Commun. math. Phys. 5, 337—342 (1967)

Konform flache Gravitationsfelder

H. STEPHANI
Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena*

Eingegangen am 1. April 1967

Abstract. Using properties of an embedding in a flat sixdimensional space, all solutions of the Einstein equations for a perfect fluid or an electromagnetic field are given, which are conformal to a flat space.

Unter Benutzung der Einbettung in einen sechsdimensionalen flachen Raum werden alle konform flachen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen bestimmt, die das Gravitationsfeld idealer Flüssigkeiten oder elektromagnetischer Felder beschreiben.

1. Einführung und mathematische Grundlagen

Eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R = T_{mn} \tag{1}$$

ist genau dann konform flach, wenn sich der durch

$$a_{i;j;k} - a_{i;k;j} = a^n R_{nijk}, \quad R_{ik} = R^n{}_{ink} \tag{2}$$

definierte Krümmungstensor in der Form

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} - g_{jl}R_{il} - g_{il}R_{jk}) - \frac{R}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{3}$$

darstellen läßt. Aus der Differentialgeometrie [1] weiß man, daß sich ein solcher konform flacher Raum immer in einen — höchstens — sechsdimensionalen flachen Raum einbetten läßt. Es existieren also zwei symmetrische Tensoren Ω_{ik}, V_{ik} und ein Vektor τ_j, aus denen sich der Krümmungstensor gemäß

$$R_{ijkl} = e_1(\Omega_{ik}\Omega_{jl} - \Omega_{il}\Omega_{jk}) + e_2(V_{ik}V_{jl} - V_{il}V_{jk}) \tag{4}$$

aufbaut und die den Gleichungen

$$V_{ik;j} - V_{ij;k} = -e_1(\tau_j \Omega_{ik} - \tau_k \Omega_{ij}) \tag{5a}$$

$$\Omega_{ik;j} - \Omega_{ij;k} = e_2(\tau_j V_{ik} - \tau_k V_{ij}) \tag{5b}$$

$$\tau_{j;k} - \tau_{k;j} = \Omega_{jn} V^n{}_k - \Omega_{kn} V^n{}_j \tag{5c}$$

genügen; e_1 und e_2 haben den Wert ± 1. Lassen sich Gl. (4) und (5) mit $V_{nm} \equiv 0$, $\tau_j \equiv 0$ erfüllen, so ist der Raum schon in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbettbar.

---

* Adresse: 69 Jena, Max-Wien-Platz 1, DDR.

Zur Gewinnung konform flacher Lösungen gehen wir nun folgenden Weg: Nach Vorgabe des Energie-Impuls-Tensors T_{mn} bestimmen wir aus (1), (3) und (4) die Struktur der Tensoren Ω_{ik} und V_{ik}, indem wir alle Tensoren nach einem geeigneten Tetradensystem entwickeln. Die Gleichungen (5a)—(5c) geben dann Aussagen über Hyperflächennormalität, Scherungsfreiheit usw. der benutzten Basisvektoren, mit deren Hilfe die Gleichungen (3) in einem geeigneten Koordinatensystem gelöst werden können.

Bei dem ersten Teil dieses Programms benutzt man vorteilhaft gewisse „Eichtransformationen": Ω_{ik}, V_{ik} und τ_j sind nicht eindeutig bestimmt, auch

$$\begin{gathered}\bar{\Omega}_{ik} = a\Omega_{ik} + b\,V_{ik}, \quad \bar{V}_{ik} = c\Omega_{ik} + d\,V_{ik} \\ \bar{\tau}_j = (ad - bc)\,\tau_j + e_1 c a_{,j} + e_2 d b_{,j}\end{gathered} \tag{6}$$

erfüllen (4) und (5), wenn nur

$$\begin{array}{ll} e_1 = \bar{e}_1 a^2 + \bar{e}_2 c^2 & \\ & e_1 ac + e_2 bd = 0 \\ e_2 = \bar{e}_1 b^2 + \bar{e}_2 d^2 & \\ \bar{e}_1 = e_1 a^2 + e_2 b^2 & \\ & \bar{e}_1 ab + \bar{e}_2 cd = 0 \\ \bar{e}_2 = e_1 c^2 + e_2 d^2 & \end{array} \tag{7}$$

gelten. Diese Transformationen entsprechen Drehungen der beiden zum vierdimensionalen Raum senkrechten, im sechsdimensionalen Einbettungsraum liegenden Basisvektoren, vgl. [1], S. 163.

