L'INTÉGRALE DE RIEMANN-LIOUVILLE ET LE PROBLÈME DE CAUCHY.

PAR

MARCEL RIESZ

à LUND.

Avant-Propos.

... nonumque prematur in annum.
Horace.

Les recherches que je présente ici datent d'il y a longtemps. Celles dont se composent les cinq premiers Chapitres sont, à quelques exceptions près, des années 1933—1936. J'en ai donné un compte rendu très sommaire au Congrès international des mathématiciens qui a eu lieu à Oslo en 1936, et un résumé assez complet dans une Conférence à la Réunion internationale des mathématiciens, tenue à Paris en Juillet 1937 sous les auspices de la Société mathématique de France. Cette conférence, publiée par les soins de la Société (Paris 1939), servira, légèrement remaniée, d'Introduction au présent ouvrage. Au moment où j'ai donné le résumé en question, mes études visaient exclusivement les équations à coefficients constants, et ce n'est que pendant l'été de 1938 que j'ai réussi à étendre la méthode aux équations à coefficients variables de signature lorentzienne, dont la théorie, due à M. Hadamard, constitue un des plus beaux titres de gloire de ce grand savant. J'ai publié une esquisse de ces dernières études dans une *Note additionnelle* imprimée avec la susdite conférence; ces études constituent ici le dernier Chapitre.

Un ami dévoué, M. K.-G. Hagstroem, a été pour moi un collaborateur inappréciable dans la poursuite de ces recherches. Il en a pris les premières notes, qui m'ont été par la suite d'un grand secours, et c'est encore lui qui m'a aidé dans la rédaction finale. Je tiens aussi à remercier mes amis MM. O. Frostman et W. Feller qui, chacun de son côté, m'ont prêté un précieux concours.

Introduction.[1]

C'est la notion de la *partie finie* de certaines intégrales due à M. Hadamard qui forme le point de départ des recherches dont j'aurai l'honneur de vous entretenir dans cette conférence. On connaît les applications brillantes à la théorie des équations aux dérivées partielles que M. Hadamard a données de la notion qu'il a créée[2]. Chez lui il s'agit surtout d'équations à coefficients variables, tandis que la méthode que nous allons développer ne s'applique qu'à des équations à coefficients constants[3]. En revanche, elle permet de donner pour ces équations une solution du problème de Cauchy qui est la même pour les dimensions impaires et paires.

Considérons d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt. \text{ [4]}$$

Elle converge pour $\alpha > 0$ et satisfait aux relations fondamentales

$$I^\alpha (I^\beta) = I^{\alpha+\beta}, \qquad \frac{d}{dx}(I^{\alpha+1}) = I^\alpha. \tag{1}$$

Dans des conditions de dérivabilité convenables, il s'agit maintenant d'étendre la définition de cette intégrale à des valeurs de α pour lesquelles elle cesse de converger. M. Hadamard arrive à cette extension pour des indices négatifs non entiers en retranchant de l'intégrale divergente certaines parties infinies d'ordre fractionnaire. Ce qui reste c'est alors la partie finie de l'intégrale. On peut atteindre le même but, et cela aussi pour l'indice zéro et les indices entiers négatifs, par un procédé qui me semble très naturel, celui du prolongement

---

[1] M. Riesz 2; les chiffres après les noms d'auteurs se rapportent à la Bibliographie à la fin de cet ouvrage.

[2] *Cf.* Hadamard 1.

[3] L'extension de la méthode à des coefficients variables, qui constitue le dernier Chapitre, est postérieure à la Conférence reproduite ici.

[4] C'est à partir de la même intégrale, mais sans le facteur $\Gamma(\alpha)$ au dénominateur, que M. Hadamard définit la »partie finie» pour les valeurs négatives fractionnaires de α. L'absence dudit facteur est le seul obstacle à l'extension de cette notion à la valeur zéro et aux valeurs négatives entières de α.

analytique par rapport à l'indice α. En supposant l'existence d'un assez grand nombre de dérivées, on obtient au moyen des intégrations par parties

$$I^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k} + I^{\alpha+n} f^{(n)}(x).$$

La dernière expression s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{\alpha+n-1}\,dt,$$

l'intégrale étant convergente pour $\alpha > -n$. Le prolongement analytique se trouve donc effectué pour tous ces indices. Bien entendu, le prolongement en question peut être obtenu par beaucoup d'autres procédés. L'intégrale prolongée satisfait, sauf dans des cas exceptionnels faciles à préciser, aux relations fondamentales (1) dont la seconde pourra aussi servir à effectuer le prolongement en question.

Pour les indices $\alpha = 0$ et entiers négatifs $\alpha = -n$ on trouve, comme il fallait s'y attendre,

$$I^0 f(x) = f(x), \qquad I^{-n} f(x) = f^{(n)}(x).$$

Arrêtons-nous un instant sur les dernières relations. On voit que, pour tout autre indice, $I^\alpha f(x)$ est une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs que $f(t)$ admet entre a et x, tandis que, pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, $I^\alpha f(x)$ a une valeur de caractère local; ce ne sont que les valeurs admises au voisinage infinitésimal de x qui interviennent. *Voilà en germe le principe de Huygens*[1]. C'est évidemment au facteur $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, s'annulant pour les indices en question, que ces indices doivent leur caractère exceptionnel. D'ailleurs, même sans effectuer le prolongement analytique d'une façon explicite, on voit nettement que le prolongement de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-\delta} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (\delta > 0)$$

est zéro pour $\alpha = 0$ ou entier négatif, parce que l'intégrale ne cesse jamais de converger. Les valeurs de $f(t)$ qui interviennent dans cette intégrale ne donneront donc aucune contribution à la valeur finale.

[1] Nous entendons ici et dans tout ce qui suit par principe de Huygens la *mineure* du principe dans la terminologie de M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 75). D'après ce principe, une perturbation lumineuse étant localisée à l'instant $t = 0$ au voisinage immédiat du point O, son effet sera localisé, pour $t = t'$, au voisinage immédiat de la surface d'une sphère de centre O et de rayon ct', c désignant la vitesse de la lumière.

J'ai insisté sur ces questions élémentaires bien familières à vous tous, parce qu'elles nous permettront de bien saisir la différence qu'on rencontre dans la solution du problème de Cauchy de l'équation des ondes, posé pour un nombre pair ou pour un nombre impair de variables.

Considérons dans l'espace à m dimensions les points P et Q aux coordonnées respectives $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Nous introduisons la distance lorentzienne de ces points

$$r_{PQ} = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2 - \cdots - (x_m-\xi_m)^2},$$

en supposant que l'expression qui figure sous le signe racine carrée soit $\geqq 0$. En considérant le point P comme fixe et le point Q comme variable, $r_{PQ}^2 = 0$ définit la nappe du cône de lumière au sommet P, $r_{PQ}^2 > 0$ définit son intérieur, $x_1 - \xi_1 > 0$ le cône rétrograde et $x_1 - \xi_1 < 0$ le cône direct. C'est le cône rétrograde que nous allons considérer en général, en le désignant par D^P. Soit encore S une surface (c'est-à-dire une variété à $m-1$ dimensions) qui, suivant la terminologie de M. Hadamard, ait une *orientation d'espace*. Cela veut dire qu'on a pour tout déplacement infinitésimal sur la surface $dx_1^2 - dx_2^2 - \cdots - dx_m^2 < 0$. On admet aussi que la surface soit assez régulière pour que les dérivations qui interviendront plus tard puissent être effectuées. Le domaine limité par la nappe rétrograde et la surface S sera désigné par D_S^P.

Cela étant, nous posons

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ, \tag{2}$$

avec

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right). \tag{3}$$

Cette intégrale converge pour $\alpha > m-2$ et l'on vérifie facilement qu'elle satisfait aux relations fondamentales

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}, \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha, \tag{4}$$

où l'on a désigné par Δ l'opérateur des ondes

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

Pour les indices $\alpha \leqq m-2$ l'intégrale (2) se définit au moyen de prolongement analytique par rapport à α, bien entendu dans des conditions de régularité convenables portant sur la fonction f et sur la surface S. *On trouve en particulier* $I^0 f(P) = f(P)$. Remarquons que ce fait, qui est d'une importance capitale pour la suite, n'est nullement évident. En effet, I^0 est défini ici comme prolongement analytique de I^α qui ne converge que pour $\alpha > m-2$, et le prolongement en question n'existe que dans certaines conditions de dérivabilité(1). Des remarques analogues s'appliquent aux relations $I^{-2k} = \Delta^k$.

Il ressort de ce qui précède que notre procédé d'intégration tire son origine de l'opérateur différentiel du second ordre Δ. On a vu en effet que $\Delta I^2 = 1$, c'est-à-dire que I^2 est dans un certain sens l'inverse de l'opérateur des ondes. Or on peut construire un procédé qui, dans le même sens, forme l'inverse de l'opérateur différentiel du premier ordre *gradient* ou *nabla,* cet opérateur étant pris au sens lorentzien. Il est manifeste que ce procédé devra être de caractère vectoriel(2).

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ les composantes d'un vecteur arbitraire X et définissons *les nombres de Clifford* comme symboles de calcul ou comme vecteurs unitaires par la relation

$$X^2 = (X_1 e_1 + X_2 e_2 + \cdots + X_m e_m)^2 = X^2 - X_2^2 - \cdots - X_m^2.$$

Cette relation met en évidence les règles de calcul

$$e_1^2 = -e_2^2 = \cdots = -e_m^2 = 1$$

et

$$e_j e_k + e_k e_j = 0 \qquad (j \neq k).$$

L'opérateur $\nabla = e_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - e_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} - \cdots - e_m \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ a manifestement la propriété $\nabla^2 = \Delta$(3). Nous posons

$$J^\alpha f(P) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \left[\cos\frac{\pi\alpha}{2} I^\alpha f(P) - i \sin\frac{\pi\alpha}{2} \nabla \left[I^{\alpha+1} f(P) \right] \right],$$

l'opération ∇ pouvant être exécutée sous le signe $\int$. On a alors

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \qquad \nabla J^{\alpha+1} = J^\alpha, \qquad J^{2k} = I^{2k},$$

---

(1) Pour m impair ou pair il suffit de supposer l'existence des dérivées d'ordre $\leqq \dfrac{m+1}{2}$ ou $\leqq \dfrac{m}{2}$ respectivement.

(2) L'intégration vectorielle que j'esquisse ici ne figurait pas dans ma conférence. Je l'ai indiquée succinctement après la conférence en réponse à une question de M. Fréchet qui présidait à la séance.

(3) Depuis les travaux de M. Dirac, ces choses sont certainement bien familières à la plupart des lecteurs.

k étant un nombre entier. En particulier on a $J^0 f(P) = f(P)$ ou plus brièvement $J^0 = 1$. Signalons encore l'opérateur singulier remarquable

$$Of(P) = \nabla [I^1 f(P)]$$

qui satisfait à la relation $O^2 = 1$.

En remarquant que la plupart des considérations qui suivent s'appliquent — *mutatis mutandis* — aussi à nos intégrales vectorielles, retournons aux intégrales scalaires.

Définissons avec M. d'Adhémar *la conormale* n à la surface S au point Q (*la transversale* suivant la terminologie de M. Hadamard) par la relation

$$dx_1\, \delta x_1 - dx_2\, \delta x_2 - \cdots - dx_m\, \delta x_m = 0,$$

où d et δ désignent respectivement un déplacement arbitraire sur la surface et un déplacement sur la conormale. Cela étant, nous choisissons celle des deux directions admissibles QT qui rend le produit scalaire lorentzien des vecteurs QP et QT positif. Il vient alors par la formule de Green

$$I^\alpha u(P) = \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int\limits_{D_S^P} \Delta u(Q)\, r_{PQ}^{\alpha+2-m}\, dQ + \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int\limits_{S^P} \left[\frac{du(Q)}{dn} r_{PQ}^{\alpha+2-m} - u(Q) \frac{d r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{dn}\right] dS,$$

tous les éléments géométriques étant mesurés, ici et dans la suite, dans le sens lorentzien.

La formule ci-dessus qui contient une intégrale spatiale, une simple couche et une double couche peut se mettre sous une forme plus condensée. En effet, en posant d'une manière générale

$$(5)\qquad I_*^\alpha \overline{f, g, h}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} \left[g(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q) \frac{d r_{PQ}^{\alpha-m}}{dn}\right] dS,$$

on peut écrire

$$(6)\qquad I^\alpha u(P) = I_*^{\alpha+2}\, \overline{\Delta u,\ \frac{du}{dn},\ u}(P).$$

Avant d'aller plus loin, signalons quelques propriétés importantes du symbole I_*. On a

$$(7)\qquad I^\alpha I_*^\beta = I_*^{\alpha+\beta}, \qquad \Delta I_*^{\alpha+2} = I_*^\alpha,$$

et en outre

$$I_*^0 \overline{f, g, h}(P) = f(P). \tag{8}$$

La formule (6) conduit facilement à la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. En effet il s'ensuit pour $\alpha = 0$, grâce à la relation $I^0 u = u$,

$$u(P) = I_*^2 \overline{\Delta u, \frac{du}{dn}, u(P)}, \tag{9}$$

c'est-à-dire que la valeur de u au point P peut se calculer par une intégrale spatiale portant sur $\Delta(u)$ et étendue à un certain volume D_S^P, par une simple couche et une double couche portant respectivement sur $\frac{du}{dn}$ et u et étendues à une certaine portion S^P de la surface S. Malheureusement, d'après ce que nous avons dit plus haut, ces intégrales sont en général divergentes. En effet, elles ne convergent toutes que si l'on a $m \leqq 2$ (¹), l'une d'elles, l'intégrale de double couche, diverge déjà pour l'équation de M. Volterra ($m = 3$) et elles divergent toutes à partir de $m = 4$, correspondant à l'équation des ondes relative à l'espace ordinaire. Mais on pourra toujours définir ces intégrales par prolongement analytique, ce qui veut dire que, $I_*^\alpha \overline{\Delta(u), \frac{du}{dn}, u}$ étant convergent pour α assez grand ($\alpha > m$), on peut, dans les conditions de dérivabilité admises, obtenir I_*^2 par prolongement analytique.

La formule fait nettement ressortir la différence qu'il y a entre les cas de m impair et de m pair. Pour m impair, où l'on retrouve la formule de M. Hadamard, le facteur $\frac{1}{H_m(2)}$ ne s'évanouit pas, la solution sera donc fournie par une intégrale spatiale étendue au volume entier D_S^P et des intégrales étendues à la portion de surface entière S^P. Au contraire dans le cas de m pair (> 2), $\frac{1}{H_m(2)}$ s'annule à cause du facteur $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2+2-m}{2}\right)}$, et la formule finale ne sera pas influencée par les valeurs que u et ses dérivées prennent à l'intérieur du cône. L'intégrale spatiale se réduira à une intégrale étendue à la nappe du cône et

(¹) Néanmoins, même pour $m = 2$, la formule (9) donne une solution erronée, indépendante des valeurs de u sur S, si l'on l'applique au sens strict, c'est-à-dire en *substituant* $\alpha = 0$ dans le second membre de la formule (6). Par contre, la formule obtenue de (6) par prolongement analytique donne la solution correcte bien connue, où il entre les valeurs de u aux points d'intersection de S et des deux rayons de lumière issus de P.

les intégrales de surface à des intégrales étendues à l'intersection du cône avec la surface S. *Voilà le principe de Huygens: seuls les points d'univers situés sur la nappe rétrograde du cône au sommet P agissent sur ce point.* Le principe dérive donc du fait que l'opérateur I_*^2 a pour m pair (>2) un caractère quasi local, il n'y intervient que des points qui sont à distance zéro du point P.

En réalité notre formule n'était jusqu'ici qu'une formule de représentation du même caractère que la formule classique de Cauchy l'est pour les fonctions monogènes. Mais elle donne aussi la solution d'un problème aux limites, notamment celle du problème de Cauchy ([1]), si l'on admet, comme plus haut, que la surface S ait une orientation d'espace. En effet dans ce cas (et dans ce cas seulement) les domaines d'intégration deviennent infinitésimaux lorsque P s'approche indéfiniment de la surface.

Je termine cet exposé déjà trop long en donnant *une solution explicite* d'aspect profondément géométrique pour le cas de l'espace ordinaire, c'est-à-dire pour $m=4$. En écrivant l'équation sous la forme $\Delta(u)=f$, le second membre donne lieu à une intégrale étendue à la nappe du cône qui n'est que le potentiel retardé bien connu. Puisque je ne saurais rien dire de nouveau sur cette partie de la solution, je me restreins ici à l'équation homogène.

Posons d'une manière générale $R=R_{PQ}=r_{PQ}^2$ et désignons par s^P la variété à deux dimensions formée par l'intersection du cône au sommet P et de la surface S. En remettant à tout à l'heure l'explication des autres notations, nous écrivons ici la solution suivante du problème de Cauchy posé pour l'équation $\Delta(u)=0$, solution qu'on peut déduire de la solution générale (9),

$$u(P)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{s^P}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u-\frac{d_\nu u}{d_\nu R}\right]ds. \tag{10}$$

Vous voyez qu'il n'intervient dans la formule qu'une seule dérivée suivant une certaine direction ν qu'il faudra maintenant définir. Cela est très facile dans le cas classique considéré par Poisson où la surface S est le plan $x_1=0$. Alors ν n'est que l'image de la génératrice QP par rapport à ce plan. Dans le cas général la chose est un peu plus compliquée.

Par un élément infinitésimal à deux dimensions du bord s^P contenant le point Q il passe ∞^1 plans à trois dimensions. Formons l'image de la génératrice QP,

([1]) C'est le problème de résoudre l'équation $\Delta u=f$, la fonction f étant connue dans l'espace et les valeurs de u et de $\frac{du}{dn}$ étant données sur la surface S.

indéfiniment prolongée au delà de P, par rapport à l'un quelconque de ces plans, par exemple le plan tangent à S en Q, l'image étant prise dans la direction transversale au plan. Cette image, *indépendante du plan choisi*, donne la droite ν appartenant au point Q du bord. Les lignes ν, qui évidemment sont des rayons de lumière, engendrent une surface caractéristique Σ de l'équation des ondes, qui dans un certain sens peut être considérée comme l'image du cône au sommet P par rapport à la surface S. La surface Σ peut aussi être obtenue de la manière suivante. On fait décrire au point d'intégration Q le bord s^P et l'on considère les cônes rétrogrades qui ont leur sommet au point variable Q. Ces cônes enveloppent une surface à deux nappes. La nappe extérieure fait évidemment partie du cône original au sommet P, tandis que la nappe intérieure fait partie de la surface réglée Σ et la détermine entièrement.

La dérivée figurant dans notre formule est prise suivant la direction ν. La longueur lorentzienne des segments d'une telle droite étant nulle, on introduit R comme paramètre et forme la dérivée de u par rapport à R suivant ladite direction. Observons que $R = R_{PT}$ varie d'une manière linéaire sur une telle droite. En effet, T désignant un point quelconque de la droite ν appartenant à Q, R_{PT} est égal au double du produit scalaire lorentzien des vecteurs PQ et QT.

Il faut encore définir les valeurs R_1 et R_2 figurant dans notre formule. Remarquons à cet effet que les droites ν, qui sont en nombre ∞^2, forment évidemment une congruence de droites, qui est d'ailleurs d'un caractère très particulier. En nous trouvant dans quatre dimensions, ce n'est que grâce à cette dernière circonstance que, pour chaque droite fixe ν appartenant à un certain point Q, il existe en général deux directions de déplacements infinitésimaux $\delta_1 Q$ et $\delta_2 Q$ telles que les droites correspondantes coupent la droite ν. Cela veut dire que la congruence admet en général *deux foyers* Q_1 et Q_2 sur chacune de ses droites. Dans la formule ci-dessus on a posé, pour abréger,

$$R_{PQ_1} = R_1, \qquad R_{PQ_2} = R_2.$$

Le lieu géométrique des foyers est la surface focale, *la caustique*, de la congruence, qui dans un certain sens peut être interprétée comme l'image du point P par rapport à la surface S. Dans le cas classique de Poisson, elle se réduit à l'image *distincte* de ce point par rapport au plan $x_1 = 0$, et notre solution se réduit immédiatement à celle de Poisson.

En résumé, le principe de Huygens dit que la valeur de u au point P est déterminée par les valeurs que u et ses dérivées premières admettent en des points Q appartenant au passé-lumière du point P. Notre formule y apporte un complément qui doit présenter un certain intérêt, c'est que les seules dérivées qui y entrent sont prises suivant certains rayons de lumière, c'est-à-dire que seul le passé-lumière infinitésimal de la fonction u aux points Q y intervient. L'intervention de la surface (congruence) Σ et de sa caustique dans notre solution jette un jour nouveau sur les rapports entre l'optique physique et l'optique géométrique. Bien entendu, il s'agit ici d'une optique géométrique à quatre dimensions.

CHAPITRE I.

Intégrale de Riemann-Liouville.

1. Définition et formule de composition. — Posons

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (x > a), \tag{1}$$

a étant un nombre fini ou égal à $-\infty$. Pour fixer les idées, nous supposons que $f(t)$ soit une fonction continue dans l'intervalle d'intégration et de plus que, dans le cas où $a = -\infty$, $f(t)$ tende vers zéro de façon que les contributions provenant du voisinage de $-\infty$ ne donnent lieu à aucune complication. Cela posé, l'intégrale existe pour les valeurs positives de α (et pour les valeurs complexes de α dont la partie réelle $\Re(\alpha)$ est positive). D'autre part, il est clair que cette intégrale diverge en général pour $\alpha = 0$ et pour toutes les valeurs négatives de α.

Dans le cas où les valeurs α et β sont positives (ou ont leurs parties réelles positives), on a la formule de composition

$$I^{\alpha}(I^{\beta} f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x). \tag{2}$$

En effet, en intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient par une formule connue de Dirichlet(¹)

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt \int_a^t f(v)\,(t-v)^{\beta-1}\,dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x f(v)\,dv \int_v^x (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{\beta-1}\,dt. \end{aligned} \tag{3}$$

(¹) *Cf.* Goursat *Cours d'Analyse* I (1917), p. 309.

La dernière intégrale est évidemment égale à

$$(x-v)^{\alpha+\beta-1}\cdot\int\limits_0^1(1-u)^{\alpha-1}\cdot u^{\beta-1}\cdot du=(x-v)^{\alpha+\beta-1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

ce qui donne

$$I^\alpha(I^\beta f(x))=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_a^x f(v)\,(x-v)^{\alpha+\beta-1}\,dv=I^{\alpha+\beta}f(x).$$

Pour $\alpha=1$, l'intégrale I^α se réduit à l'intégrale ordinaire $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. D'autre part, on sait que l'intégrale itérée d'ordre n

$$\int\limits_a^x\int\limits_a^{x_1}\cdots\int\limits_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\cdots dx_1$$

se transforme facilement (p. ex. par la susdite formule de Dirichlet) dans l'intégrale simple

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_a^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

C'est cette propriété-là qui chez plusieurs auteurs, notamment chez Riemann, fut le point de départ pour la définition d'une intégration généralisée d'ordre fractionnaire. La formule (2) met en évidence qu'il s'agit là d'une généralisation heureuse.

Nous constatons en même temps que l'intégrale $I^\alpha f(x)$ est pour $\Re(\alpha)>0$ une *fonction holomorphe de α*. Bien entendu, on suppose toujours que les conditions respectives posées au début de ce numéro pour la fonction f sont remplies et que la valeur x est fixée.

2. Prolongement analytique. — Admettons maintenant en outre que les dérivées $f^{(k)}(t)$ existent pour $k\leqq p$ et qu'elles remplissent des conditions analogues à celles posées pour $f(t)$. On aura alors après un certain nombre d'intégrations par parties successives, pour $n\leqq p$,

$$I^\alpha f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)}\int\limits_a^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{\alpha+n-1}\,dt=\tag{4}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k}+I^{\alpha+n}f^{(n)}(x).$$

Dans le cas où $a = -\infty$ cette formule se réduit à la formule plus simple

$$(5)\quad I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)}\int_{-\infty}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{\alpha+n-1}\,dt = I^{\alpha+n}f^{(n)}(x).$$

Par les formules (4) et (5) on a montré que, dans les conditions posées, l'intégrale $I^{\alpha}f(x)$, considérée comme fonction analytique de α, peut se prolonger au delà du domaine de convergence de l'intégrale originale, le prolongement s'étendant en réalité à toutes les valeurs de α dont la partie réelle est $> -p$. Pour toutes ces valeurs, *on entendra par $I^{\alpha}f(x)$ le prolongement analytique dont on vient de démontrer l'existence.* [1]

Le même procédé s'étend facilement à des intégrales qui possèdent plusieurs singularités, p. ex. aux intégrales de la forme

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{y}^{x} f(t)(t-y)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}\,dt.$$

On considère cette intégrale comme fonction analytique des exposants α, β et on en fait le prolongement analytique par une modification légère du procédé appliqué plus haut. Sans nous arrêter sur les détails, nous retournons aux intégrales I^{α}.

On démontre sans peine par les principes de la théorie des fonctions analytiques que la formule fondamentale (2) reste valide pourvu que β et $\alpha + \beta$ (ou leurs parties réelles) soient $> -p$. Il faut toutefois faire exception, au moins pour l'instant, pour les valeurs de α et de β telles que α ou β ou $\alpha + \beta$ sont des entiers négatifs ou 0. (*Cf.* le n° **4**.) C'est exactement la signification qu'on aura à attribuer à l'opération I^{α} quant α est égal à 0 ou à un entier négatif que nous allons examiner à présent.

3. L'intégrale I^{α} pour $\alpha = 0$ et $\alpha =$ entier négatif. — Dans le cas le plus simple, $\alpha = 0$, on sera conduit à poser

$$(6)\qquad I^{0}f(x) = f(x).$$

Nous allons en effet montrer que sous la seule condition que $f(x)$ soit continu

$$\lim_{\alpha\to+0} I^{\alpha}f(x) = f(x).$$

[1] Dans tout ce travail *les intégrales divergentes* dépendant d'un paramètre α seront interprétées comme le *prolongement analytique* de l'intégrale correspondante, convergeant pour certaines valeurs de α, autant que ce prolongement existe et qu'il est défini d'une manière univoque.

Il n'est donc pas nécessaire de recourir au prolongement analytique, même si un prolongement existe grâce à des conditions supplémentaires concernant les dérivées de $f(x)$. Si tel est le cas, le prolongement par passage à la limite et le prolongement analytique conduisent évidemment à des résultats identiques.

Supposons d'abord dans la démonstration que a soit fini. On a

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [f(t) - f(x)]\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt + \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{7}$$

Le dernier terme qui peut encore s'écrire $\dfrac{f(x)\,(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ devient $f(x)$ pour $\alpha \to 0$. Le premier terme tend vers 0 avec α. On le voit en divisant l'intervalle (a, x) en deux parties $(a, x-\delta)$ et $(x-\delta, x)$. Si δ est assez petit, le terme correspondant au second intervalle sera très petit puisqu'il en est de même de $f(t) - f(x)$. Le nombre δ étant fixé, le terme correspondant au premier intervalle tend vers 0 avec α grâce au facteur $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot$ C'est encore grâce à ce facteur que le cas d'un intervalle infini se réduit immédiatement au cas précédent. En effet, si a est égal à $-\infty$, la partie correspondant à l'intervalle $(-\infty,\ b)$, où b est un nombre fixe $< x$, tendra encore vers 0.

Notons que pour $\alpha = 0$ la formule (4) se réduit à la formule classique de Cauchy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{8}$$

Passons maintenant à la signification de $I^{-n} f(x)$, n étant un entier positif. En faisant sur $f^{(n)}(t)$ les mêmes hypothèses qu'on a fait plus haut sur $f(t)$, on voit de suite par la formule (4) qu'on a à poser

$$I^{-n} f(x) = \lim_{\alpha \to -n+0} I^\alpha f(x) = f^{(n)}(x). \tag{9}$$

Nous avons fait ressortir dans l'Introduction (p. 3) que le caractère exceptionnel de l'indice 0 et des indices entiers négatifs est dû au facteur $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot$ Nous y avons aussi dit que c'est d'un facteur analogue intervenant dans la solution du problème de Cauchy posé pour l'équation des ondes que le principe de Huygens tire son origine. Nous reviendrons plus loin sur ce point (n° **55**).

4. Différentiation sous le signe $\int$. — Notre point de départ était de considérer l'opération I^α comme une intégration généralisée. Il est temps d'éclaircir les rapports presque évidents qui existent entre cette opération et la dérivation, rapports indiqués d'ailleurs par les derniers résultats.

En admettant d'abord que β (ou sa partie réelle) est positif, on a par les règles usuelles de la dérivation des intégrales

$$\frac{d}{dx} I^{\beta+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^\beta\, dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\beta-1}\, dt = I^\beta f(x).$$

Par la formule de prolongement (4) on voit que cette relation subsiste aussi pour les valeurs $\beta > -p$ et qu'il en est de même de la relation plus générale

$$\frac{d^k}{dx^k} I^{\beta+k} = I^\beta. \tag{10}$$

L'extension à des valeurs complexes de β est évidente.

Par la relation $I^{-k} f(x) = f^{(k)}(x)$ la relation (10) pourra encore s'écrire

$$I^{-k}(I^\beta) = I^{-k+\beta}. \tag{11}$$

En rapprochant ceci de nos résultats antérieurs on trouve en définitive: La formule fondamentale (2) est valable pour toutes les valeurs de α et de β telles que $\beta > -p$ et $\alpha + \beta > -p$ s'il est question d'un intervalle infini. Dans le cas d'un intervalle fini la formule sera encore valide pour toutes les dites valeurs de α et de β sauf pour les β qui sont des entiers négatifs. (Dans le cas évident où α aussi est un entier négatif ou 0 la formule restera encore valide.)

5. Prolongement par développement en série. — La formule (4) qui est très commode quand il s'agit de définir le prolongement analytique de I^α ne l'est pas toujours dans les applications lorsqu'il s'agit d'exécuter les calculs. Il sera donc utile d'observer que, d'après les derniers résultats, le prolongement analytique pourra aussi être exécuté par la formule (10), procédé très avantageux dans certains cas.[1] Nous donnons ici encore une formule pour le calcul effectif du prolongement par laquelle nous nous approchons beaucoup de l'ordre d'idées de M. Hadamard.[2] Posons en effet

---

[1] *Cf.* les n$^{\text{os}}$ **52** et **53**.

[2] *Voir l. c.* p. 190.

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k$$

et en supposant d'abord α positif

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (f(t) - P(t))(x-t)^{\alpha-1}\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x P(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt$$

ou

$$(12) \qquad I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (f(t) - P(t))(x-t)^{\alpha-1}\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)(x-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha)\cdot k!}.$$

Si la dérivée $f^{(n)}(t)$ existe et est continue, l'intégrale converge évidemment pour $\alpha > -n$ et la formule finale définit le prolongement analytique pour toutes ces valeurs. $I^\alpha f(x)$ est une fonction holomorphe de α, puisque $\Gamma(\alpha)(k+\alpha) \neq 0$ partout. En particulier, pour $\alpha = -k$, on a $\Gamma(\alpha)(k+\alpha)\cdot k! = (-1)^k$, d'où l'on tire encore une fois

$$(12^{bis}) \qquad I^0 f(x) = f(x), \qquad I^{-k} f(x) = f^{(k)}(x).$$

Ajoutons encore une remarque. C'est que, pour la validité du dernier énoncé, il n'est pas nécessaire que les dérivées $f^{(k)}(t)$ existent au sens strict. Il suffit p. ex. qu'il existe un polynome $P(t)$ tel que $(f(t) - P(t))(x-t)^{-n}$ reste borné lorsque t tend vers x.

Il y a lieu de remarquer ici que la formule (7) n'est qu'un cas particulier de la formule (12).

Pour les applications il est souvent commode de placer la singularité à l'origine, c'est-à-dire de considérer des intégrales de la forme

$$J^\alpha f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(t)\, t^{\alpha-1}\,dt.$$

En posant alors

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

on a la formule

$$(13) \qquad J^\alpha f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (f(t) - P(t))\, t^{\alpha-1}\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\, b^{k+\alpha}}{(k+\alpha)\cdot k!}$$

et, en particulier,

$$(13^{bis}) \qquad J^0 f(0) = f(0), \qquad J^{-k} f(0) = (-1)^k f^{(k)}(0).$$

CHAPITRE II.

Intégrale de Riemann-Liouville dans l'espace euclidien. Potentiels.

6. Définition et propriétés de l'intégrale I^α. Remarque. — Les généralisations de l'intégrale de R.-L.(¹) dont nous allons nous occuper dans la suite se rapportent à un espace Ω_m (ou plus brièvement Ω) à un nombre quelconque m ($\geqq 1$) de dimensions, pourvu d'une métrique soit *euclidienne*, soit *lorentzienne*. Nous désignons les procédés d'intégration respectifs par *intégration elliptique* et *intégration hyperbolique*. C'est l'intégration hyperbolique qui forme la généralisation la plus directe de l'intégrale de R.-L. qu'on vient d'étudier. C'est encore uniquement l'intégration hyperbolique qui intervient dans l'application à l'équation des ondes qui est le but principal de ce travail. Cependant, ce procédé présentant sous certains rapports des difficultés considérables qui n'interviennent pas dans le procédé elliptique, il nous paraît utile de donner ici un aperçu sur le dernier procédé qui, tout en facilitant la lecture des chapitres suivants, n'y est nullement indispensable. Nous nous dispensons pourtant de faire précéder l'exposé de l'intégration dans plusieurs dimensions par un exposé concernant le cas linéaire ($m = 1$)(²), les difficultés dépendant très peu du nombre de dimensions, dans le cas actuel.

Dans ce chapitre on désigne la distance *euclidienne* de deux points P et Q par $r_{PQ} = r_{QP} = r$. Introduisons de la manière suivante un *potentiel généralisé* d'ordre α. Nous posons, pour α positif et pour des fonctions $f(P)$ dont on va préciser la nature plus loin,

$$(1) \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ,$$

(¹) R.-L. = Riemann-Liouville.

(²) Pour un problème de M. Carleman relatif à ce cas, *cf.* M. RIESZ **3**.

$H_m(\alpha)$ ne dépendant que de α et de m et l'intégration s'étendant à l'espace entier Ω; dQ désigne l'élément de volume de cet espace. Nous allons démontrer que $H_m(\alpha)$, qui joue ici le rôle revenant tout à l'heure à $\Gamma(\alpha)$, peut être déterminé de manière que les formules fondamentales

$$I^\alpha (I^\beta f(P)) = I^{\alpha+\beta} f(P) \tag{2}$$

et

$$\Delta I^{\alpha+2} f(P) = - I^\alpha f(P) \tag{3}$$

soient satisfaites, Δ désignant l'opérateur de Laplace

$$\Delta = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont les coordonnées cartésiennes du point P.[1]

Montrons d'abord qu'on peut déterminer $H_m(\alpha)$ de façon que les relations (2) et (3) ci-dessus aient lieu pour la fonction particulière $f(P) = e^{i x_1}$. On trouve par des transformations évidentes, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ désignant les coordonnées du point Q,

$$I^\alpha e^{i x_1} = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega e^{i \xi_1} \left(\sum (\xi_k - x_k)^2\right)^{\frac{\alpha-m}{2}} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m$$

$$= \frac{1}{H_m(\alpha)} e^{i x_1} \int_\Omega e^{i \eta_1} \left(\sum \eta_k^2\right)^{\frac{\alpha-m}{2}} d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_m.$$

Alors, si l'on pose $H_m(\alpha)$ égal à la dernière intégrale, il viendra

$$I^\alpha e^{i x_1} = e^{i x_1}. \tag{4}$$

Par ce choix de $H_m(\alpha)$ les relations (2) et (3) seront évidemment remplies pour la fonction particulière qu'on est en train de considérer.

Ajoutons qu'avec le même choix de $H_m(\alpha)$, il résulte de la formule précédente par une transformation orthogonale des variables

$$I^\alpha e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m)} = \left(\sum a_k^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m)}.\ [2]$$

---

[1] Il est presque évident que les conditions (2) et (3) et une condition supplémentaire, exigeant p. ex. continuité en général, déterminent $H_m(\alpha)$ d'une manière unique, à un facteur $e^{i n \alpha \pi}$ près, n étant un nombre entier.

[2] On pourrait par cette formule rattacher notre procédé d'intégration à la théorie de l'intégrale de Fourier. Mais, comme cette méthode présente de graves inconvénients et ne s'adapte pas au cas de coefficients variables, nous suivons dans le texte une voie différente.

Calculons maintenant l'intégrale à laquelle on a égalé $H_m(\alpha)$ La fonction à intégrer étant constante sur la sphère $\eta_2^2 + \eta_3^2 + \cdots + \eta_m^2 = \varrho^2$, l'intégrale se réduit immédiatement à

$$H_m(\alpha) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta_1} (\varrho^2 + \eta_1^2)^{\frac{\alpha - m}{2}} \varrho^{m-2} \, d\eta_1 \, d\varrho,$$

le facteur devant les signes $\int$ exprimant la surface totale de ladite sphère pour $\varrho = 1$.[1] Par la substitution $\eta_1 = r \cos \theta$, $\varrho = r \sin \theta$, l'intégrale devient

$$\int\limits_0^\pi \sin^{m-2} \theta \, d\theta \int\limits_0^\infty e^{ir\cos\theta} r^{\alpha-1} \, dr.$$

Le théorème de Cauchy concernant l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un contour fermé donne pour la dernière intégrale (simple) la valeur

$$e^{\pm \frac{i\pi\alpha}{2}} |\cos \theta|^{-\alpha} \Gamma(\alpha),$$

le signe à choisir étant celui de $\cos \theta$. On a en outre d'abord, pour assurer la convergence, pour $\alpha < 1$ et après, par prolongement analytique,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\theta \cos^{-\alpha}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}.$$

De plus

$$\Gamma(\alpha) = 2^{\alpha-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \tag{5}$$

et

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{6}$$

et par là

$$\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

---

[1] *Voir* la *Remarque* à la fin de ce numéro.

La combinaison des formules ci-dessus donne enfin [1]

$$(7) \qquad H_m(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \cdot 2^\alpha \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}.$$

Remarque. — Désignons par v_n le volume et par ω_n la surface totale de la sphère unitaire relative à l'espace euclidien à n dimensions

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

La sphère découpe du plan $x_n = t$ ($|t| \leqq 1$) une sphère à $n-1$ dimensions au rayon $\varrho = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$. Le volume (à $n-1$ dimensions) de cette sphère sera $= \varrho^{n-1} \cdot v_{n-1} = (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot v_{n-1}$. On a donc la formule de récurrence

$$v_n = v_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2 v_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

$$= v_{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = v_{n-1} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Puisque $v_1 = 2$, il en résulte

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Par la formule évidente

$$\omega_n = n\, v_n$$

il vient enfin

$$(8) \qquad \omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

7. Formule de composition. — Retournons maintenant à l'opération $I^\alpha f(P)$, $f(P)$ étant une fonction arbitraire assujettie à certaines conditions que nous

[1] Nous profitons de l'occasion pour donner ici la déduction de l'expression de $H_m(\alpha)$ et celle de la formule de composition qui suit, déductions que nous regrettons d'avoir omises dans notre travail **3**.

allons préciser à l'instant. Pour le moment nous supposons seulement que toutes les intégrales qui interviennent dans le calcul suivant sont absolument convergentes.

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f(P)) = \frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\,Q \cdot \frac{1}{H_m(\beta)}\int_{\Omega} f(S)\,r_{QS}^{\beta-m}\,d\,S$$
$$= \frac{1}{H_m(\alpha)\,H_m(\beta)}\int_{\Omega} f(S)\,d\,S \int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m}\,r_{QS}^{\beta-m}\,d\,Q. \tag{9}$$

Par une translation la dernière intégrale se réduit d'abord à une intégrale de la même forme où P est remplacé par l'origine O et S par un point dont la distance à l'origine est r_{PS}. Enfin, par une homothétie on arrive à

$$r_{PS}^{\alpha+\beta-m}\int_{\Omega} r_{OT}^{\alpha-m}\,r_{1T}^{\beta-m}\,d\,T,$$

où r_{OT} et r_{1T} désignent les distances respectives du point T à l'origine et à un certain point à distance unité de l'origine. Évidemment la dernière intégrale

$$\mathrm{B}_m(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} r_{OT}^{\alpha-m}\,r_{1T}^{\beta-m}\,d\,T \tag{10}$$

ne dépend que des nombres α, β et m. Ajoutons que cette intégrale est convergente quand les inégalités $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < m$ sont remplies.[1]

Admettons pour l'instant qu'il soit déjà démontré que

$$\mathrm{B}_m(\alpha, \beta) = \frac{H_m(\alpha)\,H_m(\beta)}{H_m(\alpha+\beta)}. \tag{10bis}$$

Alors, moyennant les simplifications qu'on y a déjà apportées, la formule (9) se réduit à la formule fondamentale

$$I^{\alpha}I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}\,(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < m).\text{[2]} \tag{11}$$

Il reste à vérifier la formule (10^{bis}). L'intégrale qu'on veut calculer est manifestement une sorte de généralisation de l'intégrale d'Euler de première espèce. On démontrera d'abord l'identité (10^{bis}) dans les conditions restrictives $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$ et ensuite on la rendra valide dans le cas général par prolongement analytique. La démonstration se fait par l'intermédiaire de la fonction déjà considérée e^{ix_1}. Observons tout de suite que cette fonction ne remplit nullement les

(1) Nous n'insistons ni ici ni dans la suite sur le fait évident, rappelé souvent au chapitre précédent, que toute condition concernant les exposants peut être remplacée pas une condition identique concernant leurs parties réelles.

(2) Pour une généralisation remarquable où, entre autres choses, l'espace euclidien est remplacé par un groupe localement compact, *voir* H. CARTAN **1** et **2**.

conditions auxquelles nous avons assujetti nos fonctions générales $f(P)$. Néanmoins, il résulte par une vérification facile que la formule (9) est valable pour cette fonction. Cela donne

$$I^\alpha I^\beta e^{i x_1} = \mathrm{B}_m(\alpha, \beta) \cdot \frac{H_m(\alpha+\beta)}{H_m(\alpha) \cdot H_m(\beta)} I^{\alpha+\beta} e^{i x_1}.$$

La comparaison avec la formule (4) donne de son côté que le facteur devant $I^{\alpha+\beta} e^{i x_1}$ se réduit à 1, ce qui vérifie l'identité (10^{bis}).[1]

8. L'opérateur $I^2 = -\Delta^{-1}$. Potentiel newtonien. — Disons un mot sur le second de nos *desiderata* exprimé par la formule (3). Cette formule se vérifie pour $\alpha > 0$ moyennant la relation

$$(12) \qquad \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \Delta r^{\alpha+2-m} = \frac{\Gamma\left(\frac{m-\alpha-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{\alpha+2} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)} \cdot \alpha(\alpha+2-m) \cdot r^{\alpha-m}$$

$$= - \frac{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot r^{\alpha-m} = - \frac{1}{H_m(\alpha)} \cdot r^{\alpha-m}.$$

Dans cette formule, Δ signifie soit Δ_P, soit Δ_Q.

La formule (3) met en évidence que l'opérateur I^2 est (au signe près) l'inverse de l'opérateur Δ,[2] et on comprend alors qu'il mérite une attention particulière. On trouve pour $m \neq 2$

$$(13) \qquad I^2 f(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4 \cdot \pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\Omega} f(Q)\, r_{PQ}^{2-m}\, dQ$$

[1] On peut aussi vérifier cette identité au moyen de la formule

$$r^{-\lambda} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-r^2 t^2} t^{\lambda-1}\, dt \quad (\lambda > 0).$$

[2] Le postulat $\Delta I^{\alpha+2} = + I^\alpha$ pourrait être rempli si l'on remplaçait $H_m(\alpha)$ par $e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \cdot H_m(\alpha)$. Cette valeur est sous un certain rapport plus adéquate que celle adoptée dans le texte puisqu'elle donnerait $I^\alpha e^{i x_1} = e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} e^{i x_1} = i^{-\alpha} \cdot e^{i x_1}$. Notre choix se justifie par le fait qu'il rend $H_m(\alpha)$ réel pour α réel.

que nous désignerons comme *le potentiel newtonien* correspondant à la couche de la densité spatiale $f(Q)$, bien que le facteur devant l'intégrale manque dans la forme usuelle de ce potentiel.

9. L'opérateur I^m. Potentiel logarithmique. — L'opérateur I^2 défini par la formule (13) perd tout intérêt dans le cas $m = 2$. L'intégrale sera indépendante de P et le facteur devant l'intégrale deviendra infini. Cependant, dans la condition particulière que l'intégrale de $f(Q)$ étendue à l'espace entier, c'est à dire la masse totale, s'annule, on pourra poser la définition nouvelle

$$(14) \qquad I^2 f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{2-\varepsilon} f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi \cdot 2^{2-\varepsilon} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q)\, r_{PQ}^{-\varepsilon}\, d\,Q$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi \cdot 2^{2-\varepsilon} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q)\,(r_{PQ}^{-\varepsilon} - 1)\, d\,Q = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}}\, d\,Q,$$

c'est à dire qu'on obtient le potentiel logarithmique.

Dans le cas général, où la masse totale M est différente de zéro, on pourra toujours écrire au voisinage de la valeur $\alpha = 2$

$$I^\alpha f(P) = \frac{A_{-1}}{\alpha - 2} + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\alpha - 2)^k,$$

où $A_{-1} = -M/\pi$ et A_0 est (à une constante additive près) le potentiel logarithmique

$$(15) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}}\, d\,Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left(I^{2-\varepsilon} f(P) + I^{2+\varepsilon} f(P)\right).$$

Retournons maintenant au cas général d'une dimension m quelconque, et remarquons que les choses se passent d'une manière analogue, bien entendu, non plus pour $\alpha = 2$, mais pour $\alpha = m$. Le potentiel $I^m f(P)$ pourra toujours être interprété comme un potentiel logarithmique, la seule différence étant que l'indice $\alpha = m$ n'est un indice particulièrement important que dans le cas $m = 2$, où les indices $\alpha = 2$ et $\alpha = m$ deviennent identiques. Une dernière remarque dans cet ordre d'idées concerne les indices $\alpha = m + 2k$, k étant un entier positif. Dans ce cas-là on tombe par un procédé analogue sur des noyaux de la forme $r^{2k} \cdot \log \frac{1}{r}$.

10. Formule de Green pour l'espace entier. Prolongement analytique. — Les considérations qui précèdent s'étendent immédiatement au cas où l'on remplace les couches définies moyennant des fonctions de point représentant la densité spatiale par des couches définies moyennant des fonctions additives d'ensemble, généralisation embrassant entre autres choses les simples couches. (Avec quelques précautions on peut même étendre les résultats à des intégrales définies par des doubles couches.) Ici nous abordons un autre problème, celui des indices zéro et négatifs, où, au lieu de généraliser les couches en question, il faut les assujettir à de nouvelles restrictions.

En effet, il est clair que tout comme dans l'espace de dimension 1, on pourra dans des conditions supplémentaires étendre le procédé à ces derniers indices. L'extension se fera encore par prolongement analytique; pour l'indice zéro on peut y arriver par un passage à la limite. En supposant que $f(Q)$ soit continu au point P, on trouve en copiant les raisonnements qui s'attachaient à la formule (7) du n° **3**

$$I^0 f(P) = \lim_{\alpha \to +0} I^\alpha f(P) = f(P), \tag{16}$$

formule qui, rapprochée de la formule $\Delta I^{\alpha+2} = - I^\alpha$, exprime d'une façon un peu rude la formule de Poisson $(\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \Delta I^{2+\varepsilon} f(P) = - \lim\limits_{\varepsilon \to +0} I^\varepsilon f(P) = - f(P))$.

Il reste les indices négatifs. Supposons d'abord que la fonction $f(P)$ admette des dérivées continues de tout ordre $\leqq 2p$ et de plus que $f(P)$ et ses dérivées se comportent à l'infini de façon que les intégrales qui interviendront dans la suite soient absolument convergentes et que les intégrations par parties qu'on exécutera soient légitimes. En appliquant p fois la formule de Green

$$\int_\Omega U(Q) \Delta V(Q) \, dQ = \int_\Omega V(Q) \Delta U(Q) \, dQ,$$

on trouve moyennant les formules (1) et (12), d'abord pour α positif,

$$I^\alpha f(P) = (-1)^p I^{\alpha+2p} \Delta^p f(P). \tag{17}$$

Par cette formule on a le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$ pour toute valeur de $\alpha > -2p$.

Si l'on admet en particulier que $\Delta^p f(Q)$ soit continu pour $Q = P$ (hypothèse qui n'est pas nécessaire pour la validité de la dernière formule) on trouve comme plus haut en se servant du prolongement par passage à la limite

$$I^{-2p}f(P) = \lim_{\varepsilon \to +0} I^{-2p+\varepsilon} f(P) = (-1)^p \Delta^p f(P). \tag{18}$$

Une formule analogue vaudra à plus forte raison pour tout nombre entier positif $k < p$. On voit aussi sans peine que la formule fondamentale (11) s'étend au domaine $\alpha > -2p$, $\beta > -2p$, $\alpha + \beta > -2p$.

11. Formule de Green pour un domaine borné. Prolongement analytique. — Nos hypothèses concernant l'allure de la fonction $f(P)$ et de ses dérivées, en particulier nos hypothèses de continuité, furent posées pour l'espace entier. Les choses deviennent plus compliquées, si l'on admet certaines surfaces[1] de discontinuité. Pour ne pas nous perdre dans des généralités inutiles, nous nous restreindrons au cas où $f(P)$ est identiquement zéro à l'extérieur d'une surface fermée S, suffisamment régulière, tandis que la fonction $f(P)$ et les dérivées qui interviennent sont continues dans le domaine fermé limité par cette surface, sans s'annuler sur la surface, en général.

En supposant d'abord α positif, on trouve par la formule de Green

$$I^\alpha f(P) = -I^{\alpha+2}\Delta f(P) + \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int\limits_S \left\{ f(Q) \frac{d\, r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{dn} - \frac{df(Q)}{dn} r_{PQ}^{\alpha+2-m} \right\} dS \tag{19}$$

ou d'une façon générale

$$\begin{aligned} I^\alpha f(P) &= (-1)^p I^{\alpha+2p} \Delta^p f(P) \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{H_m(\alpha+2k)} \int\limits_S \left\{ \Delta^{k-1} f(Q) \frac{d\, r_{PQ}^{\alpha+2k-m}}{dn} - \frac{d\, \Delta^{k-1} f(Q)}{dn} r_{PQ}^{\alpha+2k-m} \right\} dS, \end{aligned} \tag{20}$$

n désignant toujours la normale au point Q de S dirigée vers l'intérieur de cette surface et dS l'élément de surface autour du point Q.

Par la dernière formule on aura aussi dans le cas actuel obtenu le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$ pour $\alpha > -2p$. Pourtant il y a une différence essentielle entre le cas plus simple traité tout à l'heure et le cas actuel. *Là* on avait le prolongement pour tout point fini P, *ici* il faut faire exception pour les points P situés sur la surface. Pour les autres points on a comme précédemment

$$I^{-2k} f(P) = (-1)^k \Delta^k f(P) \tag{21}$$

---

[1] Dans ce qui suit on entendra toujours par une *surface* une multiplicité à $m-1$ dimensions. L'expression *hypersurface* ne sera donc pas usitée.

et plus généralement

$$I^{\alpha-2k}f(P)=(-1)^k\Delta^k I^\alpha f(P),\text{[1]} \tag{22}$$

cette formule pouvant aussi servir à effectuer le prolongement analytique.

Les dernières formules donnent évidemment les analogues de la formule (9) du n° **3** et de la formule (10) du n° **4**. La formule fondamentale (11) est encore valide si β n'est pas un nombre entier pair négatif.

12. Analogie avec le cas linéaire. — La surface S joue ici à peu près le même rôle que le point initial a jouait dans le cas de l'intégrale de R.-L. ordinaire. Aux opérateurs $\dfrac{d^{2k}}{d a^{2k}}$ et $\dfrac{d^{2k+1}}{d a^{2k+1}}$ correspondent (abstraction faite de certains facteurs constants, dont le rôle n'est d'ailleurs nullement négligeable) les opérateurs Δ^k et $\dfrac{d}{dn}\Delta^k$ respectivement. En observant que $I^0 f(P)$ est égal à $f(P)$, la formule (19) devient pour $\alpha=0$ identique à la formule de Green

$$f(P)=\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\cdot\pi^{\frac{m}{2}}}\int_S\left\{f(Q)\frac{d\,r_{PQ}^{2-m}}{dn}-\frac{d f(Q)}{dn}r_{PQ}^{2-m}\right\}dS-\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\cdot\pi^{\frac{m}{2}}}\int_D\Delta f(Q)\,r_{PQ}^{2-m}\,dQ, \tag{23}$$

(D étant le domaine limité par S) qui de son côté correspond évidemment à la formule

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt. \tag{24}$$

A la formule générale de Cauchy (formule (8) du n° **3**) correspond la formule (20) si l'on y pose $\alpha=0$.

13. Renvoi aux problèmes classiques. — On va voir que dans le cas hyperbolique, quand il s'agira p. ex. de résoudre le problème de Cauchy, la formule de

---

[1] Cette formule renferme comme cas particulier la formule de Poisson (qui, bien entendu, n'est démontrée ici que dans des conditions assez restrictives) sous sa forme précise

$$\Delta I^2 f(P)\ (=-I^0 f(P))=-f(P).$$

Green est un outil tout-puissant, toute la difficulté, d'ailleurs assez sérieuse, n'étant que de lui donner un sens. Il n'en est rien dans le cas elliptique, où, comme on le sait, la formule de Green n'est qu'un premier pas vers la solution des problèmes difficiles, tels le problème de Dirichlet et les problèmes connexes. Aussi faut-il, si l'on veut approfondir dans ce cas l'étude de nos potentiels, recourir à d'autres instruments, tels la fonction de Green et les masses de Green. Nous renvoyons pour ces questions aux travaux de l'auteur et de M. Frostman.[1]

CHAPITRE III.

