.
- [8] *K. A. Kazakov, P. I. Pronin.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 044043.
- [9] *Y. Iwasaki.* Progr. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1587.
- [10] *K. Hiida, M. Kikugawa.* Progr. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1610; *K. Hiida, H. Okamura.* Progr. Theor. Phys. 1972. V. 47. P. 1743; *K. Yokoya et al.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 2655.
- [11] *K. A. Kazakov.* Class. Q. Grav. 2001. V. 18. P. 1039; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2002. V. 104. P. 232.
- [12] *J. Zinn-Justin.* Renormalization of gauge theories. In: Trends in Elementary Particle Theory. V. 37. Eds. H. Rollnik, K. Dietz. Berlin: Springer, 1975. P. 2.
- [13] *N. K. Nielsen.* Nucl. Phys. B. 1975. V. 101. P. 173; *H. Kluberg-Stern, J. B. Zuber.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 467; P. 3159.
- [14] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287; Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; *И. В. Тюмин.* Калибровочная инвариантность теории поля и статистической физики в операторном формализме. Препринт ФИАН № 39. М.: ФИАН, 1975.
- [15] *P. Pronin, K. Stepanyantz.* New tensor package for REDUCE system. In: New Computing Technick in Physics Research. IV. Eds. B. Denby, D. Perred-Gallix. Singapore: World Scientific, 1995. P. 187.

Поступила в редакцию 5.III.2004 г.