TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 338, Number 2, August 1993

L'ESPACE DES PLONGEMENTS D'UN ARC DANS UNE SURFACE

ROBERT CAUTY

ABSTRACT. We prove that the space of embeddings of an arc into a surface without boundary M is homeomorphic to the product $U(M) \times l^2$, where $U(M)$ is the unit tangent bundle of M.

1. INTRODUCTION

Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables et séparables. Etant donnés un espace X et un compact K, nous notons $\mathscr{C}(K, X)$ l'espace des fonctions continues de K dans X, avec la topologie de la convergence uniforme, et $E(K, X)$ le sous-espace de $\mathscr{C}(K, X)$ formé des plongements. Si X est un réctracte absolu de voisinage, il en est de même de $\mathscr{C}(K, X)$, mais pas nécessairement de $E(K, X)$, même quand K et X sont des espaces très simples. Très peu de résultats sont connus sur le problème de déterminer quand $E(K, X)$ est un rétracte absolu de voisinage, même quand K est le segment $I = [0, 1]$; le seul résultat général semble être celui de Sakai [9], qui a étudié l'espace $E(I, X)$ quand X est un rétracte absolu de voisinage localement compact de dimension un. D'autre part, Geoghegan a prouvé [2] que, pour une classe de compacts K contenant tous les polyèdres, $E(K, X)$ est divisible par l^2 (voir aussi [6] pour une généralisation). Alors, si K est un polyèdre tel que $E(K, X)$ soit topologiquement complet (ce quit est le cas si X est complet puisque $E(K, X)$ est un G_δ dans $\mathscr{C}(K, X)$), il résulte d'un théorème de H. Toruńczyk [10, Proposition 4.5] que $E(K, X)$ est une l^2-variété si c'est un réctracte absolu de voisinage (non vide).

Etant donnée une surface sans bord M, nous la supposons munie d'une structure différentiable et d'une métrique riemannienne (de classe C^∞), arbitraires mais fixées, et nous notons $U(M)$ le fibré tangent unitaire de M. En utilisant le fait que la structure différentiable de M est unique à un difféomorphisme près, on peut vérifier que le type topologique de $U(M)$ ne dépend pas du choix de la structure différentiable ou de la métrique, mais nous n'utiliserons pas ce fait. Nous supposons aussi M munie d'une triangulation, arbitraire (i.e., pas nécessairement compatible avec la structure différentiable) mais fixée, et nous notons $E_{\mathrm{PL}}(I, M)$ l'ensemble des plongements PL de I dans M. Soit l^2_f le sous-espace de l'espace de Hilbert l^2 formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant.

Received by the editors April 15, 1991.
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57N20.

1.1. **Théorème.** $(E(I, M), E_{\mathrm{PL}}(I, M))$ *est homéomorphe à* $U(M) \times (l^2, l^2_f)$.

La partie la plus difficile de la démonstration est le cas où M est le plan ou, ce qui revient au même, le disque unité ouvert D du plan. A la section 2, nous utilisons la théorie des représentations conformes pour construire des fonctions qui jouent un rôle essentiel dans la suite. A la section 3, nous montrons que $E(I, D)$ est un rétracte absolu de voisinage; il en résulte que $E(I, M)$ est une l^2-variété. A la section 4, nous montrons que le sous-ensemble de $E(I, D)$ formé des plongements f tels que $f(0) = 0$ a le type d'homotopie d'un cercle; ce résultat est utilisé à la section 5, avec des arguments élémentaires de géométrie riemannienne, pour prouver que $E(I, M)$ a le type d'homotopie de $U(M)$, donc est homéomorphe à $U(M) \times l^2$. Enfin, la démonstration est achevée à la section 6 à l'aide de résultats de West concernant les couples de (l^2, l^2_f)-variétés.

La distance d'un espace métrique X sera toujours noté d. L'espace $\mathscr{C}(K, X)$ sera supposé muni de la distance $d(f, g) = \sup_{k\in K} d(f(k), g(k))$. Si A et B sont des sous-ensembles de X, nous poserons $d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y)$; si $A = \{x\}$, nous noterons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$. Le diamètre d'un sous-ensemble A de X sera noté $\delta(A)$.

Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert d'un espace X et si f et g sont deux fonctions de Y dans X, g sera dit $\mathscr{U}$-proche de f si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathscr{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$.

2. Résultats et constructions auxiliaires

Nous regardons la sphère de Riemann S^2 tantôt comme le sphère unité de $\mathbb{R}^3$, tantôt comme le compactifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan complexe, les deux étant identifiés par projection stéréographique depuis le pôle nord de S^2. Nous supposons S^2 muni de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour q dans S^2 et $\varepsilon > 0$, nous notons $D(q, \varepsilon)$ (resp. $\overline{D}(q, \varepsilon)$) le disque ouvert (resp. fermé) de centre q et de rayon ε dans S^2. Nons notons D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et S^1 son bord. Les points de $\overline{D}$ seront repérés par leurs coordonnées polaires (z, u) où $z \in S^1$ et $0 \leq u \leq 1$. Si A est un sous-ensemble de S^1 et $0 < u \leq 1$, $A \times \{u\}$ désignera l'ensemble des points (z, u) de $\overline{D}$ avec z dans A.

Il est connu que si $\overline{E}$ est un disque fermé dans S^2, d'intérieur E, et si p est un point de $E \cap \mathbb{C}$, il existe un unique homéomorphisme φ de $\overline{D}$ sur $\overline{E}$ dont la restriction à D est une représentation conforme de D sur E vérifiant $\varphi(0) = p$ et $\varphi'(0) > 0$ (voir [8, vol. III, chap. 1 et 2]). Nous avons besoin d'une propriété de continuité de cet homéomorphisme. Soit p_0 un point fixé de $\mathbb{C}$ et, pour $n \geq 0$, soient $\overline{E}_n$ un disque fermé dans S^2 d'intérieur E_n contenant p_0, h_n un homéomorphisme de S^1 sur le bord B_n de E_n, et φ_n l'homéomorphisme de $\overline{D}$ sur $\overline{E}_n$ dont la restriction à D est une représentation conforme vérifiant $\varphi_n(0) = p_0$ et $\varphi_n'(0) > 0$. Avec ces notations, nous avons le résultat suivant:

2.1. **Lemme.** *Si la suite* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformément vers* h_0 *sur* S^1, *alors la suite* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformément vers* φ_0 *sur* $\overline{D}$.

Démonstration. Nous utiliserons le théorème 2.2 de [11]. Rappelons que la suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers E_0 au sens de Carathéodory (par rapport à p_0) si, notant, pour une suite strictement croissante $\{i_k\}$ d'entiers, $K(\{i_k\})$ l'ensemble des points de S^2 qui ont un voisinage contenu dans E_{i_k} pour tout k assez grand, la composante de $K(\{i_k\})$ quit contient p_0 est égale à E_0 pour chaque telle suite $\{i_k\}$.

Pour $n \geq 1$, soit $\mathscr{Q}_n$ l'ensemble des arcs Q, ne contenant pas p_0, dont les extrémités appartiennent à B_n et dont l'intérieur est contenu dans E_n. Pour chaque tel arc Q, $E_n \backslash Q$ a exactement deux composantes; soit $E_n(Q)$ celle qui ne contient pas p_0, et soit $d_n(Q)$ le diamètre de $E_n(Q)$. Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, posons

$$\eta_n(\varepsilon) = \sup\{d_n(Q)/Q \in \mathscr{Q}_n \text{ et } \delta(Q) \leq \varepsilon\}.$$

D'après le théorème 2.2 de [11], il suffit, pour prouver le lemme, de vérifier les deux faits suivants:

(a) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers E_0 au sens de Carathéodory,
(b) $\lim_{n\to\infty, \varepsilon\to 0} \eta_n(\varepsilon) = 0$.