Intégrale de Riemann-Liouville dans l'espace lorentzien.

I. Définition de l'intégrale.

14. La forme métrique lorentzienne et l'opérateur des ondes. Remarque. — Nous passons maintenant à la définition de l'intégrale de R.-L. dans l'espace lorentzien à m dimensions. Considérons dans cet espace les points P et Q aux coordonnées respectives $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Le carré de la distance lorentzienne de ces points — qu'on va d'ailleurs légèrement généraliser dans le cours de ce numéro — est défini par la formule

$$r_{PQ}^2 = r_{QP}^2 = r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 - \cdots - (x_m - \xi_m)^2. \tag{1}$$

L'application du même symbole r_{PQ} dans deux espaces portant des métriques différentes ne devra amener aucune confusion chez le lecteur, d'autant moins que dans la suite il ne sera guère question de la métrique euclidienne. D'ailleurs, on peut, si l'on veut, considérer l'une et l'autre définition comme des cas particuliers de la définition générale

$$r_{PQ}^2 = \sum_{i,k} g_{ik}(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k).$$

Dans le même ordre d'idées on gardera les symboles utilisés dans le cas euclidien pour désigner les différents éléments métriques correspondants et on désignera l'opérateur des ondes par le même symbole Δ que l'opérateur de Laplace, c'est-à-dire que l'on pose ici

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}. \tag{2}$$

En considérant le point P comme fixe et le point Q comme variable,

[1] M. Riesz 3, O. Frostman 1—3.

$r^2_{PQ} = 0$ définit la surface du cône caractéristique ou *cône de lumière* au sommet P, $r^2_{PQ} < 0$ définit son intérieur, $x_1 - \xi_1 > 0$ le cône *rétrograde*, et $x_1 - \xi_1 < 0$ le cône *direct*.

C'est le *cône rétrograde* que nous allons considérer en général, en le désignant par D^P.

Le *carré scalaire* d'un vecteur $\mathbf{X}$ aux composantes X_k est défini par la forme métrique

$$(3) \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = X_1^2 - X_2^2 - \cdots - X_m^2.$$

En nous inspirant de la terminologie relativiste, nous appelons un vecteur *vecteur de temps, vecteur de lumière (vecteur isotrope), vecteur d'espace*(1) suivant que son carré scalaire est positif, nul, négatif respectivement. On comprend par là ce qu'on entendra par droite ou direction de temps, de lumière, d'espace (droite ou direction isotrope). Un vecteur *de temps* est dit *unitaire* si son carré scalaire est égal à 1, tandis qu'un vecteur *unitaire d'espace* a son carré scalaire égal à -1.

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ aux composantes respectives X_k et Y_k est défini par la formule

$$(4) \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = X_1 Y_1 - X_2 Y_2 - \cdots - X_m Y_m.$$

Ces vecteurs sont dits *orthogonaux au sens lorentzien* si leur produit scalaire $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$. En rapprochant cette définition de celles données plus haut, on voit que les vecteurs de lumière, et ces vecteurs seulement, sont orthogonaux à eux-mêmes.

Par une *transformation de Lorentz* on entend une transformation linéaire et homogène des coordonnées x_k qui transforme la forme métrique

$$(5) \qquad x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2$$

en elle-même. Les composantes d'un vecteur sont à transformer de la même manière que les coordonnées, c'est-à-dire que le carré scalaire $(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ et le produit scalaire $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{4}\{(\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{X} + \mathbf{Y}) - (\mathbf{X} - \mathbf{Y}, \mathbf{X} - \mathbf{Y})\}$ sont aussi invariants par rapport à toute transformation de Lorentz. Ces transformations forment évidemment un groupe: *le groupe de Lorentz*. Il y a donc invariance par rapport à ce groupe. On voit d'autre part facilement que les Y_k étant transformés d'une manière inconnue, mais telle que le produit scalaire $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, formé avec des X_k arbitraires, reste in-

(1) Ce qu'on appelle ici *espace lorentzien* à m dimensions n'est que l'*espace-temps* ou l'*univers* des physiciens, à $m - 1$ dimensions d'espace et *une* dimension de temps.

variant lorsqu'on applique aux X_k une certaine transformation de Lorentz, la transformation des Y_k doit être identique à celle des X_k. En effet cette dernière règle conduit à l'invariance postulée. Inversement, le postulat d'invariance mène pour les coefficients de la transformation inconnue à un système d'équations linéaires à solution unique.

La nomenclature introduite plus haut (vecteur de temps, d'espace etc.) est manifestement indépendante du choix du système de coordonnées lorentziennes. Ajoutons que, par une transformation de Lorentz convenable, toute droite de temps peut devenir l'axe des x_1. De même, toute droite d'espace peut devenir un axe des x_i ($i = 2, 3, \ldots, m$). Tout plan d'espace (*voir* plus loin, n° **19**) peut devenir un plan $x_2 x_3 \ldots x_m$. La métrique lorentzienne dans un tel plan est — au signe du carré scalaire près — identique à la métrique euclidienne relative aux coordonnées $x_2, x_3, \ldots, x_m$. Cela explique le rôle que jouent les sphères euclidiennes dans certains de nos calculs (*voir* p. ex. les n^{os} **16**, **31** et *suiv.*).

En posant

$$\varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = -1, \tag{6}$$

les expressions (3) et (4) s'écrivent respectivement

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k X_k^2, \tag{7}$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k X_k Y_k. \tag{8}$$

Dans la suite il nous sera utile de nous servir de certaines notions appartenant au calcul tensoriel. Dans ce calcul on désigne les composantes ordinaires X_k (qui se transforment de la même manière que les coordonnées, ou, quand il s'agit de coordonnées curvilignes, de la même manière que les différentielles des coordonnées) comme composantes *contravariantes*, et on les distingue d'habitude par des indices supérieurs (X^k). Cette dernière notation sera adoptée plus loin dans ce travail, notamment dans le dernier Chapitre; ici il nous paraît plus commode de garder la notation X_k.

Chaque forme métrique fait correspondre aux composantes contravariantes d'un vecteur des composantes *covariantes* et inversement. En renvoyant pour le mécanisme général audit chapitre nous nous restreignons ici aux formes métriques de l'aspect (7). Pour mieux élucider les choses, nous admettons cependant que les ε_k figurant dans (7) aient des valeurs constantes arbitraires, telles que

$$\varepsilon_1 > 0, \ \varepsilon_i < 0 \ (i = 2, 3, \ldots, m) \quad \text{et} \quad |\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m| = 1. \tag{9}$$ [1]

Le groupe de transformations admis sera donc un groupe de Lorentz légèrement généralisé, à savoir le groupe de transformations qui laissent invariante la forme métrique généralisée.

Nous posons, en désignant les composantes covariantes de $\mathbf{X}$ par X_k^{cov},

$$X_k^{\mathrm{cov}} = \varepsilon_k X_k \quad \text{et} \quad X_k = \varepsilon_k^{-1} X_k^{\mathrm{cov}}. \tag{10}$$

Dans le cas particulier lorentzien (6) on a évidemment $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_k$, ce qui fait que les calculs deviennent moins clairs si l'on se restreint au cas particulier.

Dans les notations posées on peut écrire le carré ou le produit scalaires sous les formes simples

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \Sigma X_k X_k^{\mathrm{cov}}, \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Sigma X_k Y_k^{\mathrm{cov}} = \Sigma X_k^{\mathrm{cov}} Y_k. \tag{11}$$

Manifestement, toute transformation des X_k appartenant au groupe (généralisé) induit moyennant (10) une transformation correspondante des X_k^{cov}:

$$X_i = \sum_k a_{ik} X_k' \tag{12}$$

donne

$$X_i^{\mathrm{cov}} = \sum_k \varepsilon_i \varepsilon_k^{-1} a_{ik} X_k'^{\mathrm{cov}}. \tag{12bis}$$ [2]

Ces transformations (contragrédientes), qui en général sont différentes l'une de l'autre, laissent invariants le carré et le produit scalaires, le dernier, bien entendu, si l'on applique l'une des transformations aux composantes de $\mathbf{X}$ et l'autre aux composantes de $\mathbf{Y}$. Inversement, en utilisant une remarque faite tout à l'heure on voit facilement que si les H_k admettent une loi de transformation telle que $\Sigma X_k \mathrm{H}_k$ formé avec des X_k arbitraires reste invariant lorsqu'on applique

---

[1] La dernière de ces conditions n'est posée que pour des raisons de commodité (*voir* la note [2] à la page 31 et le n° **21**^{bis}).

[2] Pour que la forme métrique (7) soit invariante par rapport à cette transformation il faut et il suffit que l'on ait $\sum_i \varepsilon_i a_{ik} a_{il} = \begin{cases} \varepsilon_k, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$ En passant aux déterminants correspondants, on en tire $|a_{ik}|^2 \Pi \varepsilon_i = \Pi \varepsilon_i$, ou

$$|a_{ik}| = \pm 1.$$

aux X_k les transformations du groupe de Lorentz généralisé, les $\mathbf{H}_k$ sont les composantes covariantes d'un vecteur $\mathbf{Y}$, $\mathbf{H}_k = Y_k^{\mathrm{cov}}$.

Parmi les exemples les plus simples de composantes contravariantes d'un vecteur citons les composantes dx_k d'un déplacement infinitésimal $d\mathbf{x}$. D'autre part il résulte de ce que nous venons de dire que les quantités $\partial\varphi/\partial x_k$ sont les composantes covariantes d'un vecteur, à savoir du vecteur **grad** φ. En effet, la différentielle totale

$$d\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k$$

est manifestement invariante par rapport à toute transformation des coordonnées. Les composantes contravariantes du gradient de φ sont $\varepsilon_k^{-1}\partial\varphi/\partial x_k$:

$$\mathrm{grad}_k^{\mathrm{cov}}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \mathrm{grad}_k\, \varphi = \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

On peut aussi exprimer cet état de choses en disant que les opérateurs $\partial/\partial x_k$ sont les composantes covariantes d'un vecteur symbolique, fait dont on verra une conséquence importante tout à l'heure.

Le carré et le produit scalaires exprimés par les formules (7), (8) et (11) peuvent évidemment aussi s'écrire

$$(13) \qquad (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sum_k \varepsilon_k^{-1} (X_k^{\mathrm{cov}})^2 \quad \text{et} \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum \varepsilon_k^{-1} X_k^{\mathrm{cov}} Y_k^{\mathrm{cov}}.$$

En appliquant cela aux vecteurs aux composantes covariantes respectives $\partial\varphi/\partial x_k$ et $\partial/\partial x_k$, on voit que les expressions

$$(14) \qquad (\mathbf{grad}\ \varphi,\ \mathbf{grad}\ \varphi) = \Sigma\, \varepsilon_k^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)^2$$

et

$$(15) \qquad \Delta\, \varphi = \left(\Sigma\, \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) \varphi = \Sigma\, \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}$$

sont invariantes par rapport aux transformations du groupe de Lorentz généralisé. Il en résulte en particulier le fait qui est pour nous d'une importance capitale que *l'opérateur des ondes* (2) *est invariant par rapport aux transformations du groupe de Lorentz.*

Remarque. — Toutes nos formules restent invariantes, même si l'on passe d'une forme métrique $\Sigma\, \varepsilon_k x_k^2$ à une autre d'aspect analogue, dont les coefficients

ε'_k satisfont aux relations correspondant à (9). Un tel passage peut, en particulier, être réalisé par la substitution évidente $x_k = (\varepsilon'_k/\varepsilon_k)^{\frac{1}{2}} \cdot x'_k$. Dans le dernier Chapitre, où nous appliquons l'écriture tensorielle, on trouve nos calculs sous une forme qui est invariante par rapport à toute transformation ponctuelle des variables indépendantes.

15. Définition et premières propriétés de l'intégrale I^α.[1] — $I^\alpha f(P)$ sera ici défini par une intégrale étendue à l'intérieur du *cône rétrograde* D^P (*cf.* p. 27 et fig. 2, p. 38). Il n'est donc pas nécessaire et pas même naturel de faire des hypothèses sur l'existence et l'allure de nos fonctions $f(P)$ dans l'espace entier, comme on a fait dans le cas euclidien. On supposera ces fonctions définies dans un domaine tel que, lorsque ce domaine renferme un certain point P, il renferme aussi le cône D^P. Pour assurer la convergence absolue des intégrales écrites, on supposera entre autres choses que $f(Q)$ tend vers zéro assez vite dans la partie infinie des cônes qui interviennent.

Cela étant, on pose

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\,Q.\text{[2]} \tag{16}$$

Bien entendu, le facteur $H_m(\alpha)$, qu'on va préciser tout à l'heure, est différent de celui qui figure dans le cas elliptique.

Nous avons d'abord à parler d'une difficulté — bien connue en principe depuis les travaux de Volterra et de M. Hadamard — difficulté que nous rencontrons ici pour la première fois. Supposons, pour simplifier, que P tombe à l'origine O et posons $\varrho^2 = \sum_2^m \xi_k^2$. Alors si ξ_1 reste constant et ϱ tend vers $|\xi_1|$, Q tend vers la frontière et en même temps r_{OQ} tend vers zéro de la même manière que $(|\xi_1| - \varrho)^{\frac{1}{2}}$. Par là on voit que pour assurer la convergence de nos intégrales nous aurons à supposer que l'exposant $\alpha - m > -2$, c'est-à-dire que $\alpha > m - 2$ $(m \geqq 2)$.

---

(1) Les nos **15—17** sont, pour simplifier certains calculs, rédigés en admettant les valeurs originales (6) du no **14** des ε_k dans la forme lorentzienne. On voit immédiatement que les résultats essentiels restent valables pour la forme généralisée. En particulier, la valeur de $H_m(\alpha)$ reste inaltérée.

(2) Comme au chapitre précédent, on entend ici par dQ le produit $d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m$, qui, d'après le no **21bis**, convient comme élément de volume à m dimensions dans l'espace lorentzien, même dans le cas où les ε_k admettent leurs valeurs générales, grâce à la dernière des conditions (9) du no **14**. L'élément de volume est même invariant par les changements de forme métrique donnés dans la Remarque qui se trouve à la fin du no **14**. *Cf.* aussi la note (1) à la page 29.

Cette hypothèse étant admise, du moins jusqu'à nouvel ordre. nous allons montrer qu'on peut choisir $H_m(\alpha)$ de manière que les relations

$$I^\alpha(I^\beta f(P)) = I^{\alpha+\beta} f(P) \tag{17}$$

et

$$\Delta I^{\alpha+2} f(P) = I^\alpha f(P), \tag{18}$$

analogues à celles rencontrées plus haut dans le cas elliptique, aient lieu.(1) L'opérateur Δ est défini par la formule (15). D'ailleurs, en ce qui concerne la seconde formule, elle ne sera démontrée que sous certaines conditions supplémentaires.

16. Calcul de $H_m(\alpha)$. — Le calcul de $H_m(\alpha)$ sera tout analogue au calcul fait dans le chapitre précédent et même plus simple en principe puisque la fonction particulière $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = e^{x_1}$, moyennant laquelle le calcul sera exécuté, appartient ici à la classe de fonctions admise. Nous avons

$$I^\alpha e^{x_1} = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D^P} e^{\xi_1} r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ = \frac{e^{x_1}}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D^O} e^{\xi_1} r_{OQ}^{\alpha-m}\, dQ,$$

O signifiant l'origine. Si donc on pose $H_m(\alpha)$ égal à la dernière intégrale, il viendra

$$I^\alpha e^{x_1} = e^{x_1}. \tag{19}$$

Il reste à calculer $H_m(\alpha)$. En posant

$$\xi_1 = -r \cosh\theta \quad \text{et} \quad \varrho = (\xi_2^2 + \cdots + \xi_m^2)^{\frac{1}{2}} = r \sinh\theta,$$

l'intégrale à laquelle on a égalé $H_m(\alpha)$ se réduit à (*cf.* le n° **6**)

$$H_m(\alpha) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \sinh^{m-2}\theta \cdot d\theta \int\limits_0^\infty e^{-r\cosh\theta} r^{\alpha-1}\, dr.$$

Moyennant la formule, facile à vérifier,

---

(1) Comme au cas elliptique, le facteur $H_m(\alpha)$ est essentiellement déterminé par ces deux conditions. *Voir* la note (1) à la p. 17 et la note (1) à la p. 46.

$$\int_0^\infty \sinh^{p-1}\theta\cdot\cosh^{1-p-q}\theta\cdot d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

et la formule (5) du n° 6, il en vient

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{\alpha-1}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right). \tag{20}$$

Notons que de la formule (19) il résulte immédiatement

$$I^\alpha e^{a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_mx_m} = (a_1^2-a_2^2-\cdots-a_m^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\cdot e^{a_1x_1-a_2x_2-\cdots-a_mx_m}$$

chaque fois que l'expression entre parenthèses et a_1 sont positifs, ce qui montre que la formule (17) subsiste pour ces fonctions. On pourrait en tirer la validité de cette formule pour la classe générale de nos fonctions $f(P)$ en démontrant que les fonctions envisagées forment, dans un sens facile à préciser, un système complet dans cette classe. Cependant, nous suivrons ici une voie différente.

17. Formule de composition. — La formule fondamentale (17) étant valable pour la fonction e^{x_1}, elle le sera encore pour une fonction quelconque $f(P)$ remplissant nos conditions générales. En effet, il vient par un calcul calqué sur celui opéré dans la formule (3) du n° 1

$$\begin{aligned} I^\alpha(I^\beta f(P)) &= \frac{1}{H_m(\alpha)}\int\limits_{D^P} r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ\cdot\frac{1}{H_m(\beta)}\int\limits_{D^Q} f(\theta)\,r_{Q\theta}^{\beta-m}\,d\theta \\ &= \frac{1}{H_m(\alpha)\,H_m(\beta)}\int\limits_{D^P} f(\theta)\,d\theta\int\limits_{D^{P\theta}} r_{PQ}^{\alpha-m}\,r_{Q\theta}^{\beta-m}\,dQ, \end{aligned} \tag{21}$$

$D^{P\theta}$ étant le domaine commun au cône rétrograde au sommet P et au cône direct au sommet θ. Le fait est qu'un point θ étant situé dans le cône rétrograde au sommet Q, ce dernier point sera situé dans le cône direct au sommet θ et *vice versa* (fig. 1). La dernière intégrale se transforme par une translation et une homothétie en l'expression

$$r_{P\theta}^{\alpha+\beta-m}\int\limits_{D^{O1}} r_{1T}^{\alpha-m}\,r_{TO}^{\beta-m}\,dT = r_{P\theta}^{\alpha+\beta-m}\,\mathrm{B}_m(\alpha,\beta),$$

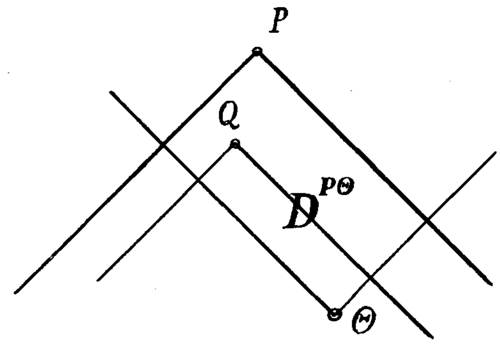

Fig. I. Figure schématique se référant au cas de deux dimensions.

O désignant l'origine, I un certain point intérieur au cône direct appartenant à l'origine et ayant la distance lorentzienne I de l'origine. En appliquant ces formules à la fonction particulière $f(P) = e^{x_1}$, on trouve une seconde généralisation de l'intégrale d'Euler de première espèce

$$\mathrm{B}_m(\alpha, \beta) = \frac{H_m(\alpha)\, H_m(\beta)}{H_m(\alpha + \beta)} \cdot \tag{22}$$ [1]

En raison de cette relation, la formule fondamentale (17) se trouve établie.

II. Formule de Green.

18. Théorème de Gauss. — Dans la suite, nous ferons un grand usage de la formule de Green relative à l'opérateur des ondes. Elle se déduit, comme toute autre formule analogue, du théorème de Gauss, qui donne la transformation d'une certaine intégrale de volume dans une intégrale de surface.

Considérons dans un espace (affine) à m dimensions un domaine D limité par une ou plusieurs surfaces fermées T (à $m - 1$ dimensions) que nous supposons assez régulières. On a alors

$$\int_D \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_m = \int_T P_k \cdot (\pm \, | d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1} \, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_m |), \tag{23}$$

[1] La fonction hyperbolique $\mathrm{B}_m(\alpha, \beta)$ est évidemment bien plus rapprochée de la fonction eulérienne $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ que la fonction elliptique correspondante. La formule explicite montre que $\mathrm{B}_m(\alpha, \beta)$ est indépendant du point désigné par I pourvu que la distance lorentzienne de ce point à l'origine soit $= 1$. Une vérification directe de ce fait s'ensuit facilement par une transformation de Lorentz.

le signe étant *positif* aux points de T où les droites parallèles à l'axe des ξ_k, suivant lesquelles on exécute l'intégration par rapport à ξ_k, sortent du domaine D et *négatif* aux points où ces droites entrent dans le domaine.

La frontière T étant rapportée à un système (ou plusieurs systèmes) de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, on a l'identité connue

$$|d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_m| = |J_k| \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}, \tag{24}$$

où l'on attribue toujours au produit des $d\lambda_i$ une valeur positive et où les J_k sont les jacobiens avec des signes alternés

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{d(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m)}{d(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1})}, \\ J_2 &= -\frac{d(\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_m)}{d(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1})}, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ J_k &= (-1)^{k-1}\frac{d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_m)}{d(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \quad \ldots \quad \ldots \lambda_{m-1})}. \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

Tout réarrangement des λ_i conduisant à une permutation paire conserve les J_k, tandis que tout réarrangement conduisant à une permutation impaire change les signes de tous. Nous allons montrer tout à l'heure que l'ordre des λ_i peut être choisi de manière qu'en ajoutant les relations (23), le résultat s'exprime par la formule simple, due en principe à Gauss,[1]

$$\int\limits_D \sum_1^m \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m = \int\limits_T \sum_1^m P_k J_k\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}. \tag{26}$$

Avant d'aller à la démonstration, observons que l'expression figurant dans l'intégrale de surface peut aussi se mettre sous la forme d'un déterminant

$$\sum_1^m P_k J_k = \begin{vmatrix} P_1 & \ldots & P_k & \ldots & P_m \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \lambda_i} & \ldots & \dfrac{\partial \xi_k}{\partial \lambda_i} & \ldots & \dfrac{\partial \xi_m}{\partial \lambda_i} \\ . & \ldots & . & \ldots & . \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{27}$$

[1] *Voir* aussi POINCARÉ, Acta mathematica 9 (1887) et GOURSAT, Journal de mathématiques (6) 4 (1908).

Évidemment, cette identité subsiste si l'on y remplace les P_k par m quantités quelconques.

Notons encore que, pour un déplacement (infinitésimal) $(d\xi_k)$ tangent à la surface, on a

$$\sum_1^m J_k\, d\xi_k = 0. \tag{28}$$

En effet, il en est ainsi pour les $m-1$ déplacements linéairement indépendants $\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \lambda_i} d\lambda_i\right)$, puisque dans le déterminant correspondant deux colonnes deviennent proportionnelles l'une à l'autre.

Cela étant, un point de la frontière T est dit point régulier par rapport à la représentation paramétrique (λ_i), si les J_k ne s'annulent pas simultanément en ce point. En un tel point la frontière T admet un plan tangent (à $m-1$ dimensions) déterminé et on aura $\Sigma J_k \delta\xi_k \neq 0$ pour tout déplacement infinitésimal $(\delta\xi_k)$ qui n'est pas situé dans ce plan tangent. Le signe de l'expression $\Sigma J_k \delta\xi_k$ sera différent suivant que le déplacement $(\delta\xi_k)$ est situé d'un côté ou de l'autre du plan tangent, c'est-à-dire suivant que $(\delta\xi_k)$ mène de la frontière à l'extérieur ou à l'intérieur du domaine. Cela posé, voici la règle définitive pour l'ordre des λ_i.

Les λ_i sont à numéroter de manière que l'expression $\Sigma J_k \delta\xi_k$, et dès lors le déterminant qui lui est égal, soient *positifs* dans les points réguliers de la frontière T pour tout[1] déplacement infinitésimal $(\delta\xi_k)$ qui d'un tel point mène à l'*extérieur* du domaine D.

Cette règle de signe se vérifie de la manière suivante. Dans la condition posée, on a $J_k > 0$ en tout point régulier qui est point de sortie d'une droite parallèle à l'axe des ξ_k et $J_k < 0$ en tout point régulier qui est point d'entrée d'une telle droite. En effet, un déplacement dont toutes les composantes sont nulles, sauf $\delta\xi_k$, mène à l'extérieur de D, si l'on a soin de prendre $\delta\xi_k$ positif ou négatif suivant qu'il s'agit d'un point de sortie ou d'entrée respectivement. La condition (de numérotage) étant remplie, on aura donc dans les deux cas $J_k \delta\xi_k > 0$, d'où notre énoncé s'ensuit. Dès lors, la formule (24) peut s'écrire sous la forme précisée

$$\pm\, |d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_m| = J_k \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}, \tag{29}$$

---

[1] D'après ce qu'on vient de voir, il *suffit* pour cela qu'il en soit ainsi pour un *seul* déplacement menant à l'extérieur.

le signe positif se référant encore aux points de sortie et le signe négatif aux points d'entrée. La dernière formule rend immédiat le passage de (23) à (26).

Par la loi de multiplication des déterminants fonctionnels il est clair que le second membre de la formule (26) est invariant par rapport à un changement de paramètres, si l'on tient aussi compte de la règle de signe. Rien n'empêche en outre que différentes portions de la frontière T soient repérées par différents systèmes de paramètres. Ces portions (en nombre fini) peuvent empiéter les unes sur les autres ou peuvent être séparées par des variétés à $m-2$ dimensions, qui sont supposées assez régulières. Dans un ordre d'idées plus général, on peut admettre un nombre fini de variétés exceptionnelles à différentes dimensions p, $0 \leqq p \leqq m-2$. Tel sera forcément le cas si la frontière elle-même admet des points exceptionnels, sans plan tangent déterminé, points anguleux isolés ou arêtes à différentes dimensions etc. La dernière circonstance se présente p. ex. chez les domaines extrêmement simples, limités par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Nos domaines d'intégrations usuels, les domaines D^P_S, qu'on rencontrera dans le numéro suivant, présentent deux espèces de singularités, un point anguleux isolé, à savoir le sommet du cône D^P, et une arête à $m-2$ dimensions, l'intersection de la nappe C^P avec une surface S.

19. Domaine d'intégration. — Dans les applications qui vont suivre, le domaine général D sera remplacé par un domaine de caractère très particulier, savoir le domaine borné D^P_S (fig. 2) limité par la nappe C^P d'un cône rétrograde D^P et une certaine surface (ouverte) S, qui devra être assez régulière pour que les dérivations qui interviendront puissent être exécutées. Sauf avis contraire, nous admettrons aussi que S ait, suivant la terminologie de M. Hadamard [1], une *orientation d'espace*. Cela veut dire que $\Sigma\, \varepsilon_k\, d\,\xi_k^2 < 0$ pour tout déplacement infinitésimal $(d\,\xi_k)$ le long de la surface. L'exemple le plus simple est fourni par les plans $\xi_1 = \text{const.}$ Géométriquement, une telle surface peut aussi être caractérisée par la propriété que son plan tangent en un point arbitraire Q n'a aucun point en commun avec le cône de lumière qui a son sommet en Q (excepté, bien entendu, le point Q lui-même). La *normale* [2] (lorentzienne) d'une surface à orientation d'espace est toujours une droite de temps (*cf.* n° **14**); propriété qui d'ailleurs pourrait également servir de définition. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la

---

(1) HADAMARD **1**, p. 53.

(2) Cette expression remplace, dans notre terminologie, celle de la *conormale* chez M. D'ADHÉMAR et de la *transversale* chez M. HADAMARD **1**, p. 87.

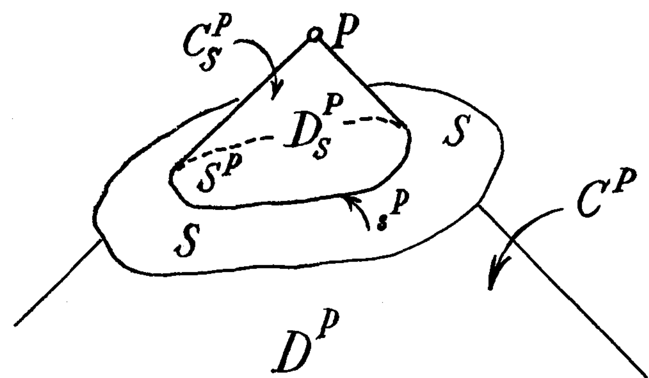

Fig. 2.

forme lorentzienne pourrait être transformée dans une forme qui ne contient que des carrés négatifs. On n'aurait qu'à choisir comme nouvelles directions d'axes $m-1$ directions orthogonales dans le plan tangent et la direction de la normale. Nous désignons par S^P la portion de la surface S qui est intérieure au cône D^P et par C_S^P la portion bornée de la nappe C^P découpée par la surface S. Notons encore le fait évident que toute droite de temps ou de lumière ne coupe une surface telle que S qu'en un seul point.

20. Formule de Green préliminaire. — Dans les applications auxquelles nous venons de faire allusion, les fonctions P_k s'évanouissent sur la portion de nappe C_S^P; la formule (26) se réduira donc à

$$(30) \qquad \int\limits_{D_S^P} \sum_1^m \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} \cdot d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m = \int\limits_{S^P} \sum_1^m P_k J_k \cdot d\lambda_1 \ldots d\lambda_{m-1}.$$

Reprenons maintenant l'ordre d'idées du n° **14**. Posons (formule (15))

$$(31) \qquad \Delta_Q = \Delta = \sum_1^m \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2}$$

et transformons l'intégrale de volume

$$\int\limits_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\,Q \text{ (}^1\text{)}$$

dans une intégrale de surface. Il suffit de montrer que la fonction à intégrer peut se mettre sous la forme d'une divergence. Or on a

(1) *Voir* la note (2) à la page 31.

$$u \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(u \frac{\partial v}{\partial \xi_k} - v \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right)$$

et

$$u \Delta v - v \Delta u = \sum_1^m \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left\{ \varepsilon_k^{-1} \left(u \frac{\partial v}{\partial \xi_k} - v \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) \right\}.$$

Dans les applications que nous avons en vue, v s'annule avec ses dérivées premières sur la nappe C^P; il vient donc, d'après la formule (30)

$$(32) \qquad \int_{D_S^P} (u \Delta v - v \Delta u) \, d Q = \int_{S^P} \sum_1^n \left(u \frac{\partial v}{\partial \xi_k} - v \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) \varepsilon_k^{-1} J_k \, d \lambda_1 \, d \lambda_2 \ldots d \lambda_{m-1}.$$

21. Notions géométriques relatives à l'espace lorentzien. Remarque. — Au moyen de certains éléments géométriques on peut simplifier considérablement cette formule. Menons, en un point Q de la portion de surface S^P la normale, qui, comme on a vu plus haut (nº **19**), est une droite de temps. Soit $\mathbf{n}$ un vecteur quelconque porté par cette normale. Nous disons que les composantes covariantes n_k^{cov} de $\mathbf{n}$ sont proportionnelles aux quantités J_k. En effet, ces composantes sont, à un facteur de proportionnalité près, déterminées par l'équation

$$(\mathbf{n}, d\mathbf{x}) = \sum_1^m n_k^{\mathrm{cov}} \, d x_k = 0,$$

valable pour tout déplacement $d\mathbf{x}$ le long de la surface, équation qui, en raison de la formule (28), est remplie par les quantités J_k. On a donc $n_k^{\mathrm{cov}} = \nu \cdot J_k$. Des deux directions admissibles nous choisissons celle de la normale *intérieure*: $(\mathbf{n}, \delta \boldsymbol{\xi}) = \Sigma \, n_k \, \delta \xi_k > 0$ pour tout déplacement infinitésimal $\delta \boldsymbol{\xi}$ qui du point Q mène à l'intérieur de D_S^P. Comme on a (*voir* plus haut) $\Sigma \, J_k \, \delta \xi_k > 0$ pour tout déplacement infinitésimal qui mène à l'extérieur, le facteur de proportionnalité en question sera négatif. Si l'on exige encore que la normale soit unitaire, c'est-à-dire que $(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum \varepsilon_k^{-1} (n_k^{\mathrm{cov}})^2 = 1$, il vient en définitive

$$(33) \qquad n_k^{\mathrm{cov}} = - J_k \cdot J^{-1}$$

où

$$(34) \qquad J = \left(\sum_1^m \varepsilon_k^{-1} J_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour les composantes contravariantes (formule (10) du nº **14**)

$$n_k = - \varepsilon_k^{-1} J_k \cdot J^{-1}. \text{(}^1\text{)} \tag{35}$$

Remarquons que $\mathfrak{n}$ étant un vecteur de temps, l'expression dont on a formé la racine carrée est certainement positive.

En restant dans le même ordre d'idées, ajoutons que si la surface S est donnée par l'équation $S(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0$, avec $\partial S / \partial \xi_1 > 0$ (2), les composantes covariantes de la normale intérieure seront évidemment données par les formules

$$n_k^{\text{cov}} = \frac{\partial S}{\partial \xi_k} \cdot N^{-1}, \tag{36}$$

où

$$N = \left\{ \sum_1^m \varepsilon_k^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{grad}\ S,\ \mathbf{grad}\ S)^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

et les composantes contravariantes par les formules

$$n_k = \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial S}{\partial \xi_k} \cdot N^{-1}. \tag{38}$$

Nous retournons maintenant à la formule (32). Nous posons par définition

$$J \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} = dS \tag{39}$$

= *élément de surface lorentzien* (3) autour du point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

F désignant une fonction quelconque, nous introduisons la notation

$$\sum_1^m \frac{\partial F}{\partial \xi_k} n_k = \frac{dF}{dn} \tag{40}$$

= *dérivée de F dans la direction et le sens de la normale intérieure.* (4)

---

(1) La valeur de la composante n_1 et le coefficient ε_1^{-1} étant positifs tous les deux, on a forcément $J_1 < 0$. Ceci peut, pour la surface S, remplacer la règle de signe assez compliquée qu'on a donnée pour les J_k au nº **18**.

(2) Les $\partial S / \partial \xi_k$ étant les composantes covariantes d'un vecteur de temps, $\partial S / \partial \xi_1$ ne peut s'annuler et dès lors, variant d'une manière continue, ne peut changer de signe. On pourra donc s'arranger de manière que $\partial S / \partial \xi_1$ soit positif.

(3) *Voir* le nº **21**^{bis} et, en particulier, les formules (53) et (54).

(4) *Voir* la *Remarque* qui suit.

Ces notations posées et en raison de la formule (35), on peut écrire

$$\sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \cdot \varepsilon_k^{-1} J_k \cdot d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \cdot (\varepsilon_k J)^{-1} J_k \cdot J\, d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{m-1}$$

$$= \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} n_k \cdot dS = \frac{dF}{dn} dS$$

et dès lors la formule (32) du n° **20** se réduit à

$$(41) \qquad \int\limits_{D_S^P} (u \Delta v - v \Delta u)\, dQ = - \int\limits_{S^P} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS.$$

Remarque. — D'une manière analogue à ce qu'on vient de faire pour le vecteur unitaire $\mathbf{n}$, on peut définir la «dérivée» de la fonction $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ dans toute direction non isotrope et de sens déterminé. La direction et le sens étant représentés par le vecteur unitaire $\mathbf{l}$, aux composantes contravariantes l_k, nous posons

$$(42) \qquad \frac{dF}{dl} = \sum_1^m \frac{\partial F}{\partial \xi_k} l_k = (\mathbf{grad}\, F,\ \mathbf{l}).$$

Nous allons démontrer que cette expression, introduite d'une manière tout à fait formelle, peut, tout comme dans l'espace euclidien, s'interpréter comme une dérivée dans le sens propre du mot.

Que le vecteur $\mathbf{l}$ soit unitaire ou non ou même isotrope, on a toujours

$$(43) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\xi_1 + \varepsilon l_1, \ldots, \xi_m + \varepsilon l_m) - F(\xi_1, \ldots, \xi_m)}{\varepsilon} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} l_k.$$

En introduisant le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ aux composantes ξ_k, ceci peut aussi s'écrire

$$(44) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\boldsymbol{\xi} + \varepsilon \mathbf{l}) - F(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} l_k.$$

Le vecteur $|\varepsilon| \cdot \mathbf{l}$ est un vecteur infinitésimal $d\mathbf{l}$ qui a la direction et le sens de $\mathbf{l}$.(¹) Nous posons $|d\mathbf{l}| = |(d\mathbf{l}, d\mathbf{l})|^{\frac{1}{2}}$. Si $\mathbf{l}$ est *unitaire* il vient $|d\mathbf{l}| = |\varepsilon|$. La relation ci-dessus peut donc aussi s'écrire

$$(45) \qquad \lim_{d\mathbf{l} \to 0} \frac{F(\boldsymbol{\xi} \pm d\mathbf{l}) - F(\boldsymbol{\xi})}{\pm |d\mathbf{l}|} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_k} l_k.$$

(¹) Ces propriétés sont caractéristiques et $d\mathbf{l}$ pourrait aussi être introduit sans l'intermédiaire de la quantité auxiliaire ε comme un vecteur ayant la direction et le sens de $\mathbf{l}$ et tendant vers zéro.

Il est donc naturel de considérer le second membre de (42) comme la dérivée de F dans la direction et le sens de $\mathbf{l}$.

Notre formule de dérivation (42) donne en particulier $d\xi_k/dl = l_k$; on a donc aussi, comme il fallait s'y attendre,

$$\frac{dF}{dl} = \sum_1^m \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \cdot \frac{d\xi_k}{dl}. \tag{46}$$

Considérons à titre d'exemple la fonction

$$F = R_{PQ} = r_{PQ}^2 = \sum_1^m \varepsilon_k (\xi_k - x_k)^2.$$

Le gradient de $R_{PQ} = R$ par rapport au point Q a les composantes covariantes

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_k} = 2\, \varepsilon_k (\xi_k - x_k). \tag{47}$$

On aura donc

$$\frac{1}{2} \frac{dR}{dl} = \sum_1^m \varepsilon_k (\xi_k - x_k)\, l_k = (\mathbf{r}_{PQ}, \mathbf{l}) \tag{48}$$

qui n'est que le produit scalaire du vecteur $\mathbf{r}_{PQ}$ allant de P à Q et du vecteur $\mathbf{l}$.

21*bis*. Mesure des éléments d'une variété de dimension arbitraire. — Soient $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots p$ vecteurs, où $p \leqq m$. Nous définissons le volume V du parallélépipède construit sur ces vecteurs par la formule

$$V = |G|^{\frac{1}{2}} \text{ où } G = \begin{vmatrix} (\mathbf{X}, \mathbf{X}) & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \ldots \\ (\mathbf{Y}, \mathbf{X}) & (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}. \text{[1]} \tag{49}$$

Cette définition se justifie par les faits suivants. 1°. L'expression de V est indépendante de l'ordre des vecteurs; 2°. elle est invariante par toute transformation de coordonnées (il en étant ainsi des produits scalaires); 3°. elle est encore invariante si, en gardant $\mathbf{X}$, on remplace $\mathbf{Y}$ par $\mathbf{Y} + \lambda \mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z} + \mu \mathbf{X} + \nu \mathbf{Y}, \ldots$; 4°. elle se multiplie par $|\lambda \mu \ldots|$ si l'on multiplie $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$ par $\lambda, \mu, \ldots$

[1] Nous faisons ici abstraction du fait que, dans le cas particulier $p = m$, où le volume peut aussi se définir par le déterminant formé des composantes des vecteurs considérés (cas spécial de la formule (51)), on peut sans ambiguïté attribuer au volume le signe $+$ ou $-$, ce signe dépendant de l'ordre des vecteurs.

respectivement; 5°. enfin elle se réduit au produit des «longueurs» des arêtes, $|(\mathbf{X}, \mathbf{X})|^{\frac{1}{2}}$, $|(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})|^{\frac{1}{2}}, \ldots$, dans le cas où les vecteurs donnés sont orthogonaux l'un à l'autre ($(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \cdots = 0$). Ajoutons que si l'on peut répartir les vecteurs donnés en deux systèmes *totalement orthogonaux* $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \ldots$ et $\mathbf{X}'', \mathbf{Y}'', \ldots$ de p' et p'' vecteurs respectivement ($p' + p'' = p$), c'est-à-dire tels que chaque vecteur du premier système soit orthogonal à chaque vecteur du second ([1]), on aura, dans des notations évidentes, $G = G' G''$ et alors

$$V = V' \cdot V''. \tag{50}$$

En effet, $(\mathbf{X}', \mathbf{X}'') = (\mathbf{X}', \mathbf{Y}'') = \cdots = 0$.

Il nous faut encore exprimer ces volumes par des déterminants formés des composantes de nos vecteurs. Or, on sait, d'après le théorème de Cauchy-Binet ([2]), que le déterminant $|c_{ik}|$ aux éléments

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \cdots + a_{im} b_{km} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p)$$

est égal à

$$\sum \begin{vmatrix} a_{1t} a_{1u} \ldots \\ \ldots \ldots \\ a_{pt} a_{pu} \ldots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1t} b_{1u} \ldots \\ \ldots \ldots \\ b_{pt} b_{pu} \ldots \end{vmatrix},$$

la sommation étant étendue aux $\binom{m}{p}$ combinaisons de p indices, $t, u, \ldots$, tirés de $1, 2, \ldots, m$. Ce point admis, on aura

$$G = \sum \varepsilon_t \varepsilon_u \ldots \begin{vmatrix} X_t X_u \ldots \\ Y_t Y_u \ldots \\ \ldots \ldots \end{vmatrix}^2, \tag{51}$$

les éléments des derniers déterminants étant les composantes des vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$ En particulier, pour $p = m - 1$, il vient, en raison de la relation

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k+1} \ldots \varepsilon_m = (-1)^{m-1} \varepsilon_k^{-1}$$

(*cf.* formule (9) du n° **14**),

([1]) Dans le cas de $m = 3$, p. ex., les droites parallèles à l'axe des coordonnées ξ_1 et les plans parallèles au plan $\xi_2 \xi_3$ sont totalement orthogonaux, mais il n'en est pas ainsi des plans (orthogonaux) parallèles au plan $\xi_1 \xi_2$, d'une part, et au plan $\xi_2 \xi_3$, d'autre part. D'une manière générale, en 3 dimensions il n'existe pas de plans totalement orthogonaux. Par contre, en 4 dimensions, les plans parallèles aux plans $\xi_1 \xi_2$ et $\xi_3 \xi_4$, respectivement, sont totalement orthogonaux.

([2]) *Cf.* p. ex. R. Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten* (1881), p. 48.

$$G = (-1)^{m-1} \sum \varepsilon_w^{-1} \begin{vmatrix} X_t \, X_u \dots \\ Y_t \, Y_u \dots \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \end{vmatrix}^2, \tag{52}$$

w étant celui des indices $1, 2, \dots, m$, qui manque dans la combinaison $t, u, \dots$

Considérons maintenant une variété (courbée) S à p dimensions, dont les points Q (ξ_k) sont rapportés aux paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. En désignant encore le vecteur aux composantes ξ_k par $\boldsymbol{\xi}$, l'élément de volume dS de cette variété sera défini par

$$d S = |\gamma|^{\frac{1}{2}} \, . \, d \lambda_1 \, d \lambda_2 \dots d \lambda_p, \tag{53}$$

où

$$\gamma = |\gamma_{ik}| = \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \lambda_k} \right) \right| (i, k = 1, 2, \dots, p) = \sum \varepsilon_t \, \varepsilon_u \dots \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_t}{\partial \lambda_1} \, \frac{\partial \xi_u}{\partial \lambda_1} \dots \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial \lambda_2} \, \frac{\partial \xi_u}{\partial \lambda_2} \dots \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \end{vmatrix}^2. \tag{54}$$

La première forme de γ, exprimée par des produits scalaires, met en évidence que $d S = |\gamma|^{\frac{1}{2}} \cdot d \lambda_1 \dots d \lambda_p$ est invariant par rapport aux transformations des coordonnées ξ_k. On voit par la seconde forme de γ qu'il y a aussi invariance par rapport à toute transformation de paramètres, grâce aux propriétés de transformations des jacobiens d'une part, et de l'élément $d \lambda_1 \dots d \lambda_p$ de l'autre.

Il arrive souvent qu'on peut répartir les indices $k = 1, 2, \dots, m$ en deux systèmes (k') et (k'') tels que la variété où seuls les $\lambda_{k'}$ et celle où seuls les $\lambda_{k''}$ varient soient *totalement orthogonales* l'une à l'autre, c'est-à-dire telles que deux déplacements quelconques, en un point, de la forme

$$\sum \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \lambda_{k'}} \, d \lambda_{k'} \text{ et } \sum \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \lambda_{k''}} \, d \lambda_{k''},$$

soient orthogonaux, ce qui revient à $\gamma_{k'k''} = 0$ pour tout couple k' et k''. Dans ces conditions, on aura, en vertu de la formule (50) et dans une notation évidente,

$$d S = d S' \cdot d S''. \tag{55}$$

Pour le cas $p = m - 1$ on a une formule analogue à (52), ce qui justifie notre définition de $d S$ au n° **21** par la formule (39). L'élément de volume à m

dimensions devient d'après (51), si l'on introduit comme paramètres les ξ_k eux-mêmes, $d\,Q = |\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m|^{\frac{1}{2}} \cdot d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_m$, ce qui se réduit à $d\,Q = d\,\xi_1 \ldots d\,\xi_m$ par la dernière des conditions (9) du n° **14**.

L'élément d'arc $d\,\sigma$ est dans notre variété donné par

$$(56) \qquad d\sigma^2 = |(d\,\mathfrak{x}, d\,\mathfrak{x})| = \left|\left(\sum \frac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial\,\lambda_k} d\,\lambda_k, \sum \frac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial\,\lambda_k} d\,\lambda_k\right)\right| = \left|\sum_{i,k=1}^{p} \gamma_{ik}\, d\,\lambda_i d\,\lambda_k\right|.$$

Par conséquent, ayant obtenu par un calcul quelconque l'expression de $d\,\sigma^2$ en (valeur absolue d'une) forme quadratique des $d\lambda_k$, on connaîtra par là automatiquement les γ_{ik} et dès lors l'élément de volume $d\,S = |\gamma|^{\frac{1}{2}} \cdot d\,\lambda_1 \ldots d\,\lambda_p$.

22. Formule de Green pour I^α. — Nous arriverons à la formule de Green relative à nos intégrales I^α en posant dans la formule (41) du n° **21**

$$(57) \qquad v = \frac{r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{H_m(\alpha+2)},$$

$P = (x_k)$ et $Q = (\xi_k)$ étant deux points pour lesquels $r_{PQ}^2 > 0$. Nous disons qu'en définissant, comme au n° **14**, r_{PQ}^2 et Δ par les formules

$$r_{PQ}^2 = r^2 = \sum_1^m \varepsilon_k (\xi_k - x_k)^2 \text{ et } \Delta_Q = \Delta = \sum_1^m \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\,\xi_k^2},$$

on a, *indépendamment* des ε_k,

$$\Delta\, r^{\alpha+2-m} = \alpha(\alpha + 2 - m) \cdot r^{\alpha-m}.$$

En effet,

$$(57^{bis}) \qquad \frac{\partial}{\partial\,\xi_k} r^{\alpha+2-m} = (\alpha + 2 - m)\,\varepsilon_k\, r^{\alpha-m} (\xi_k - x_k)$$

et

$$\varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\,\xi_k^2} r^{\alpha+2-m} = (\alpha + 2 - m)\,\varepsilon_k^{-1}\,\varepsilon_k \frac{\partial}{\partial\,\xi_k} \{ r^{\alpha-m}(\xi_k - x_k) \}$$
$$= (\alpha + 2 - m) \{ r^{\alpha-m} + (\alpha - m)\, r^{\alpha-m-2}\, \varepsilon_k (\xi_k - x_k)^2 \},$$

d'où

$$\Delta\, r^{\alpha+2-m} = (\alpha + 2 - m)\{ m\, r^{\alpha-m} + (\alpha - m)\, r^{\alpha-m-2} \cdot r^2 \} = \alpha(\alpha + 2 - m)\, r^{\alpha-m}.$$

Si donc $H_m(\alpha)$ satisfait à la relation

(58) $$H_m(\alpha + 2) = \alpha(\alpha + 2 - m) H_m(\alpha)\ (^1),$$

il vient

(59) $$\Delta \frac{r^{\alpha+2-m}}{H_m(\alpha + 2)} = \frac{r^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)} \cdot (^2)$$

Tel est donc le cas pour la fonction $H_m(\alpha)$ du n° **16** (formule (20)) relative au cas lorentzien que nous avons à envisager ici.

Avant d'aller plus loin, observons que dans (59) Δ peut désigner soit Δ_P, soit Δ_Q. Pour $\alpha > m$ la fonction (57) s'annule avec ses dérivées du premier ordre sur la nappe C^P du cône D^P; elle pourra donc bien jouer le rôle de la fonction v dans la formule (41). Cela étant, on trouve par un réarrangement évident

(60) $$\frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} u(Q) r_{PQ}^{\alpha-m} \, dQ = \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int\limits_{D_S^P} \Delta u(Q) r_{PQ}^{\alpha+2-m} \, dQ$$
$$+ \frac{1}{H_m(\alpha+2)} \int\limits_{S^P} \left(\frac{du(Q)}{dn} r_{PQ}^{\alpha+2-m} - u(Q) \frac{d r_{PQ}^{\alpha+2-m}}{dn} \right) dS, \qquad (\alpha > m).$$

23. L'intégrale I_*^α. — Dans les intégrales ci-dessus il ne figure que les valeurs que u et ses dérivées du premier et du second ordre admettent à l'intérieur et sur la frontière des domaines D_S^P auxquels la formule (60) sera ap-

(1) L'équation aux différences (58) est remplie soit par la fonction $H_m(\alpha)$ du n° **16** que nous sommes en train de considérer et que nous désignons ici par $H_m^{\text{hyp.}}(\alpha)$, soit par la fonction, écrite dans une notation correspondante,

$$\overline{H}_m^{\text{ell.}}(\alpha) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \cdot H_m^{\text{ell.}}(\alpha) = e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \cdot \pi^{\frac{m}{2}} \cdot 2^\alpha \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) : \Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right),$$

qui est définie par la formule (7) du n° **6** et dans la note (2) p. 21 (*cf.* aussi la formule (12) du n° **8**). Le rapport de ces deux fonctions devra donc être une fonction périodique à la période 2. On trouve en effet par un calcul simple

$$\overline{H}_m^{\text{ell.}}(\alpha) : H_m^{\text{hyp.}}(\alpha) = 2 \cdot e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} \sin \frac{(m-\alpha)\pi}{2}.$$

(2) Moyennant la notation $r_{PQ}^{\alpha-m} / H_m(\alpha) = V^\alpha(P, Q)$, cette formule s'écrit $\Delta V^{\alpha+2} = V^\alpha$. Bien d'autres formules peuvent à l'aide de cette notation se mettre sous des formes plus condensées; *cf.* le dernier Chapitre.

pliquée. Ces domaines sont tous situés d'un certain côté de la surface S, celui qui est tourné vers les ξ_1 indéfiniment croissants. Nous pourrons donc sans aucun inconvénient admettre que u s'annule identiquement du côté opposé de la surface. Cela posé, les intégrales étendues aux domaines D_S^P seront identiques aux intégrales correspondantes étendues aux cônes D^P et pourront être désignées par $I^\alpha u(P)$ et $I^{\alpha+2}\Delta u(P)$ respectivement.

Remarquons en passant que la relation $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ subsiste si l'on pose *a priori*

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ,$$

la surface S *ayant une orientation d'espace.*(¹) En effet, lorsque $f(Q) = 0$ «au-delà de» S, il en est de même de $I^\beta f(Q)$, dans la condition qu'on vient de préciser. Par cela on a assurément

$$I^\alpha_{D_S^P}\left(I^\beta_{D_S^P}\right) = I^\alpha_{D^P}\left(I^\beta_{D^P}\right) = I^{\alpha+\beta}_{D^P} = I^{\alpha+\beta}_{D_S^P}.$$

La formule (60) qui contient des intégrales spatiales, une intégrale de simple couche et une intégrale de double couche, peut se mettre sous une forme plus condensée. En effet, en posant d'une manière générale

$$(61)\quad I_*^\alpha \overline{f,\, g,\, h}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ + \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} \left(g(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m} - h(Q) \frac{d\, r_{PQ}^{\alpha-m}}{dn} \right) dS,$$

on peut écrire

$$(61^{bis})\qquad I^\alpha u(P) = I_*^{\alpha+2}\, \overline{\Delta u,\, \frac{du}{dn},\, u}(P).$$

24. Propriétés de I_*^α. — Avant d'aller plus loin, notons encore les propriétés suivantes du symbole I_*

$$(62)\qquad I^\alpha I_*^\beta = I_*^{\alpha+\beta},$$

$$(63)\qquad \Delta I_*^{\alpha+2} = I_*^\alpha$$

(¹) Dans l'édition originale de notre Conférence, servant d'Introduction à cet ouvrage, il y a une erreur sur ce point en ce qu'on y énonce ce fait sous des conditions sensiblement moins restrictives. L'erreur est éliminée dans la présente édition de cette Conférence.

et

(64) $$I_*^0 \overline{f,\, g,\, h}\,(P) = f(P).$$

La première propriété se démontre pour $\alpha > m - 2$ et $\beta > m - 2$ de la même manière que la propriété correspondante du symbole I^α (nos **16**, **17**). L'extension à d'autres valeurs de α et de β se fait par prolongement analytique. La démonstration de la deuxième propriété, facile pour d'assez grandes valeurs de $\alpha\,(\alpha > m)$, sera ajournée jusqu'au moment où nous aurons donné des méthodes pour effectuer les prolongements en question (no **42**). Quant à la formule (64), d'importance capitale, sur laquelle repose notre méthode de solution[1] du problème de Cauchy (no **44**), il n'a aucun sens pour le moment. En effet, les deux premières intégrales figurant dans I_*^α ne convergent que pour $\alpha > m - 2$ (no **15**) et la dernière ne converge que pour $\alpha > m$ (*voir* le numéro suivant en observant que là il est question de la convergence de $I_*^{\alpha+2}$). I_*^0 n'a donc aucun sens avant qu'on ait montré que dans des conditions convenables le prolongement analytique par rapport à α peut être effectué jusqu'à $\alpha = 0$ (no **37**).