2. Konform flache Gravitationsfelder idealer Flüssigkeiten

Der Energieimpulstensor einer idealen Flüssigkeit der Ruhemassendichte μ, dem Druck p und der Vierergeschwindigkeit u_i $(u_i u^i = -1)$ ist

$$T_{mn} = (\mu + p)\,u_m u_n + p g_{mn}\,. \tag{8}$$

Wegen (3) hat der Krümmungstensor die Gestalt

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = \frac{\mu + p}{2}\,(u_i u_k g_{jl} + u_j u_l g_{ik} - u_i u_l g_{jk} - u_j u_k g_{il}) + \\ + \frac{\mu}{3}\,(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Da er sich allein aus

$$\Omega_{ik} = C g_{ik} + D u_i u_k \tag{10}$$

mit

$$\mu = 3 e_1 C^2, \quad \mu + p = 2CD\,e_1 \tag{11}$$

aufbauen läßt, liegt die Vermutung nahe, daß sich diese Lösungen schon in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen. Zum Beweis dieser Vermutung haben wir

$$\Omega_{ik;l} = \Omega_{ij;k} \tag{12}$$

zu zeigen. KUNDT und TRÜMPER [2] wiesen nach, daß konform flache Materiefelder

$$\begin{aligned} u_{i;k} &= -\dot{u}_i u_k + \frac{\Theta}{3}(g_{ik} + u_i u_k) \\ \mu_{,k} &= -\dot{\mu} u_k \end{aligned} \tag{13}$$

erfüllen. Hieraus und aus

$$T^k{}_{i;k} = p_{,i} + (p + \mu)\,\dot{u}_i + [\dot{p} + \dot{\mu} + (p + \mu)\Theta] u_i = 0 \tag{14}$$

folgt in der Tat (12). Wir erhalten damit den

Satz 1. *Alle konform flachen Gravitationsfelder idealer Flüssigkeiten lassen sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten.*

Diese Felder wurden in [3] ausführlich untersucht.

3. Konform flache Gravitationsfelder mit elektromagnetischem Feld

Unter Verwendung eines orthogonalen Vierbeins aus drei raumartigen Vektoren v_i, w_i und z_i und einem zeitartigen Vektor u_i können wir den Energieimpulstensor eines elektromagnetischen Nichtnullfeldes in der Gestalt

$$T_{ik} = R_{ik} = \lambda^2 (u_i u_k - v_i v_k + w_i w_k + z_i z_k) \tag{15}$$

schreiben und die Ansätze

$$\begin{aligned} \Omega_{nm} &= A u_n u_m + 2 B u_{(n} v_{m)} + 2 C u_{(n} w_{m)} + 2 D u_{(n} z_{m)} + E v_n v_m + \\ &\quad + 2 F v_{(n} w_{m)} + 2 G v_{(n} z_{m)} + H w_n w_m + 2 I w_{(n} z_{m)} + K z_n z_m \\ V_{nm} &= L u_n u_m + 2 M u_{(n} v_{m)} + 2 N u_{(n} w_{m)} + 2 P u_{(n} z_{m)} + Q v_n v_m + \\ &\quad + 2 R v_{(n} w_{m)} + 2 S v_{(n} z_{m)} + T w_n w_m + 2 W w_{(n} z_{m)} + Z z_n z_m \end{aligned} \tag{16}$$