Soit $\{i_k\}$ une suite strictement croisante d'entiers. Si p est un point de E_0, soit U un voisinage compact connexe de p contenu dans E_0 et contenant p_0. La convergence uniforme de $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ vers h_0 entraîne que $B_n \cap U = \varnothing$ pour tout n assez grand; alors U est contenu dans E_n puisqu'il est connexe et contient p_0. Ceci entraîne que p appartient à $K(\{i_k\})$, donc que E_0 est contenu dans $K(\{i_k\})$. Soit q un point de B_0; alors $q = h_0(z)$, où $z \in S^1$, et tout voisinage de q contient $h_n(z)$ pour presque tout n. Ceci entraîne que q n'appartient pas à $K(\{i_k\})$, donc $B_0 \cap K(\{i_k\}) = \varnothing$. Il résulte de tout cela que la composante de $K(\{i_k\})$ contenant p_0 est égale à E_0, d'où (a).

Le théorème de Schoenflies permet de trouver un plongement g de $S^1 \times [-1, 1]$ dans S^2 tel que $g(z, 0) = h_0(z)$ pour tout z dans S^1. Nous pouvons supposer que $p_0 \notin g(S^1 \times [-1, 1])$. Fixons un $\varepsilon > 0$. Pour z dans S^1 et $0 < \eta < \pi$, notons $A(z, \eta)$ l'arc de S^1 de centre z et de longueur η. Prenons $0 < \eta < \pi$ vérifiant

$$\delta(g(A(z, \eta) \times [-\eta, \eta])) < \varepsilon \qquad \forall z \in S^1. \tag{1}$$

Choisissons un $\alpha > 0$ vérifiant

$$\overline{D}(h_0(z), \alpha) \subset g(A(z, \eta) \times [-\eta, \eta]) \qquad \forall z \in S^1. \tag{2}$$

Enfin, prenons β avec $0 < \beta < \alpha$ vérifiant

(3) Si u et v sont deux points de S^1 tels que $d(h_0(u), h_0(v)) < \beta$, alors il y a un arc J dans S^1, d'extrémités u et v, tel que $\delta(h_0(J)) < \alpha/2$.

Soit n_0 un entier tel que

$$d(h_0, h_n) < \beta/3 \qquad \forall n \geq n_0. \tag{4}$$

Pour tout z dans S^1, $d(h_0(z), h_0(-z)) > \alpha$ d'après (2) (puisque $\eta < \pi$). Nous pouvons donc trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que

$$d(h_0(z), h_n(-z)) > \alpha \qquad \forall z \in S^1 \text{ et } \forall n \geq n_1. \tag{5}$$

Soit $n \geq n_1$, et soit $Q \in \mathscr{Q}_n$ tel que $\delta(Q) < \beta/3$. Les extrémités a et b de Q appartenant à B_n, il existe u et v dans S^1 tels que $h_n(u) = a$ et $h_n(v) = b$. Nous avons

$$\begin{aligned} d(h_0(u), h_0(v)) &\leq d(h_0(u), h_n(u)) + d(h_n(u), h_n(v)) + d(h_n(v), h_0(v)) \\ &\leq 2d(h_0, h_n) + \delta(Q) < \beta. \end{aligned}$$

D'après (3), il y a un arc J dans S^1, d'extrémités u et v, vérifiant $\delta(h_0(J)) < \alpha/2$. Pour z dans J, nous avons

$$d(h_0(u), h_n(z)) \leq d(h_0(u), h_0(z)) + d(h_0(z), h_n(z)) < \alpha/2 + \beta/3 < \alpha,$$

d'où $h_n(J) \subset D(h_0(u), \alpha)$. Pour x dans Q, nous avons

$$d(h_0(u), x) \leq d(h_0(u), h_n(u)) + d(h_n(u), x) \leq d(h_0, h_n) + \delta(Q) < 2\beta/3 < \alpha,$$

d'où $Q \subset D(h_0(u), \alpha)$. Par définition de $\mathscr{Q}_n$, les arcs $h_n(J)$ et Q n'ont que leurs extrémités en commun, donc $C = h_n(J) \cup Q$ est une courbe simple fermée. D'après ce qui précède, C est contenue dans $D(h_0(u), \alpha)$; par suite, l'une des deux composantes F, F' de $S^2\backslash C$, soit F, est aussi contenue dans $D(h_0(u), \alpha)$. D'après (1) et (2), $\delta(F) < \varepsilon$ et F ne contient pas p_0. En outre, l'un des deux ensembles F et F' est aussi une composante de $E_n\backslash Q$. D'après (5), $h_n(-z)$ appartient à F', qui ne peut donc être une composante de $E_n\backslash Q$. Par suite, F est une telle composante; puisque F ne contient pas p_0, $F = E_n(Q)$, d'où $d_n(Q) = \delta(F) < \varepsilon$. Ceci montre que, si $n \geq n_1$ et si Q est un élément de $\mathscr{Q}_n$ tel que $\delta(Q) < \beta/3$, alors $d_n(Q) < \varepsilon$, d'où (b).

Nous notons τ la fonction de S^2 dans S^2 définie par $\tau(z) = z^2$.

Pour f dans $E(I, D)$, nous notons $T(f)$ l'unique transformation homographique de S^2 sur S^2 envoyant $f(0)$, $f(1)$ et 4 sur 0, ∞ et 4 respectivement. Il est clair que $T(f)$ et son inverse $T(f)^{-1}$ dépendent continûment de f. L'ensemble $G(f) = S^2\backslash(T(f) \circ f(I))$ est un ouvert simplement connexe ne contenant ni 0, ni ∞, donc il existe sur $G(f)$ une unique racine carrée holomorphe, $\sigma(f)$, telle que $\sigma(f)(4) = 2$. Soit $E(f) = \sigma(f)(G(f))$; la fermeture de cet ouvert est un disque $\overline{E}(f)$ dont le bord $B(f)$ contient 0 et ∞. Supposons S^2 orientée de façon à induire sur $\mathbb{C}$ l'orientation habituelle. L'orientation de S^2 induit une orientation de $\overline{E}(f)$, laquelle, à son tour, induit une orientation sur $B(f)$.

La fonction $T(f) \circ f\colon I \to S^2$ a deux racines carrées continues, $k(f)$ et $l(f)$, qui sont des paramétrisations des deux arcs en lesquels les points 0 et ∞ divisent $B(f)$. Nous supposons les notations choisies de façon que, quand t varie de 0 à 1 dans I, $k(f)(t)$ se déplace de 0 à ∞ dans le sens positif sur $B(f)$ (au sens de l'orientation précédemment choisie); alors, $l(f)(t)$ se déplace de 0 à ∞ dans le sens négatif.

2.2. **Lemme.** *La fonction* $k\colon E(I, D) \to E(I, S^2)$ *est continue.*

Démonstration. Il faut prouver que si la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers f_0 dans $E(I, D)$, et si la suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers t_0 dans I, alors $\{k(f_n)(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers $k(f_0)(t_0)$. Dans le cas contraire, puisque $\tau(k(f_n)(t_n)) = T(f_n)(f_n(t_n))$ tend vers $T(f_0)(f_0(t_0)) = \tau(k(f_0)(t_0))$, nous pouvons supposer que $\{k(f_n)(t_n)\}$ tend vers $l(f_0)(t_0) \neq k(f_0)(t_0)$, donc $t_0 \neq 0, 1$. Pour simplifier, nous écrirons dans ce qui suit, pour $n \geq 0$, $k_n = k(f_n)$ et $l_n = l(f_n)$.

Si a, p, b sont trois points d'une courbe simple fermée C, nous notons $[a, p, b]_C$, ou simplement $[a, p, b]$, l'unique arc dans C d'extrémités a et b contenant p, orienté de a vers b. L'orientation de $[a, p, b]$ détermine une orientation de C. Soit F une composante de $S^2\backslash C$. L'orientation de S^2 induit une orientation de $\overline{F}$, laquelle détermine une orientation du bord C de F; si cette orientation est égale (resp. opposée) à celle déterminée par

$[a, p, b]$, nous dirons que $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F. Le fait suivant se vérifie facilement.