Dans le cas elliptique, la formule de Green et ses itérées livraient un instrument utile pour effectuer le prolongement analytique des intégrales divergeant pour certaines valeurs de α. Or nous allons voir à l'instant (no **25**) que dans le cas actuel la formule de Green ne se prête guère à cette tâche. Dans ces circonstances nous nous dispensons d'écrire la formule itérée de Green analogue à la formule (20) du no **11**. C'est dans les nos **27**—**37** que nous indiquerons une méthode efficace qui nous donne le prolongement en question. Remarquons néanmoins que le principe de prolongement nous permet sur le champ d'étendre la validité de la formule de Green elle-même, établie pour $\alpha > m$, à toute valeur de $\alpha > m - 2$. En effet, pour les raisons indiquées tout à l'heure, les intégrales figurant dans (60) convergent pour $\alpha > m - 2$ et sont évidemment des fonctions holomorphes de α.

25. Convergence des intégrales. — Examinons maintenant de plus près la formule de Green (60) du no **22** sous le point de vue de la convergence (divergence) des intégrales qui y interviennent. Nous savons déjà (no **15**) que l'intégrale figurant au premier membre diverge en général pour $\alpha \leqq m - 2$ et que d'autre part les deux premières intégrales dans le second membre ne divergent que pour $\alpha \leqq m - 4$. Autant qu'on ne considère que ces deux intégrales, on a donc, par la transformation de Green, amélioré la convergence de l'intégrale

[1] En réalité, dans cette solution on n'utilise que la relation un peu moins générale $I^0 f(P) = f(P)$.

figurant au premier membre. Il en est tout autrement de la dernière intégrale du caractère d'un potentiel de double couche. En effet, on voit par la formule (40) du n° 21 que le noyau de double couche s'exprime par les dérivées du premier ordre de $r^{\alpha+2-m}$, fonctions qui, d'après la formule (57^{bis}) du n° **22**, présentent au voisinage de l'intersection de la nappe de D^P et de S la singularité $r^{\alpha-m}$, c'est-à-dire que l'intégrale examinée ne converge que pour $\alpha > m-2$. Ceci met en évidence que cette intégrale diverge en général pour les mêmes valeurs de α que celle du premier membre, ce qui montre qu'en fin de compte on n'a rien gagné en ce qui concerne la convergence.

26. L'intégrale I^α étendue au cône rétrograde entier.[1] — Quant à l'application de la formule de Green au prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$, on se trouve dans des circonstances bien plus favorables dans le cas particulier où le domaine d'intégration D_S^P se confond avec le cône entier D^P. Dans des conditions (suffisantes) relatives à f et à ses dérivées, qu'il serait facile de spécifier, il vient en effet, par un passage à la limite de la formule (60) du n° 22,

$$\frac{1}{H_m(\alpha)}\int\limits_{D^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ = \frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int\limits_{D^P} \Delta f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha+2-m}\, dQ \tag{65}$$

ou

$$I^\alpha f(P) = I^{\alpha+2}\Delta f(P).$$

On en obtient par itération

$$\frac{1}{H_m(\alpha)}\int\limits_{D^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ = \frac{1}{H_m(\alpha+2p)}\int\limits_{D^P} \Delta^p f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha+2p-m}\, dQ \tag{66}$$

ou

$$I^\alpha f(P) = I^{\alpha+2p}\Delta^p f(P). \tag{67}$$

Dans les conditions auxquelles on a fait allusion, le second membre de (66) converge, pour toute valeur de $\alpha > m-2-2p$ (n° **15**). Ainsi dans le cas actuel, le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$ se trouve effectué pour toutes ces valeurs.

III. Prolongement analytique.[2]

27. Un système de coordonnées. — Dans la suite, je donne une démonstration explicite de la possibilité du prolongement analytique dans le cas général,

(1) *Cf.* aussi le n° **37**.

(2) Pour obtenir quelques simplifications dans les calculs qui vont suivre, nous admettons dans les n^os^ **27—38** (=Chap. III_{III}) que les ε_k ont leurs valeurs originales, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = -1$. Le cas général se réduit facilement au cas particulier. (*Cf.* la *Remarque* à la fin du n° **14.**)

la première que je publie. Les deux démonstrations de ce fait, publiées jusqu'ici, sont dues à mon ancien élève, M. Fremberg[1]. Tout en suivant ici une voie assez différente de la sienne, je profite largement de ses méthodes ainsi que des simplifications que M. Gårding y a apportées et a bien voulu me communiquer.

Pour effectuer le prolongement analytique de l'intégrale $I_*^\alpha \overline{f, g, h}\,(P)$, qui jusqu'ici est exprimée dans des coordonnées lorentziennes ξ_k, nous nous servirons de nouvelles coordonnées auxquelles nous arriverons de la manière suivante.

Considérons d'abord comme surface auxiliaire le *demi-hyperboloïde H*, défini par $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}^2 = 1$, $z_1 < 0$.[2] On peut évidemment paramétriser H en posant, avec

$$0 \leqq t \leqq 1 \quad \text{et} \quad \sum_2^m \varphi_i^2 = 1\ ({}^3),$$

(68) $$z_1 = -\tfrac{1}{2}(t^{-1} + t), \; z_i = -\tfrac{1}{2}(t^{-1} - t)\,\varphi_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, m).$$

On a manifestement

(69) $$t \cdot z_k = O(1)\,({}^4), \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Notons qu'à $t = 0$ il correspond les points de H situés à l'infini. En posant encore $t^2 = T$, il vient

$$\frac{d}{dT}\{t(t^{-1} \pm t)\} = \frac{d}{dT}(1 \pm T) = \pm 1,$$

et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial T}(t \cdot z_1) = -1, \; \frac{\partial}{\partial T}(t \cdot z_i) = \varphi_i,$$

c'est-à-dire que

(70) $$\frac{\partial}{\partial T}(t \cdot z_k) = c_k = \text{const.}\,({}^5) \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans la suite, une *fonction* d'une ou de plusieurs variables, définie dans un certain domaine, sera dite « *suffisamment dérivable* »[6] si toutes ses dérivées,

---

[1] FREMBERG 1 et 2.

[2] La notation $\mathbf{x}^2$ remplacera dans ce qui suit la notation $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pour le carré scalaire d'un vecteur $\mathbf{x}$.

[3] Les φ_i peuvent être exprimés par $m - 2$ paramètres indépendants, qu'il est inutile de préciser, en observant que dans les différentiations par rapport à $T = t^2$ qui vont suivre, les φ_i auront à rester constants.

[4] La notation, dite de Landau, $A = O(B)$ signifie que $|A| \leqq$ (constante finie) $\cdot\, |B|$.

[5] Cela veut dire que les c_k sont indépendants de T.

[6] De temps en temps, on va préciser cette condition et ses conséquences.

dont on pourra avoir besoin dans le calcul, existent et sont des fonctions continues quand le domaine donné est borné et fermé et qu'elles tendent même assez vite vers zéro lorsque le domaine s'étend à l'infini. Une *surface* donnée par une équation de la forme $S = 0$ est dite « *suffisamment dérivable* » s'il en est de même de la fonction S. [1] Une *fonction* $I(\alpha)$ *holomorphe* pour toute valeur assez grande de α et dépendant de certaines fonctions $f, g, h, S, \ldots$ (des coordonnées) sera dite « *arbitrairement prolongeable* » si elle peut être prolongée vers le gauche, en restant holomorphe, jusqu'à une valeur arbitraire de α qui ne dépend que du degré de dérivabilité des fonctions $f, g, h, S, \ldots$.

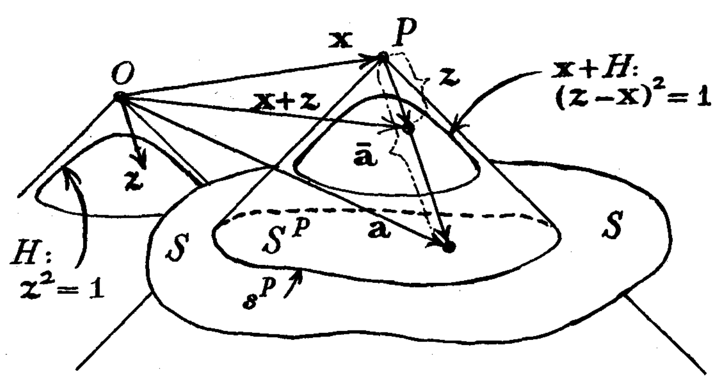

Fig. 3.

Soit maintenant S une surface d'espace[2] suffisamment dérivable donnée par l'équation $S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = S(\mathbf{a}) = 0$, les a_k étant les coordonnées des points de S. Soit, d'autre part, $P = \mathbf{x}$ un point aux coordonnées x_k tel que le cône rétrograde au sommet P délimite avec S un domaine borné D_S^P. Nous paramétrisons d'abord la portion de surface S^P, découpée de S par le cône, et ensuite le domaine D_S^P.

Considérons à cet effet le demi-hyperboloïde $\mathbf{x} + H$ au centre $\mathbf{x}\,(= P)$ provenant de H par une translation, représentée par le vecteur $\mathbf{x}$ (fig. 3 et 4). Nous *projetons* du point $\mathbf{x}$ comme centre les points $\mathbf{a}$ de S^P dans les points $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ de $\mathbf{x} + H$, ce qui établit une correspondance biunivoque entre S^P et $\mathbf{x} + H$. Par là, il correspond à tout point $\mathbf{a}$ de S^P un point déterminé $\mathbf{z}$ de H et (autant que $\mathbf{x}$ reste

(1) Pour les fonctions $g(\mathbf{a})$ et $h(\mathbf{a})$, définissant la simple et la double couches respectivement, il ne sera question que de différentiations exécutées de long de la surface S. Chaque fois qu'il s'agit de préciser la notion qu'on vient d'introduire (nombre de dérivées etc.), on pourra supposer que la surface est exprimée par $m - 1$ paramètres.

(2) On verra plus loin que la plupart des résultats qui suivent restent valides pour des surfaces de temps et des surfaces caractéristiques (n^os **61**—**64**).

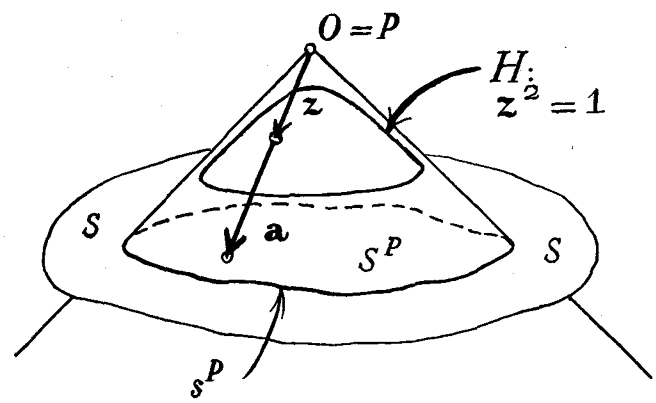

Fig. 4.

fixe) les points $\mathbf{a}$ peuvent être considérés comme dépendant des paramètres T et φ_i[1] attachés à $\mathbf{z}$. Ayant égard aussi à la variabilité de $\mathbf{x}$, chaque coordonnée a_k peut être regardée comme une fonction des variables T, φ_i $(i = 2, 3, \ldots, m)$ et x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Observons que c'est aux points $\mathbf{b}$ situés sur l'intersection s^P du cône et de la surface S que correspondent les valeurs $t = 0$ ou $T = 0$, c'est-à-dire les points de H situés à l'infini.

28. Dérivabilité par rapport à T. — Notre premier but est de démontrer que *toutes les dérivées partielles des a_k par rapport à T et aux x_j*, qui interviennent dans nos calculs, *sont continues*, si S est suffisamment dérivable.

Désignons un instant la distance lorentzienne du point $\mathbf{x}$ et d'un point $\mathbf{y}$ quelconque par r_y c'est-à-dire que $r_y^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2$. D'autre part, entre un point $\mathbf{a}$ et sa projection $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ on a la relation $\mathbf{a} - \mathbf{x} = \lambda \cdot ((\mathbf{x} + \mathbf{z}) - \mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{z}$ $(\lambda > 0)$. De là on tire $r_a^2 = \lambda^2 \mathbf{z}^2 = \lambda^2$, ou $r_a = \lambda$, ce qui donne $\mathbf{a} - \mathbf{x} = r_a \cdot \mathbf{z}$ ou plus brièvement

$$\mathbf{a} - \mathbf{x} = r\,\mathbf{z}. \tag{71}$$

Cela étant, pour exprimer deux relations simultanées de la forme $|B| = O(|A|)$ et $|A| = O(|B|)$, nous introduisons la notation abrégée $A \approx B$. Dès lors, il vient d'abord de $0 \leqq t \leqq 1$, $\frac{1}{2} t^{-1} \leqq \frac{1}{2}(t^{-1} + t) \leqq t^{-1}$, et par suite $\frac{1}{2}(t^{-1} + t) \approx t^{-1}$. On en tire, grâce à la relation $|a_1 - x_1| \approx 1$, $r \cdot t^{-1} \approx \frac{r}{2}(t^{-1} + t) = r \cdot |z_1| = |a_1 - x_1| \approx 1$, c'est-à-dire que

$$r \approx t \quad \text{ou} \quad v = \frac{r}{t} \approx 1. \tag{72}$$

---

[1] En réalité, les φ_i doivent être remplacés par les $m - 2$ paramètres indépendants auxquels on vient de faire allusion.

De la relation $|a_1 - x_1| = \frac{r}{2}(t^{-1} + t) = \frac{v}{2}(1 + t^2)$ on tire encore pour *les points* $\mathbf{b}$ *de l'intersection* s^P du cône avec la surface S, vu que t s'annule pour ces points,

$$v = 2\,|b_1 - x_1|. \tag{73}$$

En posant incidemment $a_k - x_k = \bar{a}_k$, nous démontrons pour commencer que — la surface S étant suffisamment dérivable — les dérivées

$$\frac{\partial a_k}{\partial T} = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial T} \tag{74}$$

existent et sont continues. Des relations $\bar{a}_k = r \cdot z_k$, on tire $\bar{a}_k = \frac{r}{t} \cdot t z_k = v \cdot t z_k$ ou $t z_k = v^{-1} \cdot \bar{a}_k$. Il vient alors de (70), si l'on admet un instant que $\partial \bar{a}_k / \partial T$ et $\partial v / \partial T$ existent,

$$\frac{\partial}{\partial T}(v^{-1} \cdot \bar{a}_k) = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial T} \cdot v^{-1} - \bar{a}_k \cdot v^{-2} \frac{\partial v}{\partial T} = c_k$$

et par suite

$$v \cdot \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial T} - \bar{a}_k \cdot \frac{\partial v}{\partial T} = c_k \cdot v^2. \tag{75}$$

Ayant égard à $v \approx 1$ (*cf.* (72)) et à la continuité de v et des $\bar{a}_k$, on voit que notre énoncé concernant les quantités (74) se réduit à un énoncé analogue relatif à la quantité

$$\frac{\partial v}{\partial T}. \tag{76}$$

Or en tenant compte de (75), et en posant, pour abréger, $\partial S / \partial a_k = S_k$, on tire de la relation $S(\mathbf{a}) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = v \cdot \frac{\partial S}{\partial T} &= v \cdot \sum_k S_k \frac{\partial a_k}{\partial T} = v \cdot \sum S_k \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial T} \\ &= \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \sum S_k \bar{a}_k + v^2 \cdot \sum S_k c_k = \frac{\partial v}{\partial T} \cdot M + v^2 \cdot \sum_k S_k c_k, \end{aligned} \tag{77}$$

où l'on a posé

$$M = \sum_k S_k \bar{a}_k = \sum_k S_k (a_k - x_k) = (\mathbf{grad}\ S,\ \mathbf{a} - \mathbf{x}). \tag{78}$$

Aucun des rayons vecteurs issus du point $\mathbf{x}$ n'étant tangent à la surface S, on a

$$M \approx 1, \tag{79}$$

ce qui entraîne la continuité de M^{-1} et par là l'existence et la continuité de (76). Puisque $v \approx 1$, il en résulte pour un exposant arbitraire γ l'existence et la continuité de

$$\frac{\partial v^\gamma}{\partial T}. \tag{80}$$

On établit aussi, S étant toujours supposé suffisamment dérivable, l'existence et la continuité de

$$\frac{\partial^p a_k}{\partial T^p} = \frac{\partial^p \bar{a}_k}{\partial T^p} \quad \text{et de} \quad \frac{\partial^p v^\gamma}{\partial T^p}. \tag{81}$$

En effet, en différentiant (75) $p-1$ fois, on voit que

$$v \cdot \partial^p \bar{a}_k / \partial T^p - \bar{a}_k \cdot \partial^p v / \partial T^p$$

s'exprime comme un polynome à coefficients constants en v et dans les dérivées successives de v et de $\bar{a}_k$, toutes ces dérivées étant d'ordre $\leqq p-1$. Dès lors, les faits énoncés étant supposés démontrés pour $p \leqq q-1$, la démonstration pour $p=q$ s'achève comme plus haut $(p=1)$.

29. Dérivabilité par rapport aux coordonnées x_j. — En ce qui concerne les dérivées des a_k et de v^γ par rapport aux x_j (et leurs dérivées mixtes par rapport aux x_j et à T), on peut, du point de vue de la méthode, se restreindre à celles du premier ordre. Montrons donc que les dérivées

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial (a_k - x_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v^\gamma}{\partial x_j} \tag{82}$$

existent et sont continues. Ici encore, tout dépend de la relation $M \approx 1$. En effet, en différentiant par rapport à x_j la relation

$$S(\mathbf{a}) = S(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{x}}) = S(r \cdot \mathbf{z} + \mathbf{x}) = 0,$$

on obtient

$$S_j + \sum_k S_k z_k \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} = 0. \tag{83}$$

En multipliant par $v = r \cdot t^{-1}$, et en observant que $r z_k = \bar{a}_k$ et $t^{-1} \cdot \partial r / \partial x_j = \partial v / \partial x_j$, on en tire

$$S_j \cdot v + M \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0. \tag{84}$$

D'autre part, en multipliant par $\bar{a}_l = r \cdot z_l$ et notant que

$$r z_l \cdot z_k \frac{\partial r}{\partial x_j} = r z_k \cdot z_l \frac{\partial r}{\partial x_j} = \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{a}_l}{\partial x_j},$$

on obtient

$$S_j \bar{a}_l + M \cdot \frac{\partial \bar{a}_l}{\partial x_j} = 0. \tag{85}$$

Il en résulte comme plus haut que toutes les dérivées $\partial v / \partial x_j$ ou $\partial v^{\eta} / \partial x_j$ et $\partial \bar{a}_k / \partial x_j$ existent et sont continues.

En itérant les procédés ci-dessus et en les combinant avec ceux concernant les différentiations par rapport à T, on arrive au théorème suivant.

La surface S étant suffisamment dérivable, il en est de même des quantités a_k et v considérées comme fonctions des variables T et x_j.

30. Système de coordonnées pour D_S^P. — Afin de caractériser les points $\boldsymbol{\xi}$ du domaine D_S^P il faut compléter les variables T et x_j caractérisant les points $\mathbf{a}$ de S^P par une nouvelle variable σ. On posera simplement $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} = \sigma(\mathbf{a} - \mathbf{x})$, $0 \leqq \sigma \leqq 1$, ce qui peut aussi s'écrire

$$\boldsymbol{\xi} = (1 - \sigma)\mathbf{x} + \sigma \mathbf{a} \quad \text{ou} \quad \xi_k = (1 - \sigma) x_k + \sigma a_k \quad (0 \leqq \sigma \leqq 1). \tag{86}$$

On est par là conduit au théorème:

Si la surface S est suffisamment dérivable et s'il en est de même des fonctions $f(\boldsymbol{\xi})$ et $l(\mathbf{a})$ par rapport aux variables respectives ξ_k et a_k,[1] *ces fonctions seront des fonctions suffisamment dérivables, toutes les deux par rapport aux variables T et x_j et la première en outre par rapport à la variable σ.*

31. Transformation de l'intégrale I_*. — Nous appliquons maintenant ce qui précède à la transformation des intégrales figurant dans $I_*^{\alpha} \overline{f, g, h}(P)$, en commençant par l'intégrale de volume

$$I^{\alpha} f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{D_S^P} f(Q) \, r_{PQ}^{\alpha - m} \, dQ, \tag{87}$$

où, d'après les formules (20) du n° **16** et (5) du n° **6**,

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha - 1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right) = \pi^{\frac{m-1}{2}} \, \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right) \Gamma(\alpha) : \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right). \tag{88}$$

---

[1] *Cf.* la note [1], p. 51.

Dans les considérations qui suivent on peut, sans restreindre la généralité, placer l'origine dans le point P. Soit $Q = \mathfrak{x}$ un point du domaine D_S^P et désignons par $\mathbf{a}$ et par $\mathbf{z}$ ses projections respectives sur la surface S et le demi-hyperboloïde H ($\mathbf{z}^2 = 1$, $z_1 < 0$), toutes les projections dont il sera question ici étant des projections centrales au centre P. En posant, pour abréger, $r_{PQ} = r_Q$ et $r_{P\mathbf{a}} = r_a$, on aura $r_Q = \sigma \cdot r_a$, avec $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Pour calculer l'élément de volume dQ, nous envisageons encore le demi-hyperboloïde $\bar{H}$ passant par Q et composé des points $r_Q \cdot \mathbf{z}$ et nous désignons par $dr_Q = r_a \cdot d\sigma$ la différentielle de r_Q correspondant à un déplacement radial de Q. Les rayons vecteurs issus de P étant orthogonaux à $\bar{H}$, on a, en désignant respectivement par $d\bar{H}$ et dH l'élément de surface de $\bar{H}$ et sa projection sur H, l'expression suivante pour l'élément de volume

$$(89) \quad dQ = d\bar{H} \cdot dr_Q = r_Q^{m-1}\, dH \cdot dr_Q = \sigma^{m-1} r_a^{m-1}\, dH \cdot r_a\, d\sigma = r_a^m\, dH \cdot \sigma^{m-1}\, d\sigma,$$

et

$$(90) \qquad r_Q^{\alpha-m}\, dQ = r_a^{\alpha-m} \sigma^{\alpha-m}\, dQ = r_a^\alpha\, dH \cdot \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma.$$

Cela posé, il vient

$$(91) \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_H F(\mathbf{a}, \alpha)\, r_a^\alpha\, dH,$$

où

$$(92) \qquad F(\mathbf{a}, \alpha) = \int_0^1 f(\sigma \cdot \mathbf{a})\, \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma.$$

Nous passons maintenant à nos intégrales de surface et considérons d'abord, pour des raisons qu'on va voir, la double couche

$$I_*^\alpha \overline{0, 0, h}\,(P) = -\frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} h \cdot \frac{d r_a^{\alpha-m}}{d n_a} \cdot dS = -\frac{\alpha - m}{H_m(\alpha)} \int_{S^P} h \cdot r_a^{\alpha-m-1} \cdot \frac{d r_a}{d n_a} \cdot dS.$$

En analogie avec le cas euclidien, on doit avoir, si l'on désigne par dH la projection sur H de dS

$$(93) \qquad r_a^{1-m} \cdot \left| \frac{d r_a}{d n_a} \right| \cdot dS = dH,$$

cette dernière expression n'étant que l'angle solide (lorentzien) sous lequel l'élément dS est vu du point P. Cette formule est d'ailleurs facile à vérifier par le calcul suivant où, pour simplifier l'écriture, on supprime en général l'indice a.

Désignons par $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{a}/r$ l'une des deux normales unitaires au point $\mathbf{a}$ de l'hyperboloïde $\bar{H} = r_a \cdot H = r \cdot H$ qui passe par ledit point; on a évidemment pour deux éléments dS et $d\bar{H}$ qui se correspondent par projection $d\bar{H} = |(\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}})| \cdot dS$. D'autre part, d'après la formule (48) du n° **21**, on trouve

$$r \cdot \frac{dr}{dn} = (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{dn} = (\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}). \tag{94}$$

Par suite

$$\left|\frac{dr}{dn}\right| dS = d\bar{H} = r^{m-1}\, dH,$$

ce qui n'est autre chose que la formule (93). En observant encore que, pour la normale intérieure, dont nous nous servons en général, dr/dn est négatif, on en tire

$$I_*^\alpha \overline{0, 0, h}\,(P) = \frac{\alpha - m}{H_m(\alpha)} \int\limits_H h \cdot r_a^{\alpha-2}\, dH. \tag{95}$$

Transformons enfin l'intégrale de simple couche

$$I_*^\alpha \overline{0, g, 0}\,(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} g \cdot r_a^{\alpha-m}\, dS.$$

On a, d'après les formules (78), (93), (94) et la formule (37) du n° **21**,

$$dS = \left|\frac{dr}{dn}\right|^{-1} r^{m-1}\, dH = |(\mathbf{a}, \mathbf{n})|^{-1} r^m\, dH = |M|^{-1} \cdot N \cdot r^m\, dH \tag{96}$$

et par là

$$I_*^\alpha \overline{0, g, 0}\,(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_H |M|^{-1} N \cdot g \cdot r_a^\alpha\, dH. \tag{97}$$

Nous avons maintenant à exprimer l'élément de surface dH par les paramètres T et φ_i considérés plus haut. En posant incidemment $t = e^{-\theta}$, le plan à $m - 1$ dimensions défini par $z_1 = -\cosh\theta$ coupe l'hyperboloïde suivant une sphère de caractère euclidien de rayon $\sinh\theta$. L'élément de cette sphère est donc $\sinh^{m-2}\theta\, d\omega_{m-1}$, le dernier élément étant celui d'une sphère unitaire dans un espace à $m - 1$ dimensions; pour la notation *cf.* le n° **6**, *Remarque.* Par là, l'élément de surface de H est $dH = \sinh^{m-2}\theta \cdot d\theta \cdot d\omega_{m-1}$.

Il faut maintenant exprimer cela à l'aide du paramètre $T = t^2$. On a $T = e^{-2\theta}$, $dT = -2e^{-2\theta}\, d\theta = -2T\, d\theta$ et par suite $|d\theta| = \frac{1}{2} T^{-1} |dT|$; d'autre part $\sinh\theta$

$=\frac{1}{2}(t^{-1}-t)=\frac{1}{2}t^{-1}(1-T)=\frac{1}{2}T^{-\frac{1}{2}}(1-T)$. Dès lors, il vient après quelques simplifications

$$dH=2^{1-m}T^{-\frac{m}{2}}(1-T)^{m-2}\cdot dT\cdot d\omega_{m-1}, \tag{99}$$

toutes les différentielles admettant le signe positif. Cela posé, et en reprenant la notation $r/t=v$ (formule (72) du n° **27**), on trouve

$$r^{\alpha}\cdot dH=v^{\alpha}t^{\alpha}\cdot dH=2^{1-m}\cdot v^{\alpha}\cdot T^{\frac{\alpha-m}{2}}(1-T)^{m-2}\cdot dT\cdot d\omega_{m-1}. \tag{100}$$

Ce point acquis, nos trois intégrales peuvent s'écrire sous la forme commune suivante

$$I^{\alpha}=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_0^1 T^{\beta-1}\cdot K(T,\alpha)\cdot dT, \tag{101}$$

où l'on a dans les différents cas, en posant encore

$$2^{1-m}\cdot(1-T)^{m-2}=k(T), \tag{102}$$

I. *Simple couche:*

$$\beta=\frac{\alpha+2-m}{2};\quad K(T,\alpha)=k(T)\int_{\omega_{m-1}} N\cdot|M|^{m-1}\cdot v^{\alpha}\cdot g(\mathbf{a})\cdot d\omega_{m-1}. \tag{103}$$

II. *Double couche:*

$$\beta=\frac{\alpha-m}{2};\quad K(T,\alpha)=2\beta\cdot k(T)\int_{\omega_{m-1}} v^{\alpha-2}\cdot h(\mathbf{a})\cdot d\omega_{m-1}. \tag{104}$$

III. *Intégrale de volume:*

$$\beta=\frac{\alpha+2-m}{2};\quad K(T,\alpha)=k(T)\int_{\omega_{m-1}} v^{\alpha}\cdot F(\mathbf{a},\alpha)\cdot d\omega_{m-1}, \tag{105}$$

la fonction $F(\mathbf{a},\alpha)$ étant donnée par la formule (92).

Nous allons maintenant effectuer le prolongement analytique et montrer en particulier que l'on a, dans les cas I et II, pour $p=0$ ou entier positif, $I^{-2p}=0$ et, dans le cas III, $I^0=f(P)$, $I^{-2p}=\Delta^p f(P)$, ou, en résumant les cas I—III,

$$I_*^0\overline{f,\,g,\,h}(P)=f(P),\quad I_*^{-2p}\overline{f,\,g,\,h}(P)=\Delta^p f(P)\qquad (p=1,\,2,\,\ldots). \tag{106}$$

Les cas I et II se traitent facilement par les méthodes du Chapitre I, en appliquant l'une des deux formules de prolongement (4) (n° 2) ou (13) (n° 5), par préférence la dernière.

32. Simple couche. — Avec la valeur que β admet dans (103) on peut écrire (*voir* (88) et (101))

$$I^\alpha = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 T^{\beta-1} K(T, \alpha)\, dT, \tag{107}$$

cette intégrale n'étant convergente en général que pour $\beta > 0$ ou $\alpha > m - 2$. Nous avons montré plus haut que, la surface S et la fonction $g(\mathbf{a})$ étant suffisamment dérivables[1], la fonction $K(T, \alpha)$ est une fonction suffisamment dérivable de T. D'autre part, on voit par (103) que la fonction $K(T, \alpha)$ ainsi que ses dérivées sont des fonctions holomorphes de α pour toute valeur de α, cette variable n'entrant dans $K(T, \alpha)$ que par le facteur v^α. Cela étant, il résulte de la formule (13) du n° 5 que I^α, considéré comme fonction de α, est arbitrairement prolongeable (p. 51).

Il convient de préciser le dernier résultat. Nous dirons qu'une fonction est « *dérivable n fois* » par rapport à une ou à plusieurs variables si elle admet des dérivées continues de tout ordre $\leqq n$. On voit alors que si la fonction $K(T, \alpha)$ est dérivable n fois par rapport à T, n étant un nombre $> -\beta_0 = \frac{m-2-\alpha_0}{2}$, la fonction I^α pourra être prolongée analytiquement jusqu'à la valeur α_0. D'autre part, cette dernière valeur étant fixée, on pourra choisir $n = \left[\frac{m-2-\alpha_0}{2}\right] + 1 = \left[\frac{m-\alpha_0}{2}\right]$. Si l'on exige seulement que le prolongement soit possible jusqu'à toute valeur $\alpha_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, et puisse ensuite s'opérer par un passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, il suffira $n \geqq \frac{m-2-\alpha_0}{2}$. En particulier, pour $\alpha_0 = 0, -1, -2, \ldots$, on pourra alors poser $n = \left[\frac{m-1-\alpha_0}{2}\right]$. On voit, par les résultats généraux du n° 28 et par la formule (103) et les formules (78) du n° 28 et (37) du n° 21, que $K(T, \alpha)$ est pour n arbitraire dérivable n fois, si $g(\mathbf{a})$ est dérivable n fois et $S(\mathbf{a})$ dérivable $n + 1$ fois. En particulier, le pro-

[1] *Cf.* la note [1], p. 51.

longement sera possible jusqu'à $\alpha = 0$ ou, plus généralement, jusqu'à $\alpha = -2p$ (p entier) si $g(\mathbf{a})$ et $S(\mathbf{a})$ sont dérivables $\left[\frac{m-1}{2}\right] + p$ fois et $\left[\frac{m+1}{2}\right] + p$ fois respectivement.[1] Dans ces conditions, on aura

$$I^0 = 0, \quad I^{-2p} = 0, \tag{109}$$

puisque $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ qui figure au dénominateur du premier facteur de l'expression (107) de I^α admet un pôle pour les valeurs de α en question.

33. Double couche. — On a, avec la valeur de β qui figure dans (104),

$$\frac{2\beta}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right)} = \frac{2\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{2}{\Gamma(\beta)}. \tag{110}$$

Dès lors, le raisonnement ci-dessus s'applique, le seul changement étant que, pour arriver à une certaine valeur fixée de α_0, le degré de dérivabilité de $K(T, \alpha)$ devra être augmenté de 1. En particulier, on aura

$$I^0 = 0, \quad I^{-2p} = 0, \tag{111}$$

si $h(\mathbf{a})$ et $S(\mathbf{a})$ sont dérivables $\left[\frac{m+1}{2}\right] + p$ fois et $\left[\frac{m+3}{2}\right] + p$ fois, respectivement.[2]

34. Intégrale de volume. — Dans les deux cas précédents, l'intégration n'a eu lieu que par rapport à une seule variable essentielle, à savoir T. On voit par les formules (92), (101) et (105) que pour l'intégrale de volume il est question de deux variables d'intégration essentielles, à savoir T et σ, ce qui fait que les résultats du Chap. I ne suffisent pas pour éclaircir le cas actuel. Pour en faciliter la discussion, nous allons démontrer quelques lemmes.

35. Lemmes. Remarques. — Nous commençons par

Lemme I. *Toute fonction $G(u, v)$, définie pour $0 \leqq u \leqq a < \infty$, $0 \leqq v \leqq b < \infty$, et suffisamment dérivable, peut se mettre sous la forme*

$$G(u, v) = \pi(u, v) + \sum_{r=0}^{p-1} \frac{h_r(v)}{r!} u^r + \sum_{s=0}^{q-1} \frac{k_s(u)}{s!} v^s + l(u, v), \tag{112}$$

(1) *Cf.* FREMBERG **2**, p. 45.
(2) *Cf.* FREMBERG **2**, p. 51. *Cf.* aussi la note (1), p. 51.

où $\pi\,(u,v)$ est un polynome en u et en v tandis que les autres fonctions introduites satisfont aux inégalités

$$h_r(v) = O(v^q), \quad k_s(u) = O(u^p), \quad l(u,v) = O(u^p v^q). \tag{113}$$

La chose est évidente, si la fonction $G(u,v)$ peut être développée en série de Maclaurin, au moins pour u assez petit et $0 \leqq v \leqq b$ et, d'autre part, pour v assez petit et $0 \leqq u \leqq a$. Il s'agit pourtant d'établir cette formule de décomposition dans les conditions plus générales où nous nous trouvons ($G(u,v)$ est suffisamment dérivable). Il suffit de poser, à cet effet, en écrivant

$$\partial^{r+s} G(u,v)/\partial u^r \partial v^s = G^{(rs)}(u,v),$$

$$\pi(u,v) = \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{q-1} \frac{G^{(rs)}(0,0)}{r!\,s!} u^r v^s,$$

$$h_r(v) = G^{(r0)}(0,v) - \sum_{s=0}^{q-1} \frac{G^{(rs)}(0,0)\,v^s}{s!} = \frac{1}{(q-1)!}\int_0^v G^{(rq)}(0,\eta)(v-\eta)^{q-1}\,d\eta,$$

$$k_s(u) = G^{(0s)}(u,0) - \sum_{r=0}^{p-1} \frac{G^{(rs)}(0,0)\,u^r}{r!} = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^u G^{(ps)}(\xi,0)(u-\xi)^{p-1}\,d\xi$$

et

$$l(u,v) = G(u,v) - \sum_{r=0}^{p-1} \frac{G^{(r0)}(0,v)\,u^r}{r!} - \sum_{s=0}^{q-1} \frac{G^{(0s)}(u,0)\,v^s}{s!} + \pi(u,v)$$

$$= \frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\int_0^u\int_0^v G^{(pq)}(\xi,\eta)(u-\xi)^{p-1}(v-\eta)^{q-1}\,d\eta\,d\xi.$$

L'identité entre les premiers et les seconds membres correspondants se vérifie moyennant des intégrations par parties. Les premiers membres mettent en évidence l'identité (112) et les seconds les inégalités (113).

Lemme II. [1] *Nous posons*

$$J^{\alpha\beta} G(0,0) = J^{\alpha\beta} G = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^a\int_0^b G(u,v)\,u^{\alpha-1}v^{\beta-1}\,dv\,du. \tag{114}$$

Cette fonction est holomorphe en α et en β dans le domaine A: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, si $G(u,v)$ est borné par exemple. Si $G(u,v)$ est suffisamment dérivable, la fonction $J^{\alpha\beta}$ admet un prolongement qui est holomorphe dans le domaine B: $\alpha \geqq \alpha_0$, $\beta \geqq \beta_0$ où α_0 et β_0 sont des nombres négatifs arbitraires ou zéro.

[1] Ce lemme est intimement lié à un lemme donné par M. Fremberg, **1**, p. 10.

Lemme III. [1]. *La valeur $J^{\alpha_0 \beta_0} G$, obtenue par prolongement analytique, est indépendante du chemin, situé dans B, suivant lequel le point (α, β) va au point* (α_0, β_0). En particulier, on peut effectuer d'abord le prolongement par rapport à α, en formant la valeur $J^{\alpha_0 \beta} G$ avec $\beta > 0$, pour en arriver à la valeur $J^{\alpha_0 \beta_0} G$ par le prolongement de $J^{\alpha_0 \beta} G$ par rapport à β.

Lemme IV. *Les lemmes* II *et* III *restent valides si $G(u,v)$ dépend aussi de α et de β de manière que $G(u,v)$ et les $G^{(rs)}(u,v)$, qui interviennent dans le calcul, sont des fonctions holomorphes de α et de β dans le domaine B.*

Soient p et q deux nombres entiers, $p > -\alpha_0, q > -\beta_0$. Écrivons $G(u,v)$ sous la forme donnée par le lemme I. Pour les monomes $u^r v^s$ on a — d'abord pour α et β assez grands —

$$J^{\alpha \beta} u^r v^s = \frac{a^{r+\alpha}}{(\alpha + r) \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{b^{s+\beta}}{(\beta + s) \Gamma(\beta)},$$

par quoi le prolongement analytique de $J^{\alpha \beta}$ se trouve effectué pour ce monome et alors pour le polynome $\pi(u,v)$ du lemme I, et cela pour toute valeur de α et de β. Les pôles $\alpha = -r$, $\beta = -s$ ne sont qu'apparents, vu que $(\alpha + r) \Gamma(\alpha)$ et $(\beta + s) \Gamma(\beta)$ sont différents de zéro.

Ensuite on a

$$J^{\alpha \beta} h_r(v) u^r = \frac{a^{r+\alpha}}{(r + \alpha) \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^b h_r(v) v^{\beta - 1} dv.$$

La dernière intégrale étant, en vertu de (113), convergente pour $\beta > -q$, où $-q < \beta_0$, le prolongement analytique se trouve effectué dans le domaine B entier.

Le raisonnement est analogue pour les fonctions $k_s(u)$. Enfin, pour $l(u,v)$, l'intégrale $J^{\alpha \beta}$ converge dans le domaine B entier, encore en vertu des inégalités (113). Ainsi, la démonstration du lemme II se trouve achevée.

La valeur obtenue pour $J^{\alpha_0 \beta_0} G$ étant manifestement indépendante du chemin suivi quand il s'agit des fonctions de forme particulière que nous venons de considérer, il en est de même de la fonction $G(u,v)$, ce qui établit les lemmes III et IV.

Remarque I. Dans nos applications, α et β ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On aura p. ex. $\beta = \frac{\alpha + 2 - m}{2}$. Rien n'empêche cependant, d'après ce qui précède, de choisir le chemin allant dans le domaine B au point

---

[1] Ce lemme ainsi que le lemme IV sont en principe dus à M. Gårding.

$$\left(\alpha_0, \beta_0 = \frac{\alpha_0 + 2 - m}{2}\right)$$

d'une manière arbitraire (non nécessairement rectiligne).

Remarque II. Les conditions de dérivabilité imposées à $G(u,v)$ peuvent être telles que le prolongement analytique de $J^{\alpha\beta}$ ne peut s'effectuer que dans le domaine $\alpha > \alpha_0$, $\beta > \beta_0$ et que $J^{\alpha\beta_0}$ $(\alpha > \alpha_0)$, $J^{\alpha_0\beta}$ $(\beta > \beta_0)$ et $J^{\alpha_0\beta_0}$ s'obtiennent en ajoutant au prolongement un ou plusieurs passages à la limite. Ici encore, les valeurs finales, p. ex. celle de $J^{\alpha_0\beta_0}$, sont indépendantes du chemin suivi par (α, β). Nous nous contentons du cas simple que voici.

Lemme II'. Si $G(u,v)$ est continu dans le domaine $0 \leqq u \leqq a < \infty$, $0 \leqq v \leqq b < \infty$, l'intégrale $J^{\alpha\beta}$ convergente pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tend vers $G(0,0)$ quand $\alpha \to 0$ et $\beta \to 0$.

On arrive à une démonstration simple par l'observation suivante. La fonction

$$\begin{aligned} l(u,v) &= G(u,v) - G(0,v) - G(u,0) + G(0,0) \\ &= (G(u,v) - G(0,v)) - (G(u,0) - G(0,0)) = (G(u,v) - G(u,0)) - (G(0,v) - G(0,0)) \end{aligned}$$

tend uniformément vers zéro lorsque l'une au moins des variables tend vers 0.

Par cette propriété de $l(u,v)$, l'intégrale $J^{\alpha\beta}$ devient accessible à un procédé d'évaluation donné au Chap. I (n° **3**). On voit aussi que le passage à la limite $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(0,0)} I^{\alpha\beta}$ pourra être effectué en formant d'abord p. ex. $J^{0\beta} = \lim\limits_{\alpha\to 0} J^{\alpha\beta}$ et après, $\lim\limits_{\beta\to 0} J^{0\beta}$.

36. Intégrale de volume. (Suite). — Nos lemmes démontrés, reprenons maintenant l'intégrale $I^\alpha f(P)$, exprimée par les formules (101), (105), (92) et (102). En tenant compte du dernier membre de (88), on peut poser — *cf.* (114) — $\left(\text{avec } \frac{\alpha + 2 - m}{2} = \beta\right)$

$$(114^{bis}) \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1\!\!\int_0^1 G(\sigma, T, \alpha) \cdot \sigma^{\alpha-1}\, T^{\beta-1}\, d\sigma\, dT = J^{\alpha\beta} G,$$

où

$$(115) \qquad G(\sigma, T, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) k(T)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \int_{\omega_{m-1}} f(\sigma \cdot \mathbf{a})\, v^\alpha\, d\omega_{m-1}.$$

Il découle du théorème du n° **30** que, $f(\xi)$ et $S(\mathbf{a})$ étant suffisamment dérivables, $G(\sigma, T)$ sera une fonction suffisamment dérivable des variables σ et T. Dès lors, il résulte de nos lemmes que $I^\alpha f(P)$ est une fonction arbitrairement prolongeable de α. Quant à la régularité de I^α, il faut jusqu'à nouvel ordre faire exception des valeurs négatives impaires de α où $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ admet des pôles. Les pôles que I^α pourrait admettre pour les mêmes valeurs — qui d'ailleurs ne présentent aucun intérêt particulier — ne sont pourtant qu'apparents, comme on le verra tout à l'heure. Afin que le prolongement puisse être poussé jusqu'à une valeur fixée α_0, il suffit que $G(\sigma, T, \alpha)$ soit dérivable n fois, où n est $> -\alpha_0 - \beta_0 = -\alpha_0 + \frac{m-2-\alpha_0}{2}$ (le signe $>$ pouvant être remplacé par $\geqq$ si l'on se contente d'un passage à la limite $\alpha + \varepsilon \to \alpha$). Pour que $G(\sigma, T, \alpha)$ soit dérivable n fois, il suffit qu'il en soit ainsi de $f(\xi)$ et de $S(\mathbf{a})$. Pour arriver à I^0, on pourra prendre[1] (en se contentant d'un passage à la limite) $n = \left[\frac{m-1}{2}\right]$ et pour arriver à I^{-2p}, $n = 3p + \left[\frac{m-1}{2}\right]$.

Le fait que les dits pôles ne sont qu'apparents résulte immédiatement de la formule de Green (itérée)[2] ((60), n° **22** ou (61^{bis}), n° **23**), et du fait que, dans les cas de simple ou de double couche, la fonction prolongée était holomorphe.

37. Les opérateurs I^0, I^{-p}, I_*^0, I_*^{-2p}. — Il est maintenant facile de démontrer que $I^0 f(P) = f(P)$, ce qui signifie que I^0 est *l'opérateur identique*. En effet, pour $\alpha = 0$, on a $\beta = \frac{2-m}{2}$, c'est-à-dire que pour calculer $I^0 f(P)$, nous n'avons qu'à calculer $J^{\alpha\beta} G$ pour $\alpha = 0$, $\beta = \frac{2-m}{2}$. D'après les lemmes III et IV, on peut y arriver en calculant d'abord $J^{0\beta} G$, β étant un nombre positif quelconque, et passer ensuite par prolongement à la valeur $\beta = \frac{2-m}{2}$. On a d'abord par (114^{bis}) et par la formule fondamentale (6) du n° **3**, que, pour $\alpha = 0$,

$$(116) \qquad J^{0\beta} G = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 T^{\beta-1}\, dT \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(\sigma, T, \alpha)\, \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma\right)_{\alpha=0}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 T^{\beta-1}\, G(0, T, 0)\, dT.$$

---

[1] *Cf.* Fremberg **2**, p. 40.

[2] En appliquant la formule une seule fois on voit que $\alpha = -1$ n'est pas de pôle, et ainsi de suite.

D'autre part, en vertu de (115),

$$(117) \qquad G(0, T, 0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) k(T)}{\pi^{\frac{m-2}{2}}} \int\limits_{\omega_{m-1}} f(0 \cdot \mathbf{a})\, v^0\, d\,\omega_{m-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) k(T)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} f(P)\, \omega_{m-1},$$

ou, grâce à la formule (102) et à la formule (8) du n° **6**,

$$(118) \qquad G(0, T, 0) = f(P) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2^{1-m} (1 - T)^{m-2}}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \frac{2\,\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

$$= f(P) \cdot \frac{2^{2-m}\, \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cdot (1 - T)^{m-2}.$$

En tenant encore compte de la relation

$$\int\limits_0^1 T^{\beta-1} (1 - T)^{m-2}\, d\,T = \frac{\Gamma(\beta)\, \Gamma(m-1)}{\Gamma(\beta + m - 1)},$$

(116) peut s'écrire

$$J^{0\beta}\, G = f(P) \cdot \frac{2^{2-m} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \cdot \Gamma(\beta + m - 1)},$$

et enfin, par prolongement analytique, pour $\beta = \frac{2-m}{2}$ (correspondant à $\alpha = 0$)

$$I^0 f(P) = J^{0, \frac{2-m}{2}}\, G = f(P) \cdot \frac{2^{2-m} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-m}{2} + m - 1\right)}$$

$$= f(P) \cdot \frac{2^{2-m} \cdot \pi^{\frac{1}{2}}\, \Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = f(P),$$

la dernière réduction étant faite moyennant la formule (5) du n° **6**.

Ce point important acquis, nous allons démontrer que l'on a $I^{-2p} f(P) = \Delta^p f(P)$. En appliquant la formule de Green ((61bis) du n° **23**),

$$I^\alpha f(P) = I_*^{\alpha+2}\, \overline{\Delta f, \frac{d f}{d n}, f}(P),$$

on trouve, grâce aux faits $I^0 f(P) = f(P)$ et $I_*^0\, \overline{0, g, h}\,(P) = 0$ (n^{os} **32** et **33**), que $I^{-2} f(P) = \Delta f(P)$. La relation générale en résulte par itération.

En résumé, on a démontré que

$$(119)\qquad I_*^0\overline{f,\,g,\,h}\,(P) = f(P) \text{ et } I_*^{-2p}\overline{f,\,g,\,h}\,(P) = \Delta^p f(P) \qquad (p = 1,\,2,\,\ldots).$$

En ce qui concerne les conditions de validité de ces formules, on consultera les nos **32**, **33** et **36**.

38. Cône rétrograde entier. — Il faut encore revenir sur le cas particulier important, quoique très simple, traité déjà au n° **26**, où le domaine D_S^P se confond avec le cône entier D^P. Ce cône forme alors le domaine d'intégration pour l'intégrale de volume, et il n'y aura pas d'intégrales de surface. Or nous avons vu, au n° **26**, que dans le cas actuel, le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$ jusqu'à n'importe quelle limite s'obtient immédiatement par la formule de Green et ses itérées, bien entendu en admettant certaines conditions de régularité par rapport à $f(P)$ et à ses dérivées et spécialement à l'allure de ces fonctions à l'infini. Il y a pourtant une lacune dans la représentation du prolongement telle qu'elle est fournie par les formules dudit numéro. Ces formules ne mettent nullement en évidence les relations $I^0 f(P) = f(P)$ et $I^{-2p} f(P) = \Delta^p f(P)$. D'autre part, la méthode de prolongement, appliquée dans les nos **27**—**37**, est basée sur l'emploi de certaines coordonnées curvilignes qu'on a introduites par l'intermédiaire d'une certaine surface S qui nous fait défaut ici. Il est pourtant facile de remédier à cet inconvénient et d'adapter la méthode au cas où nous nous trouvons.

Nous remplaçons provisoirement dans nos formules les points $\mathbf{a}$ de S par les points $\mathbf{z}$ de H et nous posons pour les points $\boldsymbol{\xi}$ du cône D^P (l'origine étant toujours placée en P) $\boldsymbol{\xi} = \sigma \mathbf{z}$, le paramètre σ variant cette fois de 0 à ∞. En observant que r_a devient $r_z = 1$ et que par conséquent $v = t^{-1} r_a$ devient t^{-1}, les formules (114^{bis}) et (115) peuvent s'écrire

$$(114^{ter})\qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^\infty G(\sigma,\,T,\,\alpha)\, \sigma^{\alpha-1}\, T^{\beta-1}\, d\sigma \right\} dT,$$

où

$$G(\sigma,\,T,\,\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) k(T)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \cdot t^{-\alpha} \int\limits_{\omega_{m-1}} f(\sigma \cdot \mathbf{z})\, d\omega_{m-1}.$$

Puisque $\mathbf{z}$ ne reste pas borné, nous le remplaçons par $\bar{\mathbf{z}} = t\mathbf{z}$, qui reste borné d'après (69). Posant encore $\bar{\sigma} = t^{-1}\sigma$, nous aurons

$$\boldsymbol{\xi} = \sigma \cdot \mathbf{z} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{z}}, \quad \sigma^{\alpha-1} d\sigma = t^{\alpha} \bar{\sigma}^{\alpha-1} d\bar{\sigma}.$$

Les $\bar{z}_k$ étant des fonctions suffisamment dérivables de T (leurs dérivées du premier ordre sont constants et celles d'ordre supérieur s'annulent d'après (70)), $f(\boldsymbol{\xi}) = f(\bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{z}})$ sera une fonction suffisamment dérivable de T et de $\bar{\sigma}$. En posant encore

$$(120) \qquad \bar{G}(\bar{\sigma}, T, \alpha) = t^{\alpha} G(\sigma, T, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) k(T)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \int\limits_{\omega_{m-1}} f(\bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{z}})\, d\omega_{m-1},$$

on aura

$$(121) \qquad I^{\alpha} f(P) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 \left\{ \int_0^{\infty} \bar{G}(\bar{\sigma}, T, \alpha)\, \bar{\sigma}^{\alpha-1}\, T^{\beta-1}\, d\bar{\sigma} \right\} dT.$$

La seule différence entre la dernière formule et (114^{bis}) est que l'un des intervalles d'intégration est infini. Ceci peut cependant être compensé par des conditions convenables concernant l'allure de f à l'infini. Cela admis, les procédés des numéros qui précèdent pourront être appliqués et on aura donc aussi dans ce cas particulier la relation $I^0 f(P) = f(P)$. Moyennant la formule (67) du n° **26**, il en résulte sur le champ $I^{-2p} f(P) = \Delta^p f(P)$.

IV. Différentiation sous le signe $\int$.

39. Différentiation de I^{α} pour α assez grand. — Terminons ce chapitre, qui est déjà devenu bien long, par l'examen du problème de la différentiation de nos intégrales I^{α}_{*} par rapport aux coordonnées du point $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, considéré comme point variable. Nous allons montrer que ces différentiations (d'ordre quelconque) peuvent s'exécuter sous le signe $\int$, sans qu'on ait à prendre égard à la variation avec P de la frontière du domaine d'intégration. En particulier, l'opération Δ appliquée à nos expressions pourra être accomplie sous le signe d'intégration, ce qui nous donnera la formule importante (63) du n° **24**, dont nous avons ajourné la démonstration.

Admettons d'abord que α soit un nombre assez grand pour que $r_{PQ}^{\alpha-m}$ et ses dérivées, autant qu'elles interviennent, soient continues et par conséquent s'annulent sur la nappe C^P du cône rétrograde au sommet P. Définissons en outre dans un domaine $\bar{D}$, embrassant le domaine D^P_S, la fonction $K(P, Q) = r^{\alpha-m}_{PQ}$ autant que Q se trouve dans la portion d'espace commune aux domaines $\bar{D}$ et D^P, et $= 0$ ailleurs. Alors $K(P, Q)$ considéré comme fonction des deux points variables P et Q est continu et différentiable par rapport à P un certain nombre de fois. Dans l'expression $I^\alpha_* f, g, h(P)$, la fonction $r^{\alpha-m}_{PQ}$ pourra évidemment être remplacée par la fonction $K(P, Q)$, c'est-à-dire qu'on aura des intégrales étendues respectivement au domaine fixe $\bar{D}$ et à la portion fixe $\bar{S}$ de la surface S qui se trouve dans ce domaine. (Pour que cette portion soit bien définie, on aura à choisir $\bar{D}$ dans un entourage assez étroit de D^P_S.) Les dernières intégrales peuvent manifestement être différentiées sous le signe $\int$ et alors il en sera de même des intégrales originales (identiques à celles-là).