machen. Der Krümmungstensor hat die Form

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \lambda^2 (u_i u_k v_j v_l + v_i v_k u_j u_l - u_i u_l v_j v_k - v_i v_l u_j u_k) + \\ &\quad + \lambda^2 (w_i w_k z_j z_l + w_j w_l z_i z_k - w_i w_l z_j z_k - z_i z_l w_j w_k)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Zur Auswertung der aus (4) und (17) folgenden Gleichungen für die Koeffizienten $A, B \ldots Z$ kann man die Identitäten benutzen, die von COLLINSON [4] explizit angegeben wurden: Für jeden Tensor T, der sich gemäß

$$T_{mnrs} = e(t_{mr} t_{ns} - t_{ms} t_{nr}) \tag{18}$$

aus einem symmetrischen Tensor t_{nr} bilden läßt, gilt

$$D_{mnik} \equiv \Delta_{rstl} T_{mnrs} T_{iktl} = 4 \Delta_{rstl} t_{mr} t_{ns} t_{it} t_{kl}\,. \tag{19}$$

Dabei ist Δ_{rstl} die totalantisymmetrische Matrix mit $\Delta_{1234} = 1$; in (19) ist über gleiche Indizes im Sinne einer Matrizenmultiplikation zu summieren. Aus (19) folgen die 20 Identitäten

$$\begin{aligned} &D_{mnik} = 0 \quad mnik \text{ nicht alle verschieden} \\ &D_{2431} = D_{1423} = D_{3412}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Macht man durch eine Eichtransformation (6) B und durch eine $w-z$-Drehung P zu null und wendet die Identitäten (20) auf (4) an, lassen sich die gesuchten Tensoren relativ leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} \Omega_{mn} &= E w_n w_m + G z_n z_m \\ V_{mn} &= L u_m u_n + M(u_m v_n + v_m u_n) + Q v_n v_m \\ e_2(LQ - M^2) &= e_1 EG = \lambda^2 . \end{aligned} \tag{21}$$

Die Codazzi-Gleichungen (5a)—(5c) sagen dann aus, daß der Vektor τ_j verschwindet und

$$(v_n v_m - u_n u_m)_{;j} = (w_n w_m + z_n z_m)_{;j} = 0 , \quad \lambda^2 = \text{const.} \tag{22}$$

gilt; Riccitensor und Krümmungstensor sind kovariant konstant

$$R_{ijkl;m} = 0 . \tag{23}$$

Es handelt sich also um symmetrische und — wegen (22) — zerlegbare Räume [5], deren Metrik die Struktur

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{22}(x^1, x^2)\,(dx^2)^2 + g_{33}(x_3, t)\,(dx^3)^2 - dt^2$$

hat. Die Gleichungen (17) geben als Lösung

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \cos^2\lambda x^1 (dx^2)^2 + \cos^2\lambda t (dx^3)^2 - dt^2 , \tag{24}$$

d. h. der Raum ist das Produkt zweier zweidimensionaler Räume konstanter Krümmung.

Zu dieser Metrik läßt sich stets ein elektromagnetisches Feld finden, das bis auf eine Dualitätsrotation bestimmt ist und z. B. die Gestalt

$$F_{\mu\nu} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \cos\lambda t \\ & & -\cos\lambda t & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{mn} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos^2\lambda x^1 & & \\ & & -\cos^2\lambda t & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

hat. Auch der Feldstärketensor ist kovariant konstant. Wir fassen das Ergebnis zusammen im

Satz 2. *Alle konform flachen Gravitationsfelder mit elektromagnetischem Nichtnullfeld sind das Produkt zweier zweidimensionaler Räume konstanter Krümmung; sie haben die Metrik* (24). *Der elektromagnetische Feldstärketensor ist kovariant konstant und hat die Gestalt* (25).

Diese Räume wurden von BERTOTTI [6] untersucht.