$(*)$ Soient C, C' deux courbes simples fermées, $[a, p, b]$ un arc contenu dans $C \cap C'$, F (resp. F') une composante de $S^2 \backslash C$ (resp. $S^2 \backslash C'$). Si F' est contenue dans F et si $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F, alors $[a, p, b]$ est positif (resp. négatif) par rapport à F'.

Soit C une courbe simple fermée contenant 2, séparant $l_0(t_0)$ de $h_0(I) \cup \{-2\}$, et rencontrant $l_0(I)$ en exactement deux points $a = l_0(u)$ et $b = l_0(v)$. Alors u et v séparent t_0 de $\{0, 1\}$ dans I, donc nous pouvons choisir les notations de façon que $0 < u < t_0 < v < 1$. Soit F la composante de $S^2 \backslash C$ qui contient $l_0(t_0)$. Alors, $C_0 = l_0([u, v]) \cup [a, 2, b]_C$ est une courbe simple fermée, et l'une des composantes de $S^2 \backslash C_0$, soit F_0, est contenue dans F. Soient q un point de $C \backslash [a, 2, b]$ et a' (resp. b') un point de $[a, 2, b]$ situé entre a et 2 (resp. entre 2 et b). Soit J' un arc d'extrémités a' et b' dont l'intérieur est contenu dans F_0, et soit C' la courbe simple fermée $J' \cup [a', 2, b']_C$. Soit F' la composante de $S^2 \backslash C'$ qui est contenue dans F_0.

Nous avons $C_0 \cap B(f_0) = l_0([u, v])$; comme C_0 contient $2 \in E(f_0)$, F_0 est contenue dans $E(f_0)$. D'après le choix de l_0, $[a, l_0(t_0), b]_{C_0}$ $(= l_0([u, v]))$ est négatif par rapport à $E(f_0)$, donc aussi par rapport à F_0, d'après $(*)$. Alors, $[a, 2, b]$ est positif par rapport à F_0, donc il en est de même de $[a', 2, b']$. D'après $(*)$, $[a', 2, b']$ est positif par rapport à F'.

Notons que le compact $\tau(\overline{F}' \cup \{q\})$ est disjoint de $\tau(B(f_0)) = (T(f_0) \circ f_0)(I)$. Puisque $\{\tau \circ k_n = \tau \circ l_n\}$ converge uniformément vers $T(f_0) \circ f_0$, nous pouvons supposer que $B(f_n) \cap (\overline{F}' \cup \{q\}) = \varnothing$ pour tout n. Nous pouvons aussi supposer que $k_n(t_n)$ appartient à F pour tout n. Soit $k_n(]u_n, v_n[)$, où $u_n < t < v_n$, la composante de $k_n(I) \cap F$ qui contient $k_n(t_n)$; soient $a_n = k_n(u_n)$ et $b_n = k_n(v_n)$.

Affirmation. *Pour n assez grand, a_n appartient à $[2, a, q]_C$, b_n appartient à $[2, b, q]_C$, et $k_n(]u_n, v_n[)$ est la seule composante de $B(f_n) \cap F$ dont la fermeture a une extrémité dans $[2, a, q]_C$ et l'autre dans $[2, b, q]_C$.*

Pour voir cela, notons que, puisque $\{\tau \circ k_n\}$ converge uniformément vers $\tau \circ l_0$ et que $\tau | S^2 \backslash \{0, \infty\}$ est un revêtement, l'ensemble A des points de $]0, 1[$ ayant un voisinage sur lequel $\{k_n\}$ converge uniformément vers l_0 est ouvert et fermé dans $]0, 1[$; du fait que $\{k_n(t_n)\}$ tend vers $l_0(t_0)$, on déduit que t_0 appartient à A, donc $A =]0, 1[$. Puisque $k_n(0) = l_n(0) = 0$ et $k_n(1) = l_n(1) = \infty$, on voit alors que $\{k_n\}$ converge uniformément vers l_0 sur I, donc $\{l_n = -k_n\}$ converge uniformément vers $-l_0 = k_0$. Il en résulte que, si n est assez grand, alors $l_n(I) \cap C = \varnothing$ et que si $k_n(s)$ appartient à $[2, a, q]_C$ (resp. $[2, b, q]_C$), alors $s < t_0$ (resp. $s > t_0$). L'affirmation en découle.

Puisque $\overline{F}' \cap B(f_n) = \varnothing$, F' est contenu dans $E(f_n)$. Soit F_n la composante de $E(f_n) \cap F$ contenant F'. Alors $\overline{F}_n$ est un disque fermé. En effet, puisque $\{T(f_n) \circ f_n\}$ converge uniformément vers $T(f_0) \circ f_0$, il y a un disque de centre 4 dans $\mathbb{C}$ contenu dans tous les ensembles $G(f_m)$, $m \geq 0$; il y a donc un disque de centre -2 dans $\mathbb{C}$ disjoint de tous les $\overline{E}_m(f)$ et de $\overline{F}$. Que $\overline{F}_n$ soit un disque fermé résulte alors du fait (dont la vérification est laissée au lecteur) que si $\overline{E}$ et $\overline{E}'$ sont deux disques fermés d'intérieurs E et E' dans le plan, et si E'' est une composante de $E \cap E'$, alors $\overline{E}''$ est un disque fermé.

Soit C_n le bord de F_n. Puisque $\overline{F}'$ est contenu dans $E(f_n)$, C_n contient $[a', 2, b']_C$. L'affirmation entraîne que, si n est assez grand, $k_n(]u_n, v_n[)$ est contenu dans C_n. D'après le choix de k_n, l'arc $k_n([u_n, v_n])$, orienté de a_n vers b_n, est positif par rapport à $E(f_n)$, donc aussi par rapport à F_n d'après $(*)$. Alors, $[a_n, 2, b_n]_{C_n}$ est négatif par rapport à F_n, donc aussi $[a', 2, b']_C$. D'après $(*)$, $[a', 2, b']_C$ est aussi négatif par rapport à F', contrairement à ce qui a été vu plus haut, d'où le lemme.

Pour f dans $E(I, D)$, soit $\varphi(f)$ l'homéomorphisme de $\overline{D}$ sur $\overline{E}(f)$ dont la restriction à D est une représentation conforme et qui vérifie $\varphi(f)(0) = 2$ et $\varphi(f)'(0) > 0$.

2.3. **Lemme.** *La fonction* $\varphi: E(I, D) \to \mathscr{C}(\overline{D}, S^2)$ *est continue.*

Démonstration. Définissons un homéomorphisme $h(f)$ de S^1 sur $B(f)$ par

$$h(f)(e^{\pi i t}) = k(f)(t), \quad h(f)(e^{-\pi i t}) = -k(f)(t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

D'après le lemme 2.2, h dépend continûment de f. La continuité de φ résulte alors du lemme 2.1.

Pour terminer cette section, construisons deux fonctions dont nous aurons besoin dans la suite. Définissons $\zeta: E(I, D) \to E(I, S^1)$ par

$$\zeta(f)(t) = (\varphi(f))^{-1}(k(f)(t)).$$

La continuité de ζ résulte des lemmes 2.2 et 2.3; en outre, on vérifie que $f = [T(f)]^{-1} \circ \tau \circ \varphi(f) \circ \zeta(f)$.

Définissons Φ: $E(I, D) \times [0, 1/2] \to E(I, S^2)$ par

$$\Phi(f, s)(t) = ([T(f)]^{-1} \circ \tau)(\varphi(\zeta(f)(t), 1 - s)).$$

En explicitant les définitions, on constate que $\Phi(f, 0) = f$. Pour $0 < s \le 1/2$, $\varphi(S^1 \times \{1 - s\})$ est contenu dans $E(f)$, sur lequel τ est injective, donc $\Phi(f, s)$ est bien un plongement de I dans S^2. Enfin, la continuité de Φ résulte de la continuité des fonctions T, τ, φ et ζ.

Les notations définies dans cette section conserveront les mêmes significations dans la suite de l'article.