40. Différentiation de l'intégrale prolongée dans un cas particulier. — Nous allons montrer que la règle énoncée reste valide pour toute valeur de α jusqu'à laquelle on peut poursuivre le prolongement de nos intégrales et de leurs dérivées en question. Considérons d'abord le cas particulièrement simple, traité aux n^{os} **26** et **38**, où le domaine d'intégration se confond avec le cône entier D^P.

Posons donc

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D^P} f(Q) r^{\alpha-m}_{PQ} \, dQ.$$

En appliquant la règle de différentiation sous le signe $\int$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_k} I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D^P} f(Q) \frac{\partial}{\partial x_k} r^{\alpha-m}_{PQ} \, dQ \tag{122}$$

et cette relation est exacte, d'après ce que nous venons de prouver, pour $\alpha > m+2$, puisque, pour ces valeurs de α, $r^{\alpha-m}_{PQ}$ et $\partial r^{\alpha-m}_{PQ}/\partial x_k = (\alpha - m) r^{\alpha-2-m}_{PQ}(x_k - \xi_k)$ s'annulent sur la nappe C^P. En outre, le second membre de l'expression (122) est une fonction *holomorphe* de α, soit $A(\alpha)$, pour $\alpha > m + 2$.[1] Il en est donc de même du premier membre, c'est-à-dire de $\partial I^\alpha f(P)/\partial x_k$. Or nous montrerons à l'instant que, dans des conditions de régularité qu'il serait facile de spécifier, la dernière fonction est une fonction *holomorphe* de α, soit $B(\alpha)$, dans un intervalle plus

---

[1] En réalité, on voit immédiatement que le second membre de (122) est holomorphe, pour $\alpha > m$, mais l'existence du premier membre n'est démontrée pour le moment que pour $\alpha > m + 2$. Une remarque analogue s'applique à la formule (123) en y remplaçant m par $m - 2p$.

étendu que le précédent, savoir pour $\alpha > m + 2 - 2p$. Les deux fonctions $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ étant identiques pour $\alpha > m+2$, le seront encore pour tout $\alpha > m+2-2p$. *On obtient donc la dérivée* $\partial I^\alpha / \partial x_k$ pour les valeurs $m + 2 - 2p < \alpha \leqq m + 2$ *par le prolongement analytique du second membre de* (122), ce prolongement étant exécuté *d'une manière ou d'une autre.* Cela signifie dans notre langage que *la règle de différentiation sous le signe* $\int$ *reste valide pour* $\alpha > m + 2 - 2p$, *c'est-à-dire même pour des intégrales éventuellement divergentes.*

Pour achever cette démonstration, il suffit d'écrire, moyennant la formule (itérée) de Green du nº **26**,

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha + 2p)} \int\limits_{D^P} \Delta^p f(Q) \, r_{PQ}^{\alpha+2p-m} \, dQ$$

et d'appliquer à cette intégrale les remarques faites au sujet de l'intégrale (107). On voit alors que

$$\frac{\partial I^\alpha f(P)}{\partial x_k} = \frac{1}{H_m(\alpha + 2p)} \int\limits_{D^P} \Delta^p f(Q) \frac{\partial}{\partial x_k} r_{PQ}^{\alpha+2p-m} \, dQ \tag{123}$$

est bien une fonction holomorphe $(B(\alpha))$ pour tout $\alpha > m + 2 - 2p$.[1]

Nous soulignons encore une fois, même au risque d'ennuyer le lecteur, que dans l'ordre d'idées que nous poursuivons, l'expression explicite pour $\partial I^\alpha / \partial x_k$ donnée par le second membre de la dernière formule est pour nous dépourvue de tout intérêt. Elle ne sert qu'à mettre en évidence que la dérivée en question *existe* pour les dites valeurs de la variable α et qu'elle en est une fonction *holomorphe.* Nous insistons sur ce point puisque, dans le cas général qui va suivre, nous ne serons pas à même de donner une expression explicite semblable.

Le raisonnement ci-dessus s'étend immédiatement aux dérivées d'ordre supérieur.

41. Différentiation dans le cas général. — Envisageons maintenant l'intégrale $I^\alpha f(P)$ sous la forme (114^{bis}), qui s'écrit brièvement $I^\alpha f(P) = J^{\alpha\beta} G$. Or le prolongement de cette dernière expression est effectué par les formules explicites qui se retrouvent dans la démonstration du lemme II (nº **35**). Les données originales $f(\boldsymbol{\xi})$ et $S(\mathbf{a})$ étant suffisamment dérivables, les fonctions figurant dans les dites formules seront, d'après le théorème du nº **30**, suffisamment dérivables par rapport aux variables x_k. Pour autant qu'il s'agit d'intégrales, elles sont prises

[1] *Voir* la note précédente.

entre des limites fixes, o et 1, et leur différentiation pourra par conséquent être exécutée sous le signe $\int$. Les fonctions obtenues seront encore des fonctions holomorphes de α jusqu'à une certaine valeur, soit α_0', qu'il serait facile de préciser. (Pour arriver à une valeur fixée α_0, il suffit d'augmenter les nombres n respectifs figurant au n° **36**, d'une unité pour chaque dérivation $\partial/\partial x_k$.)

Il en résulte, d'après ce qui a été dit aux n^os^ **39—40**, que $\partial I^\alpha f(P)/\partial x_k$ est identique à la fonction figurant au second membre de (122), n° **40**, interprétée, le cas échéant, par son prolongement analytique.

42. L'opérateur Δ. — La méthode esquissée ici pour l'intégrale de volume $I^\alpha f$ s'applique aisément aux deux intégrales de surface figurant dans $I_*^\alpha \overline{f, g, h}$. L'extension aux dérivées d'ordre supérieur n'implique non plus aucune difficulté. Il ne nous paraît pas nécessaire de nous arrêter sur les détails.

L'application des résultats obtenus à l'opérateur Δ nous fournit la formule importante (63) du n° **24** (*cf.* la formule (59) du n° **22**). Nous remarquons que cette formule peut aussi servir à effectuer le prolongement analytique de I_*^α. (*Cf.* les nos **52** et **53**.)

Enfin, en posant dans la formule en question $\alpha = 2$, il vient (*cf.* (64), n° **24**)

$$\Delta I_*^2 \overline{f, g, h}(P) = I_*^0 \overline{f, g, h}(P) = f(P). \tag{124}$$

Cette relation remarquable, l'analogue de la formule de Poisson, relative au potentiel newtonien, va jouer un rôle important, quand il s'agira, au chapitre suivant, d'analyser notre solution du problème de Cauchy.

CHAPITRE IV.

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes.

43. Énoncé du problème. — Pour l'équation des ondes[1], le problème de Cauchy consiste — nous suivons M. Hadamard[2] — à trouver une solution u de l'équation $\Delta u = f$ quand on connaît les valeurs de u, soit $u = h$, et d'une de ses dérivées premières, soit $du/dn = g$, en chaque point d'une surface S, orientée dans l'espace[3], la dérivée étant prise dans une direction n qui n'est pas tangente à la surface. On peut, sans restreindre la généralité, admettre que la direction n est celle de la normale intérieure (lorentzienne) à la surface.

---

[1] Dans ce chapitre, nous admettons, en général, que les ε_k ont leurs valeurs originales, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = -1$.

[2] Hadamard 1, p. 219.

[3] Pour d'autres orientations *voir* les nos **61—64**.

La région de l'espace à m dimensions où l'on veut calculer la solution u est telle que, si l'on construit le cône rétrograde D^P qui a un des points P de la région comme sommet, la nappe C^P de ce cône découpera de la surface S une certaine portion S^P et formera avec S^P la frontière d'un domaine borné D_S^P de l'espace. (Pour les notations, voir le chapitre précédent.)

Quant à l'historique du problème et aux travaux qui s'y rapportent, nous sommes dispensés de les faire passer en revue ici, nous trouvant dans la situation agréable de pouvoir renvoyer le lecteur aux exposés de M. Hadamard, incorporés pour la plupart à son livre magistral sur le sujet. (1) La place du problème de Cauchy parmi les divers problèmes aux limites, *correctement posés ou non* (« bien posés ou non », comme disait autrefois l'illustre auteur) s'y trouve aussi élucidée d'une manière incomparable. Nous tenons en outre à mentionner une conférence plus récente que le livre cité, faite par M. Hadamard à Genève en 1935 et imprimée dans l'*Enseignement Mathématique.* (2)

44. Solution générale. — En récrivant ici la dernière identité du n° **23**,

$$I^\alpha u(P) = I_*^{\alpha+2}\, \overline{\Delta u,\ \frac{du}{dn},\ u}\,(P), \tag{1}$$

et en y posant $\alpha = 0$, on obtient, en raison de $I^0 u(P) = u(P)$, l'identité particulière

$$u(P) = I_*^2\, \overline{\Delta u,\ \frac{du}{dn},\ u}\,(P), \tag{2}$$

c'est-à-dire que la valeur de u au point P peut se calculer par une intégrale spatiale portant sur Δu et étendue à un certain volume D_S^P, par des intégrales de simple couche et de double couche, portant respectivement sur $\frac{du}{dn}$ et u et étendues à une certaine portion S^P de la surface.

En ce qui concerne le problème de Cauchy, il vient de la dernière identité, en y portant les données du problème,

$$u(P) = I_*^2\, \overline{f,\ g,\ h}\,(P). \tag{3}$$

Cela veut dire que si le problème de Cauchy admet une solution, ce qui reste à voir, cette solution est donnée par la dernière formule.

(1) Hadamard **1**. *Cf.* aussi diverses parties du *Cours d'Analyse* de Goursat, tome III.
(2) Hadamard **2**.

En réalité, la seule voie qu'on connaisse pour établir l'existence d'une solution du problème dans l'étendue[1] dont il s'agit ici, est de vérifier que la solution donnée par la formule ci-dessus satisfait aux conditions du problème, bien entendu dans des hypothèses convenables sur les données et sur la surface S. Une telle vérification trop sommaire sous plusieurs rapports sera faite plus loin (nº **60**). Néanmoins, pour ne pas alourdir notre exposé, nous y admettrons tacitement qu'une solution existe et qu'elle est, en conséquence, fournie par la formule (3).

Malheureusement, nous avons vu que les intégrales figurant dans cette solution sont en général divergentes, et il faut par suite leur donner un sens par prolongement analytique. La discussion de ce prolongement qui nous fournira l'expression I_*^2 (effectué d'ailleurs d'une manière ou d'une autre) forme l'objet principal du présent Chapitre. Nous y rencontrerons une différence essentielle entre les solutions se référant aux dimensions d'ordre pair et impair. Pour les dimensions paires on a le principe de Huygens[2], tandis que ce principe fait défaut pour les dimensions impaires. Dans ce dernier cas, les expressions sous forme finie, obtenues par le prolongement analytique des intégrales divergentes, sont essentiellement identiques à celles qu'on trouve par la méthode de la «*partie finie*», due à M. Hadamard. Or, au point où nous nous trouvons pour le moment, ce n'est pas la différence dépendant de la parité de l'espace qui nous intéresse en premier lieu. Tout au contraire, c'est que sous sa forme générale, donnée plus haut, *la solution est indépendante de la parité de la dimension de l'espace.* On sait qu'il n'en est pas ainsi des solutions dues à M. Hadamard qui sont de formes différentes suivant la parité de la dimension[3].

Avant d'entamer le cas général, nous traiterons deux cas particuliers simples, correspondant à $m = 1$ et à $m = 2$. Le cas $m = 2$ échappe dans un certain sens à la règle générale. Le principe de Huygens n'y intervient que partiellement.

45. Problème linéaire, $m = 1$. — Rappelons la formule (20) du nº **16**

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right). \tag{4}$$

---

[1] Pour le théorème d'existence de Cauchy-Kowalewski et la critique de M. Hadamard, voir HADAMARD **1**, p. 19, 14, 27.

[2] Pour le principe de Huygens voir préliminairement l'Introduction. Pour le problème de Cauchy ce principe se manifeste par le fait que seules les valeurs que les données admettent au voisinage infinitésimal de la nappe C^P du cône D^P influencent la valeur de la solution au point P (*cf.* plus loin, nº **55**).

[3] *Voir* HADAMARD **1**, p. 227 (formule (39)) et p. 311 (formule (29)).

On trouve facilement que $H_1(\alpha) = \Gamma(\alpha)$. La surface S se réduit ici à un seul point, soit a, la dérivation d/dn se réduit à d/da et Δ à d^2/dx^2. La formule générale (60) du nº **22**, dont la formule (61^{bis}) du nº **23** et la formule identique (1) du nº **44** offrent la traduction symbolique, se réduit donc à

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x u(\xi)(x-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left\{\int_a^x u''(\xi)(x-\xi)^{\alpha+2-1}\,d\xi + u'(a)(x-a)^{\alpha+2-1} - u(a)\frac{d}{da}(x-a)^{\alpha+2-1}\right\}$$
$$= \frac{u(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + \frac{u'(a)}{\Gamma(\alpha+2)}(x-a)^{\alpha+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\int_a^x u''(\xi)(x-\xi)^{\alpha+1}\,d\xi,$$

identité qui n'est qu'un cas particulier de l'identité (4) du nº **2**. Les intégrales qui y figurent convergent pour $\alpha > 0$ et pour $\alpha > -1$ respectivement. En passant à la limite $\alpha \to +0$, on arrive à la formule classique, rencontrée incidemment au Chapitre II (nº **12**)

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \int_a^x u''(\xi)(x-\xi)\,d\xi,$$

qui fournit la solution du problème de Cauchy:

Déterminer $u(x)$ *pour* $a \leqq x < b$ $(b \leqq +\infty)$ *lorsqu'on connaît* $u''(x)$ *dans le même intervalle et, en outre,* $u(a)$ *et* $u'(a)$.

46. Problème dans le plan, $m = 2$. — Dans ce cas, Δ se réduit à l'opérateur des cordes vibrantes $\partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2$. La nappe C^P du cône se réduit à deux droites $x_1 - \xi_1 = \pm(x_2 - \xi_2)$ (les caractéristiques), issues du point $P(x_1, x_2)$, le cône rétrograde D^P à l'angle rétrograde D^P limité par ces droites et caractérisé par $r_{PQ}^2 = (x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2 \geqq 0$ et $x_1 - \xi_1 \geqq 0$, où $Q = Q(\xi_1, \xi_2)$. La surface S devient une courbe S à orientation d'espace avec $d\xi_1^2 - d\xi_2^2 < 0$ (fig. 5 et 5 a).

L'élément de surface dS, défini pour une dimension arbitraire par la formule (39) du nº **21**, se réduit ici à

$$dS = |d\xi_1^2 - d\xi_2^2|^{\frac{1}{2}} = (d\xi_2^2 - d\xi_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La portion S^P de S interceptée par l'angle D^P limite avec les deux côtés de cet angle un domaine à deux dimensions D_S^P. Les points frontières de l'arc S^P seront désignés par B_1 et B_2.

De notre formule générale (1) nous déduirons dans ce qui suit l'identité bien connue

$$u(P) = \frac{1}{2}\left\{\iint\limits_{D_S^P} \Delta u\, d\, Q + \int\limits_{S^P} \frac{d\,u}{d\,n} d\,S + u(B_1) + u(B_2)\right\}, \tag{5}$$

qui, sous une forme légèrement différente et avec une déduction tout à fait élémentaire se trouve p. ex. dans le Cours d'Analyse de Goursat.(1) Chez M. Hadamard on trouve la formule ci-dessus dans les notations utilisées ici, et cela même pour l'équation aux coefficients variables étudiée par Riemann.(2)

Pour nous, le problème consiste à obtenir (5) comme cas particulier de (2), dont on a donc à calculer le second membre, à savoir I_*^2, dans les conditions actuelles. Il vient de (4), pour $m = 2$, $H_2(\alpha) = 2^{\alpha-1}\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. En observant encore que $\alpha + 2 - m$ devient α pour $m = 2$, on aura

$$I_*^{\alpha+2}\,\overline{\Delta u,\ \frac{d\,u}{d\,n},\ u(P)}$$
$$= \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma^2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\left\{\iint\limits_{D_S^P} \Delta u \cdot r^\alpha \cdot d\,Q + \int\limits_{S^P}\left(\frac{d\,u}{d\,n} r^\alpha - u\frac{d\,r^\alpha}{d\,n}\right) d\,S\right\}. \tag{6}$$

47. Méthode erronée. — On est maintenant tenté de calculer I_*^2 en *posant* dans la dernière formule $\alpha = 0$. Il viendrait alors $r^\alpha = r^0 = 1$, $d\,r^\alpha/d\,n = d\,r^0/d\,n = 0$. C'est-à-dire, par ce mode de calcul qui, nous allons le voir, est plus ou moins illusoire, on arriverait à la formule (5), les termes $u(B_1)$ et $u(B_2)$ y étant supprimés. Or, sous cette forme l'identité (5) est fausse, puisqu'elle l'est pour $u = \text{const.} \neq 0$ par exemple.

Voici maintenant l'explication de ce fait paradoxal. Sur les deux droites PB_1 et PB_2 on n'a pas $r^0 = 1$, car on y a $r = 0$. Nous verrons tout à l'heure que cette circonstance, sans conséquences dangereuses en tant qu'il s'agit des deux premières intégrales, est responsable de l'erreur que nous venons de commettre au sujet de la troisième. La discordance provient du fait que le calcul de I_*^2 par la substitution $\alpha = 0$ dans $I_*^{\alpha+2}$ ne donne pas le prolongement analytique correct.

47bis. Méthode correcte. — Il faut donc reprendre l'étude du second membre de la formule (6) pour une valeur générale de $\alpha > 0$. Pour toutes ces valeurs,

(1) Tome III (1915) p. 117.

(2) HADAMARD **1**, p. 314 et *suiv.*

nos intégrales convergent, et l'identité est exacte, sa validité ayant été démontrée au n° **24** pour $\alpha > m - 2$. Cela posé, notre problème se réduit à exécuter dans (6) le passage à la limite $\alpha \to 0$ d'une façon rigoureuse.

Le passage en question est immédiat pour les deux premières intégrales, puisque r^α tend uniformément vers 1, sauf au voisinage du sommet P et des lignes PB_1 et PB_2, où r^α reste borné. Le passage à la limite correct conduit donc, lui aussi, aux deux premiers termes, comme il fallait s'y attendre.

Il est plus délicat d'exécuter le passage à la limite pour la troisième intégrale dans (6). Désignons d'abord par C_1 et C_2 deux points de l'arc B_1B_2, voisins de B_1 et de B_2 respectivement, et tels que r_{PQ} varie d'une manière croissante de 0 à δ lorsque Q varie de B_1 à C_1 ou de B_2 à C_2. Alors la convergence de dr^α/dn vers 0 étant uniforme sur l'arc C_1C_2, la troisième intégrale, prise le long de cet arc, tendra effectivement vers 0, et on pourra se restreindre aux intégrales prises le long des arcs B_1C_1 et B_2C_2. D'autre part, en désignant par BC l'un quelconque de ces arcs et posant $r^2 = R$, on peut écrire[1]

$$\int_B^C u\frac{dr^\alpha}{dn}dS = \int_B^C u\frac{dR^{\frac{\alpha}{2}}}{dn}dS = \frac{\alpha}{2}\int_0^{\delta^2} uR^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{dR}{dn}\frac{dS}{dR}dR. \tag{7}$$

Nous allons démontrer à l'instant que la valeur de $\frac{dR}{dn}\cdot\frac{dS}{dR}$ est $= -1$ aux points B, résultat qui sera présumé pour le moment. D'autre part, on voit par le mécanisme développé au Chap. I (n° **3**) que l'expression tend avec $\alpha \to 0$ vers la valeur de $u\cdot\frac{dR}{dn}\cdot\frac{dS}{dR}$ au point B, c'est-à-dire que, par le résultat présumé, elle tend vers $-u(B)$. On tire de là que

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma^2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\int_B^C u\frac{dr^\alpha}{dn}dS\right) = \tfrac{1}{2}u(B).$$

Ainsi le passage à la limite, exécuté d'une façon correcte, nous donne la formule (5) comme conséquence de la formule (6). On voit que le principe de Huygens n'intervient dans la solution que dans les termes provenant de la double couche.

48. L'identité $dR/dn + dR/dS = 0$. — Il nous reste à démontrer qu'à l'un quelconque des points B_1 et B_2, désigné comme plus haut par B, on a

[1] Le lecteur voudra bien observer qu'on attribue partout une valeur positive à dS.

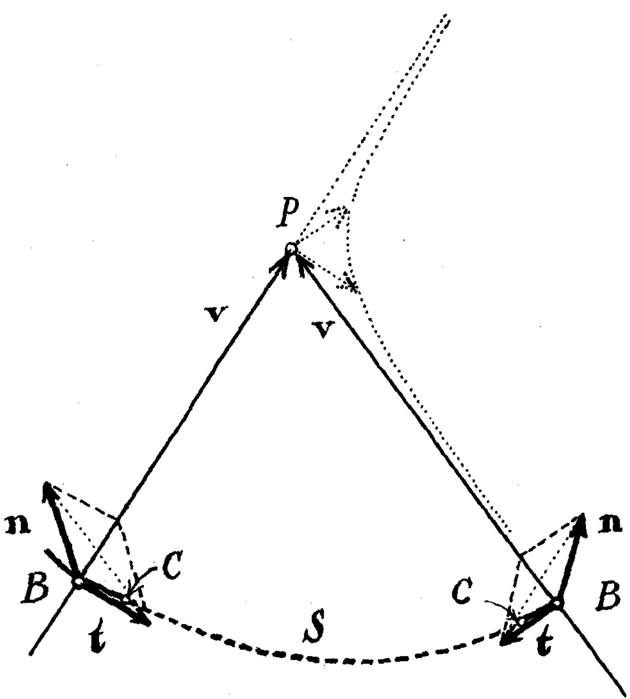

Fig. 5. C'est avec intention qu'on a modifié ici l'orientation et l'ouverture usuelles du « cône ». Les deux vecteurs tangents $\mathbf{t}$ de la figure, qui dans le texte sont supposés unitaires, ont la même « longueur », car il en est ainsi des deux vecteurs *pointillés* qui leur sont parallèles et qui aboutissent à une hyperbole admettant les deux génératrices comme asymptotes. Dans les deux parallélogrammes chacune des diagonales pointillées est parallèle à une génératrice, ces deux diagonales sont donc isotropes elles aussi. Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{n}$ sont orthogonaux aux vecteurs $\mathbf{t}$ correspondants et ils ont la même « longueur ».

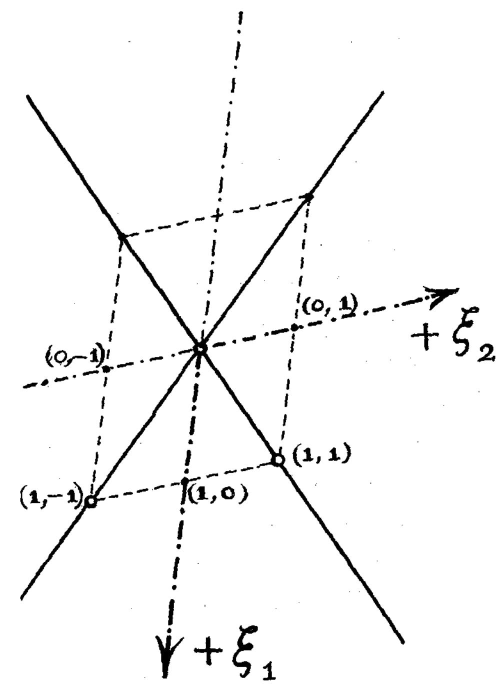

Fig. 5 a. Les systèmes lorentziens de coordonnées admissibles sont donnés par le postulat que la figure constituée des deux « génératrices » y admette l'équation $(\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2 = 0$. C'est un tel système qui est illustré par la figure. Les vecteurs $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ de la fig. 5 sont manifestement de « longueur » < 1 dans l'échelle de la fig. 5 a.

$$\frac{dR}{dn} \cdot \frac{dS}{dR} = -1$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dR}{dn} + \frac{dR}{dS} = 0.$$

En désignant le vecteur allant de B à P par $\mathbf{v}_{BP} = \mathbf{v}$, la normale intérieure[1] unitaire par $\mathbf{n}$, et la tangente unitaire menée en B vers l'intérieur de l'angle D^P par $\mathbf{t}$, on a, d'après la *Remarque* qui se trouve à la fin du n° **21**,

$$\frac{dR}{dn} + \frac{dR}{dS} = -2(\mathbf{v}, \mathbf{n} + \mathbf{t}).$$

[1] Évidemment, les normales « intérieures » menées aux points frontières B ne pénètrent pas dans l'intérieur du domaine D_S^P, mais elles peuvent être considérées comme cas limites de normales intérieures proprement dites.

(Il est à observer que $\mathbf{v}_{BP} = - \mathbf{v}_{PB}$.) Nous allons démontrer que

$$\mathbf{n} + \mathbf{t} = \lambda \cdot \mathbf{v},$$

d'où il résultera

$$\frac{dR}{dn} + \frac{dR}{dS} = -2\lambda\, \mathbf{v}^2 = 0,$$

puisque la droite reliant B à P est une « génératrice du cône D^P », ce qui fait que le vecteur $\mathbf{v}$ est isotrope: $\mathbf{v}^2 = 0$. Or, le vecteur $\mathbf{v}$ se trouve manifestement dans l'angle saillant formé par les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$. On a par conséquent $\mathbf{v} = \nu \mathbf{n} + \tau \mathbf{t}$, ν et τ étant positifs tous les deux. Nous allons démontrer que $\nu = \tau$. En effet, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ sont unitaires et orthogonaux l'un à l'autre, $\mathbf{n}$ est un vecteur de temps et $\mathbf{t}$ un vecteur d'espace. Il s'ensuit

$$0 = \mathbf{v}^2 = (\nu\, \mathbf{n} + \tau\, \mathbf{t})^2 = \nu^2\, \mathbf{n}^2 + 2\,\nu\,\tau\,(\mathbf{n}, \mathbf{t}) + \tau^2\, \mathbf{t}^2 = \nu^2 - \tau^2.$$

On a donc bien $\nu = \tau$, ou $\mathbf{n} + \mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{v}}{\nu}$, ce qui achève la démonstration.

49. L'opérateur I_*^m. — Nous avons longuement insisté sur la résolution du problème des cordes vibrantes qui pourtant, nous l'avons dit, est facile à obtenir par les méthodes usuelles. La raison en est que nous tenions à faire rentrer la solution de ce problème dans le cadre de notre méthode générale, méthode dont l'application à une dimension particulière quelconque n'est en principe ni plus facile, ni plus difficile que l'application à une autre. Or nous allons voir à l'instant que nous avons obtenu beaucoup plus qu'il ne paraît au premier coup d'œil; nous avons, chemin faisant, trouvé une méthode générale qui fournira, pour toute dimension d'ordre *pair*, une solution explicite du problème de Cauchy qui est, au point de vue formel, d'une simplicité remarquable.

Cependant, la méthode que nous venons de développer ne conduira pas directement à l'expression I_*^2 qui nous intéresse en premier lieu, mais elle nous donnera presque immédiatement, pour toute dimension d'ordre *pair ou impair*, l'expression de I_*^m, identique, pour $m = 2$, à l'expression I_*^2.

Désignons par s^P le bord de la portion de surface S^P, c'est-à-dire la variété à $m - 2$ dimensions formée par l'intersection de la nappe C^P et de la surface S. Nous désignons encore par ds l'élément de « surface » de s^P.[1]

Ces notations posées, nous trouverons l'identité suivante qui ne laisse rien à désirer en simplicité et en élégance:

[1] C'est-à-dire élément de volume à $m - 2$ dimensions; *voir* le n° **21**^{bis}.

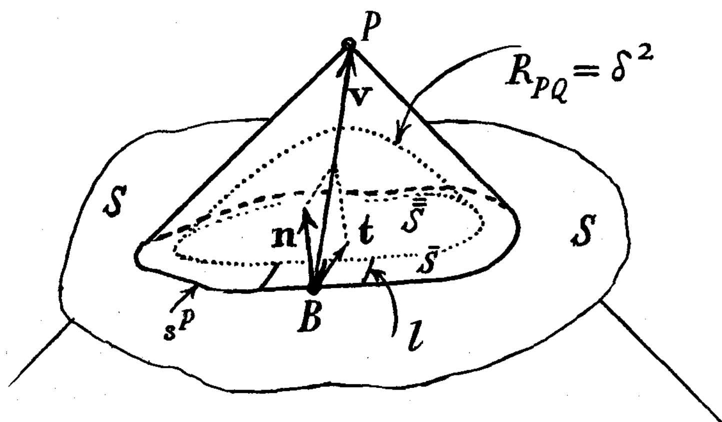

Fig. 6.

(8) $$I_*^m \overline{f, g, h}(P) = \frac{1}{H_m(m)} \left\{ \int\limits_{D_S^P} f\, dQ + \int\limits_{S^P} g\, dS + \int\limits_{s^P} h\, ds \right\}$$

avec [1]

(9) $$H_m(m) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = (m-2)!\, \omega_{m-1}.$$

La formule (8) s'obtient de $I_*^{\alpha+m}$ écrite pour $\alpha > 0$ par le passage à la limite $\alpha \to 0$. [2] On montre, tout comme au n° **47**, que, quant aux deux premiers termes, ce passage à la limite s'exécute par la substitution $\alpha = 0$ dans les deux premiers termes de $I_*^{\alpha+m}$. Pour le troisième terme il est nécessaire d'entrer dans les détails.

50. Terme provenant de la double couche. — Le troisième terme dans $I_*^{\alpha+m} \overline{f, g, h}(P)$ est, en tenant compte de $(\alpha + m) - m = \alpha$,

(10) $$-\frac{1}{H_m(\alpha + m)} \int\limits_{S^P} h \frac{d r^\alpha}{d n} dS = -\frac{W}{H_m(\alpha + m)}.$$

En posant $r^2 = R$, on peut écrire

(11) $$W = \int\limits_{S^P} h \frac{d R^{\frac{\alpha}{2}}}{d n} \cdot dS = \frac{\alpha}{2} \int\limits_{S^P} h R^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot \frac{dR}{dn} \cdot dS.$$

En calquant notre raisonnement sur celui du n° **47**, nous divisons S^P par son intersection avec l'hyperboloïde

(1) *Cf.* formule (8) du n° **6**.

(2) *Voir* pour I_*^α la formule (61) du n° **23**.

$$r_{PQ}^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2 = \delta^2$$

en deux parties (fig. 6). Nous désignons par $\bar{S}$ la partie annulaire extérieure et par $\bar{\bar{S}}$ la partie intérieure. Alors on voit, tout comme au numéro cité, que la contribution provenant de $\bar{\bar{S}}$ à la dernière expression de W dans (11) tend vers 0 avec α. Cela étant, on peut se restreindre à l'expression

$$\overline{W} = \beta \int\limits_{\bar{S}} h R^{\beta-1} \cdot \frac{dR}{dn} \cdot dS,$$

où l'on a posé $\alpha/2 = \beta$.

Faisons maintenant varier la valeur de R de 0 à δ^2 et désignons par s_R l'intersection de S avec l'hyperboloïde $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2 = R$. Considérons de plus les trajectoires orthogonales (bien entendu, au sens lorentzien) des variétés s_R, l'existence de telles trajectoires étant garantie par les théorèmes d'existence les plus simples des systèmes d'équations différentielles ordinaires, du moins pour δ assez petit. De chaque point B du bord s^P il part une trajectoire et une seule qui établit une correspondance biunivoque entre les points de s^P et ceux d'une variété s_R quelconque. Un tube de telles trajectoires issues des points d'un élément ds de s^P fait correspondre à cet élément un élément de s_R qui sera désigné, ainsi que sa mesure, par ds_R. L'élément ds se rétrécissant au point B, ds_R va se rétrécir au point de s_R correspondant à B et $ds_R : ds$ tendra vers une valeur limite qui est fonction du point B et de la valeur R. Cette limite sera encore désignée par $ds_R : ds$.

D'autre part, en définissant l'élément d'arc d'une trajectoire quelconque par $dl = (-\Sigma\, \varepsilon_k\, d\xi_k^2)^{\frac{1}{2}}$, on aura évidemment (formule (55), n° **21**^{bis}), pour l'élément de surface dS, l'expression $dS = ds_R \cdot dl$. Cela posé, il vient

$$\overline{W} = \beta \int\limits_{S^P} h R^{\beta-1} \cdot \frac{dR}{dn} \cdot dS = \beta \int\limits_{S^P} h R^{\beta-1} \cdot \frac{dR}{dn} \cdot ds_R \cdot dl$$

$$= \beta \int\limits_{s^P} ds \int\limits_0^{\delta^2} h R^{\beta-1} \cdot \frac{dR}{dn} \cdot \frac{ds_R}{ds} \cdot \frac{dl}{dR} dR.$$

Il est maintenant à peu près évident que ds_R/ds tend vers 1 lorsque R tend vers zéro. En présumant alors un instant que $\frac{dR}{dn} \cdot \frac{dl}{dR} = -1$ au point B du bord s^P on voit encore par la méthode du Chapitre I que la dernière expression de $\overline{W}$ tend pour $\beta = \alpha/2 \to 0$ vers

$$-\int_{s^P} h\,ds,$$

ce qui en raison de (10) donne le troisième terme dans (8).

Il faut encore vérifier la relation $\frac{dR}{dn}\cdot\frac{dl}{dR} = -1$ ou la relation équivalente

$$\frac{dR}{dn} + \frac{dR}{dl} = 0, \tag{12}$$

cette relation ayant lieu aux points B du bord s^P. Or, pour y arriver, nous avons très peu à ajouter au raisonnement du nº **48**.

51. L'identité $dR/dn + dR/dl = 0$. — Notons d'abord que l'identité $R_{PC} = 0$ valable pour tout point C de la nappe C^P donne $\Sigma \varepsilon_k (x_k - c_k)\,dc_k = 0$, les x_k et les c_k étant les coordonnées respectives de P et de C. Cela veut dire que le vecteur PC est orthogonal à tout déplacement infinitésimal du point C suivant la nappe. En particulier, B étant un point du bord s^P, le vecteur PB est orthogonal aux déplacements $\{dB\}$ de B suivant le bord. Or, ces déplacements forment une variété linéaire *à* $m - 2$ *dimensions*. De leur côté, les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ sont aussi orthogonaux à cette variété ou, ce qui revient au même, orthogonaux au bord; la normale $\mathbf{n}$ puisqu'elle est orthogonale à la variété à $m - 1$ dimensions des déplacements suivant S dont $\{dB\}$ fait partie, le vecteur $\mathbf{t}$ puisqu'il est, par définition, tangent à la trajectoire orthogonale issue de B. On en conclut que les trois vecteurs BP, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ appartiennent à un plan à deux dimensions, engendré par les droites orthogonales au bord au point B. Il en résulte que le vecteur BP peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$. En désignant donc, comme au nº **48**, le vecteur BP par $\mathbf{v}$, on voit comme là que $\mathbf{v} = \nu(\mathbf{n} + \mathbf{t})$, d'où, dans l'ordre d'idées du même numéro, il s'ensuit que

$$\frac{dR}{dn} + \frac{dR}{dl} = 0.$$

52. Une solution explicite du problème de Cauchy pour $m = 2l$. — Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $m \geqq 3$ et alors, pour m pair, $m \geqq 4$. A partir de cette valeur, toutes les intégrales figurant dans la solution générale du nº **48** sont divergentes, et il faut, pour les obtenir sous forme finie, les interpréter par quelque méthode de prolongement analytique. L'expression explicite pour I_*^m déduite au nº **49** nous fournit un procédé effectif de prolongement. En effet, en y appliquant $(l-1)$-fois la formule (63) du n° **24** (démontrée au n° **42**), on voit immédiatement que

$$(13)\quad u(P)=I_*^2\overline{f,\,g,\,h}(P)=\Delta^{l-1}I_*^m\overline{f,\,g,\,h}(P)= \\ =\frac{1}{(m-2)!\,\omega_{m-1}}\Delta^{l-1}\left\{\int\limits_{D_S^P}f\,d\,Q+\int\limits_{S^P}g\,d\,S+\int\limits_{s^P}h\,d\,s\right\}.$$

Cette expression met en évidence le principe de Huygens[1] pour toute dimension d'ordre pair $\geqq 4$. En effet, il ressort immédiatement de la formule (8) que les dérivées de I_*^m ne dépendent que des valeurs que les données admettent au voisinage infinitésimal de la nappe. Il en est donc ainsi de $u=\Delta^{l-1}I_*^m$ pour $l\geqq 2$, c'est-à-dire $m\geqq 4$. Dans le n° **55**, nous déduirons le principe en question directement de la solution générale (3) (n° **44**).

53. Une solution explicite pour $m=2\,l+1$. — L'application (itérée) de l'opération Δ à I_*^m conduit à des I_* dont l'ordre est de la même parité que m. Pour un nombre impair m, elle ne conduira donc jamais à I_*^2. Or on a

$$(14)\qquad I_*^{m+1}\overline{f,\,g,\,h}(P)=\frac{1}{H_m\,(m+1)}\left\{\int\limits_{D_S^P}f\,r\,d\,Q+\int\limits_{S^P}\left(g\,r-h\frac{d\,r}{d\,n}\right)d\,S\right\},$$

toutes les intégrales étant manifestement convergentes. (Le facteur numérique peut aussi s'écrire $2/(m-1)!\,\omega_m$, où ω_m est la surface totale de la sphère unitaire dans l'espace euclidien à m dimensions; *cf.* n° **31**). On a alors pour la solution du problème de Cauchy

$$(15)\qquad u(P)=I_*^2\overline{f,\,g,\,h}(P)=\Delta^l I_*^{m+1}\overline{f,\,g,\,h}(P).$$

54. Caractère invariantif des solutions obtenues. — Les solutions que nous venons de déduire s'appliquent en particulier au deux cas classiques $m=4$ et $m=3$, traités par Kirchhoff et par Volterra. Dans sa critique instructive, adressée aux solutions de ces auteurs, M. Hadamard[2] leur reproche que les noyaux utilisés deviennent singuliers sur la ligne droite passant par le point P et parallèle à l'axe des ξ_1, singularité artificielle et étrangère au problème à résoudre. En particulier, le noyau de Volterra[3]

$$\log\left\{\frac{x_1-\xi_1+\sqrt{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2-(x_3-\xi_3)^2}}{\sqrt{(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\right\}$$

---

[1] *Cf.* pour l'énoncé du principe l'Introduction et, en particulier, le n° **55**.

[2] Hadamard **1**, p. 96 et *suiv.*

[3] *Cf.* p. ex. Goursat, *Cours d'Analyse* III (1915), p. 162.

est une fonction primitive par rapport à x_1 de la solution élémentaire $r^{-1} = \{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 - (x_3 - \xi_3)^2\}^{-\frac{1}{2}}$, cette fonction primitive étant choisie de manière qu'elle s'annule sur la nappe du cône au sommet P. Ce noyau, qui présente une singularité logarithmique sur ladite ligne, donne lieu à trois intégrales convergentes, qu'il faut différentier par rapport à x_1, pour arriver à la solution définitive. Les reproches de M. Hadamard s'accentuent encore quand il devient question de la généralisation aux dimensions impaires d'ordre supérieur, due à M. Tedone. Là il s'agit des intégrations itérées de la solution élémentaire par rapport à x_1, suivies d'un nombre égal de différentiations, appliquées aux intégrales formées avec les noyaux correspondants.

Pour faire bien ressortir le point de vue de M. Hadamard, nous ne pouvons faire mieux que de reproduire textuellement le passage suivant, concernant la connexion éventuelle entre la ligne droite en question et le problème dont il s'agit:

« Les deux auteurs (Kirchhoff et Volterra) auraient évidemment vu que cette connexion était lointaine, si, à l'époque où ils ont composé leurs travaux, la Science avait été en possession de nos idées actuelles sur la Relativité. On sait maintenant qu'il n'y a pas de sens défini (ou, si on préfère, qu'il y a une infinité de sens) à parler d'un point fixe de l'espace considéré à des instants successifs, qu'il existe (comme on le savait même auparavant) une infinité de transformations linéaires en x, y, z, t (ou x, y, t) — formant le groupe de Lorentz — qui laissent notre équation aux dérivées partielles invariante, et que de telles transformations ne changent pas le cône caractéristique, mais peuvent transformer la droite en question en n'importe quelle autre droite, menée par le sommet et à l'intérieur du cône caractéristique. Il est donc clair que cette droite n'a aucun rôle spécial à jouer dans nos calculs. »

Les lecteurs qui connaissent la célèbre solution de Volterra, et même ceux qui ne la connaissent que par nos indications sommaires, ne pourront manquer d'observer que la méthode que nous venons d'exposer est très apparentée à celle de Volterra. Il y a pourtant une différence essentielle qui fait que notre méthode échappe entièrement aux reproches de M. Hadamard. Cela tient au fait que l'opération par laquelle on a passé des intégrales divergentes figurant dans I_*^2 aux intégrales convergentes dans I_*^m ou I_*^{m+1} (augmentation de l'exposant α dans $r^{\alpha-m}$) et les différentiations (Δ ou ses itérés) par lesquelles on retourne à I_*^2 sont des opérations invariantives qui, par conséquent, n'introduisent aucune singularité étrangère au problème.

Avant d'abandonner cette méthode de solution, il nous paraît utile d'observer que les différentiations[1] faciles à écrire, qui y figurent, sont souvent difficiles

---

[1] Nous entendons par là les opérations $\Delta^{\frac{m-2}{2}}$ et $\Delta^{\frac{m-1}{2}}$, respectivement.

à exécuter. Il ne sera donc pas superflu d'indiquer d'autres solutions explicites où il n'intervient pas de telles différentiations. On peut tirer de telles solutions, au moins en principe, des formules générales des nos **31—36**, où nous avons donné le prolongement analytique de I_*^α pour un indice α arbitraire. Or, ces formules étant adaptées au cas général, il n'y aura pas de simplifications notables pour $\alpha = 2$. Nous reviendrons sur la question de solutions explicites en donnant une solution de plus pour l'équation des ondes cylindriques au n° **56** et des solutions sous la forme de potentiels retardés pour les dimensions d'ordre pair au n° **57**.

55. Propriétés de la solution générale. Principe de Huygens. Diffusion des ondes. — En étudiant la solution générale

$$u(P) = I_*^2 \overline{f,\, g,\, h}(P), \tag{3}$$

donnée au n° **44**, nous supposons dans la suite que $m \geqq 3$. Pour $m = 3$, ce n'est que l'intégrale provenant de la double couche qui diverge, tandis que, à partir de $m = 4$, il en est de même de toutes les intégrales figurant dans la solution. En effet, on a montré au n° **15**, que les deux premières intégrales en I_*^α divergent pour $\alpha \leqq m - 2$, et au n° **25**, que la troisième diverge même pour $\alpha < m$. (Aux nos **50—51** on a étudié l'allure singulière que cette intégrale présente pour $\alpha = m$.) Nous connaissons déjà le rôle que le principe du prolongement analytique joue pour mettre notre solution sous forme finie et nous avons déjà rencontré des méthodes effectives de prolongement. A présent nous nous proposons d'élucider l'allure générale de la solution sans effectuer aucun prolongement explicite.

On voit par la forme même de la solution que la valeur de $u(P)$ dépend uniquement des valeurs que les données admettent aux points Q situés à l'intérieur ou sur la frontière du cône D^P ou, pour parler avec M. Hadamard, points qui sont « *sous onde* » (1) par rapport à P. (Cela a d'ailleurs encore lieu pour $m = 1$ et $m = 2$.) En effet, notre solution est donnée par des intégrales étendues à un domaine et une portion de surface, tous les deux compris dans le cône rétrograde D^P.

On sait aussi, par les travaux de M. Hadamard, qu'on a là un trait général chez les solutions des équations que M. Hadamard appelle *hyperboliques normales*.(2) La valeur de $u(P)$ ne dépend que des valeurs des données admises aux points qui sont sous onde par rapport à P.

(1) HADAMARD **1**, p. 74.

(2) HADAMARD **1**, p. 47 et 219. *Cf.* aussi le n° **56**^{bis} du présent travail.

Notre formule fait aussi nettement ressortir la différence fondamentale qui, pour l'équation particulière que nous traitons ici, a lieu entre les cas de m impair et de m pair. Cette différence, à laquelle nous avons déjà fait allusion plusieurs fois, consiste en ce que, pour les dimensions paires, entre en vigueur *le principe de Huygens.*

Remarquons d'abord que pour toute valeur paire de $m (\geqq 4)$, la fonction $H_m(\alpha)$ admet un pôle[1] au point $\alpha = 2$, ce pôle provenant du facteur $\Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right)$ (*cf.* pour $H_m(\alpha)$ le n° **16**). En effet, l'argument de cette fonction devient pour $\alpha = 2$ égal à $(4 - m)/2$, nombre égal à zéro ou à un entier négatif pour m pair et $\geqq 4$.

Dans ces circonstances, on voit, même sans effectuer aucun prolongement explicite, que la valeur de $u(P)$, c'est-à-dire la valeur de $I_*^\alpha \overline{f, g, h}(P)$ pour $\alpha = 2$ ne pourra être influencée par les valeurs que les données admettent à l'intérieur du cône D^P. Il suffit pour le voir d'adapter au cas actuel le raisonnement de caractère intuitif fait dans l'Introduction et relatif au cas linéaire, $m = 1$. Là on a montré que les opérateurs I^0 et I^{-n} sont de caractère local, grâce aux deux faits que l'intégrale $\int\limits_a^{x-\delta} f(t) \cdot (x - t)^{\alpha - 1} dt$ $(\delta > 0)$ ne cesse jamais de converger et que le facteur $1/\Gamma(\alpha)$ s'annule pour α égal à zéro ou à un entier négatif. *Mutatis mutandis*, il en est de même ici. En effet, si, dans le second membre de l'expression de I_*^α (formule (61) du n° **23**), on n'étend l'intégration qu'à un domaine ou à une portion de surface arbitraires, *intérieurs au sens strict* au cône D^P, les intégrales correspondantes ne cesseront jamais de converger. Multipliées par $1/H_m(\alpha)$, facteur s'annulant pour $\alpha = 2$, elles n'apporteront donc aucune contribution à la valeur finale I_*^2 de I_*^α. Ce point admis, l'intégrale spatiale totale dans I_*^α devra dans I_*^2 se réduire à une intégrale étendue à la nappe du cône (ou, plus précisément, à une certaine portion de cette nappe) et les intégrales de surface à des intégrales étendues à l'intersection s^P de la nappe avec la surface S.[2]

Or, ce fait constitue précisément le principe de Huygens énoncé sous la forme suivante: La solution $u(P)$ ne dépend que des valeurs que les données admettent

---

[1] La fonction $H_2(\alpha) = 2\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ n'a pas de pôle pour $\alpha = 2$. Le principe de Huygens, auquel obéit le troisième terme de la solution pour $m = 2$, dépend uniquement du fait que le noyau $d r^{\alpha-2}/d n$ contient le facteur $\alpha - 2$, qui s'annule pour $\alpha \to 2$; (*cf.* les n^{os} **47—48** et pour I_m^* les n^{os} **50—51**).

[2] *Cf* le n° **57**.

aux points de la nappe du cône D^P, points qui, suivant la terminologie de M. Hadamard[1], sont « *juste en onde* » par rapport au point P.

On peut aussi dire, pour citer l'Introduction, que le principe de Huygens dérive du fait que l'opérateur I_*^2 présente, pour m *pair* $\geqq 4$, un caractère *quasi local*; il n'y intervient que de tels points qui sont à *distance zéro* du point P.[2]

Pour m impair, la fonction $H_m(\alpha)$ n'admet pas de pôle en $\alpha = 2$. En effet, il en est ainsi pour chacun des deux facteurs Γ qui y interviennent. Notre formule de solution devient en principe identique à celle de M. Hadamard[3], la seule différence étant que nous interprétons les intégrales divergentes par prolongement analytique, tandis que M. Hadamard le fait en appliquant sa méthode de la partie finie. L'une ou l'autre des deux méthodes montre que, les données étant générales, la solution, écrite sous forme finie, contient des intégrales étendues au volume entier D_S^P et à la portion de surface entière S^P. On a là ce qu'on appelle *diffusion des ondes*[4] ou encore l'apparition *d'intégrales résiduelles*.

56. Diffusion des ondes. (Suite). — La diffusion des ondes se présente en particulier pour l'équation des ondes cylindriques ($m = 3$) et tout à fait inattendue lors de sa découverte, elle fut mise en évidence par Volterra[5] moyennant la méthode dont nous venons de donner un aperçu au n° **54**.

Dans la solution de cette équation, il n'y a pas lieu de faire de prolongement pour les intégrales spatiale et de simple couche qui sont convergentes et s'écrivent, en tenant compte de ce que $H_3(\alpha) = 2\pi\Gamma(\alpha - 1)$ et par suite $H_3(2) = 2\pi$,

$$I_*^2 \overline{f, g, 0}(P) = \frac{1}{2\pi}\left\{ \int\limits_{D_S^P} f r^{-1}\, dQ + \int\limits_{S^P} g r^{-1}\, dS \right\}.$$

On a là une intégrale triple et une intégrale double, toutes les deux « résiduelles ».

Pour obtenir le prolongement analytique de l'intégrale de double couche

---

(1) HADAMARD **1**, p. 74, 239, 324.

(2) Il en est de même — les raisons sont analogues —, pour m *pair*, des opérateurs I_*^{2k}, k entier positif, $2k \leqq m - 2$, et pour m *impair*, des opérateurs I_*^{2k+1}, k entier, $2k + 1 \leqq m - 2$. I_*^{-2p} a, pour p entier $\geqq 0$, un caractère *strictement local*, indépendamment de la parité de m. En effet on a, d'après le n° **42**, $I_*^0 \overline{f, g, h}(P) = f(P)$ et $I_*^{-2p} \overline{f, g, h}(P) = \Delta^p f(P)$.

(3) HADAMARD **1**, p. 227 (formule (39)).

(4) HADAMARD **1**, p. 238.

(5) VOLTERRA **1**.

sous une forme explicite, le plus commode sera de partir de l'intégrale (95) du n° **31** (au lieu de la formule (107) du n° **32**, modifiée selon les indications du n° **33**). Posons donc, dans les notations des n^{os} **27—33**,

$$I_*^\alpha \overline{0, 0, h}(P) = \frac{\alpha - m}{H_m(\alpha)} \int\limits_{S^P} h(\mathbf{a})\, r_a^{\alpha-2}\, dH.$$

La sphère unitaire ω_{m-1} donnée par la formule (99) du n° **31** se réduit ici à une circonférence de rayon 1. En introduisant l'angle azimutal Φ, on peut exprimer les coordonnées des points $\mathbf{z}$ de H par les formules

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}(t^{-1} + t),\quad z_2 = -\tfrac{1}{2}(t^{-1} - t)\cos\Phi,\quad z_3 = -\tfrac{1}{2}(t^{-1} - t)\sin\Phi.$$

Pour chaque valeur déterminée de Φ, le point $\mathbf{z}$ décrit un méridien[1] sur H. La projection (centrale au centre P) d'un tel méridien sera une certaine ligne l, qui coupe l'intersection s^P de S et de la nappe C^P du cône D^P en un certain point $\mathbf{b}$, point qu'on fait correspondre à tous les points $\mathbf{a}$ de la ligne l. Tandis que ces points $\mathbf{a}$ dépendent encore de t ou de $T = t^2$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(T, \Phi)$, le point $\mathbf{b}$ ne dépend que de Φ, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\Phi)$.

Spécialisons l'intégrale ci-dessus, en y posant $m = 3$, et notons qu'elle converge pour $\alpha > m = 3$. Écrivons aussi, d'après la formule (72) du n° **27**

$$r_a = \frac{r_a}{t} \cdot t = v_a \cdot t = v_a\, T^{\frac{1}{2}}.$$

Cela étant admis, il vient

$$(16)\qquad I_*^\alpha \overline{0, 0, h}(P) = \frac{\alpha - 3}{H_3(\alpha)} \int h(\mathbf{a})\, r_a^{\alpha-2}\, dH = \frac{\alpha - 3}{H_3(\alpha)} \int h(\mathbf{a})\, v_a^{\alpha-2}\, T^{\frac{\alpha-2}{2}}\, dH.$$

Écrivons

$$(17)\qquad h(\mathbf{a}) \cdot v_a^{\alpha-2} = (h(\mathbf{a})\, v_a^{\alpha-2} - h(\mathbf{b})\, v_b^{\alpha-2}) + h(\mathbf{b})\, v_b^{\alpha-2}$$

et, d'après la formule (99) du n° **31**, avec $m = 3$,

$$(18)\qquad T^{\frac{\alpha-2}{2}}\, dH = \tfrac{1}{4} \cdot T^{\frac{\alpha-5}{2}} \cdot (1 - T)\, dT\, d\Phi.$$

Le dernier terme de (17), indépendant de T, introduit dans (16), donne alors, d'abord pour $\alpha > 3$

[1] Ces méridiens dépendent évidemment du choix de l'axe des ξ_1.

$$\frac{\alpha-3}{4H_3(\alpha)}\int_0^{2\pi} h(\mathbf{b})\, v_b^{\alpha-2}\, d\,\Phi\cdot\int_0^1 T^{\frac{\alpha-5}{2}}(1-T)\,d\,T$$

$$=\frac{\alpha-3}{4\,H_3(\alpha)\cdot\frac{\alpha-3}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2}}\cdot\int_0^{2\pi} h(\mathbf{b})\, v_b^{\alpha-2}\, d\,\Phi.$$

Vu que $H_3(2)=2\pi$, il en devient par prolongement analytiqne, pour $\alpha=2$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\mathbf{b})\,d\,\Phi.$$

Il s'ensuit finalement

$$I_*^2\,\overline{0,0,h}\,(P)=-\frac{1}{2\pi}\int_{sP}(h(\mathbf{a})-h(\mathbf{b}))\,d\,H+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\mathbf{b})\,d\,\Phi.$$

Le premier terme du second membre peut, d'après (18), aussi s'écrire

$$-\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\,\Phi\int_0^1 (h(\mathbf{a})-h(\mathbf{b}))\,T^{-\frac{3}{2}}(1-T)\,d\,T.$$

On voit, soit par la dernière formule, soit par les évaluations des n^{os} **32** et **33** qu'il suffit largement pour la validité des expressions obtenues que $h(\mathbf{a})$ et $S(\mathbf{a})$ admettent des dérivées partielles continues du premier ordre. [1]

L'intégrale double, figurant dans la solution, est encore une intégrale résiduelle. [2]

Les recherches de M. Hadamard, continuant celles de Volterra, ont montré clairement que, dans la théorie générale des équations linéaires hyperboliques normales du second ordre, à coefficients *constants* ou *variables*, c'est la *diffusion des ondes* qui fait la *règle* et son absence qui fait l'exception. [3]

---

(1) *Cf.* la note (1), p. 51.