4. Konform flache Gravitationsfelder mit elektromagnetischem Nullfeld

Den Nullvektor k_i des Energieimpulstensors

$$T_{ik} = R_{ik} = \lambda^2 k_i k_k \tag{26}$$

ergänzen wir mit dem Nullvektor m_i und zwei raumartigen Vektoren w_i und z_i zu einem Vierbein. Analog zu der Rechnung für Nichtnullfelder kann man die Tensoren Ω_{mn} und V_{mn} bestimmen, die den Krümmungstensor

$$R_{ijkl} = \frac{\lambda^2}{2}(k_i k_k g_{jl} + k_j k_l g_{ik} - k_i k_l g_{jk} - k_j k_k g_{il}) \tag{27}$$

aufbauen. Es ergeben sich die folgenden drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \Omega_{in} &= A k_i k_n + H(w_i w_n + z_i z_n) & e_1 A H &= \frac{\lambda^2}{2} \\ V_{in} &= T w_i w_n + Z z_i z_n & e_1 H^2 + e_2 T Z &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{in} &= A k_i k_n + K z_i z_n & e_1 A K = N^2 &= \frac{\lambda^2}{2} \\ V_{in} &= N(k_i w_n + w_i k_n) & e_2 &= -1 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{in} &= C(k_i w_n + w_i k_n) & C^2 = P^2 &= \frac{\lambda^2}{2} \\ V_{in} &= P(k_i z_n + z_i k_n) & e_1 = e_2 &= -1 \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Aus den Codazzi-Gleichungen (5) folgt in allen drei Fällen, daß das Nullvektorfeld k_i bei geeigneter Normierung kovariant konstant ist

$$k_{i;m} = 0 \,. \tag{31}$$

Unter Benutzung von (27) kann man, KUNDT [7] folgend, die Metrik bestimmen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + 2du\,dv + [\alpha(u, x+y) + \beta(u, x-y)]du^2 \\ T_{mn} &= \lambda^2 k_n k_m, \quad \lambda^2 = -H_{,xx} = -H_{,yy} \\ H &= \alpha(u, x+y) + \beta(u, x-y) \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Dieses Strahlungsfeld ist ein Maxwellfeld, wenn Vektoren p_i, q_i existieren mit

$$\begin{aligned} F_{nm} &= k_n p_m - k_m p_n, \quad F_{nm} = k_n q_m - q_n k_m \\ p_n k^n &= 0, \quad p_n p^n = q_n q^n = \lambda^2 \\ F^n{}_{m;n} &= F^{*n}{}_{m;n} = 0 \,, \end{aligned} \tag{33}$$

vgl. [8]. Mit

$$p_i = \lambda(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, 0), \quad q_i = \lambda(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0, 0) \tag{34}$$

gibt dies die Bedingung, daß $\lambda e^{i\varphi}$ eine analytische Funktion von $z = x + iy$ ist und wegen (32) λ^2 eine Lösung der Wellengleichung ist. Mögliche Lösungen sind

$$\begin{aligned} \lambda e^{i\varphi} &= a \cos[\omega(1+i)z + b] \\ \lambda e^{i\varphi} &= az + b \end{aligned} \qquad a, b \text{ komplex, } \omega \text{ reell} \tag{35}$$

wobei a, b und ω beliebige Funktionen von u sind. Wir erhalten damit den

Satz 3. *Alle konform flachen Gravitationsfelder mit elektromagnetischem Nullfeld sind ebenfrontige Wellen mit*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2du\,dv + H\,du^2 \quad , -\lambda^2 = H_{,xx} = H_{,yy}$$

$$F_{nm} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{mn} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

wobei $\lambda e^{i\varphi}$ *aus* (35) *zu entnehmen ist.*

Herrn Prof. Dr. SCHMUTZER und allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Relativitätstheorie danke ich für Anregungen und Diskussionen.

Literatur

1. EISENHART, L.: Riemannian Geometry. Princeton: University Press 1926.
2. KUNDT, W., u. M. TRÜMPER: Abh. Mainz. Akad. Wiss. 1962, Nr. 12.
3. STEPHANI, H.: Commun. math. Phys. **4**, 137 (1967).
4. COLLINSON, C. D.: J. Math. Phys. **7**, 608 (1966).
5. PETROW, A. S.: Einstein-Räume. Berlin: Akademie-Verlag 1964
6. BERTOTTI, B.: Phys. Rev. **116**, 1331 (1959).
7. KUNDT, W.: Z. Phys. **163**, 77 (1961).
8. SYNGE, J. L.: Relativity, the special theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1956.