3. $E(I, D)$ EST UN RÉTRACTE ABSOLU DE VOISINAGE

La première étape de la démonstration du théorème 1.1 est d'établir le lemme suivant.

3.1. **Lemme.** $E(I, D)$ *est un rétracte absolu de voisinage.*

Démonstration. Soient X un espace métrique, A un fermé de X et F une fonction continue de A dans $E(I, D)$. Soient $\mathscr{M}$ l'ensemble des transformations homographiques de S^2, et $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de $\mathscr{C}(\overline{D}, S^2)$ formé des plongements dont la restriction à D est une représentation conforme. Soient $q = T \circ F: A \to \mathscr{M}$, $\psi = \varphi \circ F: A \to \mathscr{A}$ et $\eta = \zeta \circ F: A \to E(I, S^1)$.

$\mathscr{M}$ est un groupe de Lie. $E(I, S^1)$ est une l^2-variété, car il est localement homéomorphe à $E(I, I)$, qui est une l^2-variété d'après [9]. Enfin, $\mathscr{A}$ est un rétracte absolu de voisinage d'après le lemme 11 de [7], car il est localement homéomorphe à l'espace noté $AE(D, E^2)$ dans ce lemme. Nous pouvons donc trouver un voisinage V de A dans X et des fonctions $\overline{q}: V \to \mathscr{M}$, $\overline{\psi}: V \to$

$\mathscr{A}$ et $\overline{\eta}\colon V \to E(I, S^1)$ prolongeant q, ψ et η respectivement. Définissons alors une fonction continue $g\colon V \times [0, 1/2] \to \mathscr{C}(I, S^2)$ par

$$g(x, s)(t) = (\overline{q}(x)^{-1} \circ \tau)(\overline{\psi}(x)(\overline{\eta}(x)(t), 1 - s)).$$

En explicitant les définitions, on constate que, pour x dans A, $g(x, s) = \Phi(F(x), s)$. Soit $P = g^{-1}(E(I, S^2))$. Puisque $\overline{\psi}(x)$ et $\overline{\eta}(x)$ sont des plongements et $\overline{q}(x)$ un homéomorphisme, (x, s) appartient à P si $\tau|\overline{\psi}(x)(\overline{\eta}(x)(I)\times \{1 - s\})$ est injective. Si x appartient à A, alors

$$\overline{\psi}(x)(\overline{\eta}(x)(I) \times \{1 - s\}) = \varphi(F(x))(\zeta(F(x))(I) \times \{1 - s\})$$

est contenu dans $E(F(x))$, qui est un ouvert sur lequel τ est injective. Il en résulte que P est un voisinage de $A\times]0, 1/2]$ dans $V \times [0, 1/2]$. Il est alors facile de construire un voisinage W de A contenu dans V et une fonction continue $\alpha\colon W \to [0, 1/2]$ telle que $\alpha^{-1}(0) = A$ et que $(x, \alpha(x))$ appartienne à P pour tout x dans W. Alors, la fonction G définie par

$$G(x) = g(x, \alpha(x))$$

envoie W dans $E(I, S^2)$ et prolonge F. Restreignant, si besoin est, G à un voisinage plus petit W' de A, on obtient une fonction à valeurs dans $E(I, D)$ prolongeant F, d'où le lemme.

4. L'espace des plongements fixant l'origine

Soit $E_0(I, \mathbb{R}^2)$ (resp. $E_0(I, D)$) le sous-espace de $E(I, \mathbb{R}^2)$ (resp. $E(I, D)$) formé des plongements f vérifiant $f(0) = 0$. Il y a une rétraction r de $E(I, \mathbb{R}^2)$ sur $E_0(I, \mathbb{R}^2)$ donnée par $r(f) = f - f(0)$.

Pour z dans S^1, définissons $\omega_z \in E_0(I, D)$ par $\omega_z(t) = tz/2$. Nous obtenons ainsi un plongement ω de S^1 dans $E_0(I, D)$; soit $S = \omega(S^1)$. Factorisons ω en $\omega = j \circ \omega'$ où j est l'inclusion de S dans $E_0(I, D)$ et ω' un homéomorphisme de S^1 sur S. Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

4.1. **Lemme.** *L'inclusion j est une équivalence homotopique.*

Pour démontrer ce lemme, il suffit de prouver les deux affirmations suivantes.

Affirmation 1. *j a un inverse homotopique à gauche.*

Affirmation 2. *j a un inverse homotopique à droite.*

Démonstration de l'affirmation 1. Puisque $T(f)$ dépend continûment de f, sa dérivée $T(f)'$ aussi; de plus, $T(f)'(0)$ est toujours différent de 0. Nous pouvons donc définir une fonction continue $i\colon E(I, D) \to S^1$ par

$$i(f) = \frac{\overline{T(f)'(0)}}{|T(f)'(0)|}.$$

En explicitant la définition de $T(f)$ pour $f = \omega_z$, on constate que $T(\omega_z)$ est donné par

$$T(\omega_z)(v) = (8 - z)v/(2v - z),$$

d'où

$$T(\omega_z)'(0) = (z - 8)/z,$$

et

$$i(\omega_z) = \frac{|z|}{\overline{z}} \frac{\overline{z}-8}{|z-8|} = z\frac{\overline{z}-8}{|z-8|}.$$

L'application $z \to (\overline{z}-8)/|z-8|$, de S^1 dans S^1, étant manifestement homotope à une constante, $i \circ \omega$ est homotope à l'identité de S^1. Nous avons alors

$$(\omega' \circ i) \circ j = \omega' \circ (i \circ j \circ \omega') \circ \omega'^{-1} \simeq \omega' \circ \omega'^{-1} = \mathrm{id}_S,$$

donc $\omega' \circ i$ est un inverse homotopique à gauche de j.

Démonstration de l'affirmation 2. Il suffit de construire une homotopie H: $E_0(I, D) \times I \to E_0(I, D)$ vérifiant $H(f, 0) = f$ et $H(f, 1) \in S$ pour toute f. La construction de H se fera en plusieurs étapes. Définissons d'abord H_1: $E_0(I, D) \times I \to E_0(I, D)$ par

$$H_1(f, s) = r \circ \Phi(f, s \cdot \alpha(f)),$$

où α: $E_0(I, D) \to]0, 1/2]$ est une fonction continue suffisamment petite pour que $H_1(f, s)$ appartienne à $E_0(I, D)$ pour tout s. Posons $h_1(f) = H_1(f, 1)$.

Pour $0 < r \leq 1$, soit $S(r) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = r\}$. Posant, pour f dans $E_0(I, D)$,

$$\psi(f) = [T(f)]^{-1} \circ \tau \circ \varphi(f) - h_1(f)(0),$$

on voit, en utilisant la définition de Φ, que $h_1(f)(I)$ est l'arc $\psi(f)(\zeta(f)(I) \times \{\alpha(f)\})$ contenu dans $\psi(f)(S(\alpha(f)))$. La fonction ψ: $E_0(I, D) \to (\overline{D}, S^2)$ est continue et, puisque $\tau|E(f)$ est injective, la restriction de $\psi(f)$ à D est une représentation conforme de D sur un ouvert de S^2. Par suite, l'arc $h_1(f)(I)$ a, au point $h_1(f)(0)$, une tangente $L(f)$ d'équation

$$L(f) = \{tm(f) + h_1(f)(0) | t \in \mathbb{R}\},$$

où

$$m(f) = i\alpha(f)[\psi(f)'(\zeta(f)(0), \alpha(f))].$$

Remarquons que, $\psi(f)$ étant une représensation conforme, $\psi(f)'$ ne s'annule pas sur D, donc $m(f) \neq 0$. Puisque la dérivée d'une fonction holomorphe dépend continûment de la fonction (au sens de la convergence uniforme sur tout compact; voir [8, I, p. 330]), $m(f)$ dépend continûment de f. Pour $\beta \geq 0$, posons

$$A(f, \beta) = \{tm(f) + h_1(f)(0) | -\beta \leq t \leq 0\}.$$

Affirmation 3. *Il existe une fonction continue β : $E_0(I, D) \to]0, 1/2]$ telle que $(h_1(f)(I)) \cap A(f, \beta(f)) = \{h_1(f)(0)\}$ pour tout f.*

Pour prouver cette affirmation, il suffit de montrer que, pour tout f dans $E_0(I, D)$, il existe un voisinage V de f et un nombre $\beta > 0$ tels que $(h_1(g)(I)) \cap A(g, \beta) = \{h_1(g(0))\}$ pour tout g dans V. En effet, nous pouvons alors trouver un recouvrement ouvert localement fini $\{V_j\}_{j \in J}$ de $E_0(I, D)$ et des nombres $0 < \beta_j \leq 1/2$, $j \in J$, tels que $(h_1(f)(I)) \cap A(f, \beta_j) = \{h_1(f)(0)\}$ pour tout f dans V_j; alors, si $\{\mu_j\}_{j \in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}$, il suffit de poser $\beta(f) = \sum_{j \in J} \mu_j(f)\beta_j$.

