М. А. Рамазанов, Канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления тензорных расширений специальных нильпотентных групп Ли размерности девять, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1(307), 163–164

DOI: https://doi.org/10.4213/rm934

КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА ОРБИТАХ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ РАСШИРЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ РАЗМЕРНОСТИ ДЕВЯТЬ

М. А. Рамазанов

1. В работах В.В. Трофимова [1]–[3] построена теория вполне интегрируемых гамильтоновых систем на тензорных расширениях алгебр Ли. В работе В.В. Трофимова [4] показано, что, используя эти алгоритмы, можно в явном виде строить канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления групп Ли. Цель настоящей работы – явное построение канонических координат на орбитах коприсоединенного представления тензорных расширений специальных нильпотентных групп Ли размерности девять.

В настоящее время имеется много работ, посвященных построению канонических координат на симплектических многообразиях. В работе М. Вернь [5] для нахождения глобальных симплектических координат на орбитах максимальной размерности коприсоединенного представления нильпотентных групп Ли использовались цепочки идеалов $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G$ в алгебре Ли, такие, что $\dim G_i/G_{i-1} = 1$, и инварианты представления Ad^* групп Ли, отвечающих идеалам G_i, $i = 1, \dots, n = \dim G$, поднимались с помощью естественной проекции $\pi_i\colon G^* \to G_i^*$ на G^*. В итоге получались требуемые координаты. В работе У. Симса [6] построены канонические координаты в случае борелевской подгруппы группы $\mathrm{sl}(4, \mathbb{R})$ на орбитах типа Тода. Для орбит общего положения коприсоединенного представления верхнетреугольных невырожденных матриц четвертого порядка предложена явная конструкция канонических координат в работе Е. Новака [7].

2. Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ – факторкольцо кольца многочленов по идеалу, порожденному x^2. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис алгебры Ли G, то $e_1, \dots, e_n, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$ – базис алгебры Ли $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$, где $\varepsilon = \pi(x)$ и $\pi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]/(x^2)$ – естественная проекция. Координаты в сопряженном пространстве $\Omega(G)^*$ в базисе, дуальном к $e_1, \dots, e_n$, $\varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n \in \Omega(G)$, обозначим через x_i, y_j $(i, j = 1, \dots, n = \dim G)$, причем x_i относится к e^i, а y_j – к базису $\varepsilon e^j \in (\varepsilon G)^*$, где $e^1, \dots, e^n$ – дуальный базис в G^*, т.е. $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

В работах В.В. Трофимова [1], [2], [4] предложен в более общей ситуации следующий алгоритм продолжения функций с пространства G^* на пространство $\Omega(G)^*$. Если $F(x)$ – функция на пространстве G^*, то положим $\mathfrak{A}(F) = \{F^{(1)}, F^{(2)}\}$ (см. [4]), где

$$F^{(1)}(x, y) = F(y), \qquad F^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} x_i. \tag{1}$$

В нашей конструкции канонических координат существенную роль будет играть следующая

Теорема 1 [4]. *Пусть функции $p_1, \dots, p_s$, $q_1, \dots, q_s$, определенные на пространстве G^*, сопряженном к алгебре Ли G (или на некотором открытом подмножестве $U \subset G^*$), дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления группы Ли $\mathfrak{G}$, отвечающей алгебре Ли G, т.е.*

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда функции

$$P_1 = p_1^{(1)}, \dots, P_s = p_s^{(1)}, P_{s+1} = p_1^{(2)}, \dots, P_{2s} = p_s^{(2)},$$
$$Q_1 = q_1^{(2)}, \dots, Q_s = q_s^{(2)}, Q_{s+1} = q_1^{(1)}, \dots, Q_{2s} = q_s^{(1)},$$

определенные на пространстве $\Omega(G)^*$ *(или на некотором открытом подмножестве* $\widehat{U} \subset \Omega(G)^*$*), дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления группы Ли* $\Omega(\mathfrak{G})$*, отвечающей алгебре Ли* $\Omega(G)$*, т.е.*

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, 2n.$$

Здесь функции $p_i^{(l)}$, $q_j^{(l)}$ *определены равенством* (1) $(l = 1, 2,\ i, j = 1, \ldots, n)$.

3. Мы применим алгоритм В.В. Трофимова к таким нильпотентным алгебрам Ли G, $\dim G = 9$, что $\dim G_0 = 8$, где G_0 – максимальный абелев идеал в G. В работе [8] получена полная классификация таких алгебр Ли. Назовем такую алгебру Ли специальной нильпотентной.

4. Теорема 2. *Пусть* G *– специальная нильпотентная алгебра Ли*, $\dim G = 9$. *Тогда одновременно на всех орбитах* $\mathcal{O}_s$, $s = 1, 2, \ldots,$ *общего положения коприсоединенного представления группы Ли* $\mathfrak{G}_s$*, отвечающей алгебре Ли*

$$G_s = (\ldots(G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2)) \otimes \ldots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

в явном виде с помощью алгоритма $\mathfrak{A}$ *строятся*: а) *канонические координаты*; б) *плоские симплектические связности* Γ^i_{jk}; в) *вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиувилля которых обобщенные индексы Маслова нетривиальны относительно связности* Γ^i_{jk}.

Доказательство. В работе [8] доказано, что имеется 7 типов специальных алгебр Ли.

Применяя эту классификацию, а также инварианты коприсоединенного представления [8], мы можем в явном виде выписать каноническую симплектическую структуру ω на орбитах общего положения. Громоздкие вычисления, использующие вид формы ω, позволяют найти в явном виде канонические координаты сразу на всех орбитах, т.е. можно указать такие функции на открытом всюду плотном подмножестве в G^*, которые после ограничения на орбиты общего положения дают там канонические координаты. Затем, применяя алгоритм $\mathfrak{A}$, мы построим, в силу теоремы 2, требуемые координаты на орбитах тензорного расширения. Если в этих координатах положить $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, то получим искомую симплектическую связность Γ^i_{jk}. Определения и основные свойства обобщенных индексов Маслова можно найти в работе [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Трофимов В. В. // ДАН СССР. 1982. Т. 263. №4. С. 812–816. [**2**] Трофимов В. В. // Изв. АН СССР. Серия матем. 1983. Т. 47. №6. С. 1303–1321. [**3**] Fomenko A. T., Trofimov V. V. Integrable systems on Lie algebras and symmetric spaces. New York, London: Gordon and Breach, 1988. [**4**] Трофимов В. В. // УМН. 1994. Т. 49. №1. С. 229–230. [**5**] Vergne M. // Bull. Soc. Math. France. 1972. V. 160. №3. P. 301–335. [**6**] Symes W. W. // Physica D. 1980. V. 1. P. 339–374. [**7**] Новак Е. // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. 1993. В. 25, ч. 2. С. 4–22. [**8**] Tsagas Gr., Kobotis A. // Tensor. 1990. V. 50. P. 51–54. [**9**] Трофимов В. В. // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 172–199.

Казахский государственный
университет им. Аль-Фараби

Принято редколлегией
04.09.1995