(2) Il y a lieu de mentionner à cette occasion que MM, Baker et Copson ont appliqué notre méthode d'une manière explicite à l'équation des ondes cylindriques en élucidant les principes aussi pour des cas plus généraux. (BAKER-COPSON, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle,* Oxford 1939, p. 54—67.) Je tiens à les remercier de leur intérêt, d'autant plus remarquable, que ce n'était qu'un résumé très précaire de la méthode (RIESZ **1**) qu'ils avaient à leur disposition.

(3) Pour des coefficients constants, on trouve la démonstration dans le numéro suivant; pour des coefficients variables, voir le dernier Chapitre. M. Hadamard a émis l'hypothèse que les seules équations du *second ordre* obéissant au principe de Huygens sont celles qui contiennent un nombre pair de variables indépendantes et qui, par des transformations ponctuelles de ces variables et par la multiplication de la fonction inconnue avec une fonction convenable, peuvent se réduire à

Or, c'est précisement ce dernier cas, exceptionnel au point de vue de la théorie générale, qui a lieu pour l'équation des ondes dans tout espace — ou mieux, *dans tout univers — à une dimension d'ordre pair.* Cet état des choses est d'une importance capitale pour le monde physique, régi dans ses manifestations les plus nettes, telles les phénomènes électro-magnétiques — y compris la lumière — par l'équation des ondes sphèriques. (1)

56^{bis}. Équation des ondes amorties. — Étant donnée une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, nous dirons, avec M. Hadamard(2), qu'il s'agit d'une équation *hyperbolique normale,* si la forme quadratique formée avec les coefficients des dérivées du second ordre — transformée en somme de carrés — contient m carrés qui ont *tous, sauf un, le même signe.*

Il est facile de faire voir que toute équation hyperbolique normale à coefficients constants se réduit soit à l'équation des ondes $\Delta u = f$, soit à l'équation des ondes amorties $\Delta u + \mu u = f$, où $\mu \neq 0$ est constant. On montre ensuite que cette dernière équation conduit toujours à des intégrales résiduelles, et cela indépendamment de la parité de m. On aura ainsi pour le cas des coefficients constants confirmé le fait annoncé au numéro précédent.

L'équation générale (à coefficients constants) ayant été, par une substitution linéaire des variables indépendantes, mise sous la forme

$$\sum_1^m \varepsilon_k^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + 2 \sum_1^m \varepsilon_k^{-1} B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu = f,$$

on pose

$$e^{\sum\limits_1^m B_k x_k} = E,\ Eu = v,\ C - \sum_1^m \varepsilon_k^{-1} B_k^2 = \mu = \lambda^2,\ Ef = g$$

et on obtient l'équation

$$(\Delta + \lambda^2) v = g. \text{(3)} \tag{19}$$

Comme nous l'avons fait au chapitre III, en y partant de l'opérateur Δ, nous définirons ici une intégration d'ordre fractionnaire rattachée à l'opérateur $\Delta + \lambda^2$. Le noyau correspondant W^α remplira, entre autres choses, la relation

$$(\Delta + \lambda^2) W^{\alpha+2} = W^\alpha.$$

Nous écrirons d'abord les formules définitives et indiqueront ensuite la voie qui conduit au noyau en question. Considérons, pour commencer, la fonction de Bessel d'ordre n

---

l'équation des ondes. Myron Mathisson, qu'une mort prématurée a empêché de poursuivre ses importantes recherches, a vérifié cette hypothèse dans le cas où les coefficients des termes du second ordre sont constants. Quant au principe de Huygens pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur à deux, on pourra consulter les travaux de M. Petrowsky et de M. Gårding. (Pour les travaux des trois auteurs cités *voir* la Bibliographie.)

(1) Pour cette observation, remontant à Boussinesq, *cf.* Goursat, *Cours d'Analyse* III (1915), p. 109.

(2) Hadamard **1**, p. 47 et 219.

(3) *Cf.* p. ex. Hadamard, **1**, p. 148.

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{n+2p}}{2^{n+2p} \cdot p! \, \Gamma(n+p+1)} \tag{20}$$

et posons, avec les notations du n° **14**[1],

$$W^\alpha(P, Q) = \frac{\left(\lambda^{-1} r_{PQ}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}}}{\pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha+m-2}{2}} \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\frac{\alpha-m}{2}}\left(\lambda r_{PQ}\right) \tag{21}$$

dans le cône rétrograde au sommet P et nul ailleurs. On trouve alors, en appliquant le développement en série (20) que pour $r \neq 0$

$$\left(\Delta_P + \lambda^2\right) W^{\alpha+2} = \left(\Delta_Q + \lambda^2\right) W^{\alpha+2} = W^\alpha$$

et en particulier

$$(\Delta + \lambda^2)\, W^2 = 0.$$

L'intégrale

$$I^\alpha_{(\lambda)} f(P) = \int_{D^P_S} f(Q)\, W^\alpha(P, Q)\, d\, Q$$

satisfait aux relations

$$I^\alpha_{(\lambda)} I^\beta_{(\lambda)} = I^{\alpha+\beta}_{(\lambda)} \text{ et } \left(\Delta_P + \lambda^2\right) I^{\alpha+2}_{(\lambda)} = I^\alpha_{(\lambda)},$$

dont la première exige en général que S soit d'orientation d'espace ou que D^P_S se confonde avec le cône entier D^P.

La formule de Green sera de la même forme qu'au chapitre III. En posant donc

$$I^\alpha_{*(\lambda)} \overline{f, g, h}\,(P) = \int_{D^P_S} f(Q)\, W^\alpha(P, Q)\, d\, Q + \int_{S^P} \left\{ g(Q)\, W^\alpha(P, Q) - h(Q) \frac{d\, W^\alpha(P, Q)}{d\, n} \right\} d S,$$

on aura l'identité

$$I^\alpha_{(\lambda)} u(P) = I^{\alpha+2}_{*(\lambda)} \overline{(\Delta + \lambda^2)\, u, \frac{d u}{d n}, u}\,(P).$$

On a aussi dans le cas actuel la relation importante

$$I^0_{*(\lambda)} \overline{f, g, h}\,(P) = f(P).$$

En rapprochant les deux dernières formules, on obtient l'identité

$$u(P) = I^2_{*(\lambda)} \overline{(\Delta + \lambda^2)\, u, \frac{d u}{d n}, u}\,(P), \tag{22}$$

qui, si l'on y porte les données, doit fournir la solution du problème de Cauchy correspondant.

On voit de suite par le développement (20) et par la formule (21) que les facteurs Γ figurant dans les dénominateurs des termes constituant W^α n'ont pas de pôles en $\alpha = 2$ pour m impair,

[1] *Cf.* M. Riesz **2**, dernières formules de la Note additionnelle.

et que, pour m pair, ces termes n'admettent de pôles en $\alpha = 2$ que si l'on a $p \leqq \frac{m}{2} - 2$. Ce ne sont donc que ces termes-là, complétés, en ce qui concerne la double couche, et cela pour des raisons expliquées au n° **15**, par le terme correspondant à $p = \frac{m}{2} - 1$, qui donnent lieu au principe de Huygens. Tous les autres termes, en nombre infini, fournissent des intégrales résiduelles (convergentes) étendues à D_S^P ou à S^P.

Il nous reste à indiquer comment on arrive au noyau (19). On peut le faire par la théorie de l'intégrale de Fourier, en exigeant que l'opération $I^\alpha_{(\lambda)}$, étendue au cône rétrograde entier et appliquée à une fonction de la forme $e^{\Sigma b_k x_k}$, avec

$$b_k = b'_k + i b''_k, \text{ et } \Sigma \varepsilon_k^{-1} b'^2_k > 0,\ b'_1 > 0,$$

reproduise cette fonction multipliée par

$$\left(\Sigma\, \varepsilon_k^{-1} b_k^2 + \lambda^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Il est pourtant plus commode de procéder comme il suit. On pose, d'une manière symbolique,

$$I^\alpha_{(\lambda)} = (\Delta + \lambda^2)^{-\frac{\alpha}{2}} = \Delta^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + \lambda^2 \Delta^{-1})^{-\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} \lambda^{2p} \Delta^{-\frac{\alpha}{2} - p} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} \lambda^{2p} I^{\alpha + 2p}.$$

L'opérateur I^α dérivant du noyau $r^{\alpha - m}/H_m(\alpha)$, l'opérateur $I^\alpha_{(\lambda)}$ doit dériver du noyau

$$W^\alpha = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{p} \lambda^{2p} \frac{r^{\alpha + 2p - m}}{H_m(\alpha + 2p)}, \tag{23}$$

qui est identique à celui donné par la formule (21).

57. **Potentiels retardés.** — Considérons *d'abord*, pour une *dimension m arbitraire*, l'intégrale convergente pour $\alpha > m - 2$

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{D_S^P} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha - m}\, d\, Q,$$

où, comme d'ordinaire, $P = \mathbf{x}$, $Q = \boldsymbol{\xi}$. Envisageons, dans l'ordre d'idées du n° **31**, le demi-hyperboloïde au centre $\mathbf{x}$ et de rayon r, c'est-à-dire $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2 = r^2$, $\xi_1 - x_1 < 0$, et posons la notation H_r pour la portion de cette surface qui est intérieure au domaine D_S^P. Eu égard à la relation évidente (*cf.* la formule (89) du n° **31**)

$$d\,Q = d\,H_r \cdot d\,r = \frac{1}{2}\frac{d\,H_r}{r} \cdot d\,R \qquad (R = r^2),$$

on peut écrire

$$(24) \qquad I^\alpha f(P) = \frac{1}{2\,H_m(\alpha)} \int_0^{R_0} R^{\frac{\alpha-m}{2}}\,d\,R \int_{H_r} f(Q)\frac{d\,H_r}{r},$$

où R_0 désigne le maximum de R en D_S^P. Si l'on pose encore

$$(25) \qquad \int_{H_r} f(Q)\frac{d\,H_r}{r} = A(R) \text{ et } \pi(R) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^{(k)}(0)}{k!} \cdot R^k,$$

on aura, d'après la formule (13) du nº **5**,

$$(26) \quad I^\alpha f(P) = \frac{1}{2\,H_m(\alpha)} \int_0^{R_0} (A(R) - \pi(R))\,R^{\frac{\alpha-m}{2}}\,d\,R + \frac{1}{2\,H_m(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{R_0^{\frac{\alpha-m}{2}+k+1}}{\frac{\alpha-m}{2}+k+1},$$

formule qui fournit le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$.

Nous ne nous sommes préoccupés ni de l'existence, ni de la continuité des dérivées $A^{(k)}(R)$, ni même de la signification de $A(0)$ et des $A^{(k)}(0)$. En ce qui concerne le premier point, on peut sans doute démontrer par les méthodes des nºs **27**—**29** que, dans nos conditions usuelles, les quantités en question existent et possèdent les propriétés désirées. Pour des surfaces S très simples, p. ex. un plan d'espace, la chose devient, pour ainsi dire, évidente, puisque l'intersection de H_r avec S devient très simple. D'autre part, dans le cas général, les calculs seraient certainement assez pénibles, surtout pour les dérivées d'ordre supérieur. Nous verrons à l'instant que, pour I^2 et même pour I_*^2 et pour la dimension $m = 4$, les difficultés de calcul disparaissent entièrement, au moins en ce qui concerne l'intégrale de volume et la simple couche, dont nous allons nous occuper tout à l'heure.

Le second point auquel nous venons de faire allusion, à savoir la signification de $A(0)$ (et des $A^{(k)}(0)$), est de la plus grande importance et dépend des propriétés de la différentielle $d\,H_r/r$.

Considérons d'abord, dans l'espace euclidien à m dimensions, la sphère Σ_r, donnée par l'équation $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2 = r^2$. Les cosinus directeurs de la normale extérieure — *ou les composantes de la normale unitaire* — étant z_k/r, on a, pour l'élément $d\,\Sigma_r$ de cette sphère, la relation

$$|dz_2 \ldots dz_m| = \frac{|z_1|}{r} d\Sigma_r,$$

ou, d'une manière générale,

$$|dz_1 \ldots dz_{k-1} dz_{k+1} \ldots dz_m| = \frac{|z_k|}{r} d\Sigma_r.$$

Il est évident que des relations analogues ont lieu dans toute métrique quadratique et que l'on a en particulier pour H_r

$$\frac{d\xi_2 \ldots d\xi_m}{x_1 - \xi_1} = \frac{dH_r}{r}, \tag{27}$$

toutes les quantités étant positives. Cette formule met en évidence que le premier membre est invariant par toute transformation (lorentzienne) de coordonnées, il en étant ainsi pour le second membre. D'un autre côté, le premier membre garde sa signification aussi pour le cône caractéristique au sommet P, correspondant à $r = 0$, tandis que le second membre, qui devient $0:0$, la perd.

Nous terminons cette digression en indiquant pour le cône H_0, qui n'est que l'hyperboloïde dégénéré $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta})^2 = 0$, une interprétation géométrique du premier membre de (27), qui met en évidence son caractère invariantif (d'ailleurs facile à établir par un calcul direct). Pour éviter toute confusion, nous désignons pour un instant la mesure d'un élément dH_r par $|dH_r|$, en gardant la première notation pour la variété géométrique (ensemble de points) en question — deux notions que nous désignons d'habitude par la même notation. Nous posons encore $\overline{dH_r}$ pour la projection de dH_r sur le plan $\xi_1 = 0$ dans la direction de l'axe des ξ_1 et $|\overline{dH_r}|$ pour la mesure de la projection. On aura alors, pour un élément dH_0 autour du point η du cône, $|dH_0| = 0$, tandis que $\dfrac{|\overline{dH_0}|}{x_1 - \eta_1}$ est la valeur limite de $|dH_r|/r$ lorsque la variété dH_r tend, point par point, vers la variété dH_0.[1]

Si l'on désigne par C_S^P la portion interceptée de la nappe par la surface S, par $\bar{C}_S^P$ la projection de C_S^P sur le plan $\xi_1 = 0$ et par $\boldsymbol{\eta}$ un point arbitraire de C_S^P, on pourra écrire par ce qui précède

$$A(0) = \int_{\bar{C}_S^P} f(\boldsymbol{\eta}) \frac{d\eta_2 \ldots d\eta_m}{x_1 - \eta_1}, \tag{28}$$

---

[1] Pour fixer les idées, on pourra établir une correspondance biunivoque entre les points des H_r et ceux de H_0 par des droites parallèles à une direction de temps déterminée.

la différentielle, répétons-le, étant invariantive. En posant encore

$$\left\{\sum_{i=2}^{m}(x_i - \eta_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \varrho,$$

on aura $x_1 - \eta_1 = \varrho$ ou $\eta_1 = x_1 - \varrho$, et $A(0)$ pourra s'écrire sous la forme

$$A(0) = \int_{\overline{C}_S^P} f(x_1 - \varrho, \eta_2, \ldots, \eta_m)\frac{d\eta_2 \ldots d\eta_m}{\varrho}. \tag{28^{bis}}$$

On voit que la continuité de f (et de S) suffit pour rendre légitime le passage à la limite ci-dessus. Ajoutons qu'il serait beaucoup plus compliqué de donner des formules explicites pour les $A^{(k)}(0)$, mais on comprend que, dans des conditions convenables, on pourra leur attribuer un sens bien défini.

Cela étant, retournons à la formule (26). En posant

$$\frac{\alpha + 2 - m}{2} = \beta,\ H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right) \tag{29}$$
$$= \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma(\beta),$$

ladite formule s'écrit

$$I^\alpha f(P) = \frac{1}{2^\alpha \pi^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left\{\int_0^{R_0}(A(R) - \pi(R))R^{\beta-1}\,dR + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{A^{(k)}(0)}{k!}\,\frac{R_0^{k+\beta}}{k+\beta}\right\}. \tag{A}$$

Admettant dans la suite que m est un nombre *pair* $\geqq 4$, nous allons calculer $I^2 f(P)$. Pour $\alpha = 2$, la valeur $\beta = \frac{4-m}{2}$ sera égale à zéro ou à un entier négatif. En tenant compte des résultats du Chap. I, et surtout de la formule (13^{bis}) du n° 5[1], on obtient donc

$$I^2 f(P) = \frac{1}{4\pi^{\frac{m-2}{2}}}(-1)^{\frac{m-4}{2}} A^{\left(\frac{m-4}{2}\right)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} A^{\left(\frac{m-4}{2}\right)}(0)}{4\pi^{\frac{m-2}{2}}}. \tag{30}$$

En particulier, pour $m = 4$, eu égard à (28^{bis}), on arrive au potentiel retardé bien connu

---

[1] Pour $m = 4$, on n'a pas besoin de la formule (13^{bis}), car $A^{\left(\frac{m-4}{2}\right)}(0)$ devient $A(0)$ qui, comme nous venons de le voir, peut s'obtenir par un passage à la limite.

$$(30^{bis}) \qquad I^2 f(P) = \frac{A(0)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\bar{C}_S^P} f(x_1 - \varrho, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \cdot \frac{d\eta_2\, d\eta_3\, d\eta_4}{\varrho}.$$

Nous indiquons encore succinctement les relations correspondantes qui ont lieu pour nos intégrales de surface. Tout comme dans le n° **50**, nous divisons S^P, moyennant son intersection avec l'hyperboloïde $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2 = \delta^2$ en deux parties et désignons par $\bar{S}$ la partie annulaire extérieure et par $\bar{\bar{S}}$ la partie intérieure. Notre but final étant de calculer I_*^2, nous pourrons nous restreindre à $\bar{S}$, puisque la contribution de $\bar{\bar{S}}$ à I_*^2 s'annule (vu que $1 : H_m(2) = 0$).

Il viendra pour la *simple couche* (*voir* pour les notations et pour la relation $dS = ds_R \cdot dl$ le n° **50**)

$$(B) \qquad \bar{I}_*^\alpha \overline{0, g, 0}(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{\bar{S}} g\, r^{\alpha - m}\, dS = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_0^{\delta^2} R^{\frac{\alpha - m}{2}}\, dR \int\limits_{s_R} g \frac{dl}{dR}\, ds_R$$

$$= \frac{1}{H_m(\alpha)} \int\limits_0^{\delta^2} R^{\beta - 1} B(R)\, dR,$$

où $B(R)$ désigne l'intégrale étendue à s_R qui figure au troisième membre, et où $\beta = (\alpha + 2 - m)/2$ comme dans la formule (29). La dernière intégrale converge pour $\alpha > m - 2$ ou $\beta > 0$ et son prolongement analytique s'obtient de la même manière que celui de (24). Il vient (puisque $I_*^2 = \bar{I}_*^2$)

$$(31) \qquad I_*^2 \overline{0, g, 0}(P) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2 \cdot \pi^{\frac{m-2}{2}}} \cdot B^{\left(\frac{m-4}{2}\right)}(0)$$

et, en particulier, pour $m = 4$,

$$(31^{bis}) \qquad I_*^2 \overline{0, g, 0}(P) = \frac{B(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s^P} g \frac{dl}{dR}\, ds.$$

Pour la *double couche*, on aura d'abord

$$\frac{dr^{\alpha - m}}{dn} = (\alpha - m)\, r^{\alpha - m - 1} \frac{dr}{dn} = \frac{\alpha - m}{2} r^{\alpha - m - 2} \frac{dR}{dn}$$

et alors

$$(C) \quad \bar{I}_*^\alpha \overline{0, 0, h}(P) = \frac{-1}{H_m(\alpha)} \int\limits_{\bar{S}} h \frac{dr^{\alpha - m}}{dn}\, dS = \frac{-(\alpha - m)}{2 H_m(\alpha)} \int\limits_0^{\delta^2} R^{\frac{\alpha - m}{2} - 1}\, dR \int\limits_{s_R} h \frac{dR}{dn} \frac{dl}{dR}\, ds_R.$$

Désignons la dernière intégrale par $C(R)$, et posons cette fois-ci $\beta = \frac{\alpha - m}{2}$. On trouve d'abord

$$\Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right) = \frac{\alpha - m}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha - m}{2}\right) = \beta\,\Gamma(\beta),$$

ce qui donne

$$(C^{bis}) \qquad I_*^\alpha \overline{0, 0, h}(P) = \frac{-1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\delta^2} R^{\beta-1}\, C(R)\, dR.$$

On en tire pour $\alpha = 2$ $\left(\beta = \frac{2-m}{2}\right)$,

$$(32) \qquad I_*^2 \overline{0, 0, h}(P) = \frac{-(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{2\pi^{\frac{m-2}{2}}} C^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2\pi^{\frac{m-2}{2}}} C^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(0)$$

et, en particulier, pour $m = 4$,

$$(32^{bis}) \qquad I_*^2 \overline{0, 0, h}(P) = \frac{1}{2\pi} C'(0).$$

On voit que $I_*^2 \overline{f, g, h}(P)$ s'exprime, d'une part, par les valeurs que f et ses dérivées d'ordre $\leqq \frac{m-4}{2}$ admettent sur C_S^P et, d'autre part, par celles que g et h et leurs dérivées d'ordre $\leqq \frac{m-4}{2}$ et d'ordre $\leqq \frac{m-2}{2}$, respectivement, admettent sur s^P. L'expression de I_*^2 obéit donc au principe de Huygens, chose évidente d'après ce qu'on a vu au nº **55**.

Le Chap. V est consacré à une interprétation géométrique des formules (31^{bis}) et (32^{bis}).

58. La solution élémentaire. — Dans tout ce qui précède, le lecteur chercherait en vain([1]) un concept bien familier à tous les initiés, celui de la *solution élémentaire*.([2])

En s'exprimant d'une manière générale et assez vague, on entend par solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles une fonction V qui, dans une certaine région, satisfait à l'équation sans second membre et admet,

---

([1]) En réalité, il faut faire exception pour deux mentions concernant les méthodes de Volterra et de M. Tedone (nº **54**).

([2]) Cette expression, due à M. Hadamard, est à notre avis bien préférable à l'ancien terme de *solution fondamentale*; *cf.* HADAMARD **1**, p. XII.

dans un certain point une singularité d'un ordre d'infinitude convenable.[1] Pour fixer les idées, on a, dans la théorie de l'équation de Laplace, pour toute dimension $m \neq 2$, comme solution élémentaire le potentiel élémentaire newtonien

$$V = g_m \cdot r^{2-m}.$$

Le plus naturel nous paraît de choisir la constante numérique arbitraire g_m de façon que la formule de Poisson reproduise la densité spatiale avec le coefficient 1, c'est-à-dire que $\Delta \int f\, V\, d\, Q = f$. Par exemple, pour $m = 3$, la solution élémentaire ainsi normée est $-\frac{1}{4\pi r}$. (*Cf.* aussi le Chap. II du présent travail.)

Une pareille solution élémentaire n'intervenait pas directement dans nos considérations. Cette notion y a joué en quelque sorte le rôle d'un élément idéal; du moins pour $m \geqq 4$ (et en partie même pour $m = 2$ et 3). Nous entendions ainsi par $I^2 f$ — qui dans la théorie de l'opérateur de Laplace est (au signe près) identique au potentiel newtonien tel que nous l'avons défini — le prolongement analytique de $I^\alpha f$, représenté, pour les valeurs assez grandes de α, par des intégrales convergentes. Il s'ensuit que, si l'on veut parler d'une solution élémentaire dans la théorie actuelle, cela ne peut être que

$$(33) \qquad V = \begin{cases} \gamma_m \cdot r^{2-m} \text{ dans le cône rétrograde,} \\ 0 \text{ ailleurs,} \end{cases}$$

où

$$\gamma_m = \frac{1}{H_m(2)}.$$

Pour *m impair*, il n'y a en réalité rien à objecter à cette solution élémentaire, si ce n'est que les intégrales formées avec elle sont divergentes pour $m > 3$, et sont à interpréter par prolongement analytique — comme nous l'avons fait —, ou par la méthode de la partie finie de M. Hadamard. Le facteur numérique γ_m a, nous le savons, une valeur finie $\neq 0$. Pour sa valeur explicite, il vient par un calcul simple

$$(34) \qquad \gamma_m = \frac{1}{H_m(2)} = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{1}{\pi\, \omega_{m-2}},$$

où ω_{m-2} signifie, comme d'habitude, la surface totale de la sphère unitaire dans l'espace euclidien à $m-2$ dimensions (*cf.* la formule (8) du nº **6**).

[1] Pour des renseignements plus précis, *cf.* HADAMARD **1**, p. 115 et *suiv.*, en particulier p. 134.

Pour *m pair*, on a $\gamma_m = 0$, et par conséquent la solution élémentaire apparaît sous la forme paradoxale

$$V = 0 \cdot r^{2-m}. \quad (35)$$ [1]

On peut préciser cette forme en posant

$$V = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \delta_m \cdot r^{2+\varepsilon-m}, \quad (36)$$

où

$$\delta_m = \lim_{\alpha \to 2} \frac{1}{(\alpha - 2) H_m(\alpha)} = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m-2}{2}}} = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2\,\omega_{m-2}}. \quad (37)$$

La forme « précisée » de la solution élémentaire pour m pair est très utile dans le cas spécial — fort important au point de vue de la Physique —, $m = 4$, où les intégrales spatiale et de simple couche convergent pour toute valeur de $\alpha > 2$ et où par conséquent on peut obtenir $I_*^2 \overline{f, g, 0}(P)$ par un passage à la limite. On peut donc appliquer directement la formule (36) à l'évaluation de ladite expression et déduire par là d'une manière immédiate les potentiels retardés correspondants, sans faire le détour par la théorie générale. D'autre part, on peut aussi appliquer la formule en question à l'évaluation des intégrales de simples couches, ces dernières étalées sur des variétés à dimension 1 ou 2, en particulier sur une « ligne d'univers ». On arrive par là aisément au potentiel-quadrivecteur connu sous le nom de potentiel de Liénard-Wiechert. [2]

59. Examen critique de la solution élémentaire. — Il est clair que, dans la théorie du potentiel newtonien, relative à notre espace ordinaire à trois dimensions, par exemple, il est à peu près indifférent d'écrire le potentiel sous sa forme habituelle $\int f r^{-1} dQ$ ou d'accepter la « réforme » que nous avons l'air d'avoir préconisée, à savoir de le multiplier par $-1/4\pi$. Le facteur -4π figurerait dans le premier cas — comme il le fait, d'habitude — au second membre de la formule de Poisson, ce qui ne serait pas un malheur trop grave. Les circonstances, ne sont-elles pas analogues dans la théorie actuelle? Y a-t-il aucune différence à appliquer la formule (33) pour m impair et la formule (35) sous sa

---

(1) Une pareille forme paradoxale se présente, pour m pair, chez ceux des termes de W^2, défini par les formules (20) et (21) du n° 56^{bis}, qui correspondent à $p \leqq \frac{m}{2} - 2$.

(2) *Cf.* FREMBERG 2, Chapter 10 et le Chapitre VI du présent ouvrage.

forme précisée (36) pour m pair ou bien à poser simplement $V = r^{2-m}$ dans les deux cas?

Cela revient à poser la définition modifiée $I^2 f(P) = \int f(Q)\, r_{PQ}^{2-m}\, dQ$, cette dernière expression étant définie par un procédé de prolongement quelconque, p. ex. prolongement analytique de l'expression $\int f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-m}\, dQ$, ou prolongement par « partie finie ». Pour m impair, la différence serait minime, tout analogue à celle rencontrée dans le cas newtonien. Il est pour ainsi dire évident qu'il en serait tout autrement pour les dimensions d'ordre pair.

En effet, l'intégrale $\int f r^{\alpha-m}\, dQ$ est égale à $H_m(\alpha) \cdot I^\alpha f(P)$. D'autre part, nous avons vu que le prolongement analytique de $I^\alpha f(P)$ conduit, dans nos con ditions, à des valeurs finies pour $I^2 f(P)$ qui évidemment ne sont pas nulles en général. Le facteur $H_m(\alpha)$ possédant, pour *m pair*, un pôle en $\alpha = 2$, le prolongement de l'expression modifiée ne saurait fournir pour $I^2 f(P)$ des valeurs finies.

Il en serait de même si au lieu de supprimer dans I^α le facteur $1/H_m(\alpha)$ on le remplaçait par un autre qui ne s'annule pas pour $\alpha = 2$.

Tel étant le cas pour le prolongement analytique, on peut se demander comment se présente la question de la solution élémentaire si l'on applique la méthode de la partie finie. Or, c'est précisément l'absence, dans les formules de M. Hadamard, du facteur $1/H_m(\alpha)$ — ou de facteurs qui se comportent d'une manière analogue au voisinage de $\alpha = 2$ — qui faisait que cette dernière méthode ne pouvait s'appliquer que dans le cas de m impair.(1)

Pour m pair, on trouve dans le livre de M. Hadamard (p. 143) une solution élémentaire qui n'est déterminée qu'à une solution régulière additive près, et qui, dans le cas général de coefficients variables, renferme un terme logarithmique. Nous allons montrer au dernier Chapitre de ce travail que cette solution élémentaire se réduit dans le cas actuel — à ladite indétermination près — à l'expression $V = \delta_m \cdot r^{2-m}$, δ_m étant précisement la valeur $\neq 0$ donnée par la formule (37) du n° **58**. La solution élémentaire en question ne pourra donc nous rendre aucun service.

M. Hadamard(2) lui-même a bien constaté (**1**, p. 287) que ladite solution élémentaire n'était pas utilisable dans la théorie générale et que par suite il lui

---

(1) *Cf.* Hadamard **1**, p. 190.

(2) Pour une autre méthode d'intégration *voir* Hadamard **1**, p. 316.

fallait, pour m pair, recourir à la méthode de descente. Cette méthode consiste à monter d'abord à une équation au nombre impair $m + 1$ de variables et d'en redescendre à l'équation originale.

60. Vérification de la solution. — En réalité, la formule (3) du n° **44**, appelée dans ce qui précède « formule de solution », n'est au point où nous nous trouvons qu'une transcription — consciemment illégitime — d'une formule de représentation, à savoir de l'identité (2) du même numéro. L'identité en question permet d'exprimer la fonction $u(P)$ par les valeurs que la fonction Δu admet au domaine D_S^P et que la fonction u elle-même et sa dérivée du/dn, prise suivant la normale intérieure, admettent sur la portion de surface S^P. La transcription consistait en ce que nous avons, dans le second membre de la formule, remplacé les quantités Δu, du/dn, u par les données f, g, h, Appeler la formule ainsi obtenue une formule de solution n'était pour nous qu'une façon commode de parler — comme nous l'avons souligné dès le début de ce chapitre.

Or, dans l'hypothèse que la surface S a une orientation d'espace, admise dans le cours de ce travail, sauf avis contraire, la formule dont il s'agit est une vraie formule de solution, ce qui resterait à voir à présent. Voici quelques indications sur ce sujet.

Chacun des trois termes dont le second membre de la formule (2) est composé apporte sa propre contribution à la solution demandée, en ce qu'il donne la solution complète pour l'une des données f, g, h et la solution nulle pour les deux autres. Ainsi $I_*^2 \overline{f, 0, 0}$ résout complètement le problème avec les données f, 0, 0 ($\Delta u = f$, $du/dn = 0$, $u = 0$) et ainsi de suite.

Le problème le plus difficile, lorsqu'on applique les méthodes habituelles, différentes de celles de M. Hadamard et des nôtres, consiste à démontrer que l'équation $\Delta u = f$ elle-même est vérifiée, problème qui chez nous se trouve résolu par la formule (124) du n° **42**. Il ne nous reste donc que les conditions aux limites, à savoir la démonstration de ce que la fonction u, donnée par la formule (3) et sa dérivée du/dn admettent sur la surface S les valeurs limites respectives h et g. Or il en est certainement ainsi, grâce à notre hypothèse sur l'orientation de S, bien entendu dans des conditions de dérivabilité suffisantes. Cela tient au fait qu'en raison de ladite hypothèse, les domaines d'intégration D_S^P et S^P deviennent infinitésimaux lorsque le point P s'approche indéfiniment de la surface. Nous omettons ici la vérification détaillée des dites propriétés limites des fonctions u et du/dn, vu que ces propriétés ont fait l'objet d'une étude soigneuse dans la Thèse de M. Fremberg, à laquelle nous avons fait allusion plus haut.[1] Nous pouvons aussi renvoyer le lecteur au livre de M. Hadamard, tant de fois cité, où l'on trouve les vérifications nécessaires aux pages 249—250 et 397—405 pour le cas général des équations hyperboliques normales à coefficients variables.

61. Frontière orientée dans le temps. — Une surface (ou une portion de surface) est dite orientée dans le temps, si ses normales sont des droites d'espace. Une condition caractéristique équivalente est que la forme différentielle quadratique $\Sigma \varepsilon_k d\xi_k^2$ soit indéfinie en tout point (régulier) de cette surface.

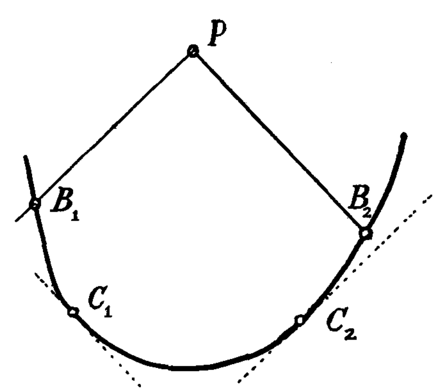

Fig. 7.

Dans un ordre d'idées général, considérons une frontière S (d'orientation arbitraire) pour laquelle il existe une région analogue à celle caractérisée dans le deuxième alinéa du n° **43**. Tout cône D^P dont le sommet se trouve dans la région en question devra délimiter avec la frontière S un domaine borné D^P_S. On supposera aussi que les lignes droites issues des points P et intérieures à D^P_S, les génératrices du cône y comprises, coupent S en un seul point sans lui être tangentes. Il est clair qu'une telle frontière ne pourra, dans toute son étendue, être orientée dans le temps si elle n'admet aucun point singulier (point sans plan tangent déterminé).

Cet état de choses est illustré par la fig. 7 ci-dessus, relative au cas de $m = 2$, où les arcs $B_1 C_1$ et $B_2 C_2$ sont de caractère de temps et l'arc $C_1 C_2$ de caractère d'espace. Les tangentes aux points C_1 et C_2 sont des caractéristiques (droites isotropes), parallèles aux génératrices PB_2 et PB_1 respectivement. De

[1] Fremberg **2**, p. 54.

telles frontières donnent lieu à des problèmes aux limites mixtes, auxquels M. Hadamard a voué des recherches assidues.[1] Comme on le verra dans la suite, il n'y a lieu de poser le problème de Cauchy — où l'on donne u et du/dn — que pour celle des parties d'une telle frontière qui est orientée dans l'espace, tandis que pour la partie orientée dans le temps, on aura à se contenter d'une seule de ces données.

Si l'on admet des singularités, p. ex. un ou plusieurs points coniques, ou, si l'on permet à la frontière de s'étendre à l'infini dans la direction des ξ_1 négatifs, la frontière peut être orientée entièrement dans le temps, comme il ressort des fig. 8 et 9 ci-jointes. Un exemple explicite est celui d'un cône direct

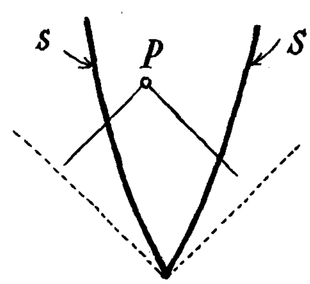

Fig. 8.

$\Sigma \eta_k x_k^2 = 0$, $x_1 > 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_i < -1$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$. On comprendra par la suite que pour une telle frontière il ne peut être question que d'un problème à une donnée aux limites unique, tout comme on pose, pour l'équation de Laplace, le problème de Dirichlet ou le problème de Neumann (problème hydrodynamique).

Avant d'aborder cette question assez délicate, nous allons faire voir que pour les frontières orientées dans le temps, telles qu'on vient de les décrire et assez régulières en général, l'identité (2) du nº **44** (notre point de départ pour la solution du problème de Cauchy) reste valide. Nous allons voir, en même temps, pourquoi cette identité ne conduit pas à une formule de solution pour de telles frontières. Ajoutons que les considérations qui suivent seraient faciles à étendre aux frontières de caractère mixte.

Remarquons d'abord que pour une frontière orientée dans le temps il faudra changer le signe de l'expression qui figure sous la racine carrée dans la définition de la quantité J (formule (34) du nº **21**) pour rendre cette expression positive. Ce changement fait, toutes les formules des nºs **21—25** dont on a besoin

[1] HADAMARD **1**, p. 48—52, 337—347, 453—486; **2**, p. 23—29.

pourront être conservées. Pour effectuer le prolongement analytique en présence d'un nombre fini de points singuliers on remplace les parties de S voisines des singularités par de petites surfaces telles que la surface S modifiée soit suffisamment dérivable. En appliquant les méthodes des n^{os} **27—37**, on peut former le prolongement des intégrales modifiées. Si l'on observe encore que nos intégrales étendues aux voisinages des points singuliers (supposés intérieurs à D_S^P) ne cessent jamais de converger, on voit que le prolongement des intégrales originales s'obtient par un passage à la limite de celui des intégrales modifiées. Par ces

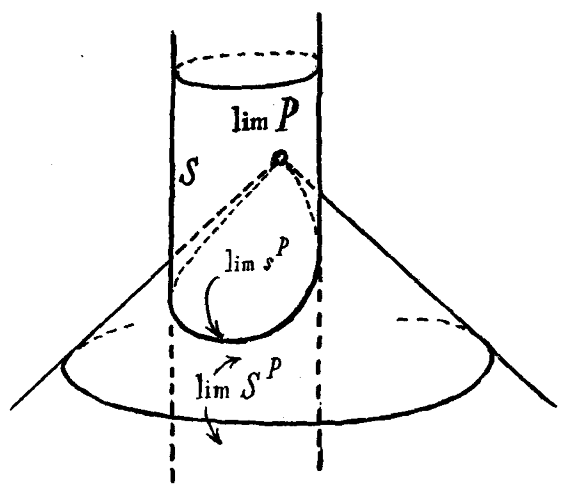

Fig. 9. La surface S de la figure est un cylindre portant (par derrière) le point $Q = \lim P$.

considérations on a en particulier démontré que l'identité (2) reste valide dans le cas actuel. [1]

Cette identité, conduit-elle à une solution, si l'on y porte les données f, g, h, c'est-à-dire qu'on passe à la formule (3)? Elle y conduit en ce qui concerne l'équation $\Delta u = f$, comme on le voit immédiatement. Supposons, pour simplifier, que $f = 0$, de sorte qu'on n'ait à considérer dans I_*^α que les deux intégrales de surface, étendues à S^P qui, pour $\alpha = 2$ et pour m pair, se réduisent à des intégrales suivant l'intersection s^P de la nappe C^P avec la surface S, complétées, pour m impair, par des intégrales étendues à S^P elle-même. Si P se rapproche d'un point Q de la frontière, S^P et s^P ne se rétréciront plus au point Q, mais tendront vers les variétés S^Q et s^Q, à dimensions $m - 1$ et $m - 2$ respectivement.

---

(1) Si le domaine s'étend à l'infini on prendra soin de faire des hypothèses convenables sur l'allure de la fonction.

Les intégrales correspondantes tendront vers des intégrales singulières, auxquelles on pourra en général donner un sens convenable. Postuler que l'expression limite ainsi obtenue soit égale à la valeur prescrite $h(Q)$ en tout point Q de la frontière revient à poser une infinité de conditions pour les fonctions g et h qu'on peut résumer par une équation intégrale de caractère singulier. Ces deux fonctions ne peuvent donc être données indépendamment l'une de l'autre.(1) On voit alors qu'il ne peut être question que de donner *a priori* une seule de ces fonctions et de chercher à tirer l'autre de l'équation intégrale à laquelle on paraît être arrivé. Or, on verra par les remarques qui vont suivre que l'esquisse ci-dessus, tout en mettant en évidence l'impossibilité du problème de Cauchy, ne pourra guère rendre de trop grands services quand il s'agit de résoudre le problème « correctement posé », conforme aux conditions actuelles, c'est-à-dire le problème où une seule des données est prescrite, soit les valeurs limites de la fonction u elle-même.

En effet, la situation est tout analogue à celle qui interviendrait si l'on voulait résoudre le problème de Dirichlet par la formule ordinaire de Green,

$$u(P) = \frac{1}{4\pi}\int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) dS.$$

Là aussi, on aboutirait à une équation intégrale entre les valeurs limites admissibles de u et de du/dn, les intégrales étant cette fois étendues à la surface totale S. Cette équation intégrale, qui présente des singularités assez faibles, est très facile à écrire. Néanmoins, il n'est pas trop facile d'en tirer soit la résolution effective du problème de Dirichlet, soit un théorème d'existence. Dans le cas actuel, l'équation à laquelle on arrive par l'aperçu de nature tout à fait théorique que nous venons de donner, est de caractère incomparablement plus singulier que dans le cas du problème de Dirichlet, et il paraît difficile de parvenir dans cette voie à une solution effective ou même à une démonstration d'existence.

Terminons cet exposé de caractère bien négatif en rappelant que Goursat(2) a résolu le problème dont il s'agit, dans des conditions très générales, pour le cas du plan ($m = 2$). La frontière considérée par Goursat devient identique à

(1) En conséquence, la formule célèbre de Kirchhoff ne peut être considérée comme une formule de solution. *Cf.* Hadamard **1**, p. 332.

(2) Goursat III (1915), p. 123 et *suiv.*

celle représentée par notre fig. 8, si l'on remplace son opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ par l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. La structure de la solution très remarquable de Goursat fait pressentir les difficultés auxquelles on devra se heurter en attaquant le problème concernant les dimensions d'ordre pair > 2. Les difficultés ne sauraient être moindres pour les dimensions impaires.

62. Frontière caractéristique. — Considérons le cône caractéristique

$$\Sigma \varepsilon_k (\xi_k - a_k)^2 = 0$$

Pour tout déplacement $(d\xi_k)$ tangent au cône au point (ξ_k), on a manifestement $\Sigma \varepsilon_k (\xi_k - a_k) d\xi_k = 0$. Ce fait implique que le plan tangent mené à un cône caractéristique suivant l'une de ses génératrices et qui, par conséquent, contient cette génératrice, l'admet aussi comme normale (et cela évidemment en tout point appartenant à la génératrice). Il en résulte que de tels plans tangents contiennent toutes leurs normales, tandis que, pour tout autre plan, la normale menée en un point n'a aucun autre point en commun avec le plan. N'oublions pas que les génératrices en question sont identiques aux droites que nous avons appelées *isotropes* (n° **14**).

On donne le nom de *plan caractéristique* aux susdits plans tangents. L'équation d'un tel plan étant $\Sigma \alpha_k \xi_k - \beta = 0$, on a $\Sigma \varepsilon_k^{-1} \alpha_k^2 = 0$ et inversement. Dès lors, en écrivant sous la forme

$$S(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0 \tag{38}$$

soit l'équation d'un cône caractéristique, soit celle d'un plan caractéristique, on voit que (38) entraîne l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_1^m \varepsilon_k^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_k}\right)^2 = 0. \tag{39}$$

Considérons maintenant, dans un ordre d'idées général, une surface S donnée par une équation de la forme (38). Si l'équation (39) est remplie en chaque point (régulier) de la surface, celle ci est dite *surface caractéristique.* Voici quelques indications sommaires sur les surfaces qu'on vient de définir.

La direction de la normale au point régulier (ξ_k) étant, en composantes covariantes, donnée par les quantités $\partial S / \partial \xi_k$ (*cf.* le n° **21**), la condition (39) exprime que les normales d'une surface caractéristiques sont isotropes. Il n'y a donc pas lieu de parler de normales unitaires. Nous allons faire voir que la surface admet ses normales comme génératrices.[1] Il suffit à cet effet, de montrer que toute courbe tracée sur la surface qui en chacun de ses points est tangente à la normale menée en ce point à la surface est elle-même une (portion de) ligne droite.

En rapportant la surface à $m-1$ paramètres, on établit facilement l'existence des courbes en question. Ce point admis et en posant pour abréger $\partial S / \partial \xi_k = S_k$, on aura à étudier les équations

$$\frac{\varepsilon_k \, d \xi_k}{S_k} = d \tau, \tag{40}$$

où $d\tau$, défini par les premiers membres, est indépendant de k. En observant que $\partial S_k / \partial \xi_j = \partial S_j / \partial \xi_k$ et en tenant compte de (40), on obtient

$$\frac{d S_k}{d \tau} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S_k}{\partial \xi_j} \frac{d \xi_j}{d \tau} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{-1} \frac{\partial S_j}{\partial \xi_k} S_j = \tfrac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \xi_k}, \tag{41}$$

où l'on a désigné par T le premier membre de (39). Or T étant par hypothèse identiquement nul sur la surface $S=0$, on a, pour tout déplacement $(d \xi_k)$ le long de cette surface, $\sum \frac{\partial T}{\partial \xi_k} d \xi_k = 0$. Cela implique que le gradient de T est orthogonal à la surface. Il est donc, à un facteur de proportionnalité près, identique au gradient de S, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_k} = \lambda \frac{\partial S}{\partial \xi_k} = \lambda S_k \tag{42}$$

et alors d'après (41)

$$\frac{d S_k}{d \tau} = \frac{\lambda}{2} S_k, \tag{43}$$

λ étant indépendant de k. On en tire par des quadratures que, pour j et k arbitraires, le rapport $S_j : S_k$ est constant suivant la courbe; il en est donc de même de $d \xi_j : d \xi_k$, ce qui veut dire que la courbe est une ligne droite, évidemment

[1] L'équation (39) est équivalente au fait que la surface est, en chacun de ses points, tangente à un cône caractéristique qui admet le point comme sommet. Le fait énoncé ici revient à ce que les deux surfaces sont tangentes suivant une génératrice commune.

isotrope, qui en tous ses points est normale à la surface. Le plan tangent restant le même suivant cette droite, la surface peut être considérée comme une surface développable.

Une frontière caractéristique est formée d'une ou plusieurs portions de surfaces caractéristiques. Pour arriver à des frontières présentant le même caractère topologique que les frontières orientées dans le temps, considérées plus haut, on aura encore à admettre des singularités.[1] On prendra p. ex. un dièdre formé de deux surfaces caractéristiques régulières, un polyèdre à faces caractéristiques et de préférence un cône caractéristique direct.

Les problèmes aux limites conformes aux frontières caractéristiques sont en quelque sorte intermédiaires entre ceux qui conviennent aux deux espèces de frontières considérées plus haut. En effet, comme on le verra (après une légère modification de la définition de du/dn) l'une des deux données figurant d'habitude dans le problème de Cauchy détermine immédiatement l'autre (à une constante additive près quant il s'agira de déterminer la fonction moyennant sa dérivée).

Remarquons d'abord que, la normale étant isotrope, on ne pourra former la dérivée du/dn puisque $dn = 0$. Peu importe; on pourra toujours former la dérivée dans la *direction* de la normale (*cf.* les formules (43) ou (44) du n° **21**) et on le fera par rapport à une variable différente de la longueur identiquement nulle du segment correspondant de la normale.

Tel étant le cas, on voit que, la normale faisant partie de la surface S, les valeurs de u, une fois données sur S, déterminent la valeur de toute dérivée prise suivant la direction de cette normale. La réciproque est aussi vraie, à une constante additive près. Il n'y a donc lieu que de prescrire une seule des données habituelles.

En nous contentant pour le cas général de ces indications sommaires, nous allons, pour le cas particulier d'un *cône caractéristique direct* donner une solution et une vérification complètes pour l'équation sans second membre. Le cas d'un tel cône fera bien ressortir les traits essentiels du même problème posé pour des frontières caractéristiques plus générales. Ajoutons que la présence d'un second membre, tout en nécessitant des calculs supplémentaires, n'amènerait aucune difficulté essentielle.

---

(1) *Cf.* Hadamard **1**, p. 253.

63. Problème aux limites pour un cône caractéristique direct. [1] — Nous allons démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ admet une solution et une seule, si l'on prescrit les valeurs de u — ces valeurs étant suffisamment dérivables — sur la surface S d'un cône caractéristique direct. [2] Plus précisement, si les valeurs sont prescrites sur une portion $\bar{S}$ de S, la valeur de u sera déterminée en tout point P tel que la portion S^P découpée de S par le cône rétrograde D^P est intérieure à $\bar{S}$.

La solution de notre problème reposait, dans ce qui précède, essentiellement sur la formule de Green (formule (60) du n° **22** ou formule (61^{bis}) du n° **23**). Or il entre dans cette formule deux éléments géométriques qui ne peuvent nous servir dans le cas actuel; ce sont l'élément de surface dS dans le numérateur et l'élément de la normale dn dans le dénominateur, tous les deux étant nuls lorsque la surface est caractéristique. A l'aide de l'angle solide au sommet P, il est facile de donner à la formule de Green une forme qui est intéressante sous le point de vue général et qui est applicable aussi dans le cas où nous nous trouvons.

Considérons, dans nos notations usuelles, le domaine D_S^P, la surface S étant, jusqu'à nouvel ordre et pour fixer les idées, une surface d'espace. Les fonctions u et v étant suffisamment dérivables, dans D_S^P, et v s'annulant avec ses dérivées du premier ordre sur la portion de nappe C_S^P, on peut écrire la formule générale (41) du n° **21**

$$(44) \qquad \int\limits_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\,Q = \int\limits_{S^P} \left(u\,\frac{d\,v}{d\,n} - v\,\frac{d\,u}{d\,n}\right) d\,S,$$

la dérivation étant cette fois-ci faite suivant la normale extérieure. On peut maintenant introduire l'élément d'angle solide $d\,H$ au sommet P et écrire, dans des notations légèrement modifiées, en vertu de la formule (93) du n° **31**,

$$d\,H = r^{1-m}\,\frac{d\,r}{d\,n}\cdot d\,S \quad \text{ou} \quad d\,S = r^{m-1}\left(\frac{d\,r}{d\,n}\right)^{-1} d\,H.$$

En portant cela dans la formule (44), on aura, avec la notation

$$(45) \qquad \frac{d\,F}{d\,n}\cdot\left(\frac{d\,r}{d\,n}\right)^{-1} = \frac{d\,F}{d\,n}\cdot\frac{d\,n}{d\,r} = \frac{d_n F}{d_n r},$$

---

[1] Nous admettons dans les n^{os} **63—64** que les ε_k ont leurs valeurs originales, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = -1$.

[2] *Cf.* pour ce problème D'ADHÉMAR **1**.

$$\int_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\,Q = \int_{s^P} \left(u\,\frac{d_n v}{d_n r} - v\,\frac{d_n u}{d_n r}\right) r^{m-1}\,d\,H. \tag{46}$$

La quantité r, par rapport à laquelle on effectue la différentiation étant scalaire, on n'a pas besoin (dans nos conditions de dérivabilité usuelles) de distinguer ici entre les deux *sens* de la normale; la différentiation se fait simplement dans la *direction* de la normale.

La formule ci-dessus reste évidemment valide, si S signifie le cône direct considéré plus haut, comme on le voit par un passage à la limite facile(¹). Pour simplifier les calculs qui suivent, admettons que le sommet du cône direct S se trouve à l'origine O, ce qui ne restreint pas la généralité. Nous allons exprimer l'élément $d\,H$ relatif à S par d'autres éléments géométriques rattachés à ce cône. L'intersection(²) s^P (à $m-2$ dimensions) des cônes au sommet O et au sommet $P = \mathbf{x}$ est évidemment située dans un plan à $m-1$ dimensions, orthogonal au rayon-vecteur $\mathbf{x}$ et passant par le point $\mathbf{x}/2$. (s^P n'est qu'une sphère de caractère euclidien au centre $\mathbf{x}/2$, comme on le verra au prochain numéro.)

L'intersection s^P comprend ceux des points ξ de S qui satisfont à la relation $r_{P\xi} = r_{x\xi} = 0$. Nous considérons sur S les deux variétés σ et σ', homothétiques à s^P qui sont caractérisées(³) par les relations respectives $r_{x\xi} = r$ et $r_{x\xi} = r + dr$, ces dernières quantités étant fixées jusqu'à nouvel ordre. Nous allons maintenant calculer l'angle solide total sous lequel la zone de S délimitée par σ et σ' est vue du point P. On aurait donc à projeter (tout comme au n° **27**) la zone en question sur l'hyperboloïde $\mathbf{x} + H$. Il est pourtant plus commode d'évaluer la projection faite sur l'hyperboloïde $\mathbf{x} + r\,H$, dont σ fait partie. Cette projection-là qui, pour des raisons d'homothétie, est égale à l'angle total cherché, multiplié par r^{m-1}, peut être évaluée par les considérations suivantes, où l'on se servira, avec un grand avantage, de la fig. 10 ci-jointe.