Fixons f dans $E_0(I, D)$. Nous pouvons trouver un voisinage V_1 de f et une fonction continue η: $V_1 \times I \to \mathbb{R}$ tels que $\zeta(g)(t) = e^{i\eta(g, t)}$ pour (g, t)

dans $V_1 \times I$. D'après le choix de $k(g)$, quand t croit, $k(g)(t)$ se déplace dans le sens positif sur $B(g)$; puisque toute représentation conforme préserve l'orientation, $\zeta(g)(t) = [\varphi(g)]^{-1}(k(g)(t))$ se déplace aussi dans le sens positif sur S^1, i.e., $\eta(g, t)$ croit avec t. Quitte à réduire V_1, nous pouvons supposer l'existence d'un nombre $b < 2\pi$ tel que

(1) $$\eta(g, 0) \leq \eta(g, t) \leq \eta(g, 0) + b \qquad \forall (g, t) \in V_1 \times I.$$

Pour $r > 0$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, posons

$$P(r; c, d) = \{re^{i\theta} | c \leq \theta \leq d\}.$$

Le théorème des accroissements finis, appliqué à une fonction holomorphe ψ, montre que

$$\begin{aligned}|\psi(re^{i(t_0+h)}) - [\psi(re^{it_0}) + hir\psi'(re^{it_0})]| \\ \leq |h| r \sup\{|\psi'(re^{i\theta}) - \psi'(re^{it_0})| t_0 \leq \theta \leq t_0 + h\}.\end{aligned}$$

Appliquant cette inégalité à $\psi(g)$, $r = \alpha(g)$ et $t_0 = 0$, et utilisant le fait que $m(g) \neq 0$ et dépend continûment de g, nous constatons qu'il est possible de trouver un voisinage V_2 de f contenu dans V_1 et un nombre $0 < a \leq b$ tels que, pour tout g dans V_2,

$$|\psi(g)(\alpha(g)e^{i(\eta(g,0)+h)}) - (h_1(g)(0) + hm(g))| \leq \tfrac{1}{2}|h|\,|m(g)| \quad \text{pour } 0 \leq h \leq a.$$

Il en résulte que, pour g dans V_2,

(2) $$[\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0), \eta(g, 0) + a))] \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\} \quad \forall \beta > 0.$$

Fixons $0 < \beta < 1$ tel que

$$[\psi(f)(P(\alpha(f); \eta(f, 0) + a, \eta(f, 0) + b))] \cap A(f, \beta) = \varnothing.$$

La continuité de ψ, α, η et m nous permet alors de trouver un voisinage V_3 de f contenu dans V_2 tel que, pour tout g dans V_3,

(3) $$[\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0) + a, \eta(g, 0) + b))] \cap A(g, \beta) = \varnothing.$$

Il résulte alors de (2) et (3) que, pour g dans V_3, nous avons

$$[\psi(g)(P(\alpha(g); \eta(g, 0), \eta(g, 0) + b))] \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\}.$$

Alors, (1) entraîne que

$$(h_1(g)(I)) \cap A(g, \beta) = \{h_1(g)(0)\},$$

d'où l'affirmation 3.

Avec la fonction β de l'affirmation 3, nous pouvons définir une fonction continue $K: E_0(I, D) \times I \to E(I, \mathbb{R}^2)$ par

$$K(f, s)(t) = \begin{cases} (t - s\beta(f))m(f) + h_1(f)(0), & 0 \leq t \leq s\beta(f), \\ h_1(f)\left(\dfrac{t - s\beta(f)}{1 - s\beta(f)}\right), & s\beta(f) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si β est assez petite, la fonction H_2 définie sur $E_0(I, D) \times I$ par

$$H_2(f, s) = r \circ K(f, s)$$

prend ses valeurs dans $E_0(I, D)$; soit $h_2(f) = H_2(f, 1)$. Définissons alors H_3: $E_0(I, D) \times I \to E_0(I, D)$ par

$$H_3(f, s)(t) = h_2(f)([(1 - s) + s\beta(f)]t).$$

Soit $h_3(f) = H_3(f, 1)$; c'est une paramétrisation linéaire d'un segment d'origine $h_3(f)(0) = 0$ et de longueur $|h_3(f)(1)| = \beta(f)|m(f)|$. Définissons enfin $H_4\colon E_0(I, D) \times I \to E_0(I, D)$ par

$$H_4(f, s)(t) = \left[(1-s)|h_3(f)(1)| + \frac{s}{2}\right] \frac{h_3(f)(1)}{|h_3(f)(1)|} t.$$

Il est clair que $H_4(f, 0) = h_3(f)$ et que $H_4(f, 1)$ est une paramétrisation linéaire d'un segment d'origine 0 et de longueur $1/2$, donc $H_4(f, 1)$ appartient à S. L'homotopie H s'obtient en juxtaposant H_1, H_2, H_3 et H_4.

5. Le type topologique de $E(I, M)$

Nous prouverons dans cette section le fait suivant.

5.1. **Proposition.** *Pour toute surface sans bord M, $E(I, M)$ est homéomorphe à $U(M) \times l^2$.*

Démonstration. Puisque tout arc dans M a un voisinage qui est un disque, $E(I, M)$ est localement homéomorphe à $E(I, D)$, donc est un rétracte absolu de voisinage d'après le lemme 3.1. Comme il a été indiqué dans l'introduction, il découle alors de résultats de Geoghegan [2] et Toruńczyk [10] que $E(I, M)$ est une l^2-variété. Puisque les l^2 variétés sont topologiquement déterminées par leur type d'homotopie [5], il ne reste plus qu'à vérifier que $E(I, M)$ a le type d'homotopie de $U(M)$, ce que nous ferons par une suite de lemmes.

Nous noterons $T(M)$ le fibré tangent à M, π la projection naturelle de $T(M)$ sur M, M_0 la section nulle de $T(M)$, $T_m(M)$ l'espace tangent à M au point m, et 0_m le vecteur nul de $T_m(M)$. La structure riemannienne de M induit sur chaque $T_m(M)$ une norme, que nous noterons $\| \ \|_m$. Pour m dans M et $\varepsilon > 0$, nous posons

$$Q_m(\varepsilon) = \{v \in T_m(M) | \, \|v\|_m < \varepsilon\}.$$

Nous noterons λ l'application exponentielle de M, qui est définie sur un voisinage de M_0 dans $T(M)$, et à valeurs dans M. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour la définition et les propriétés élémentaires de cette application. Il nous suffit de savoir que λ est une fonction différentiable vérifiant $\lambda(0_m) = m$ pour tout m, et de connaître le lemme suivant:

5.2. **Lemme.** *Il existe un voisinage ouvert V de M_0 dans $T(M)$ tel que la fonction μ définie sur V par $\mu(v) = (\pi(v), \lambda(v))$ soit un difféomorphisme de V sur un voisinage W de la diagonale de $M \times M$.*

Voir [4, pp. 61–64] pour la démonstration de ce lemme.