Un segment de génératrice $A\,A'$, découpé par σ et σ', sera projeté dans un arc $A\,A''$, dont nous désignons la longueur par $d\tau$. Dès lors, en désignant encore par σ la mesure totale de la variété σ, la projection aura (en première approximation) la mesure $\sigma\,d\tau$. Nous allons démontrer que $d\tau = dr$ et obtenir ainsi, pour la valeur cherchée, l'expression $\sigma \cdot dr$.

(¹) On peut arriver au même résultat en partant de la formule de Green écrite sous sa forme affine, formule (32) du n° **20**.

(²) Pour certains détails concernant les propriétés de s^P énumérées ici, *voir* le n° **64**.

(³) Il est évident que les variétés σ et σ' font partie de deux plans respectifs parallèles au plan qui contient s^P.

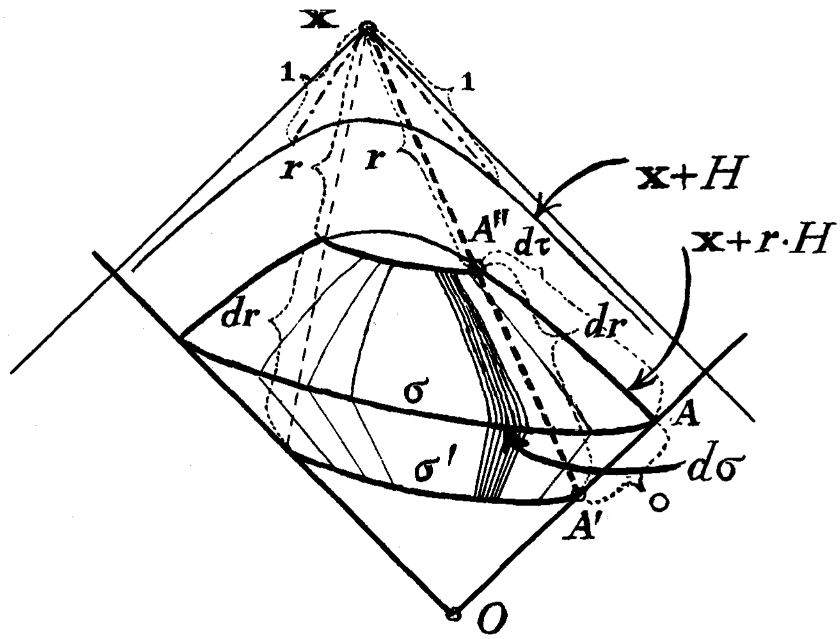

Fig. 10.

En effet, les points P, A'', A' se trouvant en ligne droite, la longueur du segment $A''A'$ sera la différence entre les longueurs de PA' et PA'', c'est-à-dire égale à $r + dr - r = dr$. Notons en outre, que $A''A'$, étant normal à l'hyperboloïde, est en même temps orthogonal à $A''A$ et de plus que $A''A'$, $A''A$, $A'A$ sont respectivement segment de temps, segment d'espace et segment isotrope (tous infinitésimaux). En exprimant que $A'A$ a la longueur o, on trouve $dr^2 - d\tau^2 = 0$, c'est-à-dire que $d\tau = dr$.

La projection d'un élément qui est infinitésimal dans tous les sens se trouve par le même raisonnement. Ainsi, la projection d'un élément à $m - 1$ dimensions, constitué par les segments de génératrices issus des points d'un élément infinitésimal $d\sigma$ de σ est $d\sigma \cdot dr$, ce qui donne enfin, en écrivant, pour préciser, $d\sigma_r$ au lieu de $d\sigma$

$$r^{m-1}\, dH = d\sigma_r \cdot dr. \tag{47}$$

Observons encore que dans (46) la différentiation par rapport à r suivant la direction normale n'est, lorsqu'il s'agit d'un cône caractéristique, qu'une différentiation dans la *direction des génératrices* — opération que *nous désignerons désormais par d/dr*. Cette convention posée et portant (47) dans la formule (46), on trouve enfin

$$\int_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\,Q = \int_0^{r_0} \left\{ \int_{\sigma_r} \left(u\,\frac{d\,v}{d\,r} - v\,\frac{d\,u}{d\,r} \right) d\sigma_r \right\} d\,r,$$

où l'on a désigné par r_0 la valeur que r admet au sommet O,

$$r_0 = (\mathbf{x}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Nous introduisons encore $R = r^2$ à côté de r, posant en particulier

$$R_0 = r_0^2 = \mathbf{x}^2. \tag{48bis}$$

On aura, pour commencer, $\frac{d\,v}{d\,r}\,d\,r = \frac{d\,v}{d\,R}\,d\,R$. En outre, R varie d'une manière linéaire sur toute génératrice, ce qui présente un avantage considérable. En effet, $\boldsymbol{\xi}$ variant sur une génératrice de S, on a

$$R = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2 = \mathbf{x}^2 - 2\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{\xi} = R_0 - 2\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{\xi}. \tag{49}$$

Nous rapportons maintenant chaque point $\boldsymbol{\xi}$ de la portion de surface S^P au point $\mathbf{b}$ dans lequel la génératrice $O\boldsymbol{\xi}$ coupe s^P. Nous avons là $m-2$ paramètres. Le dernier paramètre sera la valeur $R = R_{x\xi}$ (carré de la distance lorentzienne entre $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\xi}$). En observant, de plus, que la quantité $1 - \frac{R}{R_0}$ varie aussi d'une manière linéaire sur toute génératrice, qu'elle s'annule au sommet O (où $R = R_0$) et qu'elle est $= 1$ aux points de s^P (où $R = 0$), il vient par homothétie

$$d\,\sigma_r = \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{m-3} d\,s,$$

où $d\,s$ désigne l'élément de s^P. On a donc, eu égard aux remarques qui précèdent,

$$\int_{D_S^P} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\,Q = \int_{s^P} d\,s \int_0^{R_0} \left(u\,\frac{d\,v}{d\,R} - v\,\frac{d\,u}{d\,R} \right) \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{m-3} d\,R. \tag{50}$$

Nous spécialisons maintenant la fonction v en posant

$$v = \frac{r^{\alpha+2-m}}{H_m(\alpha+2)} = \frac{R^{\frac{\alpha+2-m}{2}}}{H_m(\alpha+2)},$$

où $\alpha > m$ jusqu'à nouvel ordre. Il vient alors

$$(51)\quad I^\alpha u(P) = I^{\alpha+2}\Delta u(P)$$
$$+\frac{1}{H_m(\alpha+2)}\int_{sP} ds \int_0^{R_0}\left(u\cdot\frac{d}{dR}R^{\frac{\alpha+2-m}{2}} - \frac{du}{dR}\cdot R^{\frac{\alpha+2-m}{2}}\right)\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-2} dR$$
$$= I^{\alpha+2}\Delta u(P) + U^{\alpha+2}(P).$$

On voit facilement que les intégrales figurant dans la formule convergent toutes et que la formule reste valable jusqu'à $\alpha > m - 2$.

En supposant que $\Delta u = 0$, notre formule se réduit à

$$(52)\qquad I^\alpha u(P) = U^{\alpha+2}(P),$$

et en particulier (par prolongement analytique) à

$$(53)\qquad u(P) = U^2(P).$$

Le prolongement analytique du premier membre peut être effectué, tout comme dans le cas d'une frontière orientée dans l'espace (ou dans le temps) par la méthode développée plus haut (nos **27—37** et p. 102). Il y aurait même des simplifications considérables, puisqu'on pourrait expliciter tous les calculs. En particulier on trouve $I^0 u(P) = u(P)$.

Il s'agit maintenant d'effectuer le prolongement analytique du second membre. Posons pour abréger

$$(54)\qquad \frac{\alpha+2-m}{2} = \beta,\quad \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = K_m(\alpha+2),$$
$$H_m(\alpha+2) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+4-m}{2}\right) = K_m(\alpha+2)\Gamma(\beta+1).$$

Nous allons d'abord transformer l'intégrale, par rapport à R, qui figure dans l'expression (51) de $U^{\alpha+2}$. L'exposant de R dans cette expression étant β, d'après la première des formules (54), écrivons

$$\frac{du}{dR}R^\beta - u\frac{dR^\beta}{dR} = R^{2\beta}\frac{d}{dR}(uR^{-\beta}).$$

D'autre part, en exprimant α par β, on a $\alpha = 2\beta + m - 2$ et alors

$$\frac{d}{dR}\left\{R^{2\beta}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-2}\right\} = R^{2\beta-1}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\left\{2\beta\left(1-\frac{R}{R_0}\right) - \frac{m-2}{R_0}R\right\}$$
$$= R^{2\beta-1}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\left(2\beta - \alpha\frac{R}{R_0}\right) = 2\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\left(\beta R^{2\beta-1} - \frac{\alpha}{2R_0}R^{2\beta}\right).$$

Cela posé, on obtient en intégrant par parties, grâce au fait que le terme tout intégré s'annule pour $m > 2$ [1] et β assez grand ($\beta > 0$), et dès lors, par prolongement analytique, pour toute valeur de β,

$$\int_0^{R_0}\left(u\frac{dR^\beta}{dR}-\frac{du}{dR}R^\beta\right)\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-2}dR=-\int_0^{R_0}R^{2\beta}\frac{d}{dR}(u\,R^{-\beta})\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-2}dR$$

$$=\int_0^{R_0}u\,R^{-\beta}\frac{d}{dR}\left\{R^{2\beta}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-2}\right\}dR=2\int_0^{R_0}u\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\left(\beta R^{\beta-1}-\frac{\alpha}{2R_0}R^\beta\right)dR.$$

Après p et $p-1$ intégrations par parties exécutées respectivement sur

$$\left\{u\cdot\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\right\}R^{\beta-1}\quad\text{et}\quad\left\{u\cdot\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\right\}R^\beta$$

et quelques simplifications évidentes, il vient, en tenant compte de (54),

$$(55)\quad U^{\alpha+2}(P)=\frac{2}{K_m(\alpha+2)}\int_{s^P}ds\left\{[C^p]_0^{R_0}+\frac{1}{\Gamma(\beta+p)}\int_0^{R_0}\left(A^p+\frac{\alpha}{2R_0}A^{p-1}\right)R^{\beta+p-1}dR\right\}$$

avec les notations

$$(56)\qquad A^p=(-1)^p\frac{d^p}{dR^p}\left(u\cdot\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3}\right)=R_0^{-p}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{m-3-p}\cdot D^p(\xi),$$

$$(57)\qquad D^p(\xi)=\sum_{h=0}^{p}B_h^p\frac{d^hu}{dR^h}\cdot(R-R_0)^h,\ \text{où}\ B_h^p=\binom{p}{h}\frac{(m-3)!}{(m-3-p+h)!},$$

$$(58)\qquad C^p=\sum_{i=0}^{p-1}\left(A^i+\frac{\alpha}{2R_0}A^{i-1}\right)\frac{R^{\beta+i}}{\Gamma(\beta+i+1)}.$$

Pour des applications ultérieures, observons déjà ici que la comparaison entre les deux expressions de A^p donne aussi

$$(57^{bis})\qquad D^p(\xi)=(R-R_0)^{-(m-3-p)}\frac{d^p}{dR^p}(u\cdot(R-R_0)^{m-3}).$$

L'intégrale par rapport à R dans (55) est convergente lorsque $\beta+p-1>-1$, ou formule (54)) $p>-\beta=\frac{1}{2}(m-2-\alpha)$, ce qu'on admettra dans la suite. D'autre

[1] Le cas de $m=2$, où l'équation $\Delta u=0$ admet la solution évidente $u=F(x_1+x_2)+G(x_1-x_2)$ (F et G arbitraires), sera définitivement laissé de côté.

part, le terme tout intégré s'annule pour $R = 0$, lorsque β est assez grand, et dès lors, par prolongement analytique, comme plus haut, pour toute valeur de β. Pour $R = R_0$, ce terme s'évanouit quand $p \leqq m - 3$, tandis que, quand $p > m - 3$, il contient la valeur de la fonction u et de certaines de ses dérivées au sommet O de notre cône direct (ainsi que certaines puissances de R_0). Nous donnerons tout à l'heure des formules explicites pour ce terme dans deux cas particuliers ($m = 3$ et 4).

C'est l'expression de $U^2(P)$ qui, en raison de la relation (53), nous intéresse en premier lieu. Nous le tirons de la formule (55) en y posant $\alpha = 0$. Or, justement pour cette valeur-là de α, il y aura une simplification considérable dans toutes nos formules, en tant que les termes qui contiennent α en facteur disparaîtront. — Dans l'examen détaillé de $U^2(P)$, nous aurons, comme d'habitude, à distinguer les cas de m impair et pair.

I. *m impair, $m = 2l + 1$.*

Nous aurons à poser dans la formule (55) $\alpha = 0$, $\beta = (2 - m)/2 = \frac{1}{2} - l$. Choisissons $p = l$, on aura $\beta + p - 1 = -\frac{1}{2}$ et l'intégrale suivant R dans (55) sera convergente. En admettant d'abord que $m > 3$ ou $l > 1$, on a $p = l \leqq m - 3 = 2l - 2$, ce qui fait que le terme tout intégré dans (55) s'annule (*cf.* (56) et (58)). En tenant compte de (54), on trouve $\frac{1}{2} K_m(2) = \pi^{l-\frac{1}{2}}$, $\Gamma(\beta + p) = \Gamma(\frac{1}{2} - l + l) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}$, ce qui nous fournit (*cf.* (53))

$$u(P) = U^2(P) = \frac{1}{\pi^l} \int\limits_{S^P} ds \int\limits_0^{R_0} A^l R^{-\frac{1}{2}} \, dR, \tag{59}$$

A^l étant donné par les formules (56) et (57).

I'. *Le cas particulier $m = 3$.*

Ici, l est $= 1$ et $\beta = \frac{1}{2} - l = -\frac{1}{2}$. Tout se passe comme dans le cas général, sauf que le terme tout intégré dans (55) n'est pas nul. On a d'après (56) et (58) $C^p = C^1 = A^0 R^\beta / \Gamma(\beta + 1) = u \cdot (\pi R)^{-\frac{1}{2}}$, d'où en désignant la valeur de u au sommet O de notre cône direct par $u(O)$ (cette valeur correspond dans le terme tout intégré à $R = R_0$)

$$[C^p]^{R_0} = \frac{u(O)}{(\pi R_0)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{K_3(2)} [C^p]^{R_0} = \frac{2}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{u(O)}{(\pi R_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u(O)}{\pi R_0^{\frac{1}{2}}}.$$

La mesure totale de s^P étant $R_0^{\frac{1}{2}}\pi$, la contribution à $u(P)$ du terme tout intégré sera $u(O)$. D'autre part, dans l'intégrale figurant dans (59) on aura à poser, d'après (56), $A^l = A^1 = -du/dR$. Il s'ensuit la formule définitive

$$(59^{bis}) \qquad u(P) = U^2(P) = u(O) - \frac{1}{\pi}\int_{s^P} ds \int_0^{R_0} \frac{du}{dR} R^{-\frac{1}{2}}\, dR.$$

II. *m pair*, $m = 2l$.

On aura à poser dans les formules (55) et (56) $\alpha = 0$, $\beta = 1 - \frac{m}{2} = 1 - l$, $\frac{1}{2} K_m(2) = \pi^{l-1}$. En choisissant $p = l$, il vient $\beta + p = 1$, $\beta + p - 1 = 0$. L'intégration par rapport à R dans (55) pourra donc être exécutée sur le champ

$$(60) \qquad \int_0^R A^l\, dR = -[A^{l-1}]_0^{R_0}.$$

Admettons d'abord que $m > 4$ ou $l > 2$; on a donc $l - 1 < m - 3 = 2l - 3$. Dans cette condition, le terme tout intégré dans la formule (60) s'annule pour $R = R_0$, comme on le voit immédiatement par (56). Il en sera de même du terme tout intégré dans la formule (55). Il ne nous reste donc que celui des termes tout intégrés qui dans la formule (60) correspond à $R = 0$, c'est-à-dire aux points du bord s^P. Le résultat final sera donc

$$(61) \qquad u(P) = U^2(P) = \frac{1}{\pi^{l-1}} \int_{s^P} A^{l-1}\, ds,$$

où l'on pourrait, pour préciser, écrire $A^{l-1} = A^{l-1}_{(R=0)}$. En raison de (56), on a sur le bord

$$(62) \qquad A^{l-1}_{(R=0)} = (-1)^{l-1} \frac{d^{l-1}}{dR^{l-1}} \left(u \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{2l-3} \right)_{(R=0)}$$
$$= R_0^{1-l} \sum_{h=0}^{l-1} B_h^{l-1} \left(\frac{d^h u}{dR^h}\right)_{(R=0)} \cdot (-R_0)^h.$$

II'. *Le cas particulier* $m = 4$.

Ici $l = 2$, $\beta = 1 - l = -1$ et les termes tout intégrés dans (60) et (55) sont différents de 0. Celui dans (60) est $-A'(R_0)$, tandis que dans (55) il faut poser, d'après (58),

$$C^2(R_0) = \sum_{i=0}^{1} A^i(R_0)\frac{R_0^{-1+i}}{\Gamma(i)} = A^1(R_0),$$

ce qui montre que les termes tout intégrés se détruisent. La formule (61) subsiste donc aussi pour $m = 4$. En explicitant (62), on obtient

$$A^1_{(R=0)} = -\frac{d}{dR}\left(u\left(1-\frac{R}{R_0}\right)\right)_{(R=0)} = \left(\frac{u}{R_0} - \frac{du}{dR}\right)_{(R=0)},$$

ce qui nous fournit, en supprimant l'affixe $R = 0$,

(61*bis*) $$u(P) = U^2(P) = \frac{1}{\pi}\int_{s^P}\left(\frac{u}{R_0} - \frac{du}{dR}\right)ds. \text{ [1]}$$

Il suffit d'un coup d'œil sur les formules générales (59) et (61) ou sur les formules particulières (59*bis*) et (61*bis*) pour voir qu'il y a ici la même différence fondamentale entre les solutions relatives aux dimensions d'ordre impair et pair que dans le cas d'une frontière orientée dans l'espace.

64. Vérification de la solution. — Jusqu'à nouvel ordre, les formules générales (59) et (61) ou leurs cas particuliers (59*bis*) et (61*bis*) — formules que, pour abréger, nous citerons dans la suite par (59—61*bis*) — ne sont que des identités relatives à une fonction arbitraire (suffisamment dérivable) u, qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$. Il faudra maintenant *vérifier* que, les valeurs limites (suffisamment dérivables) de u étant données sur (une portion $\bar{S}$ de) la surface S, la fonction $u(P)$ qu'on peut en former moyennant les formules citées satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et admet sur S les valeurs limites prescrites.

Soit maintenant t une quantité qui varie d'une manière linéaire sur une génératrice et s'annule au sommet O. Telles quantités sont p. ex. la coordonnée ξ_1, les quantités géométriques $R - R_0$ ou $1 - \frac{R}{R_0}$. Le point ξ étant considéré comme fonction de t, on pourra former les expressions

(63) $$t^h \cdot \frac{d^h u(\xi)}{dt^h} = t^h \cdot \frac{d^h u}{dt^h}.$$

[1] Cette formule qui est un cas particulier d'une formule générale, à laquelle est consacré le Chapitre V, s'ensuit facilement de la formule de Poisson, concernant le cas où la surface portant les données de Cauchy est un plan $\xi_1 = \text{const.}$ (*voir* le chapitre indiqué).

Les expressions (63) *sont indépendantes du choix de t*, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de ξ. Le fait est évident; en effet, $t = \lambda \bar{t}$, où $\lambda =$ const., donne $t^h = \lambda^h \bar{t}^h$ et $d^h u / d t^h = \lambda^{-h} d^h u / d \bar{t}^h$. Il n'est pourtant pas inutile d'observer que, si la fonction u admet des dérivées partielles par rapport aux ξ_k dans un certain voisinage de S, on a, eu égard à $t \cdot d\xi_k / dt = \xi_k$, l'identité

$$t^h \cdot \frac{d^h u}{d t^h} = \left(\sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}\right)^h \cdot u, \tag{63bis}$$

où la dernière expression est manifestement indépendante de t. Notons que le premier membre fait voir que ladite expression ne dépend pas du système de coordonnées non plus.

Cela posé, l'expression $D^p(\xi)$ qui figure dans les formules (56), (57) et (57′) pourra aussi s'écrire

$$D^p(\xi) = \sum_{h=0}^{p} B_h^p t^h \cdot \frac{d^h u}{d t^h} = t^{-(m-p-3)} \frac{d^p}{d t^p}(u \cdot t^{m-3}). \tag{64}$$

En reprenant l'ordre d'idées général, la fonction u sera considérée comme *suffisamment dérivable sur la portion $\bar{S}$ de S si les expressions* (63) *existent* jusqu'à une valeur assez élevée de h, qu'elles *sont continues* sur toute partie bornée et fermée de $\bar{S}$ et qu'elles *s'annulent au sommet* pour $h \geqq 1$. Évidemment, dans ces conditions-là, $D^p(\xi)$ est aussi continu sur toute partie bornée et fermée de $\bar{S}$. On voit par (63^{bis}) que les dites conditions sont largement remplies si u admet un nombre suffisant de dérivées partielles continues au voisinage de $\bar{S}$.

Les fonctions $U^2(P)$ figurant dans les formules (59—61^{bis}) seront donc dès maintenant à former avec des valeurs prescrites u suffisamment dérivables dans le sens qu'on vient d'adopter. Il est alors presque évident que ces fonctions satisfont à l'équation $\Delta U^2(P) = 0$. En effet, en imitant le raisonnement des nos **39—42**, on voit facilement que $\Delta U^{\alpha+2} = U^\alpha$ et en particulier que $\Delta U^2 = U^0$. Or, U^α contient le facteur $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ au dénominateur $\Big($*voir* la formule (55) qui est relative à $U^{\alpha+2}$ et où il figure au dénominateur $K_m(\alpha+2) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha+1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Big)$, ce qui entraîne que $U^0 = 0$.

La vérification du fait que $U^2(P)$ admet les valeurs limites prescrites u est beaucoup plus délicate et exige un examen attentif des formules explicites en question. Il figure dans toutes ces formules l'intersection s^P des deux cônes, variété que de temps en temps nous appellerons aussi *bord* de S^P, et que nous allons maintenant paramétriser.[1] Désignons par $\mathbf{b}$ les points de s^P et, en même temps, les rayons vecteurs qui de l'origine mènent à ces points. Les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{x}-\mathbf{b}$ étant isotropes, le dernier puisque le vecteur menant de $\mathbf{b}$ à $\mathbf{x}$ est un segment de génératrice du cône rétrograde, on a

$$\mathbf{b}^2 = 0,\ (\mathbf{x}-\mathbf{b})^2 = 0. \tag{65}$$

Ces relations caractérisent les points $\mathbf{b}$ de s^P. En les écrivant sous la forme $(\mathbf{x}-\mathbf{b})^2 = 0$, $(\mathbf{x}-(\mathbf{x}-\mathbf{b}))^2$, on voit que deux points $\mathbf{b}$ et $\mathbf{x}-\mathbf{b}$ appartiennent à s^P simultanément. On tire de (65)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{x}^2}{2} = \frac{R_0}{2} \tag{66}$$

(pour R_0 *voir* la formule (48^{bis})). La dernière relation étant linéaire en $\mathbf{b}$, on voit que s^P est situé dans un plan (d'espace) Π qui est orthogonal au vecteur $\mathbf{x}$ et qui passe par le point $\frac{\mathbf{x}}{2}$. En posant, d'après (48) et (48^{bis}),

$$R_0^{\frac{1}{2}} = r_0,\ \mathbf{b} - \frac{\mathbf{x}}{2} = \frac{r_0}{2}\cdot\mathbf{c}, \tag{67}$$

on aura

$$\frac{r_0^2}{4}\cdot\mathbf{c}^2 = \left(\mathbf{b}-\frac{\mathbf{x}}{2}\right)^2 = \mathbf{b}^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + \frac{\mathbf{x}^2}{4} = 0 - \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{4} = -\frac{r_0^2}{4}.$$

De (66), (67) et de la dernière formule, on tire pour le vecteur $\mathbf{c}$ les relations

$$(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0,\ \mathbf{c}^2 = -1. \tag{68}$$

En résumé, on voit que le bord s^P (variété à $m-2$ dimensions) est une sphère (de caractère euclidien) de centre $\mathbf{x}/2$ et de rayon $r_0/2$, située dans le plan Π à $m-1$ dimensions. Les vecteurs $\mathbf{c}$ sont, de leur côté, des vecteurs unitaires; en plaçant l'une de leurs extrémités à l'origine, l'extrémité libre décrit la sphère unitaire du plan Π' mené par l'origine parallèlement à Π, engendré d'ailleurs par les droites menées par l'origine et orthogonales à $\mathbf{x}$. En paramétrisant cette dernière sphère, on en aura fait autant pour la sphère s^P. Pour

[1] Il ne s'agira que d'une paramétrisation légère, adaptée à nos besoins.

y arriver, nous nous servirons de la méthode par laquelle on construit un système de coordonnées polaires dans l'espace ordinaire.

Soit $\mathbf{b}^*$ un point particulier de s^P, $\mathbf{c}^*$ le vecteur unitaire correspondant. Nous considérons en outre l'ensemble des vecteurs unitaires (d'espace) $\mathbf{e}^*$, orthogonaux à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{c}^*$.(¹) Si les vecteurs $\mathbf{e}^*$ sont issus de l'origine, leur extrémité décrit la sphère unitaire du plan π' à $m-2$ dimensions, qui fait partie du plan Π' et qui est engendré par les droites menées par l'origine et orthogonales à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{c}^*$. L'élément de cette dernière sphère sera, comme d'habitude, désigné par $d\omega_{m-2}$ et sa surface totale par ω_{m-2}.

Tout vecteur situé dans le plan à $m-1$ dimensions Π' pourra, d'une manière unique, être décomposé en deux vecteurs, l'un appartenant à π', c'est-à-dire de la forme $\lambda\cdot\mathbf{e}^*$ $(\lambda\geqq 0)$ et l'autre, extérieur à π', et de la forme $\mu\cdot\mathbf{c}^*$ $(|\mu|\geqq 0)$. En particulier, tout vecteur unitaire $\mathbf{c}$ de Π' peut, d'une manière unique, être décomposé d'après le schéma

$$\mathbf{c}=\cos\psi\cdot\mathbf{c}^*+\sin\psi\cdot\mathbf{e}^*,\qquad 0\leqq\psi\leqq\pi. \tag{69}$$

Il s'ensuit, d'après ce qu'on a vu plus haut, la paramétrisation suivante de s^P

$$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{x}}{2}+\frac{r_0}{2}(\cos\psi\cdot\mathbf{c}^*+\sin\psi\cdot\mathbf{e}^*),\qquad 0\leqq\psi\leqq\pi. \tag{70}$$

En particulier, pour $\psi=0$ et $\psi=\pi$, respectivement,

$$\mathbf{b}^*=\frac{\mathbf{x}}{2}+\frac{r_0}{2}\cdot\mathbf{c}^*,\ \mathbf{x}-\mathbf{b}^*=\frac{\mathbf{x}}{2}-\frac{r_0}{2}\cdot\mathbf{c}^*. \tag{71}$$

Notons encore les relations, conséquences immédiates de (70) et de (71),

$$(\mathbf{b},\mathbf{x}-\mathbf{b}^*)=\frac{\mathbf{x}^2}{4}-\frac{r_0^2}{4}\cos\psi\cdot\mathbf{c}^{*2}=\frac{r_0^2}{4}(1+\cos\psi)=\frac{R_0}{4}(1+\cos\psi), \tag{72}$$

et en particulier

$$(\mathbf{b}^*,\mathbf{x}-\mathbf{b}^*)=\frac{R_0}{2}. \tag{73}$$

De la formule de paramétrisation (70), on obtient facilement l'élément ds de s^P. Observons d'abord que les multiplicités où seule l'une des variables ψ et $\mathbf{e}^*$ varie sont orthogonales l'une à l'autre. On le voit par les relations $(\mathbf{c}^*,\mathbf{e}^*)=0$ et $\mathbf{e}^{*2}=-1$, qui donnent encore $(\mathbf{c}^*,d\mathbf{e}^*)=0$ et $(\mathbf{e}^*,d\mathbf{e}^*)=0$. On peut donc appliquer la formule de décomposition (55) du nº $\mathbf{21}^{bis}$ et poser $ds=ds'\cdot ds''$.

(¹) On voit par (67) qu'ils sont en même temps orthogonaux à $\mathbf{b}^*$ et à $\mathbf{x}-\mathbf{b}^*$.

En variant ψ, on a $d\mathbf{b}' = \frac{r_0}{2}(-\sin\psi\cdot\mathbf{c}^* + \cos\psi\cdot\mathbf{e}^*)\,d\psi$; par conséquent $ds' = |d\mathbf{b}'^2|^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{2}\,d\psi$. D'autre part, quand $\mathbf{e}^*$ varie, on aura $d\mathbf{b}'' = \frac{r_0}{2}\sin\psi\cdot d\mathbf{e}^*$, et, puisque $\mathbf{e}^*$ décrit la sphère unitaire ω_{m-2}, il vient $ds'' = \left(\frac{r_0}{2}\sin\psi\right)^{m-3} d\,\omega_{m-2}$. On a donc la valeur finale

$$ds = \left(\frac{r_0}{2}\right)^{m-2} \sin^{m-3}\psi\cdot d\psi\, d\,\omega_{m-2}. \tag{74}$$

Dans le n° **63**, tout point $\mathfrak{x}$ de la portion de surface S^P fut rapporté 1°. au point $\mathbf{b}$, point d'intersection de la génératrice, menée par $\mathfrak{x}$, avec le bord s^P, et 2°. à la valeur que R admettait au point $\mathfrak{x}$. Pour arriver à une vérification de nos prétendues formules de solution (59—61bis), il convient de remplacer R par une autre variable τ, adaptée à ce but, ce qui se fera de la manière suivante.

Soit $\mathfrak{x}^* = \tau\cdot\mathbf{b}^*$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, un point du segment de génératrice $\mathbf{b}^*$. Nous menons par $\mathfrak{x}^*$ un plan $\varDelta_\tau$, parallèle au plan tangent à S le long de la génératrice qui porte le vecteur $\mathbf{x}-\mathbf{b}^*$. Le plan $\varDelta_\tau$ coupe S suivant un paraboloïde σ_τ et S^P suivant une calotte de paraboloïde σ_τ^P.(¹) L'équation du plan $\varDelta_\tau$ qui admet le dernier vecteur comme normale et qui passe par $\mathfrak{x}^*$, est manifestement $(\mathfrak{x}, \mathbf{x}-\mathbf{b}^*) = (\mathfrak{x}^*, \mathbf{x}-\mathbf{b}^*)$. Le point d'intersection $\mathfrak{x} = \varkappa\cdot\mathbf{b}$ de la génératrice, portant un certain vecteur $\mathbf{b}$, avec le plan $\varDelta_\tau$ ou, ce qui revient au même, avec le paraboloïde σ_τ, sera donc fourni par l'équation $\varkappa\cdot(\mathbf{b}, \mathbf{x}-\mathbf{b}^*) = \tau\cdot(\mathbf{b}^*, \mathbf{x}-\mathbf{b}^*)$, qui, par (72) et (73), se réduit à $\varkappa\cdot\cos^2\frac{\psi}{2} = \tau$. En posant, pour simplifier l'écriture ici et plus loin, $\psi = 2\varphi$, on aura donc

$$\varkappa = \frac{\tau}{\cos^2\varphi},\quad \varphi = \frac{\psi}{2},\quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{75}$$

D'autre part, puisque $1 - R/R_0$ varie d'une manière linéaire sur toute génératrice, qu'il s'annule à l'origine et qu'il devient 1 en $\mathbf{b}$, on a au point d'intersection $\mathfrak{x} = \varkappa\,\mathbf{b}$

$$1 - \frac{R}{R_0} = \frac{\tau}{\cos^2\varphi},\quad R = R_0\cdot\left(1 - \frac{\tau}{\cos^2\varphi}\right),\quad |dR| = \frac{R_0}{\cos^2\varphi}\,d\tau. \tag{76}$$

En résumé, les formules (76) expriment $1 - R/R_0$, R et $|dR|$ sur la géné-

(¹) Dans le cas de trois dimensions (auquel se rapporte la fig. 11) le paraboloïde se réduit à une parabole.

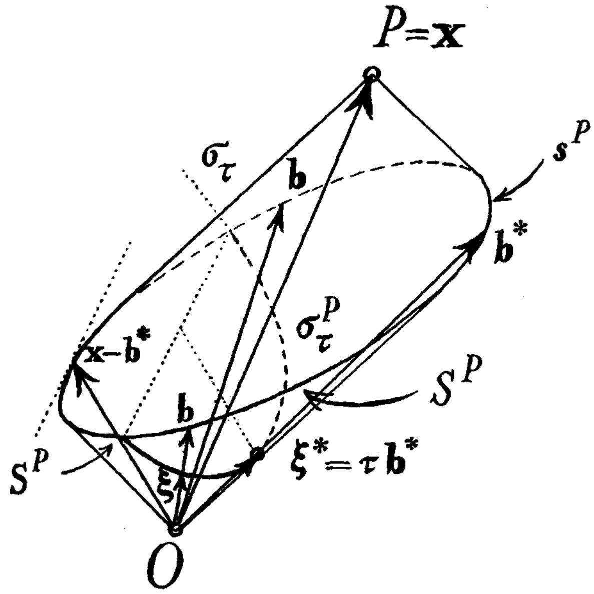

Fig. 11. La figure se rapporte au cas de $m = 3$ où la calotte de paraboloïde devient un segment de parabole, découpé de S^P par le plan Λ_τ, mené par le point $\xi^* = \tau\,\mathbf{b}^*$ parallèlement au plan tangent à S^P suivant le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{b}^*$. Quelques lignes auxiliaires pointillées font nettement ressortir la parallélité des deux plans.

ratrice portant le vecteur $\mathbf{b}$ en fonction de τ et de $d\tau$, respectivement. Les points ξ du paraboloïde σ_τ sont, de leur côté, selon (70) et (75) donnés par

$$\xi = \frac{\tau}{\cos^2\varphi}\cdot\mathbf{b} = \frac{\tau}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{r_0}{2}(\cos 2\varphi\cdot\mathbf{c}^* + \sin 2\varphi\cdot\mathbf{e}^*)\right). \tag{77}$$

Puisque, comme nous venons de le rappeler, $1 - R/R_0$ varie de 0 à 1 sur tout rayon vecteur (segment de génératrice $\mathbf{b}$), ceux des points de σ_τ — les seuls qui nous intéressent — qui appartiennent en même temps à la calotte σ_τ^P, sont caractérisés par les inégalités

$$0 \leqq \frac{\tau}{\cos^2\varphi} \leqq 1, \text{ ou } 0 \leqq \tau \leqq \cos^2\varphi, \text{ ou } 0 \leqq \varphi \leqq \arccos\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{78}$$

Ces calculs achevés, voici un premier pas vers le passage à la limite qu'il nous faudra exécuter. Soit $P = \mathbf{x}$ un point très rapproché de la surface S. Cette propriété de P sera ici exprimée par la condition que la valeur $\mathbf{x}^2 = R_0$ soit très petite, ce qui veut dire que le vecteur $\mathbf{x}$ sera sensiblement isotrope. Posons $\varrho = (x_2^2 + \cdots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$ et désignons par $\mathbf{v}$ le vecteur aux composantes $v_1 = 1$, $v_i = x_i/\varrho$, $i = 2, \ldots, m$. On a $\mathbf{v}^2 = 1 - \varrho^2/\varrho^2 = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{v}$ est isotrope.

De plus, $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = x_1 - \varrho^2/\varrho = x_1 - \varrho$ et $R_0 = \mathbf{x}^2 = x_1^2 - \varrho^2 = (x_1 - \varrho)(x_1 + \varrho)$. En posant $\mathbf{b}^* = \frac{1}{2}(x_1 + \varrho)\mathbf{v}$, on aura donc

$$\mathbf{b}^{*2} = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{b}^*) = \frac{R_0}{2}, \quad (\mathbf{x} - \mathbf{b}^*)^2 = 0,$$

ce qui veut dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, que les points $\mathbf{b}^*$ et $\mathbf{x} - \mathbf{b}^*$ *appartiennent à* s^P.

On voit facilement que le point $\mathbf{x}$ et le point $\mathbf{b}^*$ sont très rapprochés l'un de l'autre, dans le sens que les valeurs numériques de toutes les composantes de $\mathbf{x} - \mathbf{b}^*$ sont très petites, étant toutes $\leqq r_0/2$. En effet, on a d'abord, à cause de $(x_1 - \varrho)(x_1 + \varrho) = R_0 = r_0^2$ et de $x_1 - \varrho \leqq x_1 + \varrho$, l'inégalité $x_1 - \varrho \leqq r_0$. Ensuite

$$|x_1 - b_1^*| = \left| x_1 - \frac{x_1 + \varrho}{2} \right| = \frac{x_1 - \varrho}{2} \leqq \frac{r_0}{2}.$$

Enfin, le vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{b}^*$ étant isotrope, on a

$$(79) \qquad |x_k - b_k^*| \leqq |x_1 - b_1^*| \leqq \frac{r_0}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Cela veut dire que toutes ces valeurs tendent vers 0 avec R_0.

On arrive à une limite supérieure pour l'oscillation des ξ_k sur la calotte σ_τ^P par les considérations suivantes. En posant, dans la formule (77), $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, et en tenant compte de (71), on obtient

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\tau}{\cos^2\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{b}^* + \frac{r_0}{2}\sin 2\varphi \cdot \mathbf{e}^*\right) + \tau r_0 \mathbf{c}^*$$

et en particulier $\boldsymbol{\xi}^* = \tau(\mathbf{x} - \mathbf{b}^*) + \tau r_0 \mathbf{c}^*$ et dès lors

$$\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^* = \frac{\tau \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{b}^*) + \frac{\tau}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{r_0}{2}\sin 2\varphi \cdot \mathbf{e}^*.$$

Tout vecteur unitaire $\mathbf{e}^*$ orthogonal à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{c}^*$ est aussi orthogonal à

$$\frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{r_0}{2} \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{b}^* = \frac{x_1 + \varrho}{2} \cdot \mathbf{v}$$

et, par conséquent, aussi à $\mathbf{v}$ et à $\mathbf{x} - \varrho\mathbf{v}$. Ce dernier vecteur a les composantes $x_1 - \varrho, 0, \ldots, 0$, ce qui implique que $e_1^* = 0$; cela étant, $e_2^{*2} + \cdots + e_m^{*2} = 1$, ce qui donne $|e_i^*| \leqq 1$. Alors, vu que $\tau/\cos^2\varphi \leqq 1$ et en vertu de (79),

$$|\xi_k - \xi_k^*| \leqq |x_k - b_k| + \frac{r_0}{2}|e_k^*| \leqq \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0.$$

Cela veut dire que les ξ_k varient très peu sur σ_τ^P, et cela pour toute valeur de τ.

Il nous paraît convenable de *résumer les faits géométriques* qu'on vient d'établir.

Si l'on choisit un point $\mathbf{b}^*$ arbitraire sur s^P, on peut décomposer S^P en menant par les différents points $\boldsymbol{\xi}^* = \tau\,\mathbf{b}^*$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, du rayon-vecteur $\mathbf{b}^*$ des plans de direction fixe qui coupent S^P suivant des calottes de paraboloïdes σ_τ^P. Lorsque $P = \mathbf{x}$ est très rapproché de la surface S, ce qui veut dire que $\mathbf{x}^2 = R_0$ est très petit, on peut choisir $\mathbf{b}^*$ de manière que les coordonnées de $\boldsymbol{\xi}$ variant sur la calotte σ_τ^P soit sensiblement égales à celles du point $\boldsymbol{\xi}^* = \tau\,\mathbf{b}^*$ correspondant.

Tel étant le cas pour les coordonnées, il en sera de même pour une fonction continue arbitraire $F(\boldsymbol{\xi})$ définie sur $\bar{S}$, c'est-à-dire que si $\boldsymbol{\xi}$ se trouve sur σ_τ^P, on aura sensiblement $F(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}^*)$. Or, en tenant compte de ce qu'on a dit au début de ce numéro sur les fonctions $D^P(\boldsymbol{\xi})$, on peut immédiatement appliquer ce résultat à ces dernières fonctions.

Si les valeurs limites prescrites u sont suffisamment dérivables, on aura, sensiblement, sur les susdites calottes, $D^p(\boldsymbol{\xi}) = D^p(\boldsymbol{\xi}^*)$.

Ces préliminaires posés, il est facile de donner des valeurs approchées convenables pour les différentes expressions $U^2(P)$. Nous commençons par le cas impair $m = 2l + 1 > 3$. La formule (59), relative à ce cas-là, s'écrit, si l'on y tient compte de la relation (56) (en posant dans cette dernière $p = l$)

$$U^2(P) = (\pi R_0)^{-l} \int\limits_{s^P} ds \int\limits_0^{R_0} R^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{l-2} D^l(\boldsymbol{\xi})\, dR. \tag{80}$$

On a, d'après (74), (76), et en posant toujours $\psi = 2\varphi$,

$$\begin{aligned} R^{-\frac{1}{2}} &\left(1 - \frac{R}{R_0}\right)^{l-2} ds \cdot dR \\ &= R_0^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\tau}{\cos^2\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau}{\cos^2\varphi}\right)^{l-2} r_0^{2l-1} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2l-2} d\varphi \cdot d\omega_{m-2} \cdot R_0 \frac{d\tau}{\cos^2\varphi} \\ &= R_0^l \left[(\cos^2\varphi - \tau)^{-\frac{1}{2}} \sin^{2l-2}\varphi \cos\varphi\right] d\varphi \cdot d\omega_{m-2} \cdot \tau^{l-2}\, d\tau \end{aligned}$$

et par suite

$$U^2(P) = \pi^{-l} \int\limits_0^1 \tau^{l-2}\, d\tau \int\limits_{\omega_{m-2}} d\omega_{m-2} \int\limits_0^\theta [\,]\, D^l(\boldsymbol{\xi})\, d\varphi,$$

où la limite θ a la valeur $\arccos \tau^{\frac{1}{2}}$, qui s'ensuit de l'inégalité (78).

L'intégration par rapport à la différentielle $d\varphi \cdot d\omega_{m-2}$ s'étend — τ y étant constant — à la calotte σ_τ^P. La valeur de $D^l(\xi)$ qui y entre est donc sensiblement égale à $D^l(\xi^*) = D^l(\tau\,\mathbf{b}^*)$, ce qui fournit pour $U^2(P)$ la valeur *approchée*

$$U^2(P) = \pi^{-l}\int_0^1 D^l(\xi^*)\,\tau^{l-2}\,d\tau \cdot \int_{\omega_{m-2}} d\,\omega_{m-2} \cdot \int_0^\theta [\,]\,d\varphi. \tag{81}$$

On a (*cf.* (8) du nº **6**)

$$\int_{\omega_{m-2}} d\,\omega_{m-2} = \omega_{m-2} = \frac{2\,\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} = \frac{2\,\pi^{l-\frac{1}{2}}}{\Gamma(l-\frac{1}{2})} \text{ et } \int_0^\theta [\,]\,d\varphi = \tfrac{1}{2}(1-\tau)^{l-1}\frac{\Gamma(l-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(l)}$$

et alors, après des réductions évidentes,

$$\pi^{-l}\int_{\omega_{m-2}} d\,\omega_{m-2}\int_0^\theta [\,]\,d\varphi = \frac{(1-\tau)^{l-1}}{(l-1)!}.$$

D'autre part, on trouve par la formule (64)

$$D^l(\xi^*) = \tau^{-(l-2)}\frac{d^l}{d\tau^l}(u(\tau\,\mathbf{b}^*)\cdot\tau^{m-3}).$$

Tout cela étant admis, la valeur approchée (81) devient, après $l-1$ intégrations par parties,

$$U^2(P) = \frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1}\frac{d^l}{d\tau^l}(u(\tau\,\mathbf{b}^*)\cdot\tau^{m-3})\,d\tau = [u(\tau\,\mathbf{b}^*)\cdot\tau^{m-3}]_{\tau=0}^{\tau=1} = u(\mathbf{b}^*),$$

puisqu'on a, par hypothèse, $m > 3$.

Dans le cas de $m = 3$, le terme tout intégré devient $u(\mathbf{b}^*) - u(O)$. D'autre part, en se reportant à la déduction de la formule (59^{bis}), on voit que, dans ce cas particulier, pour arriver à $U^2(P)$, il faut ajouter $u(O)$ au second membre de (80). On a donc, aussi dans ce dernier cas, la valeur approchée $u(\mathbf{b}^*)$ pour $U^2(P)$.

En résumé, nous avons montré, pour m *impair* que, le point P étant très rapproché de la surface S, il existe sur cette surface un point $\mathbf{b}^*$ très rapproché de P et tel que $U^2(P)$ est sensiblement égal à la valeur (prescrite) $u(\mathbf{b}^*)$. Lorsque P tend vers un point déterminé Q de la surface, il en sera de même de $\mathbf{b}^*$, et

$U^2(P)$ tendra par conséquent vers la valeur prescrite $u(Q)$. Dans les conditions de continuité posées, la convergence sera uniforme sur toute portion de surface bornée et fermée. Les formules (59) et (59^{bis}) sont donc bien des *formules de solution.* (¹)

Le cas de *m pair* est maintenant assez facile. L'intégrale, qui, en vertu de la formule (61)(²), fournit $U^2(P)$ s'étend au bord s^P seulement. On a

$$U^2(P) = \pi^{1-l}\int_{s^P} A^{l-1}\, ds. \tag{82}$$

Vu que $1 - R/R_0 = 1$ sur le bord, l'expression A^{l-1}, donnée encore par la formule (56), se réduit à

$$A^{l-1} = R_0^{1-l} D^{l-1}(\xi).$$

La valeur de ds est comme plus haut (formule (74), $m = 2l$ et $\psi = 2\varphi$)

$$ds = r_0^{2l-2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2l-3} d\varphi\, d\omega_{m-2}.$$

La fonction $D^{l-1}(\xi)$ étant sensiblement égale à $D^{l-1}(\xi^*)$ sur σ_τ^P, elle le sera en particulier dans tous les points qui appartiennent à la fois à σ_τ^P et à s^P. Or, pour ces points-là, la valeur $\varkappa = \tau/\cos^2\varphi$ (formule (75)) devient égale à 1, ce qui donne $\cos^2\varphi = \tau$. (³) En variant τ, on en tire $|\sin 2\varphi \cdot d\varphi| = |d\tau|$ et ensuite, par un calcul simple,

$$ds = R_0^{\frac{l-1}{2}}(\tau(1-\tau))^{l-2}\, d\tau\, d\omega_{m-2},$$

où toutes les différentielles admettent le signe positif. En portant cela dans la formule (82), on obtient pour $U^2(P)$ la valeur *approchée* (⁴)

(¹) Pour dire un mot de l'aspect géométrique du passage à la limite qui vient d'avoir lieu, la portion de surface S^P tend, en se rétrécissant, vers le segment de génératrice OQ, tandis que chaque calotte σ_τ^P tend vers un point déterminé de ce segment. Les propriétés d'une frontière caractéristique sont donc bien intermédiaires entre celles d'une frontière d'espace et d'une frontière de temps; *cf.* en particulier la fig. 9.

(²) Cette formule renferme la formule (61^{bis}) relative au cas particulier $m = 4$.

(³) Les points en question décrivent une sphère de centre $\frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{r_0}{2}\cos 2\varphi\, \mathbf{c}^*$, de rayon $\frac{r_0}{2}\sin 2\varphi$ et située dans un plan orthogonal à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{c}^*$.

(⁴) L'erreur commise dans $U^2(P)$ tend vers 0 en même temps que celle relative à $D^l(\xi)$. En effet, si l'on remplace dans l'expression (80) la fonction $D^l(\xi)$ par 1, on aura une constante nu-

$$U^2(P) = \frac{\pi^{1-l}}{2}\,\omega_{m-2}\int_0^1 D^{l-1}(\xi^*)\cdot(\tau(1-\tau))^{l-2}\,d\tau.$$

Le facteur numérique devant l'intégrale est

$$\frac{\pi^{1-l}}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi^{l-1}}{(l-2)!} = \frac{1}{(l-2)!}.$$

La formule (64) donne de son côté

$$D^{l-1}(\xi^*) = \tau^{-(l-2)}\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}(u(\tau\,\mathbf{b}^*)\,\tau^{m-3}).$$

Eu égard aux deux dernières évaluations, la formule ci-dessus peut s'écrire

$$U^2(P) = \frac{1}{(l-2)!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-2}\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}(u(\tau\,\mathbf{b}^*)\,\tau^{m-3})\,d\tau = [u(\tau\,\mathbf{b}^*)\,\tau^{m-3}]_{\tau=0}^{\tau=1} = u(\mathbf{b}^*),$$

puisque $m \geqq 4$. Cette formule approchée étant démontrée, la vérification s'achève comme dans le cas *impair*. [1]

Nous donnons, pour terminer, quelques indications sur le degré de dérivabilité désirable de u. Un examen rapide montre que nos calculs sont légitimes, si l'on a soin de poser les conditions qui se trouvent au début de ce numéro pour toute valeur $h \leqq l+2$; les deux dernières valeurs $h = l+1$ et $h = l+2$ n'interviennent que dans les calculs concernant $\Delta\, U^2(P) = U^0(P) = 0$. Dans le cas pair, $m = 2\,l$, il ne figure dans l'expression finale de $U^2(P)$ que des dérivées d'ordre $\leqq l-1$ (formule (61)). Appliquant les méthodes du Chap. I, on pourrait arriver à cette expression en ne se servant que de ces dernières dérivées, c'est-à-dire en se passant de l'expression A^l, où entre la dérivée (63) d'ordre l. De même, dans la vérification de $\Delta\, U^2(P) = 0$, on pourrait se contenter des dérivées d'ordre $\leqq l+1$.

---

mérique, ne dépendant que de l, c'est-à-dire que de la dimension m. Cela est clair *a priori* par les calculs qui ont conduit à $U^2(P)$ dans le numéro précédent. On le voit presque sans calcul en observant que ds ne dépend de R_0 que par le facteur $r_0^{m-2} = R_0^{l-1}$, ce qui fait que l'expression qu'on vient de former est indépendante de R_0. (La constante numérique est d'ailleurs égale à $(l-2)!/(2\,l-2)!$.)

[1] Il est clair que les variétés S^P et s^P tendent toujours vers le même segment de génératrice, quand P tend vers un point de S.

CHAPITRE V.

Interprétation géométrique de la solution de l'équation des ondes sphériques.

65. L'opérateur I_*^{m-2}. — L'objet principal de ce chapitre est une étude approfondie de la solution de l'équation des ondes, relative au cas le plus important, celui des ondes sphériques. Il s'agit donc de l'équation posée pour l'espace-temps ordinaire — *trois* dimensions d'espace et, comme toujours, *une* dimension de temps. Par conséquent, il sera question de l'opérateur I_*^2 pour $m=4$, qui manifestement est un cas particulier de I_*^{m-2} pour m arbitraire. Vu que les considérations géométriques dont on aura besoin ont un intérêt en elles-mêmes et qu'elles sont indépendantes de la dimension, nous traiterons d'abord le cas général pour $m \geqq 3$. Nous déduirons ensuite de nos considérations générales la solution de caractère géométrique de l'équation des ondes sphériques, sans second membre, donnée par la formule (10) de l'Introduction.

On va appliquer les calculs du n° **57**, d'où sont tirées, sauf avis contraire, toutes les formules citées dans le présent numéro. Observons d'abord que $1/H_m(m-2)=0$; on peut donc remplacer la portion de surface S^P par sa partie annulaire extérieure $\bar{S}$, tout comme on l'a fait au susdit numéro en y calculant I_*^2 pour m pair. D'autre part, les nombres $\beta=\dfrac{\alpha+2-m}{2}$ figurant dans les formules (A) et (B) et $\beta=\dfrac{\alpha-m}{2}$ figurant dans les formules (C) et (C^{bis}) deviennent respectivement $\beta=0$ et $\beta=-1$ pour $\alpha=m-2$. Il s'ensuit donc des formules citées et de la formule (29) au moyen de la formule (13^{bis}) du n° **5**

$$(1)\qquad I_*^{m-2}\overline{f,\,g,\,h}\,(P)=\frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}}\,2^{m-3}\,\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}\,(2\,A(0)+B(0)+C'(0)).$$

Ici $A(0)$ est donné par la formule (28^{bis}), tandis que $B(0)$ et $C'(0)$ sont les valeurs de $B(R)$ et de $d\,C(R)/d\,R$ pour $R=0$. Ces dernières expressions sont définies par les formules (B) et (C):

$$(2)\qquad B(R)=\int\limits_{s_R} g\,\frac{d\,l}{d\,R}\,d\,s_R \ \text{ et } \ C(R)=\int\limits_{s_R} h\,\frac{d\,R}{d\,n}\,\frac{d\,l}{d\,R}\,d\,s_R.$$

En ce qui concerne la valeur $A(0)$, nous n'avons rien à ajouter à la formule (28^{bis}). Pour calculer $B(0)$ et $C'(0)$, rappelons que la variété s_R devient pour $R=0$ le bord s^P dont l'élément de volume est désigné par ds. En tenant encore compte de la formule (12) du n° **50**, nous pouvons écrire

$$B(0) = -\int_{s^P} g \frac{dn}{dR} ds, \tag{3}$$

Le calcul explicite de $C'(0)$ est plus difficile. On peut écrire

$$C(R) = \int_{s^P} h K ds \quad \text{où} \quad K = \frac{dR}{dn} \cdot \frac{dl}{dR} \cdot \frac{ds_R}{ds}. \tag{4}$$

En rappelant la paramétrisation de $\tilde{S}$ à l'aide des trajectoires issues des points B de s^P et de la quantité R que nous avons donnée au n° **50**, on voit que

$$C'(R) = \int_{s^P} \frac{d}{dR}(hK) ds, \tag{4^{bis}}$$

la différentiation par rapport à R étant faite suivant les trajectoires l. On a

$$\frac{d}{dR}(hK) = \frac{dh}{dR} K + h \frac{dK}{dR}. \tag{5}$$

Pour $R = 0$, on a évidemment $ds_R/ds = 1$, ce qui, rapproché de la formule (12) du n° **50**, montre que

$$K = -1 \quad \text{pour} \quad R = 0. \tag{6}$$

Dès lors, pour $R = 0$, c'est-à-dire aux points du bord s^P, la formule (5) ci-dessus se réduit à

$$\frac{d}{dR}(hK)_{(R=0)} = \left(-\frac{dh}{dR} + h\frac{dK}{dR}\right)_{(R=0)}. \tag{7}$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$I_*^\alpha \overline{0, g, h}(P) = I_*^\alpha \overline{g, h}(P),$$

alors, par les formules (1), (3), (4^{bis}) et (7) ci-dessus,

$$I_*^{m-2} \overline{g, h}(P) = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{m-3} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_{s^P} \left\{ h\frac{dK}{dR} - g\frac{dn}{dR} - \frac{dh}{dR} \right\} ds, \tag{8}$$

où, soulignons-le, les expressions sont formées aux points du bord s^P et les différentiations par rapport à R dans dK/dR et dh/dR sont faites suivant les trajectoires l.