Le lemme 5.2 nous permet de trouver une fonction continue $\varepsilon\colon M \to]0, 1]$ telle que $Q_m(\varepsilon(m)) \subset V$ pour tout m. Posons $W(m) = \lambda(Q_m(\varepsilon(m)))$; d'après le lemme 5.2 et le choix de ε, c'est un voisinage ouvert de m dans M, et $\lambda|Q_m(\varepsilon(m))$ est un difféomorphisme de $Q_m(\varepsilon(m))$ sur W_m. Posons

$$E^\varepsilon(I, M) = \{f \in E(I, M) | f(I) \subset W(f(0))\}.$$

5.3. **Lemme.** *L'inclusion de $E^\varepsilon(I, M)$ dans $E(I, M)$ est une équivalence homotopique.*

Démonstration. En utilisant la continuité de ε et le lemme 5.2, on construit facilement une fonction continue $\alpha\colon E(I, M) \to]0, 1]$ telle que $f([0, \alpha(f)]) \subset$

$W(f(0))$ pour tout f. Alors, la fonction $H\colon\ E(I, M)\times I \to E(I, M)$ définie par

$$H(f, s)(t) = f((1-s)+s\alpha(f))t)$$

vérifie $H(f, 0) = f$, $H(f, 1) \in E^{\varepsilon}(I, M)$ pour tout f, et $H(E^{\varepsilon}(I, M)\times I) \subset E^{\varepsilon}(I, M)$. Le lemme résulte de ces propriétés.

Posons

$$V_m^{\varepsilon}(M) = \{f \in E(I, T(M)) | f(0) = 0_m \text{ et } f(I) \subset Q_m(\varepsilon(m))\} \qquad (m \in M),$$
$$V^{\varepsilon}(M) = \bigcup_{m\in M} V_m^{\varepsilon}(M).$$

5.4. **Lemme.** *$E^{\varepsilon}(I, M)$ et $V^{\varepsilon}(M)$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Il résulte facilement du lemme 5.2 que la fonction $\Lambda\colon V^{\varepsilon}(M)\to E(I, M)$ définie par $\Lambda(f) = \lambda\circ f$ est un homéomorphisme de $V^{\varepsilon}(M)$ sur $E^{\varepsilon}(I, M)$ envoyant chaque $V_m^{\varepsilon}(M)$ sur le sous-ensemble de $E^{\varepsilon}(I, M)$ formé des f tels que $f(0) = m$.

A tout vecteur v de $U(M)$, associons un élément $\Omega(v)$ de $V_m^{\varepsilon}(M)$, où $m = \pi(v)$, en posant

$$\Omega(v)(t) = \frac{\varepsilon(m)}{2} tv .$$

Nous obtenons ainsi un homéomorphisme Ω de $U(M)$ sur un sous-ensemble U de $V^{\varepsilon}(M)$.

Le lemme suivant, combiné avec les lemmes 5.3 et 5.4, achèvera donc la démonstration de la proposition 5.1.

5.5. **Lemme.** *L'inclusion de U dans $V^{\varepsilon}(M)$ est une équivalence homotopique.*

Pour prouver ce lemme, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

5.6. **Lemme.** *Soient X, Y des rétractes absolus de voisinage, $\mathscr{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ et $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ des recouvrements ouverts de X et Y resp. indexés par le même ensemble, et f une fonction continue de X dans Y telle que $f(U_j) \subset V_j$ pour tout j. Si, pour tout sous-ensemble fini $\{j_1, \dots, j_k\}$ de J, $f|U_{j_1}\cap\dots\cap U_{j_k}$ est une équivalence homotopique de $U_{j_1}\cap\dots\cap U_{j_k}$ dans $V_{j_1}\cap\dots\cap V_{j_k}$, alors f est une équivalence homotopique.*

Puisqu'une équivalence homotopique faible entre rétractes absolus de voisinage est une équivalence homotopique, ce lemme est un case particulier du théorème 5(b) de [1].

Démonstration du lemme 5.5. Il est facile de vérifier, à l'aide du lemme 5.2, que $E^{\varepsilon}(I, M)$ est un ouvert de $E(I, M)$, donc un rétracte absolu de voisinage; d'après le lemme 5.4, il en est de même de $V^{\varepsilon}(M)$. Soit $\{M_j\}_{j\in J}$ l'ensemble des ouverts de M qui sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Pour j dans M, posons $V_j = \bigcup_{m\in M_j} V_m^{\varepsilon}(M)$ et $U_j = V_j\cap U$. Alors, $\{V_j\}_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de $V^{\varepsilon}(M)$ stable par intersection finie, donc, d'après le lemme 5.6, il suffit de prouver que, pour tout j, l'inclusion de U_j dans V_j est une équivalence homotopique.

Fixons j. Soit χ un difféomorphisme de M_j sur un ouvert 0 de $\mathbb{R}^2$. Définissons un homéomorphisme ψ de $\pi^{-1}(M_j)$ sur $0 \times \mathbb{R}^2$ en posant

$$\psi(v) = \begin{cases} \left(\chi(m), \dfrac{\|v\|_m}{\varepsilon(m)} \dfrac{\chi'_m(v/\|v\|_m)}{\|\chi'_m(v/\|v\|_m)\|}\right) & \text{si } v \neq 0_m, \\ (\chi(m), 0) & \text{si } v = 0_m, \end{cases}$$

où $m = \pi(v)$ et $\chi'_m\colon\ T_m(M) \to \mathbb{R}^2$ est la différentielle de χ au point m. Alors, $\psi(Q_m(\varepsilon(m))) = \{\chi(m)\} \times D$, et l'on vérifie que, S et $E_0(I, D)$ étant comme dans la section 4, on obtient un homéomorphisme Ψ de (V_j, U_j) sur $0 \times (E_0(I, D), S)$ en posant $\Psi(f) = \psi \circ f$. Le lemme 4.1 entraîne alors le résultat cherché.

6. Démonstration du théorème 1.1

Puisque $E(I, M)$ est homéomorphe à $U(M) \times l^2$, il suffit, d'après le théorème 6 de [12], de montrer que chaque élément f de $E(I, M)$ a un voisinage V tel que $(V, V \cap E_{\mathrm{PL}}(I, M))$ soit homéomorphe à (l^2, l^2_f). Mais $f(I)$ a un voisinage W dans M qui est PL-homéomorphe à D; alors $E(I, W)$ est un voisinage de f et $(E(I, W), E_{\mathrm{PL}}(I, W))$ est homéomorphe à $(E(I, D), E_{\mathrm{PL}}(I, D))$. Il suffit donc de considérer le cas où $M = D$ et, toujours d'après le théorème 6 de [12], il suffit alors de montrer que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(A) $E_{\mathrm{PL}}(I, D)$ est réunion dénombrable de compacts de dimension finie,

(B) pour tout compact de dimension finie C contenu dans $E(I, D)$, tout compact C' contenu dans $C \cap E_{\mathrm{PL}}(I, D)$, et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de $E(I, D)$, il existe un plongement H de C dans $E_{\mathrm{PL}}(I, D)$ qui est $\mathscr{U}$-proche de l'inclusion et vérifie $H|C' = \mathrm{id}$.

La condition (A) a été prouvée par Geoghegan [3, théorème 1.9]. Pour vérifier (B), nous avons besoin de quelques préliminaires.

Prolongeons chaque élément f de $E(I, D)$ en une fonction continue $\hat{f}$ de $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ dans D en posant $\hat{f}(t) = f(1)$ pour $t \geq 1$. Pour f dans $E(I, D)$ et $0 < \varepsilon \leq 1/2$, définissons une fonction continue $\hat{\Xi}(f, \varepsilon)$ de $\mathbb{R}^+$ dans D comme suit.

$$\hat{\Xi}(f, \varepsilon)(n\varepsilon) = \hat{f}(n\varepsilon) \quad \text{pour } n \text{ entier } \geq 0,$$
$$\hat{\Xi}(f, \varepsilon)|[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon] \text{ est linéaire pour tout } n.$$

Soit $\Xi(f, \varepsilon)$ la restriction de $\hat{\Xi}(f, \varepsilon)$ à I.

6.1. **Lemme.** *Il existe une fonction continue* $\alpha\colon\ E(I, D)\times]0, 1/2] \to]0, 1/2]$ *telle que la fonction* $\Psi\colon\ E(I, D) \times [0, 1/2] \to \mathscr{C}(I, D)$ *définie par*

$$\Psi(f, 0) = f, \quad \Psi(f, s) = \Xi(\Phi(f, s), \alpha(f, s)) \quad \textit{pour } 0 < s \leq 1/2,$$

soit continue et à valeurs dans $E(I, D)$.

Démonstration. En utilisant la continuité de Φ et le fait que toute fonction continue sur I est uniformément continue, il est facile de trouver une fonction continue α_1 de $E(I, D)\times]0, 1/2]$ dans $]0, 1/2]$ vérifiant

$$(1) \qquad d(\Phi(f, s), \Xi(\Phi(f, s), \varepsilon)) < s \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leq \alpha_1(f, s).$$

Affirmation. *Pour tout* (f, s) *dans* $E(I, D)\times]0, 1/2]$, *il existe un voisinage* V *de* (f, s) *dans* $E(I, D)\times]0, 1/2]$ *et un nombre* $0 < \eta \leq 1/2$ *tels que* $\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon) \in E(I, D)$ *pour* $(f', s') \in V$ *et* $0 < \varepsilon \leq \eta$.

Supposant cette affirmation démontrée, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert localement fini $\{V_j\}_{j\in J}$ de $E(I, D)\times]0, 1/2]$ et, pour tout j, un nombre $0 < \eta_j \leq 1/2$ tels que $\Xi(\Phi(f, s), \varepsilon) \in E(I, D)$ pour (f, s) dans V_j et $0 < \varepsilon \leq \eta_j$ $(j \in J)$. Soit $\{\mu_j\}_{j\in J}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{V_j\}_{j\in J}$. Définissons la fonction continue α_2 de $E(I, D)\times]0, 1/2]$ dans $]0, 1/2]$ par $\alpha_2(f, s) = \sum_{j\in J} \mu_j(f, s)\eta_j$. Il est clair que α_2 vérifie

$$\Xi(\Phi(f, s), \varepsilon) \in E(I, D) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leq \alpha_2(f, s). \tag{2}$$

Prenons $\alpha(f, s) = \min(\alpha_1(f, s), \alpha_2(f, s))$. La relation (1) et la continuité de Φ garantissent la continuité de Ψ, tandis que la relation (2) garantit que Ψ est à valeurs dans $E(I, D)$.

Reste à prouver l'affirmation. Pour cela, considérons d'abord un plongement continûment différentiable g de I dans D tel que $g'(t) \neq 0$ pour tout t. Soit $m > 0$ tel que $|g'(t)| > m$ pour tout t, et soit $\delta > 0$ tel que $0 < |t - t'| < \delta$ entraîne $|g'(t) - g'(t')| < m/\sqrt{2}$. Montrons que si $0 < t' - t < \delta/2$ et $0 < \varepsilon \leq \delta/2$, alors $\Xi(g, \varepsilon)(t) \neq \Xi(g, \varepsilon)(t')$. Soient n et n' tels que $n\varepsilon \leq t < (n+1)\varepsilon$ et $n'\varepsilon \leq t' < (n'+1)\varepsilon$. Comme $t < t' \leq 1$, $n\varepsilon < 1$, donc $\hat{g}(n\varepsilon) \neq \hat{g}((n+1)\varepsilon)$ puisque g est un plongement, donc la restriction de $\Xi(g, \varepsilon)$ à $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ est injective; par suite, nous pouvons supposer $n < n'$. Soit $t_0 = (n+1)\varepsilon$; alors

$$|t_0 - (n'+1)\varepsilon| \leq |t - t'| + |t' - (n'+1)\varepsilon| < \delta/2 + \varepsilon \leq \delta.$$

Le théorème des accroissements finis nous donne, pour $|h| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} |g(t_0 + h) - (g(t_0) + hg'(t_0))| &\leq |h| \sup_{0\leq\theta\leq 1} |g'(t_0 + \theta h) - g'(t_0)| \\ &< |h|\frac{m}{\sqrt{2}} \leq |h|\frac{|g'(t_0)|}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Soient D_1 et D_2 les droites passant par $g(t_0)$ et faisant avec la tangente L à g en t_0 un angle (non orienté) de $\pi/4$. La distance du point $g(t_0) + hg'(t_0)$ à D_1 ou D_2 est égale à $|h|\,|g'(t_0)|/\sqrt{2}$. L'inégalité (3) montre donc que, pour $0 < |h| \leq \delta$, le point $g(t_0 + h)$ est contenu dans l'intérieur du cône K d'axe L et de sommet $g(t_0)$ limité par D_1 et D_2, donc, si K_1 et K_2 sont les deux demi-cônes en lesquels $g(t_0)$ divise K, $g(t_0 + h)$ est contenu dans l'intérieur de l'un d'eux pour $0 < h \leq \delta$, et dans l'intérieur de l'autre pour $-\delta \leq h < 0$. Alors, les inégalités

$$t_0 - \delta/2 \leq n\varepsilon \leq t < t_0 \leq n'\varepsilon \leq t' \leq \min(1, (n'+1)\varepsilon) \leq t_0 + \delta$$

et la définition de $\Xi(g, \varepsilon)$ entraînent que $\Xi(g, \varepsilon)(t)$ est dans l'interieur de l'un des ensembles K_1 et K_2 tandis que $\Xi(g, \varepsilon)(t')$ est dans l'autre, d'où $\Xi(g, \varepsilon)(t) \neq \Xi(g, \varepsilon)(t')$.

Des arguments utilisés à la section 4 (voir la démonstration de l'affirmation 2 du lemme 4.1) montrent que $\Phi(f, s)$ est, pour $s > 0$, un plongement continûment différentiable de I dans D dont la dérivée ne s'annule pas et dépend continûment de (f, s). Ce qui précède nous permet alors de trouver un voisinage V_1 de (f, s) dans $E(I, D)\times]0, 1/2]$ et un nombre $\delta > 0$ tels que, pour

(f', s') dans V_1 et $0 < \varepsilon \leq \delta$, on ait

$$\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t) \neq \Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t') \quad \text{si } 0 < |t - t'| < \delta.$$

En utilisant la continuité de Φ et le fait que $\Phi(f, s)$ est un plongement, il est facile de trouver un voisinage V_2 de (f, s) dans $E(I, D)\times]0, 1/2]$ et un nombre $0 < \eta \leq \delta$ tels que, pour (f', s') dans V_2 et $0 < \varepsilon \leq \eta$, on ait

$$\Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t) \neq \Xi(\Phi(f', s'), \varepsilon)(t') \quad \text{si } |t - t'| \geq \delta.$$

Alors, $V = V_1 \cap V_2$ vérifie l'affirmation.

Vérification de (B). Prenons une fonction continue $\omega\colon\ E(I, D) \to]0, 1]$ vérifiant

(4) $\forall f \in E(I, D)$, la boule ouverte de centre f et de rayon $2\omega(f)$ est contenue dans un élément de $\mathscr{U}$.

Puisque la fonction continue Ψ vérifie $\Psi(f, 0) = f$, nous pouvons trouver une fonction continue $\beta\colon\ C \to]0, 1/2]$ vérifiant

$$\beta^{-1}(0) = C', \tag{5}$$

$$d(f, \Psi(f, \beta(f))) \leq \min(\omega(f), \tfrac{1}{4}d(f, C')) \quad \forall f \in C. \tag{6}$$

Posons $F(f) = \Psi(f, \beta(f))$ et $\gamma(f) = \frac{1}{2}\alpha(f, \beta(f))$, où α est comme dans l'énoncé du lemme 6.1. Alors, si $f \in C\backslash C'$, il résulte de la définition de Ψ que $F(f)$ est un plongement PL dont la restriction à $[0, 2\gamma(f)]$ est linéaire.