En posant maintenant $g = \frac{du}{dn}$ et $h = u$, il vient

$$(8^{bis}) \quad I_*^{m-2} \overline{\frac{du}{dn}, u}(P) = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{m-3} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_{s^P} \left\{ u \frac{dK}{dR} - \frac{du}{dn}\frac{dn}{dR} - \frac{du}{dR} \right\} ds.$$

66. Différentiation par rapport à R dans différentes directions. Les droites ν. — On va encore simplifier la dernière formule en introduisant un symbole de différentiation approprié. Rappelons que nous avons déjà à plusieurs reprises différentié dans certaines directions par rapport à $R = R_{PQ}$ ou $r = r_{PQ}$ (*cf.* en particulier l'Introduction, formule (10) et les nos **63** et **65**) et même utilisé de temps en temps le symbole que nous allons maintenant introduire d'une manière systématique.

Désignons, dans un ordre d'idées général, par γ une direction déterminée. Soient d'autre part $U(Q)$ et $V(Q)$ des fonctions, continues avec leurs dérivées du premier ordre. On entend par $d_\gamma U$ et $d_\gamma V$ les accroissements infinitésimaux de ces fonctions correspondant au déplacement infinitésimal dQ dans la direction γ. Ceci posé, le rapport $d_\gamma U / d_\gamma V$ sera appelé *la dérivée de U par rapport à V dans la direction γ*[1]. Cette dérivée est manifestement indépendante du sens de parcours positif de γ.

Dans cette notation, les deux derniers termes sous le signe $\int$ dans la formule (8^{bis}) peuvent s'écrire

$$(9) \qquad \frac{du}{dn}\frac{dn}{dR} + \frac{du}{dR} = \frac{d_n u}{d_n R} + \frac{d_l u}{d_l R}.$$

Les coordonnées du point Q étant désignées, comme d'ordinaire, par ξ_k, on a manifestement

$$(10) \qquad \frac{d_\gamma u}{d_\gamma R} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{d_\gamma \xi_k}{d_\gamma R}.$$

Alors, en posant

$$(11) \qquad \frac{d_\gamma \xi_k}{d_\gamma R} = \gamma'_k,$$

on peut aussi écrire

---

[1] On prendra évidemment soin de ne pas former la dérivée dans les directions tangentes à la surface $V =$ const. qui passe par Q.

$$(12) \qquad \frac{d_\gamma u}{d_\gamma R} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \gamma'_k.$$

D'autre part, en différentiant la relation $R = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k (\xi_k - x_k)^2$ par rapport à R dans la direction γ, il vient

$$1 = 2 \sum_1^m \varepsilon_k (\xi_k - x_k) \frac{d_\gamma \xi_k}{d_\gamma R}$$

ou

$$(13) \qquad \sum_1^m \varepsilon_k (\xi_k - x_k) \gamma'_k = \frac{1}{2} \quad \text{ou encore} \quad (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}') = \frac{1}{2}.$$

Le déplacement aux composantes $d_\gamma \xi_k$ ayant manifestement la direction γ, il en sera de même du vecteur $\boldsymbol{\gamma}'$ aux composantes γ'_k. Inversement, pour qu'un vecteur $\boldsymbol{\gamma}'$ aux composantes γ'_k puisse s'écrire sous la forme (11), il suffit qu'il ait la direction γ et qu'il satisfasse à la relation (13).

Ce point admis, on voit que si γ et δ sont des directions arbitraires, on pourra toujours écrire en vertu de (11)

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\left(\gamma'_k + \delta'_k\right) = \nu'_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d_\gamma \xi_k}{d_\gamma R} + \frac{d_\delta \xi_k}{d_\delta R}\right) = \frac{d_\nu \xi_k}{d_\nu R},$$

ν étant la direction du vecteur $\boldsymbol{\nu}'$, aux composantes ν'_k, qui de son côté est déterminé par les directions γ et δ. En effet, les relations (13)

$$(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}') = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}') = \frac{1}{2}$$

entraînent

$$(15) \qquad (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}') = \frac{1}{2}.$$

On aura en même temps, en vertu des formules (10) et (14),

$$(16) \qquad \frac{d_\gamma u}{d_\gamma R} + \frac{d_\delta u}{d_\delta R} = 2 \frac{d_\nu u}{d_\nu R}.$$

Cela étant, retournons à la formule (9) et tenons compte des faits que $\mathbf{n}$ est la normale «intérieure»[1] à la surface S en un certain point $\mathbf{b}$ du bord s^P, tandis que l est (la direction de) la trajectoire issue de $\mathbf{b}$. En désignant, comme au n° **51**, la tangente unitaire à l par $\mathbf{t}$, nous tirons du même numéro que

---

[1] *Cf.* la note p. 76.

(17) $$\mathbf{n} + \mathbf{t} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

λ étant un nombre positif. Par conséquent, $(\mathbf{n} + \mathbf{t}, \mathbf{b} - \mathbf{x}) = -\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{x})^2 = 0$. C'est-à-dire que

$$(-\mathbf{n}, \mathbf{b} - \mathbf{x}) = (\mathbf{t}, \mathbf{b} - \mathbf{x}) = \frac{1}{2\varkappa},$$

où $\varkappa$ est aussi un nombre positif. Cela donne

$$(-\varkappa\mathbf{n}, \mathbf{b} - \mathbf{x}) = (\varkappa\mathbf{t}, \mathbf{b} - \mathbf{x}) = \frac{1}{2}.$$

Par suite

(18) $$\mathbf{n}' = -\varkappa\mathbf{n},\ \mathbf{t}' = \varkappa\mathbf{t}$$

et le vecteur $\mathbf{v}'$ défini par la relation $\mathbf{v}' = \frac{1}{2}(\mathbf{n}' + \mathbf{t}')$ satisfait à

(19) $$\mathbf{v}' = \frac{1}{2}(\mathbf{n}' + \mathbf{t}') = \frac{\varkappa}{2}(\mathbf{t} - \mathbf{n}),$$

ce qui entraîne

(19^{bis}) $$(\mathbf{v}', \mathbf{v}') = \frac{\varkappa^2}{4}((\mathbf{t}, \mathbf{t}) - 2(\mathbf{t}, \mathbf{n}) + (\mathbf{n}, \mathbf{n})) = \frac{\varkappa^2}{4}(-1 + 1) = 0;$$

il satisfait en outre à la relation

(20) $$(\mathbf{b} - \mathbf{x}, \mathbf{v}') = \frac{1}{2}.$$

Le vecteur $\mathbf{v}'$ *étant isotrope, la droite* ν *menée par le point* $\mathbf{b}$ *et ayant la direction du vecteur* $\mathbf{v}'$ *est une droite isotrope.* Les formules (14), (16) et (19) fournissent la transcription suivante de l'expression (9)

(21) $$\frac{du}{dn}\frac{dn}{dR} + \frac{du}{dR} = \frac{d_n u}{d_n R} + \frac{d_t u}{d_t R} = 2\frac{d_\nu u}{d_\nu R}.$$

Cela posé, la relation (8^{bis}) peut s'écrire

(22) $$I_*^{m-2}\overline{\frac{du}{dn}, u}(P) = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{m-3}\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int\limits_{s^P} \left(\frac{d_t K}{d_t R}\cdot u - 2\frac{d_\nu u}{d_\nu R}\right) ds.$$

Il ne manque pas d'intérêt de remarquer que R varie d'une manière linéaire sur ν ou, plus généralement, sur toute droite isotrope[1]. Soit en effet C une telle droite, $\mathbf{c}$ un vecteur qui lui est parallèle, $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$, $\boldsymbol{\eta}$ un point fixe et $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} + \tau\mathbf{c}$ un point mobile sur C, τ étant un paramètre. Alors $R_{\mathbf{x}\xi} = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})^2 = R_{\mathbf{x}\eta} + 2\tau(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{x}, \mathbf{c})$, expression linéaire en τ (ou dans les coordonnées de ξ).

[1] *Cf.* p. 110.

Observons encore que $d_\nu u/d_\nu R$ peut toujours être calculé par la formule (21) si l'on connaît sur S les données de Cauchy u et du/dn.

On vient de voir que par chaque point $\mathbf{b}$ du bord s^P il passe une droite ν, déterminée par le vecteur v', qui de son côté est donné par la formule (19). Le vecteur $\mathbf{n}$ et le vecteur $\mathbf{t}$ étant respectivement orthogonal et tangent à la surface S, les formules (17) et (19) mettent en évidence que *la droite ν est la symétrique (au sens lorentzien) de la génératrice* $\mathbf{b}-\mathbf{x}$ indéfiniment prolongée *par rapport au plan tangent* à la surface S au point $\mathbf{b}$.

Nous allons montrer qu'en réalité la droite ν et le vecteur v' *dépendent beaucoup moins de la surface S* qu'il ne paraît au premier instant. En effet, *deux surfaces S qui admettent la même intersection s^P avec la nappe C^P du cône de sommet P admettent les mêmes droites ν et les mêmes vecteurs* v'(¹).

Observons d'abord que la génératrice et la droite ν passant par un point $\mathbf{b}$ du bord s^P sont isotropes toutes les deux et, de plus, qu'elles sont orthogonales au bord, puisqu'il en est ainsi de $\mathbf{n}$ et de $\mathbf{t}$ (*cf.* les formules (17) et (19) et le nº **51**). Cela posé, considérons autour du point $\mathbf{b}$ un élément infinitésimal du bord. Cet élément, qui est à $m-2$ dimensions, est évidemment orienté dans l'espace puisqu'il en est de même du bord tout entier. Le plan à deux dimensions π mené par le point $\mathbf{b}$ et orthogonal à cet élément est donc orienté dans le temps, ce qui veut dire que la forme lorentzienne exprimant le carré de la distance de deux points arbitraires de ce plan est indéfinie. Dès lors, on peut introduire un nouveau système de coordonnées lorentziennes, l'axe des ξ_1 et celui des ξ_2 étant parallèles à π. De là il s'ensuit que *ce plan contient deux directions isotropes* (données par $\xi_1 \pm \xi_2 = 0$) qui, par suite, doivent être *celles de la génératrice et de la droite ν*, considérées tout à l'heure. On voit alors que la droite ν est entièrement déterminée par l'élément infinitésimal de s^P. Il en est de même du vecteur v', puisque ce vecteur est déterminé par la direction de ν et la relation (20).

Les droites ν constituent une famille à $m-2$ paramètres et engendrent une surface réglée Σ^P à $m-1$ dimensions, dont nous allons montrer qu'elle est une *surface caractéristique* (*cf.* le nº **62**)(²).

Le point essentiel est que les ν sont des droites isotropes, orthogonales à une variété à $m-2$ dimensions, soit s. (Le caractère particulier de s^P d'ap-

(¹) Cet énoncé pourrait être remplacé par un énoncé plus précis, de caractère local; *cf.* la démonstration.

(²) Dans l'Introduction, la dernière surface s'obtient aussi comme enveloppe de cônes caractéristiques, construction rattachée à la méthode classique de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

partenir à la nappe d'un cône caractéristique n'intervient pas dans la démonstration.) Désignons par η les points de s, par $\nu^{\prime}$ un vecteur parallèle à ν, $(\nu^{\prime}, \nu^{\prime}) = 0$ et $(\nu^{\prime}, d\eta) = 0$; le point $\xi = \eta + \tau\nu^{\prime}$ décrit, quand τ varie, la droite ν et, quand η et τ varient tous les deux, la surface Σ. On a $d\xi = d\eta + d\tau \cdot \nu^{\prime} + \tau \cdot d\nu^{\prime}$. On en tire $(\nu^{\prime}, d\xi) = 0$, puisque $(\nu^{\prime}, d\eta) = 0$ et $(\nu^{\prime}, \nu^{\prime}) = 0$, par hypothèse, et $(\nu^{\prime}, d\nu^{\prime}) = 0$ s'ensuit de $(\nu^{\prime}, \nu^{\prime}) = 0$. On voit donc que les génératrices ν de Σ sont normales à Σ, ce qui met en évidence que Σ est une surface caractéristique (n° **62**).

67. Calcul explicite d'une dérivée. — Pour pousser plus loin l'étude de $I_*^{m-2}\overline{\frac{du}{dn}}, u(P)$, qui à présent est exprimé par la formule (8^{bis}), reprenons la quantité K figurant dans la formule (4). Nous écrivons K sous la forme facile à comprendre

$$K = \frac{d_n R}{dn} \cdot \frac{dl}{d_l R} \cdot \frac{ds_R}{ds} = \frac{dS}{d_l R \cdot ds} \cdot \frac{d_n R}{dn}, \tag{23}$$

$dS = ds_R \cdot dl$ étant la mesure d'un élément infinitésimal de la surface S autour d'un point de S, soit $\mathbf{a}$. Observons maintenant que le produit $dS \cdot \frac{d_n R}{dn}$ peut, à un facteur constant près, être interprété comme le volume (à m dimensions) d'un cylindre infinitésimal qui admet dS comme base et dont les génératrices sont des segments équipollents au rayon vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, mené du point $\mathbf{a}$ au sommet $P = \mathbf{x}$. La hauteur de ce cylindre est la valeur absolue de la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ sur la normale $\mathbf{n}$, c'est-à-dire égale à

$$|(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{n})| = -r\frac{d_n r}{dn} = -\frac{1}{2}\frac{d_n R}{dn}$$

(formule (48) du n° **21**). Le volume du cylindre est donc

$$dV = -\frac{1}{2}\frac{d_n R}{dn} \cdot dS. \tag{24}$$

Nous rapportons les points $\mathbf{b}$ du bord s^P et les trajectoires l issues de ces points à $m-2$ paramètres $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^{m-2}$. Ces paramètres et R fournissent une paramétrisation des points $\mathbf{a}$ de la portion de surface S^P, au moins *dans le voisinage du bord*, soit sur la partie annulaire extérieure $\tilde{S}$ (n° **50**). Enfin, pour simplifier l'écriture, nous plaçons *l'origine des coordonnées au sommet* $P = \mathbf{x}$.

Tout cela étant admis, nous formons les vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} = \frac{d_l \mathbf{a}}{d_l R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2, \tag{25}$$

au nombre total de $m-1$, et le déterminant d'ordre m

$$D = \left| \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^1} \cdots \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^{m-2}} \right| = \left| \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} \right|, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2, \tag{26}$$

dont les colonnes sont données par les composantes du rayon vecteur **a** et des vecteurs dérivés ci-dessus. D'autre part, on peut identifier l'élément infinitésimal dS au parallélépipède construit sur les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} dR$ et $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} d\lambda^j$, $j=1, 2, \ldots, m-2$, ce qui donne

$$dV = |D|\, dR \prod_1^{m-2} d\lambda^j, \tag{27}$$

toutes les différentielles étant positives. On tire de (24) et de (27), en observant que $d_n R/dn$ est négatif,

$$\frac{d_n R}{dn} dS = -2|D|\, dR \prod d\lambda^j \tag{28}$$

et alors, de (23), puisque $d_l R = dR$,

$$K = -\frac{2|D| \prod d\lambda^j}{ds}.$$

Or s^P ayant été paramètrisé par les λ^j, on a d'après les règles du n° **21**^{bis}, $ds = p(\lambda^j) \prod d\lambda^j$, où $p(\lambda^j) > 0$ est une fonction des λ^j. On a donc

$$K = -\frac{2|D|}{p}.$$

Enfin, puisque p est indépendant de R,

$$\frac{d_l K}{d_l R} = -\frac{2}{p} \frac{d_l |D|}{d_l R} = -\frac{2|D|}{p} \cdot \frac{1}{D} \frac{d_l D}{d_l R} = K \cdot \frac{1}{D} \frac{d_l D}{d_l R}. \tag{29}$$

C'est l'évaluation de la dernière dérivée aux points du bord dont on va s'occuper dans le reste du présent numéro.

On trouve immédiatement, grâce aux relations

$$\frac{d_l \mathbf{a}}{d_l R} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}, \quad \frac{d_l}{d_l R} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R^2}, \quad \frac{d_l}{d_l R} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R \partial \lambda^j},$$

que

$$\frac{d_l D}{d_l R} = \left| \mathbf{a} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R^2} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^1} \cdots \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^{m-2}} \right| + \sum_{j=1}^{m-2} D_j, \tag{30}$$

où D_j est identique à D sauf pour la colonne $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j}$, qui est remplacée par

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R\, \partial \lambda^j}.$$

Nous allons encore transformer les formules (29) et (30) en y introduisant un nouveau vecteur qui, à la limite, devient identique au vecteur isotrope v^1, donné par les formules (19^{bis}) et (20). Posons à cet effet (dans la région annulaire $\tilde{S}$)

$$\mathbf{a}' = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} - N\mathbf{a}, \tag{31}$$

N étant un scalaire, dépendant de $\mathbf{a}$, qui sera spécialisé plus loin. On a d'abord

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R\, \partial \lambda^j} = \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \lambda^j} + \frac{\partial N}{\partial \lambda^j}\mathbf{a} + N\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} \text{ et } D_j = D'_j + ND,$$

où D'_j est identique à D sauf pour la colonne $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j}$, qui cette fois-ci est remplacée par $\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \lambda^j}$. Il en résulte

$$\sum_1^{m-2} D_j = \sum_1^{m-2} D'_j + (m-2)\, ND. \tag{32}$$

On a en même temps

$$D = \left| \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} \right| = \left| \mathbf{a}\,\mathbf{a}' \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} \right|, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2. \tag{33}$$

Observons d'autre part que, les vecteurs, au nombre de m, $\mathbf{a}$, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}$, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j}$ étant linéairement indépendants, on pourra poser

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R^2} = A\,\mathbf{a} + B\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R} + \sum_1^{m-2} C_j \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j}, \tag{34}$$

les coefficients A, B, C_j étant des scalaires, dépendant de $\mathbf{a}$. On en tire pour le premier déterminant dans (30)

$$\left| \mathbf{a} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R^2} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \lambda^j} \right| = BD. \tag{35}$$

Cela étant, nous faisons tendre $\mathbf{a}$ vers un point $\mathbf{b}$ du bord s^P. Toutes nos formules resteront valides, si nous y remplaçons $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ par $\mathbf{b}$ et

(36) $$\mathbf{b}' = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R} - N\,\mathbf{b}$$

respectivement, où $\dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}$ est une notation abrégée pour $\left(\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}\right)_{(R=0)}$. Rappelons maintenant que $R = \mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$, ce qui donne

(37) $$\left(\mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{a}, \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial R^2}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial R}\right) = 0,$$

formules valables encore quand on y remplace **a** *par* **b**. Si l'on tient compte de (37) et de ce que le vecteur **b** (segment de génératrice du cône) est isotrope, c'est-à-dire que

(38) $$\mathbf{b}^2 = 0,$$

on trouve pour le vecteur $\mathbf{b}'$, donné par la formule (36),

$$\mathbf{b}'^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}\right)^2 - 2N\left(\mathbf{b}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}\right)^2 - N.$$

Cela veut dire que, si l'on choisit N de façon qu'au point **b** on a

(39) $$N = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}\right)^2,$$

$\mathbf{b}'$ devient isotrope,

(40) $$\mathbf{b}'^2 = 0.$$

D'autre part, d'après (36), (37) et (38),

(41) $$(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = \left(\mathbf{b}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}\right) = \frac{1}{2}.$$

Cela posé, on voit (*cf.* p. 131) que $\mathbf{b}'$ *est identique au vecteur isotrope* ν^{I}, donné par les formules (19^{bis}) et (20). En effet, les vecteurs isotropes $\mathbf{b}'$ est ν^{I} sont orthogonaux au bord tous les deux et ont même produit scalaire avec le vecteur **b**. En tenant compte de ce qu'on a dit au sujet du vecteur ν^{I} au n° **66** (p. 131), on voit que $\mathbf{b}'$ ne dépend que du bord s^P, dans le sens qu'on a prêté à ce mot à l'endroit indiqué. La même remarque s'applique aux dérivées $\partial\,\mathbf{b}/\partial\lambda^j$, $\partial\,\mathbf{b}'/\partial\lambda^j$ et dès lors aux quantités L_j^k définies par les formules (48).

Pour obtenir la valeur du coefficient B (formules (34) et (35)) au point **b**, nous notons qu'il s'ensuit de (38)

(42) $$\left(\mathbf{b}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}\right) = 0.$$

Il vient alors au moyen de (38), (37), (42) et (39)

$$\frac{1}{2} B = -N,$$

et le premier déterminant en (30) devient en raison de (35) égal à $-2ND$. En vertu de cette dernière évaluation et de (32), on obtient (30) sous la forme

$$\frac{d_l D}{d_l R} = (m-4) N D + \sum_{1}^{m-2} D'_j, \tag{43}$$

où N est donné par (39), D peut, d'après (33), s'écrire

$$D = \left| \mathbf{b}\, \mathbf{b}' \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j} \right|, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2, \tag{44}$$

et D'_j s'obtient de D en y remplaçant la colonne $\partial \mathbf{b} / \partial \lambda^j$ par $\partial \mathbf{b}' / \partial \lambda^j$.

Pour aller plus loin, exprimons le fait que les trajectoires l sont orthogonales au bord par les formules $\left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial R}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}\right) = 0$, qui, en raison de (36) et de (42), donnent

$$\left(\mathbf{b}', \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}\right) = 0. \tag{45}$$

On en tire, eu égard à (41), que

$$\left(\mathbf{b}, \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^j}\right) = 0. \tag{46}$$

Enfin, de (40) il vient

$$\left(\mathbf{b}', \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^j}\right) = 0. \tag{47}$$

En résumé, les formules (38), (40)—(42), (45)—(47) disent que chacun des vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ est orthogonal à soi-même et aux vecteurs $\partial \mathbf{b} / \partial \lambda^j$ et $\partial \mathbf{b}' / \partial \lambda^j$, tandis que $(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = \frac{1}{2}\cdot$

Les vecteurs $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$, $\partial \mathbf{b} / \partial \lambda^j$ sont linéairement indépendants et au nombre total de m en raison du fait analogue pour $\mathbf{b}$, $\partial \mathbf{b} / \partial R$, $\partial \mathbf{b} / \partial \lambda^j$ et de la formule (36); on pourra donc exprimer les $\partial \mathbf{b}' / \partial \lambda^j$ comme leurs combinaisons linéaires

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^j} = L_j \mathbf{b} + L'_j \mathbf{b}' - \sum_{k=1}^{m-2} L_j^k \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^k}\cdot$$

Il résulte des formules énumérées que $L_j = L'_j = 0$. Il ne reste donc que

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^j} = - \sum_{k=1}^{m-2} L_j^k \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^k}. \tag{48}$$

Si l'on porte les expressions (48) dans les D_j', définis par les explications qui se rattachent à la formule (44), l'expression (43) devient

$$\frac{1}{D}\frac{d_l D}{d_l R} = (m-4)N - \sum_{j=1}^{m-2} L_j^j,$$

cette formule étant valable en tout point $\mathbf{b}$ du bord. On a en ces points aussi $K = -1$, d'après la formule (6) du n° **65**. Par conséquent, l'expression (29), dont l'évaluation explicite est l'objet du présent numéro, peut, en tout point $\mathbf{b}$, s'écrire

$$\frac{d_l K}{d_l R} = (4-m)N + \sum_{j=1}^{m-2} L_j^j, \tag{49}$$

où N est donné par la formule (39), tandis que les L_j^j sont définis par les relations (48).

En portant la dernière expression dans (8^{bis}), on obtient

$$I_*^{m-2}\overline{\frac{du}{dn}, u(P)} = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}}\, 2^{m-3}\, \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_{s^P} \left\{\left((4-m)N + \sum_{j=1}^{m-2} L_j^j\right) u - 2\frac{d_\nu u}{d_\nu R}\right\} ds \tag{50}$$

et, *en particulier*, *pour* $m = 4$

$$I_*^2\overline{\frac{du}{dn}, u(P)} = \frac{1}{2\pi}\int_{s^P} \left\{(L_1^1 + L_2^2)u - 2\frac{d_\nu u}{d_\nu R}\right\} ds. \tag{51}$$

On voit que (51) est *indépendant* de la surface S dans le sens qu'on a prêté à ce mot plus haut (p. 131 et p. 135) et que (50) en dépend très légèrement, à savoir par le facteur N (formule (39)).

68. Interprétation géométrique. — Pour arriver à une telle interprétation, nous chercherons sur le bord s^P des courbes C telles que les droites isotropes ν appartenant aux points $\mathbf{b}$ de C (*cf.* le n° **65**) soit tangentes à une seconde courbe. Une telle courbe C sera appelée *ligne de courbure*[1] de s^P. Le rayon vecteur

[1] Les considérations qui suivent sont tout analogues à celles qu'on rencontre dans la géométrie différentielle des surfaces, relative à l'espace ordinaire à trois dimensions, le bord s^P joue ici le rôle de la surface et les droites isotropes ν, orthogonales au bord jouent le rôle des normales de la surface.

mené de l'origine (du sommet $P = \mathbf{x}$) au point de contact aura la forme $\mathbf{b} + \varrho \mathbf{b}'$, ϱ étant un paramètre(¹). Il s'ensuit

$$(52) \qquad d(\mathbf{b} + \varrho \mathbf{b}') = \varepsilon \mathbf{b}' \text{ ou } d\mathbf{b} + \varrho \cdot d\mathbf{b}' + d\varrho \cdot \mathbf{b}' = \varepsilon \mathbf{b}',$$

ε étant une quantité infinitésimale. En formant le produit scalaire avec $\mathbf{b}$, il vient d'après (41), (42) et (46)

$$0 = (d\varrho - \varepsilon)(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = \frac{1}{2}(d\varrho - \varepsilon),$$

par quoi (52) se réduit à

$$(52^{bis}) \qquad d\mathbf{b} + \varrho\, d\mathbf{b}' = 0,$$

formule tout à fait analogue à celle d'Olinde Rodrigues(²).

Avant d'aller plus loin, remarquons que, pour $m = 3$, $m - 2$ se réduit à 1, le bord s^P devient donc une courbe. Il n'y aura qu'un seul paramètre soit λ^1. On voit de (48) que s^P satisfait à l'équation (52^{bis}) avec $\varrho^{-1} = L_1^1$. La surface caractéristique Σ^P, engendrée par les droites ν, est donc une surface développable.

Reprenons le cas général ($m \geqq 3$). On peut donner pour ϱ l'interprétation géométrique suivante. Posons $\mathbf{b} + \varrho \mathbf{b}' = \mathbf{f}$ pour le rayon vecteur menant de l'origine $\mathbf{o}$ au point de contact. Formons $\mathbf{f}^2 = \mathbf{b}^2 + 2\varrho(\mathbf{b}, \mathbf{b}') + \varrho^2 \mathbf{b}'^2$, identité qui d'après (38), (40), (41) se réduit à $\varrho = \mathbf{f}^2 = R_{\mathbf{o}\mathbf{f}}$. Dans le cas général où le sommet du cône est désigné par $P = \mathbf{x}$, on aura

$$(53) \qquad \varrho = R_{\mathbf{x}\mathbf{f}}.$$

Si nous posons maintenant $\varrho = \varkappa^{-1}$, la relation (52^{bis}) s'écrit

$$(54) \qquad d\mathbf{b}' + \varkappa\, d\mathbf{b} = 0,$$

et la formule (53) devient

$$(53^{bis}) \qquad \varkappa = \frac{1}{R_{\mathbf{x}\mathbf{f}}}.$$

Écrivons

$$(55) \qquad d\mathbf{b} = \sum_{q=1}^{m-2} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^q} d\lambda^q \text{ et } d\mathbf{b}' = \sum_{q=1}^{m-2} \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^q} d\lambda^q,$$

ce qui, en raison de (54) et de (48), donne

(¹) On se rappellera que $\mathbf{b}'$ est identique à V^1 (p. 135); $\mathbf{b}'$ a par conséquent la direction ν.
(²) *Cf.* p. ex. GOURSAT, *Cours d'Analyse* I (1910), p. 611.

$$o = -(d\,\mathbf{b}' + \varkappa\, d\,\mathbf{b}) = \sum_{p,\,q=1}^{m-2} (L^p_q - \varkappa\, \delta^p_q) \frac{\partial\, \mathbf{b}}{\partial\, \lambda^p}\, d\,\lambda^q, \quad \text{où } \delta^p_q = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}.$$

Les vecteurs $\partial\,\mathbf{b}/\partial\,\lambda^p$ étant linéairement indépendants, on a pour $\varkappa$ et les $d\,\lambda^q$ le système d'équations

$$(56) \qquad \sum_{q=1}^{m-2} (L^p_q - \varkappa\, \delta^p_q)\, d\,\lambda^q = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m-2,$$

qui fournit pour $\varkappa$ l'équation

$$(57) \qquad \left| L^p_q - \varkappa\, \delta^p_q \right| = 0, \quad p, q = 1, 2, \ldots, m-2.$$

Nous verrons tout à l'heure que toutes les racines de cette équation sont réelles. Admettons ce point pour l'instant et, pour simplifier, admettons aussi, jusqu'à nouvel ordre, que les racines sont distinctes. A chaque racine $\varkappa$ correspondra par (56) un système de $d\,\lambda^q$ et les déplacements $d\,\mathbf{b}$ et $d\,\mathbf{b}'$ donnés par (55). D'autre part, on tire de (57), en numérotant les racines $\varkappa$,

$$(58) \qquad \sum_{A=1}^{m-2} \varkappa_A = \sum_{j=1}^{m-2} L^j_j.$$

Si l'on numérote aussi les points de contact $\mathbf{f}$ correspondants et pose pour abréger $R_{\varkappa \mathbf{f}_A} = R_A$, on obtient des formules (53^{bis}) et (58)

$$(59) \qquad \sum_{j=1}^{m-2} L^j_j = \sum_{A=1}^{m-2} \frac{1}{R_A}.$$

Alors, si l'on remplace dans (50) et (51) le premier membre de la dernière identité par le second, on parvient à une nouvelle forme de I^{m-2}_* et, en particulier, de I^2_* pour $m = 4$. Nous bornant à ce cas particulier important, *nous écrivons la solution de l'équation des ondes sphériques, sans second membre,* $\Delta\, u = 0$, *sous la forme,* annoncée déjà dans l'Introduction,

$$(60) \qquad u(P) = I^2_* \overline{\frac{d\,u}{d\,n}}, \quad u(P) = \frac{1}{\pi} \int_{s^P} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot u - \frac{d_\nu\, u}{d_\nu\, R} \right\} d\,s.$$

Nous reviendrons sur cette expression, qui est l'*objet principal de ce chapitre,* au n° **71**. En attendant, il nout faut reprendre les points ajournés plus haut, en particulier la question des racines de l'équation (57). Nous introduisons d'abord la forme métrique de la variété s^P. Un déplacement infinitésimal $d\,\mathbf{b}$

s'écrit $d\mathbf{b} = \sum_1^{m-2} \frac{\partial b}{\partial \lambda^j} d\lambda^j$ et par suite

$$d\mathbf{b}^2 = \sum_{j,k=1}^{m-2} \gamma_{jk}\, d\lambda^j\, d\lambda^k, \quad \text{où } \gamma_{jk} = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^k}\right). \tag{61}$$

La variété ayant une orientation d'espace (*cf.* p. 131), la forme métrique ci dessus est *définie* négative.

Il sera utile de considérer en même temps que les L_j^k un second système de quantités L_{jk}. Nous posons par définition

$$L_{jk} = -\left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^k}\right). \tag{62}$$

La différention de (45) par rapport à λ^k donne

$$\left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^k}\right) + \left(\mathbf{b}', \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \lambda^k\, \partial \lambda^j}\right) = 0.$$

Le dernier terme étant *symétrique* en j et k, on voit que

$$L_{jk} = L_{kj}. \tag{63}$$

Les L_{jk} s'expriment par les L_j^k de la manière suivante (*cf.* formules (48) et (61)).

$$L_{jk} = -\left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial \lambda^k}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \sum_{p=1}^{m-2} L_k^p \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^p}\right) = \sum_{p=1}^{m-2} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^j}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \lambda^p}\right) \cdot L_k^p = \sum_{p=1}^{m-2} \gamma_{jp} L_k^p, \tag{64}$$

ce qui met en évidence que les L_{jk} sont les composantes covariantes d'un tenseur symétrique du second ordre dont les L_j^k sont les composantes mixtes.

Nous allons maintenant démontrer que les racines de l'équation (57) sont réelles. En effet, en ajoutant les équations (56), multipliées par les facteurs respectifs γ_{jp}, on obtient, en vertu de (64), le système équivalent

$$\sum_{k=1}^{m-2} (L_{jk} - \varkappa \gamma_{jk})\, \delta \lambda^k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2. \tag{65}$$

De là on tire

$$|L_{jk} - \varkappa \gamma_{jk}| = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, m-2, \tag{66}$$

équation qui est équivalente à (57). Or cette dernière équation a toutes ses racines réelles, car la forme métrique (61) est une forme quadratique définie.

A chaque racine simple $\varkappa$ de (66) correspond par (56) un système de différentielles $d\lambda^1, \ldots, d\lambda^{m-2}$ à rapports déterminés, qui fournissent un déplacement infinitésimal $d\mathbf{b}$ de direction déterminée. Plus généralement, à chaque racine $\varkappa$ de multiplicité h correspond une variété linéaire de déplacements, dont h sont linéairement indépendants[1].

Il est d'ailleurs clair que les équations (65) et (66) sont identiques à celles qui fournissent les valeurs extrêmes du rapport

$$\sum_{j,k} L_{jk}\, d\lambda^j\, d\lambda^k : \sum_{j,k} \gamma_{jk}\, d\lambda^j\, d\lambda^k .$$

Pour arriver aux lignes de courbure C, il faut intégrer les équations vectorielles identiques (52^{bis}) ou (54) ou, plus précisément, le système d'équations (56) qui leur est équivalent. Par tout point de s^P où (57) admet des racines distinctes, passent $m-2$ courbes distinctes, tandis que la coïncidence de certaines racines ou de toutes les racines amène une indétermination[2] partielle ou complète. Ce dernier fait a lieu, comme on le verra au n° **70**, dans le cas où la surface S est un plan ou un hyperboloïde $\mathbf{a}^2 = \text{const.}$ ou, à la limite, un cône caractéristique.

Voici encore quelques remarques complémentaires. Les déplacements $d\mathbf{b}_A$ et $d\mathbf{b}_B$ correspondant à deux racines différentes $\varkappa_A \neq \varkappa_B$ sont *orthogonaux*, $(d\mathbf{b}_A, d\mathbf{b}_B) = 0$. En effet, il s'ensuit de (65) et de la symétrie des L_{jk} et des γ_{jk}

$$(\varkappa_B - \varkappa_A) \sum_{j,k} \gamma_{jk}\, d\lambda_A^j\, d\lambda_B^k = 0$$

et, puisque $\varkappa_B - \varkappa_A \neq 0$,

$$(d\mathbf{b}_A,\ d\mathbf{b}_B) = \sum_{j,k} \gamma_{jk}\, d\lambda_A^j\, d\lambda_B^k = 0. \tag{67}$$

On peut encore tirer de (65) une seconde relation

$$(d\mathbf{b}_A,\, d\mathbf{b}'_B) = (d\mathbf{b}_B,\, d\mathbf{b}'_A) = -\sum_{j,k} L_{jk}\, d\lambda_A^j\, d\lambda_B^k = 0. \tag{68}$$

En nous inspirant de la terminologie usuelle de la théorie des surfaces, nous dirons que (68) exprime que les directions de $d\mathbf{b}_A$ et de $d\mathbf{b}_B$ — qui, comme nous venons de le voir, sont orthogonales — sont aussi *conjuguées*.

Les points de contact $\mathbf{f}_A$ ($A = 1, 2, \ldots, m-2$), distincts ou non, situés sur une droite de la famille des droites ν sont dits *foyers relatifs à la droite.* Ces

---

(1) Pour tous ces faits bien connus, *voir* p. ex. COURANT-HILBERT **1**, I, p. 32—33.

(2) Un tel point peut être appelé *ombilic.*

points décrivent une variété à $m-2$ dimensions et à $m-2$ nappes, en général, que nous appelons la *surface focale* ou *caustique* de la famille de droites.

69. La plus courte distance. — La manière dont nous venons de caractériser les foyers et la surface focale a certains avantages sur celle qui se trouve dans l'Introduction. Ainsi l'équation (54), qui servait de base à toutes nos considérations, a été obtenue presque sans calcul. D'autre part, l'autre voie à laquelle nous venons de faire allusion est certainement à préférer sous certains rapports, notamment dans les cas de dégénérescence. Il suffira de l'indiquer succinctement.

On sait que dans l'espace à trois dimensions les surfaces développables se distinguent entre les surfaces réglées par les deux propriétés suivantes qui, en général, sont équivalentes: 1°. Les génératrices sont tangentes à une courbe (gauche). 2°. La plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est infiniment petite d'ordre supérieur au premier. On peut aussi exprimer cette propriété en disant que les génératrices voisines d'une surface développable se rencontrent. C'est la première propriété qui nous a servi de modèle plus haut, c'est la seconde qui va nous guider dans ce qui suit.

Considérons une ligne Γ, tracée sur le bord s^P et les droites ν menées par les points $\mathbf{b}$ de Γ. Soient[1]

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \tau\mathbf{b}' \text{ et } \mathbf{c} + \varDelta\mathbf{c} = \mathbf{b} + \varDelta\mathbf{b} + (\tau + \varDelta\tau)(\mathbf{b}' + \varDelta\mathbf{b}') \tag{69}$$

les points qui sur deux droites voisines forment les extrémités du segment fournissant le plus courte distance de ces droites. On devra avoir

$$(\mathbf{b}', \varDelta\mathbf{c}) = 0 \text{ et } (\mathbf{b}' + \varDelta\mathbf{b}', \varDelta\mathbf{c}) = 0 \tag{70}$$

où, en vertu de (69),

$$\varDelta\mathbf{c} = \varDelta\mathbf{b} + \tau\varDelta\mathbf{b}' + \varDelta\tau(\mathbf{b}' + \varDelta\mathbf{b}'). \tag{71}$$

On tire de la dernière des relations (70) et de (71)

$$\varDelta\mathbf{c}^2 = (\varDelta\mathbf{b} + \tau\varDelta\mathbf{b}', \varDelta\mathbf{c}) = (\varDelta\mathbf{b} + \tau\varDelta\mathbf{b}')^2 + \varDelta\tau(\varDelta\mathbf{b} + \tau\varDelta\mathbf{b}', \mathbf{b}' + \varDelta\mathbf{b}'). \tag{72}$$

On cherche la condition dans laquelle $|\varDelta\mathbf{c}^2|$ *est infiniment petit par rapport à* $|\varDelta\mathbf{b}^2| = \varepsilon^2$, ce que nous exprimons par la notation $|\varDelta\mathbf{c}^2| = o(\varepsilon^2)$. Écrivons $\varDelta\mathbf{b} = d\mathbf{b} + \frac{1}{2}d^2\mathbf{b} + \cdots$ et pareillement pour $\varDelta\mathbf{b}'$, les termes non écrits étant d'ordre supérieur au deuxième. Puisque $(\mathbf{b}', d\mathbf{b}) = 0$ et $(\mathbf{b}', d\mathbf{b}') = 0$ (formules (45)

[1] Nous faisons, de nouveau, coïncider l'origine avec le sommet $P = \mathbf{x}$.

et (47)), le dernier terme du second membre de (72) est $O(\varepsilon^3) = o(\varepsilon^2)$ (1). De ce fait et de $|\varDelta \mathbf{c}^2| = o(\varepsilon^2)$ on tire $(d\,\mathbf{b} + \tau\, d\,\mathbf{b}')^2 = o(\varepsilon^2)$. La quantité τ dépend des points $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b} + \varDelta\,\mathbf{b}$. Supposons encore que, si $\mathbf{b} + \varDelta\,\mathbf{b}$ tend vers $\mathbf{b}$, τ tend vers une valeur limite τ^{I}, qui alors ne dépendra que de $\mathbf{b}$. Les valeurs τ et τ^{I} ne différant que très peu, on tire de la dernière relation $(d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}')^2 = o(\varepsilon^2)$, ce qui veut dire que $(d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}')^2$ est infiniment petit d'ordre supérieur au deuxième. Or si la différentielle $d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}'$ n'est pas nulle, elle sera un vecteur d'espace(2) de direction constante, qui ne pourra satisfaire à une telle relation. Par conséquent

$$(73) \qquad d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}' = 0.$$

Inversement, si (73) est rempli, on aura $(d\,\mathbf{b} + \tau\, d\,\mathbf{b}')^2 = o(\varepsilon^2)$ et $(\varDelta\,\mathbf{b} + \tau\,\varDelta\,\mathbf{b}')^2 = o(\varepsilon^2)$. Il en résulte aussi pour la plus courte distance $\varDelta\,\mathbf{c}$ (formule (71)), grâce aux relations (40), (45) et (47), $\varDelta\,\mathbf{c}^2 = o(\varepsilon^2)$.

On voit que dans (73) on est tombé de nouveau sur une équation de la forme (52^{bis}); la ligne Γ est donc identique à une ligne de courbure C. Donc, au lieu de définir un foyer relatif à une droite ν comme point de contact, on peut le définir comme point limite de l'extrémité du segment qui fournit la plus courte distance de cette droite et d'une droite voisine, la dernière correspondant à un déplacement qui satisfait à (73).

Pour terminer cette digression, montrons que *la plus courte distance* $|\varDelta\,\mathbf{c}|$ de deux droites telles qu'il a été dit *est du troisième ordre*, fait pareil à celui trouvé par Bouquet au sujet de génératrices voisines d'une surface développable (espace à trois dimensions)(3).

Considérons en effet sur les deux droites voisines les points respectifs $\mathbf{g} = \mathbf{b} + \left(\tau^{\mathrm{I}} + \frac{\varDelta\,\tau^{\mathrm{I}}}{2}\right)\mathbf{b}'$ et $\mathbf{g} + \varDelta\,\mathbf{g} = \mathbf{b} + \varDelta\,\mathbf{b} + \left(\tau^{\mathrm{I}} + \frac{\varDelta\,\tau^{\mathrm{I}}}{2}\right)(\mathbf{b}' + \varDelta\,\mathbf{b}')$. On a

$$\varDelta\,\mathbf{g} = \varDelta\,\mathbf{b} + \left(\tau^{\mathrm{I}} + \frac{\varDelta\,\tau^{\mathrm{I}}}{2}\right)\varDelta\,\mathbf{b}' = d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}' + \frac{1}{2}(d^2\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d^2\,\mathbf{b}' + d\,\tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}') + \cdots,$$

les termes non écrits étant d'ordre $\geqq 3$. Or $d\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}' = 0$, par hypothèse, et de là, par différentiation, $d^2\,\mathbf{b} + \tau^{\mathrm{I}}\, d^2\,\mathbf{b}' + d\,\tau^{\mathrm{I}}\, d\,\mathbf{b}' = 0$. Par conséquent, $\varDelta\,\mathbf{g} = O(\varepsilon^3)$, $|\varDelta\,\mathbf{g}| = O(\varepsilon^3)$ et, à plus forte raison, la plus courte distance $|\varDelta\,\mathbf{c}|$ est $O(\varepsilon^3)$.

---

(1) Pour la notation O, *cf.* la note (4), p. 50.

(2) En effet, le vecteur en question appartient, en raison de la formule (48), à l'élément infinitésimal du bord s^P situé autour du point $\mathbf{b}$ (*cf.* p. 131).

(3) *Cf.* Picard **1**, I, p. 323.

70. Trois cas particuliers. — Nous avons déjà dit dans l'Introduction que la surface Σ^P constituée par les droites v, ses génératrices, peut être considérée comme l'image de la nappe C^P du cône caractéristique de sommet P par rapport à la surface S, tandis que la caustique de Σ^P peut s'interpréter comme l'image (diffuse) du point P. Nous allons envisager trois cas particuliers, celui d'un plan d'espace et ceux d'un hyperboloïde $\mathbf{a}^2 = \text{const.}$ et d'un cône caractéristique direct, où l'image du cône devient un second cône caractéristique $C^{P'}$. *La caustique se réduit à un point unique*, savoir au sommet P' du cône $C^{P'}$. Ce point peut donc s'interpréter comme l'image *distincte* du point P. Les lignes de courbure, au contraire, sont complètement indéterminées; tout point du bord est un ombilic parfait, toutes les racines de l'équation (57) sont identiques et même indépendantes du point considéré du bord.

Soit d'abord S un plan (à $m - 1$ dimensions[1]), d'orientation d'espace. Soit de plus P' le point symétrique (au sens lorentzien) à P par rapport à S, ce qui veut dire que le segment PP' est orthogonal à S et divisé par S en deux segments égaux. Il résulte de la symétrie que l'intersection s^P du plan S et du cône C^P fait aussi partie du cône caractéristique $C^{P'}$ au sommet P'. Les images des génératrices de C^P seront les génératrices de $C^{P'}$, qui se rencontrent toutes au point P', auquel la caustique de $\Sigma^P = C^{P'}$ se réduit dans le cas actuel.

Le cas particulier qui précède peut être considéré comme cas limite de celui qui suit. Soit S l'une des nappes de l'hyperboloïde dont les points $\mathbf{a}$ satisfont à l'équation $\mathbf{a}^2 = A = \text{const.} > 0$. Le fait que le centre se trouve à l'origine ne restreint nullement la généralité. Soit de plus $P = \mathbf{x}$ un point intérieur à celui des demi-cônes caractéristiques $\boldsymbol{\xi}^2 = 0$ qui renferme S. Dès lors, le cône C^P coupe S en des points réels $\mathbf{b}$ à distance finie. Ces points satisfont aux équations $\mathbf{b}^2 = A$ et $(\mathbf{b} - \mathbf{x})^2 = 0$. D'autre part, il est clair que les points $\mathbf{b}$ qui satisfont à deux des équations $\mathbf{b}^2 = A$, $(\mathbf{b} - \mathbf{x})^2 = 0$ et $\mathbf{b}^2 - (\mathbf{b} - \mathbf{x})^2 = 2(\mathbf{b}, \mathbf{x}) - \mathbf{x}^2 = A$, satisfont à la troisième. Or la dernière étant linéaire en $\mathbf{b}$, elle définit un certain plan (à $m - 1$ dimensions et orienté dans l'espace), soit Π. L'intersection du cône et de l'hyperboloïde, désignée, comme d'habitude, par s^P est en même temps l'intersection du cône et du plan Π. Par suite, en raison de ce que nous avons vu au n° **66**, l'image de C^P par rapport à S est identique à son image par rapport au plan Π. Alors, d'après nos remarques concernant le premier cas particulier, cette image est un cône caractéristique $C^{P'}$, le point $P' = \mathbf{x}'$ étant l'image de P par rapport à Π. On trouve d'ailleurs aisément

[1] Dans l'Introduction il n'est question que de $m = 4$.

$$\mathbf{x}' = \frac{A}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \cdot \mathbf{x}\ [1].$$

Les considérations précédentes s'étendent encore par un passage à la limite ou autrement au cas où l'hyperboloïde dégénère en un cône caractéristique, soit C. L'image de C^P par rapport au cône C se trouve identique à ce cône lui-même.

Les cônes C^P et $C^{P'}$ ci-dessus se correspondent aussi par *inversion* [2]. La définition de cette transformation est dans l'espace lorentzien essentiellement la même que dans l'espace euclidien. Deux points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ se correspondent par une inversion s'ils sont en ligne droite avec un point fixe $\mathbf{o}$, le centre de l'inversion, et satisfont à une relation de la forme $(\mathbf{y} - \mathbf{o}, \mathbf{y}' - \mathbf{o}) = A =$ const. Remarquons d'abord que tout point $\mathbf{a}$ de l'hyperboloïde $(\mathbf{a} - \mathbf{o})^2 = A$ se transforme en lui-même. Cela posé, notre énoncé concernant deux cônes qui sont les images l'un de l'autre par rapport à cet hyperboloïde résulte immédiatement du fait qu'*une droite isotrope se transforme par une inversion en une droite isotrope.* Voici la démonstration de ce dernier fait. Plaçons de nouveau l'origine en $\mathbf{o}$. Soient $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{y}$ d'une part, $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}' = \mu \mathbf{z}$ de l'autre, des couples de points qui satisfont à $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = (\mathbf{z}, \mathbf{z}') = A$. On en tire $\lambda \mathbf{y}^2 = \mu \mathbf{z}^2$ et $(\mathbf{y}' - \mathbf{z}')^2 = \lambda^2 \mathbf{y}^2 - 2 \lambda \mu (\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mu^2 \mathbf{z}^2 = \lambda \mu (\mathbf{z}^2 - 2 (\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mathbf{y}^2) = \lambda \mu (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2$, ce qui met en évidence que les deux carrés scalaires s'annulent simultanément.

71. Résumé. — Pour une vue d'ensemble nous renvoyons en premier lieu à l'Introduction, où l'on trouve un exposé assez complet des résultats du présent chapitre. Il ne nous reste ici qu'à amplifier certains détails.

Signalons d'abord un cas particulier de la formule (60) qui, dans le cas des ondes sphériques, fournit une solution de caractère géométrique du problème de Cauchy, posé pour l'équation $\Delta u = 0$ et pour une surface S d'orientation d'espace qui porte les données. Ce cas particulier est relatif aux trois types de surfaces, traités dans le numéro précédent, à savoir, plan d'espace, hyperboloïde $(\mathbf{a} - \mathbf{o})^2 = \text{const.} > 0$ et cône caractéristique (limite de surfaces d'espace). Dans le cas de telles surfaces, les deux foyers $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$, distincts et variables en général, coïncident et restent identiques à un point fixe P', l'image de P par rapport à la surface considérée. En posant $R_{PP'} = R_0$, on tombe sur la *formule de solution*

[1] Pour éviter toute confusion, on a écrit au dénominateur $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ au lieu de $\mathbf{x}^2$.

[2] On peut choisir comme centre de l'inversion un point arbitraire de la droite PP', excepté les points P et P' eux-mêmes.

$$u(P) = \frac{1}{\pi}\int_{s^P}\left\{\frac{u}{R_0} - \frac{d_\nu u}{d_\nu R}\right\} ds. \tag{74}$$

On voit donc que (60) comprend la formule (61^{bis}) du n° **63**, relative au cas où S est un cône caractéristique (direct). En effet, cette dernière formule est exactement de la forme (74).

La formule (60) comprend aussi la solution de Poisson, relative au cas classique où la surface S est le plan $x_1 = 0$. Il est, en effet, aisé de vérifier que (74) peut dans ce dernier cas être transformé dans la formule de Poisson, écrite sous sa forme habituelle [1] (ou réciproquement).

Une grande partie des notions géométriques que nous avons utilisées dans ce chapitre et qui rentrent dans la solution (60) — *image*, *foyer*, *caustique* — appartiennent à l'optique géométrique. Cependant il est ici question de l'*optique géométrique de l'espace-temps*, où les rayons de lumière sont fournies par les droites isotropes. Nous reviendrons ailleurs sur les liens qui existent entre les conceptions de cette dernière optique et celles de l'optique géométrique ordinaire et montrerons comment on arrive dans cette voie aux théorèmes classiques, tels la règle des sinus et le théorème de Malus.

CHAPITRE VI.

Applications à la théorie relativiste de l'électron.

72. Notations. — Les problèmes que nous allons traiter dans ce chapitre se rapportent — tout comme le problème principal du chapitre précédent — à l'espace lorentzien à *quatre* dimensions, *espace-temps ou univers de la relativité restreinte.* Nous adopterons ici le langage habituel de cette dernière théorie et les notations accoutumées du *calcul tensoriel.* Pour simplifier l'écriture, *nous supprimerons* aussi *les caractères gras* utilisés plus haut pour représenter les vecteurs.