Pour f dans $C\backslash C'$ et $\xi > 0$, définissons une fonction $G(f, \xi)$ de I^2 dans $\mathbb{C}$ par

$$G(f, \xi)(t, u) = F(f)(t\gamma(f)) + \frac{i\xi u(F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0))}{|F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0)|}. \tag{7}$$

Puisque $F(f)|[0, 2\gamma(f)]$ est linéaire, $G(f, \varepsilon)$ est un plongement affine de I^2 dans $\mathbb{C}$ dont l'image est un rectangle vérifiant

$$G(f, \xi)(I^2) \cap F(f)([0, 2\gamma(f)]) = F(f)([0, \gamma(f)]). \tag{8}$$

En outre, nous avons

$$d(G(f, \xi)(t, u), F(f)(t\gamma(f))) \leq \xi u, \tag{9}$$

ce qui nous permet de trouver une fonction continue $\xi\colon\ C\backslash C' \to]0, 1]$ vérifiant, pour f dans $C\backslash C'$ et (t, u) dans I^2,

$$\begin{aligned} &d(G(f, \xi(f))(t, u), F(f)(t\gamma(f)) \\ &\quad < \min[\omega, (f), \tfrac{1}{4}d(f, C'), d(F(f)(I), \mathbb{C}\backslash D), \\ &\qquad\qquad d(F(f)([0, \gamma(f)]), F(f)([2\gamma(f), 1]))]. \end{aligned} \tag{10}$$

Puisque C est de dimension finie, nous pouvons trouver un entier k et un plongement ν de C dans I^k. Construisons un plongement ρ de I^k dans $E_{\mathrm{PL}}(I, I^2)$ comme suit. Prenons $2k+3$ points $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2k+2} = 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_k)$ dans I^k, définissons $\rho(x)$ comme suit:

$\rho(x)(t_{2i}) = 0, \qquad 0 \leq i \leq k+1,$

$\rho(x)(t_{2i-1}) = \frac{1}{2}(1 + x_i), \qquad 1 \leq i \leq k,$

$\rho(x)(t_{2k+1}) = 1,$

$\rho(x)$ est linéaire sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}], \qquad 0 \leq i < 2k+2.$

Il est clair que ρ est continue. Si $x = (t_1, \ldots, x_k) \neq x' = (x'_1, \ldots, x'_k)$, il y a un i tel que $x_i \neq x'_i$, d'où $\rho(x)(t_{2i-1}) \neq \rho(x')(t_{2i-1})$, donc ρ est bien un plongement. Pour f dans $C \backslash C'$, nous pouvons maintenant définir une fonction continue $H(f)$ de I dans $\mathbb{C}$ par

$$H(f)(t) = \begin{cases} F(f)(t), & \text{si } \gamma(f) \leq t \leq 1, \\ G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(t/\gamma(f))), & 0 \leq t \leq \gamma(f). \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $\rho \circ \nu(f)(1) = (1, 0)$ et $G(f, \xi(f))(1, 0) = F(f)(\gamma(f))$. La condition (10) entraîne que $H(f)([0, \gamma(f)])$ est contenu dans $D \backslash F(f)([2\gamma(f), 1])$; combiné avec (8), cela montre que $H(f)$ est un plongement de I dans D. Puisque $F(f)$, $\rho \circ \nu(f)$ et $G(f, \xi(f))$ sont PL, il en est de même de $H(f)$. Puisque F, G, ξ, ρ, ν et γ sont continues, H aussi. Les conditions (6) et (10) garantissent que

$$(11) \qquad d(f, H(f)) \leq \tfrac{1}{2} d(f, C') \quad \forall f \in C \backslash C'.$$

Par suite, H se prolonge en une fonction continue de C dans $E_{\mathrm{PL}}(I, D)$ si l'on pose $H(f) = f$ pour f dans C'. D'après (6) et (10), nous avons $d(f, H(f)) < 2\omega(f)$, donc (4) entraîne que H est $\mathscr{U}$-proche de l'inclusion. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que H est un plongement; comme (11) entraîne que $H(C') \cap H(C \backslash C') = \varnothing$, il suffit de montrer que $H | C \backslash C'$ est injective. Soient donc f et f' deux points de $C \backslash C'$ tels que $H(f) = H(f')$. Remarquons que, d'après la définition de $H(f)$, les $2k+2$ premiers points anguleux de l'arc polygonal $H(f)(I)$, en partant de $H(f)(0)$, sont $H(f)(t_1\gamma(f)), \ldots,$ $H(f)(t_{2k+2}\gamma(f))$; comme il en est de même pour $H(f')$, nous avons nécessairement $t_1\gamma(f) = t_1\gamma(f')$, d'où $\gamma(f) = \gamma(f')$ et $H(f)(t_i\gamma(f)) = H(f')(t_i\gamma(f))$ pour $1 \leq i \leq 2k+2$. Nous avons

$$\begin{aligned} H(f, 0) &= G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(0)) = G(f, \xi(f))(0, 0) = F(f)(0), \\ H(f, t_{2k+2}\gamma(f)) &= H(f, \gamma(f)) = G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(1)) \\ &= G(f, \xi(f))(1, 0) = F(f)(\gamma(f)). \end{aligned}$$

Les relations analogues pour f' entraînent alors $F(f)(0) = F(f')(0)$ et $F(f)(\gamma(f)) = F(f')(\gamma(f))$. Puisque $F(f)$ et $F(f')$ sont linéaires sur $[0, \gamma(f)]$, nous avons donc

$$(12) \qquad F(f)(t\gamma(f)) = F(f')(t\gamma(f)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

De plus,

$$\begin{aligned} H(f, t_{2k+1}\gamma(f)) &= G(f, \xi(f))(\rho \circ \nu(f)(t_{2k+1})) = G(f, \xi(f))(t_{2k+1}, 1) \\ &= F(f)(t_{2k+1}\gamma(f)) + \frac{i\xi(f)(F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0))}{|F(f)(\gamma(f)) - F(f)(0)|}. \end{aligned}$$

La formule analogue pour $H(f', t_{2k+1}\gamma(f))$, combinée avec (12), nous donne alors $\xi(f) = \xi(f')$, d'où $G(f, \xi(f)) = G(f', \xi(f'))$ d'après (7). Comme nous avons, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\rho \circ \nu(f)(t) = [G(f, \xi(f))]^{-1}(H(f)(t\gamma(f))),$$

ainsi qu'une formule analogue pour f', nous obtenons $\rho \circ \nu(f) = \rho \circ \nu(f')$, d'où $f = f'$ puisque ρ et ν sont des plongements.

Bibliographie

1. T. tom Dieck, *Partitions of unity in homotopy theory*, Compositio Math. **23** (1971), 159–167.
2. R. Geoghegan, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions.* I, Topology **11** (1972), 159–177.
3. ——, *On spaces of homeomorphisms, embeddings and functions.* II: *The piecewise linear case*, Proc. London Math. Soc. (3) **27** (1973), 463–483.
4. D. Gromoll, W. Klingenberg, and W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Math., vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
5. D. W. Henderson and R. M. Schori, *Topological classification of infinite dimensional manifolds by homotopy type*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 121–124.
6. J. Keesling, *Using flows to construct Hilbert space factors of function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **161** (1971), 1–24.
7. R. Luke and W. K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 275–285.
8. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea, New York, 1977.
9. K. Sakai, *An embedding space triple of the unit interval into a graph and its bundle structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 1171–1176.
10. H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, Fund. Math. **86** (1974), 53–67.
11. N. R. Wagner, *A continuity property with applications to the topology of* 2-*manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 369–393.
12. J. E. West, *The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of infinite dimensional Hilbert space*, Pacific J. Math. **34** (1970), 257–267.

Université de Paris VI, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France