La vitesse de la lumière est égalée à 1, les quatre coordonnées d'un point sont désignées par x^0, x^1, x^2, x^3; x^0 correspondant au temps, x^1, x^2, x^3 à l'espace à trois dimensions. Le carré scalaire (x, x) du rayon vecteur x mené de l'origine au point x est mesuré par la forme métrique

---

[1] *Cf.* p. ex. Goursat III (1915), p. 103.

$$(x, x) = x^{0 2} - x^{1 2} - x^{2 2} - x^{3 2} = \sum_{j, k=0}^{3} g_{jk} x^j x^k; \tag{1}$$

$$g_{00} = 1, \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \ g_{jk} = 0, \ j \neq k.$$

En adoptant encore la convention due à Einstein, à savoir que, sauf indication contraire, *une sommation est à effectuer pour tout couple d'indices identiques* (*l'un supérieur, l'autre inférieur*), on peut aussi écrire

$$(x, x) = g_{jk} x^j x^k. \tag{1bis}$$

Les *composantes contravariantes* d'un vecteur U sont désignées par U^j et son *carré scalaire* (U, U) est mesuré par la forme analogue à (1)

$$(U, U) = g_{jk} U^j U^k. \tag{2}$$

V étant un second vecteur aux composantes contravariantes V^j, le *produit scalaire* des vecteurs U et V est donné par

$$(U, V) = g_{jk} U^j V^k. \tag{3}$$

Les *composantes covariantes* U_j du vecteur U sont définies par $U_j = g_{jk} U^k$ (c'est-à-dire que $U_0 = U^0$, $U_j = -U^j$, $j \neq 0$). Pour garder la symétrie, on pose en même temps $U^j = g^{jk} U_k$, où, dans le cas particulier actuel, $g^{jk} = g_{jk}$. Cela étant, le carré scalaire de U et le produit scalaire de U et de V peuvent s'écrire

$$(U, U) = g_{jk} U^j U^k = g^{jk} U_j U_k = U^j U_j; \tag{2bis}$$

$$(U, V) = g_{jk} U^j V^k = g^{jk} U_j V_k = U^j V_j = U_j V^j. \tag{3bis}$$

L'*opérateur des ondes* est désigné par $\square$, c'est-à-dire que

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{1 2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{2 2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{3 2}} = g^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}. \tag{4}$$

Les indices j et k figurant dans les opérations $\partial / \partial x^j$ et $\partial^2 / \partial x^j \partial x^k$ sont à considérer comme indices inférieurs (covariants).

Introduisons encore les coordonnées covariantes x_j du point x (composantes covariantes du rayon vecteur)

$$x_j = g_{jk} x^k, \text{ et inversement } x^j = g^{jk} x_k. \tag{5}$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{6}$$

et dès lors, l'opérateur des ondes peut s'écrire

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_j \, \partial x^j}. \tag{4^{bis}}$$

L'indice j figurant dans l'opération $\partial / \partial x_j$ est à considérer comme indice supérieur (contravariant).

73. Les équations de Maxwell. — Le tenseur antisymétrique F qui représente le *champ électromagnétique* admet les composantes covariantes $F_{jk} = -F_{kj}$ et les composantes contravariantes $F^{jk} = g^{jr} g^{ks} F_{rs} = -F^{kj}$ (c'est-à-dire que $F^{0k} = -F_{0k}$ et $F^{jk} = F_{jk}$, j, $k \neq 0$). On introduit aussi les composantes contravariantes s^j du *vecteur-courant* s, vecteur-densité de charge et de courant électrique. Cela posé, on arrange les équations de Maxwell en deux systèmes, chacun à quatre équations,

$$\frac{\partial F^{jk}}{\partial x^k} = -s^j, \qquad j = 0, 1, 2, 3, \tag{7}$$

$$\circ \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} = \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^l} = 0, \tag{8}$$ [1]

où, dans les équations du dernier système, j, k, l forment une combinaison quelconque à trois éléments tirés de 0, 1, 2, 3. (L'interversion de deux indices, j et k par exemple, ne produit qu'un changement de signe dans chaque terme.) Le premier système donne, grâce à l'antisymétrie des F^{jk}, l'*équation de continuité*

$$\operatorname{div} s = \frac{\partial s^j}{\partial x^j} = 0, \tag{9}$$

à laquelle le vecteur-courant, supposé donné d'avance, doit satisfaire *a priori*.

Pour intégrer ces équations, on introduit d'habitude le *potentiel vecteur* A, aux composantes covariantes et contravariantes A_j et A^j respectivement. En posant

$$F_{jk} = \operatorname{rot}_{jk} A = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}, \tag{10}$$

le système (8) se trouve satisfait. La formule (6) donne immédiatement

$$F^{jk} = \frac{\partial A^k}{\partial x_j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_k}$$

---

[1] Le premier membre de (7) est connu sous le nom de *divergence tensorielle* du tenseur F. Nous nous permettons de proposer ici une notation abrégée pour la sommation cyclique figurant dans (8).

et par suite

$$(11)\qquad \frac{\partial F^{jk}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial^2 A^j}{\partial x_k \partial x^k}.$$

En posant encore la condition supplémentaire

$$(12)\qquad \operatorname{div} A = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0,$$

il ne reste dans le second membre de (11) que le dernier terme qui, d'après (4^{bis}), n'est autre chose que $-\square A^j$. Alors le système (7) se réduit au système

$$(13)\qquad \square A^j = s^j \text{ ou } \square A = s,$$

qui s'intègre par des potentiels retardés.

74. Les potentiels retardés. — Il est instructif de faire rentrer le problème d'intégration des équations (13) dans le cadre de la méthode développée au Chap. IV. Ceci se trouve tout fait dans les travaux de M. Fremberg[1] dont nous nous permettrons de reproduire, dans les n^{os} **74** et **75**, quelques parties essentielles. Nous nous bornerons comme lui à des domaines illimités tels qu'on les trouve caractérisés au début du n° **15**, ce qui fait qu'il n'y aura pas de conditions aux limites. On admet que les composantes s^j, qui sont supposées données, comme nous venons de le dire, satisfont aux conditions indiquées aux n^{os} **15**, **26** et **40**, et en outre à l'équation (9). La solution des équations est, selon la formule (2) du n° **44**, donnée par $A(x) = I^2 s(x)$. Pour arriver à l'expression de $I^2 s(x)$, on forme d'abord

$$(14)\qquad A^\alpha(x) = I^\alpha s(x) = \frac{1}{H_4(\alpha)} \int_{D^x} s(y)\, r_{xy}^{\alpha-4}\, dy, \qquad dy = dy^0\, dy^1\, dy^2\, dy^3,$$

où (*cf.* formule (20) du n° **16**)

$$(15)\qquad H_4(\alpha) = 2^{\alpha-1} \cdot \pi \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right).$$

L'intégrale converge pour $\alpha > 2$ et est définie, pour $\alpha \leqq 2$, par prolongement analytique.

En désignant l'origine par o, (14) peut s'écrire

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{H_4(\alpha)} \int_{D^0} s(x+y)\, r_{oy}^{\alpha-4}\, dy,$$

---

(1) Fremberg **2** et **3**.

d'où découle, en raison de (9),

$$\operatorname{div} A^\alpha(x) = \frac{1}{H_4(\alpha)} \int_{D^0} \operatorname{div}_x s(x+y)\, r_{oy}^{\alpha-4}\, dy = 0.$$

Les composantes covariantes

$$F_{jk}^\alpha = \frac{\partial A_k^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j^\alpha}{\partial x^k} \tag{16}$$

du tenseur antisymétrique F^α et ses composantes contravariantes satisfont aux équations

$$\frac{\partial F^{\alpha jk}}{\partial x^k} = -s^{\alpha j}, \tag{17}$$

$$\bigcirc \frac{\partial F_{kl}^\alpha}{\partial x^j} = 0, \tag{18}$$

où

$$s^{\alpha j} = \Box A^{\alpha j}.$$

En passant des composantes aux vecteurs eux-mêmes, et en tenant compte du résultat établi au n° **42**, on trouve

$$s^\alpha(x) = \Box A^\alpha(x) = A^{\alpha-2}(x) = I^{\alpha-2} s(x). \tag{19}$$

Pour $\alpha = 2$, $I^{\alpha-2} s(x)$ devient $I^0 s(x) = s(x)$, tandis que $A^\alpha(x)$ devient la solution cherchée de (13), à savoir $A(x) = I^2 s(x)$, c'est-à-dire, d'après la formule (30^{bis}) du n° **57**, le *potentiel retardé*

$$A(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_3} s(x^0 - \varrho, y^1, y^2, y^3) \frac{dy^1\, dy^2\, dy^3}{\varrho},$$

où

$$\varrho = \left(\sum_1^3 (x^k - y^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et l'intégrale est étendue à l'espace entier à trois dimensions.

75. Le champ produit par un électron. — Après ces préparatifs, considérons dans notre espace-temps une particule, soit un électron, représentée par un point matériel $z = (z^0, z^1, z^2, z^3)$ qui décrit une *ligne d'univers* L. Le déplacement infinitésimal dz sera, d'après les conceptions relativistes (toute vitesse mécanique est inférieure à la vitesse de la lumière), un vecteur de temps. Le carré de l'élément d'arc s'exprime par la relation $d\tau^2 = (dz, dz) > 0$. Le champ produit par un tel électron est donné par la rotation d'un potentiel vecteur, connu sous le nom du potentiel de Liénard-Wiechert. Les considérations qui suivent conduisent à de nouvelles expressions pour le potentiel et le champ en question.

Les coordonnées z^j des points de L pourront être exprimées comme fonctions d'un paramètre, p. ex. de l'arc τ de L, temps propre de l'électron, mesuré à partir d'un point fixe arbitraire et croissant avec z^0. On suppose que ces fonctions sont suffisamment dérivables (*cf.* le n° **27**). On suppose aussi que la ligne L s'étend à l'infini du côté des z^0 négatifs et y admet une asymptote qui est une droite de temps. Les valeurs correspondantes de z^0 et de τ sont égales à $-\infty$ toutes les deux, et on désignera encore par $-\infty$ le point infini lui-même. Pour des raisons de commodité, nous supposons que L s'étend à l'infini aussi du côté des z^0 positifs, mais nous ne faisons aucune hypothèse sur son allure à $+\infty$. Enfin on suppose que la charge portée par le point z est constamment égale à 1.

On voit que le vecteur-courant est nul partout, excepté sur la ligne L où il devient infini. Soit maintenant x un point qui n'est pas situé sur la ligne L, et formons, en analogie avec (14), le potentiel vecteur (retardé) d'ordre α

$$A^{\alpha}(x) = \frac{1}{H_4(\alpha)} \int\limits_{L^x} r_{xz}^{\alpha-4}\, d z, \tag{20}$$ [1]

où $r_{xz}^2 = (z-x,\ z-x)$ et L^x est la partie de L intérieure au cône rétrograde D^x au sommet x. L'arc L^x est donc formé de ceux des points de L qui sont «sous onde» par rapport à x (*cf.* le n° **55**). La limite inférieure de l'intégrale est le point $-\infty$, tandis que sa limite supérieure est le point d'intersection — unique, comme on le verra plus loin, — de la ligne L avec la nappe C^x du cône D^x.

On peut, par des formules analogues à (16) et (17), définir le champ et le courant d'ordre α et arriver à des équations de la forme (17) et (19). Une difficulté, particulière au cas actuel, provient du point $-\infty$. L'intégrale (20) converge pour $2 < \alpha < 3$, la limitation supérieure venant justement du point en question. La convergence peut, au moyen d'une intégration par parties, être étendue à l'intervalle $2 < \alpha < 5$, ce qui suffit à tous les besoins.[2]

---

[1] On ne confondra pas la notation dz qui figure dans l'intégrale (20) et qui signifie un vecteur, avec la notation $dy = dy^0\, dy^1\, dy^2\, dy^3$ figurant dans l'intégrale (14).

[2] *Voir* FREMBERG **2**, p. 83.

On déduit du potentiel vecteur A^α le champ électromagnétique F^α et le vecteur-courant s^α par un mécanisme analogue à celui développé au numéro précédent. Nous renvoyons pour les détails aux travaux cités de M. Fremberg.

Nous y renvoyons également pour l'application de notre méthode à l'élimination de certaines quantités infinies qui interviennent dans la théorie classique de l'électron (telle son énergie propre), problème résolu antérieurement par MM. Wentzel et Dirac[1] en associant les potentiels avancés aux potentiels retardés. Le fait que cette dernière méthode et la nôtre sont entièrement équivalentes dans la théorie *classique* de l'électron a été établi par M. Ma.[2] Notre méthode a aussi été appliquée en théorie *quantique* par MM. Gustafson, Nilsson et d'autres.[3] Il ressort de leurs recherches que notre méthode conduit à l'élimination de certaines quantités infinies, mais non pas de toutes, du moins dans l'état actuel de l'Électrodynamique Quantique.

76. Potentiel de Liénard-Wiechert. — Nous avons dit plus haut que la ligne L et la nappe C^x du cône rétrograde ont un point d'intersection unique. Nous allons examiner cette question d'une façon plus détaillée. Posons, en effet, $R_{xz} = r_{xz}^2 = (z-x,\, z-x)$. On a alors, en raison de la formule (23^{bis}), où τ désigne le temps propre, $dR/d\tau < 0$. On voit par là que R est une fonction continue et décroissante de τ et qu'il en est donc de même de τ considéré comme fonction de R. Cela fait voir que toute nappe rétrograde d'hyperboloïde $z^0 - x^0 < 0$ et $(z-x,\, z-x) = R > 0$, où R est fixé, coupe L en un seul point $z(x, R)$. Il en est ainsi en particulier de la nappe C^x du cône rétrograde qui coupe L au point $z(x, 0)$ qui est «juste en onde» par rapport à x. Notons encore que R décroît de $+\infty$ jusqu'à 0, quand le point z va de $-\infty$ à $z(x, 0)$.

En résumé, *à tout point x et à toute valeur $\geqq 0$ de R correspond un point unique z de L qui pourra être désigné par $z(x, R)$* et dont les coordonnées peuvent être considérées comme fonctions de cinq variables, savoir des quatre coordonnées x^j de x et de R, et peuvent être différentiées par rapport à ces variables.

Fixons d'abord le point x. Le point $z(x, R)$ sera alors une fonction de R et l'intégrale peut s'écrire

$$(21) \qquad A^\alpha(x) = \frac{1}{H_4(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} R^{\frac{\alpha-4}{2}} \frac{\partial z}{\partial R}\, dR = -\frac{1}{H_4(\alpha)} \int_{0}^{\infty} R^{\frac{\alpha-2}{2}-1} \frac{\partial z}{\partial R}\, dR.$$

---

[1] *Voir* p. ex. DIRAC **1**. [2] MA **1**. [3] Pour la Bibliographie *voir* NILSSON **1**.

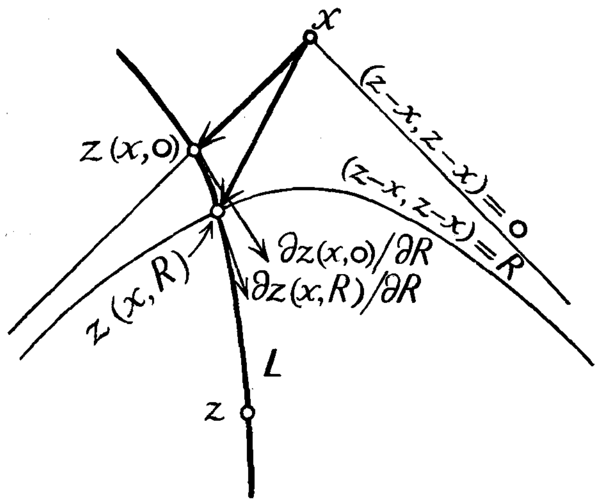

Fig. 12. La ligne d'univers L.

La valeur limite de cette intégrale pour $\alpha = 2$ *nous fournira le potentiel de Liénard-Wiechert.* On a $H_4(\alpha) = 2^{\alpha-1}\pi\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)$. Pour $\alpha = 2$, le facteur $2^{\alpha-1}\pi\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est $= 2\pi$, et alors on tire de la formule (13^{bis}) du n° **5** que *le potentiel cherché devient*

$$A(x) = A^2(x) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)_{(R=0)}. \tag{22}$$

La forme usuelle de ce potentiel[1] est, si l'on tient compte de notre façon de normer la charge,

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\dfrac{dz}{d\tau}}{\left(x - z,\ \dfrac{dz}{d\tau}\right)}, \tag{23}$$

où τ signifie le temps propre de l'électron. L'identité des deux expressions ressort du calcul suivant. On a manifestement

$$\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{dz}{d\tau} : \frac{dR}{d\tau}.$$

D'autre part, $R = (z - x,\ z - x)$ nous donne

[1] Dirac **1**, p. 163.

$$\frac{dR}{d\tau} = 2\left(z - x, \frac{dz}{d\tau}\right) = -2\left(x - z, \frac{dz}{d\tau}\right), \tag{23bis}$$

par où l'identité des expressions (22) et (23) se trouve vérifiée. Il est clair que dans (23) τ peut être remplacé par un paramètre quelconque.

77. Le point $z(x, R)$ en fonction de x et de R. — On montre facilement que

$$\frac{\partial z}{\partial x^j} = 2(z_j - x_j)\frac{\partial z}{\partial R}. \tag{24}$$

En effet, on a d'abord l'équation vectorielle

$$\frac{\partial z}{\partial x^j} = \lambda_j \cdot \frac{\partial z}{\partial R}, \tag{25}$$

où λ_j est un facteur de proportionnalité. D'autre part, en tenant compte de l'identité $R = (z - x, z - x)$ et du fait que R et x sont considérés comme des variables indépendantes, on obtient

$$1 = 2\left(z - x, \frac{\partial(z - x)}{\partial R}\right) = 2\left(z - x, \frac{\partial z}{\partial R}\right), \tag{26}$$

$$0 = 2\left(z - x, \frac{\partial(z - x)}{\partial x^j}\right) = 2\left(z - x, \frac{\partial z}{\partial x^j}\right) - 2\left(z - x, \frac{\partial x}{\partial x_j}\right) \tag{27}$$

ou

$$\left(z - x, \frac{\partial z}{\partial x^j}\right) = \left(z - x, \frac{\partial x}{\partial x^j}\right) = (z_k - x_k)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^j} \tag{28}$$
$$= (z_k - x_k)\cdot\delta_j^k = z_j - x_j;\ \delta_j^k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}.$$

En formant le produit scalaire des deux membres de (25) avec $z - x$, on tire des formules (26) et (28) $\lambda_j = 2(z_j - x_j)$. Il résulte de (24)

$$\operatorname{div}_x z = \frac{\partial z^j}{\partial x^j} = 2(z_j - x_j)\frac{\partial z^j}{\partial R} \tag{29}$$
$$= 2(z_j - x_j)\frac{\partial(z^j - x^j)}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(z - x, z - x) = \frac{\partial R}{\partial R} = 1,$$

ce qui nous donne la *formule importante*

$$\operatorname{div}_x \frac{\partial z}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\operatorname{div}_x z = 0. \tag{30}$$

On a donc en particulier pour le potentiel $A(x)$ de Liénard-Wiechert, à l'extérieur de la ligne d'univers,

$$\operatorname{div}_x A(x) = 0. \tag{31}$$

On peut adopter un point de vue plus général. Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial z(x, R)}{\partial R} = v(x, R). \tag{32}$$

Les fonctions $g(R)$ et $G(R)$ étant définies dans l'intervalle $0 \leqq R < \infty$, on peut former les intégrales

$$V(x) = \int_0^\infty g(R)\, v(x, R)\, dR = -\int_{L^x} g(R)\, dz$$

et

$$W(x) = \int_0^\infty v(x, R)\, d\, G(R).$$

Dans des conditions assez générales, que nous n'avons pas l'intention de préciser, ces intégrales ont un sens, et on peut conclure de la relation $\operatorname{div}_x v(x, R) = 0$ que $\operatorname{div}_x V(x) = 0$ et $\operatorname{div}_x W(x) = 0$. La fonction $G(R) = 0$ pour $R = 0$ et $= -1/2\pi$ pour $R > 0$ fournit le potentiel de Liénard-Wiechert (formule (22)), tandis que $g(R) = -R^{\frac{\alpha-4}{2}} / H_4(\alpha)$ fournit le potentiel d'ordre α défini par les formules (20) ou (21).

Il s'ensuit de la formule (35) du prochain numéro que

$$\square_x V(x) = 4 \int_0^\infty g(R)\, R \frac{\partial^2 v(x, R)}{\partial R^2}\, dR.$$

Si Rg et $d(Rg)/dR$ s'annulent pour $R = 0$ et ∞, on obtient, au moyen de deux intégrations par parties,

$$\square_x V(x) = 4 \int_0^\infty \frac{d^2 \{R\, g(R)\}}{dR^2}\, v(x, R)\, dR.$$

78. Le champ électromagnétique. — Nous obtenons

$$F_{jk}=\mathrm{rot}_{jk}A=\frac{\partial A_k}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^k}=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial z_k}{\partial R}-\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial z_j}{\partial R}\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial z_k}{\partial x^j}-\frac{\partial z_j}{\partial x^k}\right)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left\{(z_j-x_j)\frac{\partial z_k}{\partial R}-(z_k-x_k)\frac{\partial z_j}{\partial R}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left\{(z_j-x_j)\frac{\partial^2 z_k}{\partial R^2}-(z_k-x_k)\frac{\partial^2 z_j}{\partial R^2}\right\}=-\frac{1}{2\pi}\left\{(z_j-x_j)\frac{\partial v_k}{\partial R}-(z_k-x_k)\frac{\partial v_j}{\partial R}\right\},$$

ou, en utilisant une notation usuelle (¹),

$$F=\frac{1}{2\pi}\left[x-z,\ \frac{\partial v}{\partial R}\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial R}[x-z,\ v]=\frac{\partial}{\partial R}[z-x,\ A]. \tag{33}$$

On trouve facilement que pour tout point x (extérieur à la ligne L) F satisfait aux équations (7) et (8) de Maxwell, où dans (7) on a identiquement $s^j=0$. D'abord il est clair que ce champ, qui est une rotation, satisfait au second système de Maxwell. En observant que, d'après (30), $\mathrm{div}_x\, v(x,0)=0$, on voit, dès qu'on a montré que $\Box_x v(x,0)=0$, que F, en raison de (11), satisfait aussi au premier système. Nous allons calculer, dans un ordre d'idées plus général, $\Box_x v(x,R)$ et $\Box_x z(x,R)$ et *établir les formules suivantes*:

$$\Box_x z=4\left(R\frac{\partial^2 z}{\partial R^2}-\frac{\partial z}{\partial R}\right)=4\left(R\frac{\partial v}{\partial R}-v\right) \tag{34}$$

et

$$\Box_x v=4R\frac{\partial^2 v}{\partial R^2}. \tag{35}$$

De la formule (24) on tire

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=2(z^j-x^j)\frac{\partial z}{\partial R}. \tag{36}$$

Observons ensuite que, d'après la formule (21), $\mathrm{div}_x\, z=1$ et que $\mathrm{div}_x\, x=4$, ce qui donne $\mathrm{div}_x(z-x)=-3$. Il vient, en utilisant (36),

$$\Box_x z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^j\partial x_j}=2\frac{\partial}{\partial x^j}\left\{(z^j-x^j)\frac{\partial z}{\partial R}\right\}=2\frac{\partial}{\partial x^j}(z^j-x^j)\frac{\partial z}{\partial R}+2(z^j-x^j)\frac{\partial^2 z}{\partial x^j\partial R}$$

$$=-6\frac{\partial z}{\partial R}+2(z^j-x^j)\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial z}{\partial x^j}.$$

(¹) Nous désignons par $[U,\ V]$ (produit vectoriel des vecteurs U et V) le bivecteur (tenseur antisymétrique du second ordre) dont les composantes covariantes et contravariantes sont respectivement $[U,\ V]_{jk}=U_j V_k-U_k V_j$ et $[U,\ V]^{jk}=U^j V^k-U^k V^j$.

De plus

$$(z^j - x^j)\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial z}{\partial x^j} = (z^j - x^j)\frac{\partial}{\partial R}\left\{2(z_j - x_j)\frac{\partial z}{\partial R}\right\} = 2(z^j - x^j)(z_j - x_j)\frac{\partial^2 z}{\partial R^2}$$

$$+ 2\frac{\partial z}{\partial R}(z^j - x^j)\frac{\partial}{\partial R}(z_j - x_j) = 2R\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} + \frac{\partial z}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial R} = 2R\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} + \frac{\partial z}{\partial R}.$$

Cela, porté dans la formule précédente, fournit la formule (34) qu'on voulait démontrer. Ensuite on obtient

$$\Box_x\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\Box_x z = 4\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} - \frac{\partial z}{\partial R}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} + R\frac{\partial^3 z}{\partial R^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial R^2}\right) = 4R\frac{\partial^3 z}{\partial R^3},$$

ce qui n'est que la formule (35).

En particulier, si $R = 0$, $\Box_x v(x, 0) = 0$, ce qui établit le premier système de Maxwell.

79. Nouvelle expression du potentiel de Liénard-Wiechert. — Si l'on pose dans la formule (34) $R = 0$, on obtient

$$\left(\frac{\partial z(x, R)}{\partial R}\right)_{(R=0)} = v(x, 0) = -\frac{1}{4}\Box_x z(x, 0), \tag{37}$$

d'où il s'ensuit pour le potentiel de Liénard-Wiechert (formule (22))

$$A(x) = \frac{1}{8\pi}\Box_x z(x, 0). \tag{38}$$

Pour éliminer l'origine des coordonnées, on peut utiliser le fait que $\Box_x x = 0$, et on aura

$$A(x) = \frac{1}{8\pi}\Box_x(z - x), \tag{39}$$

où, pour abréger, on a désigné le point retardé $z(x, 0)$ par z.

En réalité, *je suis arrivé à ces formules assez remarquables par une voie plus intuitive*, qui se rattache à l'ordre d'idées du n° **52**. Là on a obtenu la solution du problème de Cauchy pour toute dimension paire $m = 2l$ par la formule

$$I_*^2 = \Delta^{l-1} I_*^m.$$

A cette formule correspondrait, dans le cas actuel où $m = 4$ et $l - 1 = 1$,

$$A(x) = A^2(x) = \Box_x A^4(x). \tag{40}$$

Or la formule (20) fournit (en raison de $H_4(4) = 8\pi$)

$$(41) \qquad A^4(x) = \frac{1}{8\pi}\int_{L^x} dz = \frac{1}{8\pi} z(x, 0),$$

ce qui, en vertu de (40), conduit de nouveau au résultat (38).

A vrai dire, dans le dernier terme de (41) on a supprimé un vecteur constant soustractif relatif au point $-\infty$, vecteur qui pour comble de malheur est infini lui-même. Or ce vecteur disparaît de la formule (40), puisqu'on y applique à $A^4(x)$ l'opération $\Box_x$. En réalité, il disparaît aussi de l'expression de $A^4(x)$, si on la calcule d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire par prolongement analytique.

Pour le champ électromagnétique F, la nouvelle expression (37) de v donne

$$F = \frac{1}{2\pi}\left[x - z,\ \frac{\partial v}{\partial R}\right] = -\frac{1}{8\pi}\left[x - z,\ \frac{\partial}{\partial R}\Box z\right] = -\frac{1}{8\pi}\left[x - z,\ \Box\frac{\partial}{\partial R} z\right]$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\left[x - z,\ \Box\left(-\frac{1}{4}\Box z\right)\right] = \frac{1}{32\pi}[x - z,\ \Box^2 z]$$

ou enfin, puisque $\Box^2 x = 0$,

$$F = -\frac{1}{32\pi}[z - x,\ \Box^2(z - x)].$$

Le bivecteur F est, comme on l'a vu, la rotation du potentiel vecteur A et satisfait aux équations de Maxwell (7) et (8), le vecteur-courant correspondant s étant nul sauf sur la ligne L. Formons aussi la rotation G du rayon vecteur $z - x$.

$$G_{jk} = \mathrm{rot}_{jk}(z - x) = \mathrm{rot}_{jk} z = \frac{\partial z_k}{\partial x^j} - \frac{\partial z_j}{\partial x^k} = 2(z_j - x_j)\frac{\partial z_k}{\partial R} - 2(z_k - x_k)\frac{\partial z_j}{\partial R}$$

$$= -\frac{1}{2}\{(z_j - x_j)\Box z_k - (z_k - x_k)\Box z_j\},$$

c'est-à-dire que G s'écrit

$$G = -\frac{1}{2}[z - x,\ \Box(z - x)].$$

Ce dernier bivecteur se trouve sur le même plan que la fonction de Hertz[1] donnée par le grand physicien à propos du problème d'un dipôle vibrant. Le potentiel vecteur A est, à un facteur constant près, la divergence tensorielle de G, c'est-à-dire le vecteur-courant correspondant au champ G, champ qui satisfait aux équations

$$\frac{\partial G^{jk}}{\partial x^k} = -\Box(z^j - x^j) = -8\pi A^j \quad \text{et} \quad \bigcirc\frac{\partial G_{kl}}{\partial x^j} = 0.$$

[1] *Voir* p. ex. ABRAHAM **1**, II, p. 62.

La relation entre le champ G et le champ électromagnétique F est simplement

$$\Box G = -8\pi F.$$

En résumé, le rayon vecteur $z - x$, allant de x au point retardé z, définit en tout point x de l'espace-temps un *champ vectoriel*, constitué d'ailleurs par des vecteurs isotropes. Le champ s'annule sur L, qui en est une ligne singulière. Ce champ vectoriel se trouve à la tête d'une *hiérarchie de champs successifs*, alternativement vectoriels et bivectoriels, $z - x$, G, A, F, *tous engendrés par la ligne d'univers de l'électron* et qui se déduisent l'un de l'autre par les deux opérations fondamentales, rotation et divergence tensorielle, ou, en sautant un champ sur deux, par l'opérateur des ondes. Cette succession de champs s'arrête à la ligne L elle-même, qui représente le vecteur-courant dégénéré, inhérent au problème.

CHAPITRE VII.

L'équation des ondes dans les espaces de Riemann.

80. Énoncé du problème. — Le but de ce dernier chapitre est d'étendre la méthode d'intégration exposée au Chapitre IV aux équations linéaires du type hyperbolique normal *à coefficients variables*. Nous nous restreignons ici au cas où le premier membre de l'équation en question est fourni par le *paramètre différentiel du second ordre* $\Delta_2 u$ de Beltrami[1], attaché à une certaine forme différentielle quadratique. L'extension au cas général est immédiate[2].

Soit donc

$$ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k, \text{[3]}$$

la forme métrique attachée à un espace de Riemann à m dimensions. On se trouve dans le cas de *signature lorentzienne* ou dans le cas hyperbolique normal, suivant la terminologie de M. Hadamard, si cette forme, transformée en somme de carrés, admet *un* carré positif et $m - 1$ carrés négatifs. En désignant par g la valeur absolue du déterminant $|g_{jk}| \neq 0$ et par g^{jk} les coefficients de la forme réciproque, le paramètre différentiel du second ordre correspondant $\Delta_2 u$ s'écrit

---

[1] On trouve pourtant au n° **98** un aperçu succinct de l'équation légèrement plus générale dont le premier membre est donné par $\Delta_2 u + \lambda^2 u$.

[2] Un problème d'extension plus général et plus difficile, concernant certains *systèmes* particuliers d'équations, qui pourtant renferment le cas d'une *seule* équation de forme générale, se trouve résolu dans la Thèse de mon ancien élève, M. Malmheden; *voir* MALMHEDEN **1**, Chapt. VII—IX.

[3] Nous appliquons dans ce chapitre l'écriture tensorielle; *cf.* p. 147 et le n° **81**.

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k}\right).(^1)$$

C'est ce dernier opérateur Δ_2 qui dans le cas d'un espace de Riemann généralise *l'opérateur des ondes* de l'espace lorentzien.

Un problème difficile, résolu par M. Hadamard d'une manière ingénieuse, est celui de construire la solution élémentaire dans le cas de coefficients variables. Ces solutions sont pourtant de caractères très différents (2) suivant que la dimension est impaire ou paire et il en est de même des méthodes d'intégration. La méthode de la partie finie n'est applicable que pour les dimensions impaires, et pour les dimensions paires il faut recourir à d'autres méthodes, dont l'une est la méthode de descente. Nous allons montrer que l'introduction d'un paramètre convenable permet encore de donner la solution du problème de Cauchy sous une forme qui est indépendante de la parité de la dimension de l'espace. Chemin faisant, nous allons développer un procédé d'intégration fractionnaire tout analogue à celui donné plus haut.

81. Généralités. — Nous commençons par rappeler quelques notions du calcul tensoriel (3). Nous appelons tout système de valeurs admises par les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ *point*, désigné par x, d'une variété abstraite ou d'un *espace général* à m dimensions. Les considérations qui suivent visent l'espace entier ou, de préférence, une région de cet espace.

Soit $x^j = x^j(x^{1'}, \ldots, x^{m'}) = x^j(x^{k'})$ une transformation ponctuelle qui établit une correspondance biunivoque entre les systèmes de coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ et $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$, de sorte qu'on a aussi $x^{k'} = x^{k'}(x^j)$. On suppose de plus que les fonctions qui établissent la correspondance sont *suffisamment dérivables* (4) et que d'ailleurs il en est de même de toute fonction introduite dans la suite.

On a les relations équivalentes

$$(1)\qquad \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta^j_l = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} = \delta^{j'}_{l'}\,(^5),$$

qui expriment que les matrices fonctionnelles $(\partial x^j/\partial x^{k'})$ et $(\partial x^{j'}/\partial x^k)$ sont réciproques. Il en résulte pour les déterminants fonctionnels

(1) Les détails nécessaires concernant les espaces de Riemann, l'expression $\Delta_2 u$ etc. seront donnés plus loin (n° **81**).

(2) *Cf.* en particulier le n° **90** du présent ouvrage.

(3) Pour un exposé plus complet, on pourra consulter p. ex. le livre excellent de M. L. Brillouin; Brillouin **1.**

(4) *Cf.* le n° **27**.

(5) Pour certaines conventions du calcul tensoriel *cf.* p. 147.

$$\frac{d(x)}{d(x')} = \frac{d(x^1, \ldots, x^m)}{d(x^{1'}, \ldots, x^{m'})} \quad \text{et} \quad \frac{d(x')}{d(x)} = \frac{d(x^{1'}, \ldots, x^{m'})}{d(x^1, \ldots, x^m)} \tag{2}$$

que

$$\frac{d(x)}{d(x')} \cdot \frac{d(x')}{d(x)} = 1. \tag{3}$$

Pour les différentielles des coordonnées, il vient

$$d x^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} d x^{k'} \quad \text{ou} \quad d x^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} d x^k. \tag{4}$$

Pour les dérivées partielles d'un *scalaire* u, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial u}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}. \tag{5}$$

Les quantités $U^1, \ldots, U^m$ attachées au point x forment les composantes d'un *vecteur contravariant* s'ils obéissent à la même loi de transformation que les différentielles (4). Les composantes $V_1, \ldots, V_m$ d'un *vecteur covariant* auront par contre à obéir à la même loi que les dérivées partielles (5). Ou, d'une manière explicite,

$$U^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} U^{k'} \quad \text{ou} \quad U^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} U^k \tag{6}$$

et

$$V_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} V_{k'} \quad \text{ou} \quad V_{j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} V_k. \tag{7}$$

Le produit scalaire

$$(U, V) = U^j V_j \tag{8}$$

est invariant par les transformations (6) et (7) qui sont donc *contragrédientes.*

En particulier, les différentielles $d x^j$ forment les composantes contravariantes du vecteur $d x$ qui exprime le *déplacement infinitésimal* du point x, tandis que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x^j} = \operatorname{grad}_j u$ forment les composantes covariantes du *gradient* de u. Le produit scalaire $\frac{\partial u}{\partial x^j} d x^j$ des susdits vecteurs est un invariant, la *différentielle totale* $d u$ de la fonction u.

Au point où nous sommes, les vecteurs contravariants et covariants sont des objets géométriques distincts. La situation change complètement au moment où, par l'introduction d'une métrique, l'espace général devient un *espace de Riemann.* Dans un tel espace, on pourra assigner à chaque vecteur des composantes contravariantes *et* covariantes.

On aura un *espace de Riemann*, dès qu'on aura défini le carré de la distance ds de deux points infiniments voisins x et $x + dx$ par une relation telle que

$$(9) \qquad ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k, \quad g_{jk} = g_{kj}.$$

La *forme métrique* $g_{jk}\, dx^j\, dx^k$ est donc une forme différentielle quadratique, dont les coefficients dépendent en général des coordonnées du point x, $g_{jk} = g_{jk}(x)$. Cette forme peut jusqu'à nouvel ordre être définie ou indéfinie. On suppose pourtant que le déterminant $|g_{jk}| \neq 0$ et on désigne, comme plus haut, par g la valeur absolue de ce déterminant. Les coefficients g^{jk} de la forme réciproque sont symétriques eux aussi, $g^{jk} = g^{kj}$, et satisfont aux relations

$$(10) \qquad g_{jk}\, g^{kl} = g^{lk}\, g_{kj} = \delta^l_j.$$

Du caractère invariant de

$$ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k = g_{j'k'}\, dx^{j'}\, dx^{k'},$$

il résulte que

$$(11) \qquad g_{jk} = g_{p'q'} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} \quad \text{ou} \quad g_{j'k'} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}}.$$

Ces dernières relations et (10) entraînent

$$(12) \qquad g^{jk} = g^{p'q'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{p'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{q'}} \quad \text{ou} \quad g^{j'k'} = g^{pq} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^q}.$$

Le vecteur U de composantes contravariantes U^j aura, *par définition*, les composantes covariantes

$$(13) \qquad U_j = g_{jk}\, U^k \quad (\text{d'où } U^j = g^{jk}\, U_k),$$

tandis que le vecteur V de composantes covariantes V_j aura les composantes contravariantes

$$(14) \qquad V^j = g^{jk}\, V_k \quad (\text{d'où } V_j = g_{jk}\, V^k).$$

On pourra dès lors parler du *carré scalaire* d'un vecteur U quelconque

$$(15) \qquad (U,\, U) = g_{jk}\, U^j\, U^k = g^{jk}\, U_j\, U_k = U^j\, U_j, \text{[1]}$$

et du *produit scalaire* de deux vecteurs U et V quelconques

$$(16) \qquad (U,\, V) = g_{jk}\, U^j\, V^k = g^{jk}\, U_j\, V_k = U^j\, V_j = U_j\, V^j.$$

[1] Vecteur de temps, vecteur d'espace, vecteur isotrope et vecteur unitaire se définissent comme à la page 27.

Deux vecteurs U et V dont le produit scalaire $(U, V) = 0$ sont dits *orthogonaux*.

Les *composantes contravariantes du gradient* d'une fonction u sont

$$\text{grad}^j u = g^{jk} \text{grad}_k u = g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k}. \tag{17}$$

Le carré scalaire du gradient de u et le produit scalaire des gradients de u et de v sont les *paramètres différentiels du premier ordre* de Beltrami

$$\Delta_1 u = g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^k} \tag{18}$$

et

$$\Delta_1(u, v) = \Delta_1(v, u) = g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial v}{\partial x^k}. \tag{19}$$

Les expressions (15)—(16) et (18)—(19) sont *invariantes* par rapport à une transformation de coordonnées arbitraire en vertu des relations données plus haut.

Le déterminant $|g_{jk}|$ se transforme en raison de (11) d'après les formules

$$|g_{jk}| = |g_{j'k'}| \left(\frac{d(x')}{d(x)}\right)^2 \quad \text{ou} \quad |g_{j'k'}| = |g_{jk}| \left(\frac{d(x)}{d(x')}\right)^2 \tag{20}$$

et la racine carrée de sa valeur absolue g d'après les formules

$$\sqrt{g} = \sqrt{g'} \left|\frac{d(x')}{d(x)}\right| \quad \text{ou} \quad \sqrt{g'} = \sqrt{g} \left|\frac{d(x)}{d(x')}\right|. \tag{20^{bis}}$$

Pour l'*élément de volume invariant* de l'espace de Riemann, la formule (56) du n° **21**^{bis} nous fournit l'expression

$$d\Omega = \sqrt{g} \begin{vmatrix} d_1 x^1, & \ldots, & d_1 x^m \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ d_m x^1, & \ldots, & d_m x^m \end{vmatrix} \tag{21}$$

ou, en particulier,

$$d\Omega = \sqrt{g} \cdot dx^1 \ldots dx^m, \tag{21^{bis}}$$

la première expression générale étant le volume du parallélépipède construit sur les déplacements infinitésimaux $d_1 x, d_2 x, \ldots, d_m x$, tandis que dans le cas particulier (21^{bis}) une seule des coordonnées varie à chaque déplacement.

Nous aurons plus loin besoin de la *divergence* d'un vecteur A. On arrive, soit par différentiation covariante, soit par l'application du théorème de Gauss (n° **92**), à la définition

$$\text{div}\, A = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\, A^j). \tag{22}$$

Cette définition peut aussi être rendue légitime en observant qu'elle se réduit à la définition ordinaire, lorsque les coefficients de la forme métrique sont constants, et en vérifiant que (31) *est invariant par rapport à tout changement de coordonnées.* Ce dernier fait découle aisément du théorème suivant de Jacobi, théorème qui d'ailleurs sert de base à la théorie des multiplicateurs d'un système d'équations différentielles.

Les mineurs D_γ^j *relatifs aux éléments* $\partial f^\gamma/\partial x^j$ *d'un déterminant fonctionnel* $d(f^1, \ldots, f^\gamma, \ldots, f^m)/d(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^m)$ *satisfont à la relation*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial D_\gamma^j}{\partial x^j} = 0. \text{ (1)}$$

Or les matrices $(\partial x^{k'}/\partial x^j)$ et $(\partial x^k/\partial x^{j'})$ étant réciproques, le mineur relatif à l'élément $\partial x^{k'}/\partial x^j$ du déterminant $d(x')/d(x)$ est égal à $\dfrac{d(x')}{d(x)} \cdot \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{k'}}$. Par suite, le théorème de Jacobi peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{d(x')}{d(x)} \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}}\right) = 0.$$

Eu égard à cette relation et aux relations (6) et (20^{bis}), il vient

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\, A^j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g'} \cdot \left|\frac{d(x')}{d(x)}\right| \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \cdot A^{k'}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{g}} \left|\frac{d(x')}{d(x)}\right| \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g'}\, A^{k'}) \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}}(\sqrt{g'}\, A^{k'}). \text{ (2)}$$

En égalant les composantes A^j qui figurent dans (22) aux composantes contravariantes de grad u, données par la formule (17), on conclut *l'invariance du paramètre différentiel du second ordre*

---

(1) *Cf.* p. ex. GOURSAT II (1911), p. 310.

(2) La vérification ci-dessus rappelle beaucoup celle donnée par M. Brillouin (**1**, p. 71—72) qui pourtant ne s'appuie pas de manière explicite sur le théorème de Jacobi. Les deux vérifications s'appliquent aussi à l'expression plus générale $\tau^{-1}\partial(\sigma A^k)/\partial x^k$, où σ et τ sont des densités scalaires ($\sigma = \sigma' \cdot d(x')/d(x)$, $\tau = \tau' \cdot d(x')/d(x)$). Cette dernière expression ne contient aucun élément métrique, la propriété d'invariance envisagée appartient donc en réalité à la géométrie vectorielle affine, point de vue que M. Brillouin fait soigneusement ressortir.

$$\Delta_2 u = \Delta u = \text{div grad } u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right), \tag{23}$$

dont l'étude forme un des principaux objets du présent chapitre. Faisons remarquer que *c'est uniquement de la notation abrégée Δu que nous nous servirons dans la suite.*

Les vecteurs sont les *tenseurs* du premier ordre. Nous pouvons nous dispenser de parler longuement des tenseurs d'ordre supérieur au premier et nous contenter de signaler un tenseur du second ordre, qui d'ailleurs est d'une importance capitale, le *tenseur métrique* de l'espace. Ses *composantes covariantes* et *contravariantes* sont les quantités g_{jk} et g^{jk} respectivement, avec leurs formules de transformation (11) et (12), tandis que les quantités invariantes δ^j_k sont ses *composantes mixtes.*

82. Géodésiques. — Pour la commodité du lecteur, nous donnons ici un aperçu des géodésiques d'un espace de Riemann, lignes qui vont jouer un rôle fondamental dans la suite. Il nous faudra tenir compte du fait que *la forme métrique de l'espace est indéfinie dans les applications que nous avons en vue.*

Envisageons des courbes C, données sous la forme $x^j = x^j(\sigma)$, σ étant un paramètre, et le *problème de variation* relatif à l'intégrale

$$\int_C L(x, \dot{x})\, d\sigma, \quad \text{où } \dot{x}^j = \frac{d x^j}{d\sigma} \quad \text{et} \quad L(x, \dot{x}) = g_{jk}(x)\, \dot{x}^j \dot{x}^k. \tag{24}$$

Les *extrémales* de ce problème sont données par les *équations d'Euler*

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{25}$$

De ces équations et du fait que L est homogène et du second degré dans les $\dot{x}^k$, on tire

$$\frac{dL}{d\sigma} = \frac{\partial L}{\partial x^k} \dot{x}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \ddot{x}^k = \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \ddot{x}^k = \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^k \right) = \frac{d}{d\sigma}(2L) = 2 \frac{dL}{d\sigma}.$$

C'est-à-dire que $dL/d\sigma = 0$, ou, en d'autres termes, *L est constant le long de toute extrémale C. Si cette valeur constante est différente de zéro, on peut diviser* (25) *par* $2|L|^{\frac{1}{2}}$, ce qui fournit les équations

$$\frac{\partial |L|^{\frac{1}{2}}}{\partial x^j} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial |L|^{\frac{1}{2}}}{\partial \dot{x}^j} = 0, \tag{26}$$

qui ne sont que les équations d'Euler relatives au problème de variation

$$\int_C |L|^{\frac{1}{2}} d\sigma = \int_C |g_{jk}\, dx^j\, dx^k|^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

La dernière intégrale exprime la longueur de l'arc de la courbe à laquelle cette intégrale est étendue, les équations (26) fournissent donc les *géodésiques* de l'espace de Riemann envisagé. En conséquence, *les équations* (25) *fournissent, elles aussi, les géodésiques en question* (¹).

Or le système (25) admet aussi des solutions pour lesquelles la valeur constante de L est nulle. *Par extension*, ces lignes seront encore considérées comme des géodésiques, bien que le système (26) cesse d'avoir un sens pour une telle ligne.

Le fait que la valeur de L est constante sur toute courbe fournie par le système (25) implique que, sur une géodésique arbitraire, la forme métrique $g_{jk}\, dx^j\, dx^k$ garde son signe ou s'annule identiquement. Suivant que ce signe est *positif*, *négatif*, *nul*, on pourra parler de *géodésiques de temps*, *géodésiques d'espace*, *géodésiques isotropes* ou *de longueur nulle*. Ces dernières sont encore appelées *bicaractéristiques* suivant la terminologie de M. Hadamard.

Il y a une différence essentielle entre le rôle que le paramètre σ joue dans le système d'équations (26) d'un côté et dans le système (25) de l'autre. En effet, il est clair par la seconde forme de l'intégrale (27) que, dans la première forme de cette intégrale, on peut remplacer σ par un paramètre tout à fait arbitraire, soit τ, en posant $\dot{x}^j = dx^j/d\tau$. Cela étant, les équations (26) ne seront pas changées si on y introduit τ au lieu de σ, ce qui d'ailleurs est aisé à vérifier par un calcul direct. En d'autres termes, les équations (26) (et des conditions aux limites appropriées) déterminent la géodésique C, mais non σ, qui reste un paramètre arbitraire. *Il en est tout autrement des équations* (25), *où la coordination entre les points x de la courbe et le paramètre σ est déterminée à une substitution linéaire $\sigma \to a\sigma + b$ près* (¹), résultat extrêmement important pour la suite.

D'abord il est clair que les équations (25) restent valides si l'on y remplace σ par $a\sigma + b$. Réciproquement, si la relation $L =$ const. $\neq 0$ a lieu en deux représentations paramétriques (²) relatives à deux paramètres σ et τ, elle implique que $d\tau/d\sigma$ doit être constant.

(¹) Quant aux rapports entre les équations (25) et (26) et les principes de la Dynamique, *voir* Hadamard **1**, p. 117—118.

(²) Évidemment, les valeurs constantes en question seront, en général, différentes.

Le raisonnement ci-dessus tombe en défaut pour une géodésique de longueur nulle, la valeur constante de L étant nulle sur une telle géodésique. Voici une démonstration qui embrasse tous les cas.

Admettons qu'une extrémale satisfait en même temps aux équations (25) relatives soit au paramètre σ, soit au paramètre τ. En posant $d\sigma/d\tau = A$, on a $d/d\tau = A \cdot d/d\sigma$, tandis que les quantités L, $\partial L/\partial x^j$, $\partial L/\partial \dot{x}^j$, relatives à σ, deviennent respectivement $A^2 L$, $A^2 \partial L/\partial x^j$, $A \partial L/\partial \dot{x}^j$, par où les équations relatives à τ s'écrivent

$$0 = A^2 \frac{\partial L}{\partial x^j} - A \frac{d}{d\sigma}\left(A \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) = A^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{d\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) - A \frac{dA}{d\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}.$$

La comparaison avec (25) donne que le dernier terme s'annule pour tout indice j. Il en résulte que $dA/d\sigma = 0$, car $\partial L/\partial \dot{x}^j = 0$, pour tout j, donnerait, en vertu de $|g_{jk}| \neq 0$, $\dot{x}^k = 0$, pour tout k. Par conséquent $d\sigma/d\tau =$ const. ou $d\tau/d\sigma$ $=$ const.

Les paramètres dans lesquels les équations des lignes géodésiques admettent la forme (25) et qui, comme nous venons de le voir, sont déterminés, à une substitution linéaire près, seront appelés *paramètres admissibles. Seuls ces derniers paramètres seront utilisés dans la suite.*

83. Équations canoniques. — Le système de m équations du second ordre (25) à m inconnues x^j est équivalent à un système de $2m$ équations du premier ordre à $2m$ inconnues. Pour arriver aux *équations hamiltoniennes* ou *canoniques*, on introduit à côté des x^j comme nouvelles inconnues les quantités (composantes covariantes du vecteur tangent de composantes contravariantes $\dot{x}^j$)

$$p_j = g_{jk}\dot{x}^k = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}, \tag{28}$$

relations équivalentes à

$$\dot{x}^k = \frac{1}{2} g^{kj}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = g^{kj} p_j. \tag{29}$$

Introduisons encore la *fonction hamiltonienne*

$$H(x, p) = g^{jk} p_j p_k. \tag{30}$$

On tire des formules qui précèdent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial p_j} = g^{jk} p_k = \dot{x}^j = \frac{dx^j}{d\sigma} \tag{31}$$

et

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial p_j} p_j = \dot{x}^j p_j = \frac{1}{2} \dot{x}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = L(x, \dot{x}). \tag{32}$$

On a encore les relations

$$\frac{\partial H(x, p)}{\partial x^j} = -\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^j}, \tag{33}$$

qui résultent des propriétés connues de la transformation de Legendre, si l'on observe que $L + H = 2\dot{x}^k p_k$, mais qui peuvent aussi se vérifier par un calcul direct. En effet

$$\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x^j} + \frac{\partial H(x, p)}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \dot{x}^k \dot{x}^l + \frac{\partial g^{kr}}{\partial x^j} p_k p_r = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} g^{kr} p_r \dot{x}^l + \frac{\partial g^{kr}}{\partial x^j} g_{kl} \dot{x}^l p_r$$
$$= \frac{\partial (g_{kl} g^{kr})}{\partial x^j} \dot{x}^l p_r = \frac{\partial \delta_l^r}{\partial x^j} \dot{x}^l p_r = 0.$$

Des relations (31), (25), (28) et (33), on tire les *équations canoniques des géodésiques*

$$\frac{dx^j}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{d\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x^j}. \tag{34}$$

Il résulte immédiatement de ces équations que $dH = 0$, c'est-à-dire que $H =$ const. le long de toute géodésique, en accord parfait avec le fait identique établi plus haut pour $L (= H)$.

84. La distance géodésique. — Dans la théorie habituelle des géodésiques, où la forme métrique est définie positive, c'est l'arc de la géodésique qui figure comme paramètre dans les deux systèmes équivalents (25) et (34). Cet arc, compté à partir d'un point arbitraire x_0 de la géodésique, se définit par l'intégrale, prise suivant la géodésique, $s = \int_{x_0}^{x} (g_{jk}\, dx^j\, dx^k)^{\frac{1}{2}}$. Avec s comme paramètre, on a évidemment $L(x, \dot{x}) = 1 =$ const., ce qui fait voir que s est un paramètre admissible. Dans le cas d'une forme indéfinie, on pourra faire de même pour les géodésiques de temps, sur lesquelles $g_{jk}\, dx^j\, dx^k > 0$; c'est précisément ce que nous ferons au nº **89**. L'emploi de l'arc comme paramètre est encore possible sur les géodésiques d'espace, où $g_{jk}\, dx^j\, dx^k < 0$, si l'on utilise l'expression $\int |g_{jk}\, dx^j\, dx^k|^{\frac{1}{2}}$, comme nous l'avons fait incidemment plus haut, ou si l'on admet des valeurs imaginaires (pures) pour l'arc. Cependant dans le cas des géodésiques isotropes, dont la longueur d'arc est identiquement nulle, on doit garder le paramètre sous sa forme générale.

Plus important que cette question de paramétrisation moyennant l'arc est le problème de la *distance géodésique* $s(x; y)$ de deux points x et y, donnée (dans certaines conditions qu'on va encore préciser) par l'arc de la géodésique qui joint ces points. Pour éviter des quantités imaginaires, nous préférons considérer le carré $s^2(x; y)$ de cette distance, qui aura toujours une valeur réelle, cette valeur étant, suivant les cas, positive, nulle ou négative.

Il ressort des théorèmes d'existence des systèmes d'équations différentielles que *les géodésiques menées en un point fixe* x_0 *sont parfaitement déterminées par les rapports mutuels entre les différentielles* dx_0^k. On peut aussi montrer que, le point x se trouvant dans un voisinage suffisamment restreint [1] du point x_0, il existe dans ce voisinage *une géodésique et une seule qui joint les deux points* et que cette géodésique varie d'une manière continue et même suffisamment dérivable avec ces points [2].

Tout cela étant bien compris, le carré $s^2(x; y)$ de l'arc géodésique, précisé tout à l'heure, joignant deux points suffisamment voisins x et y sera une quantité bien déterminée. Cette quantité, qui est d'ailleurs *symétrique* en x et en y, sera appelée *carré de la distance géodésique des points* x *et* y. Nous posons encore, avec M. Hadamard, $s^2(x; y) = \Gamma(x; y)$ et nous allons déduire *l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* que $\Gamma(x; y)$ vérifie en fonction soit de x, soit de y.

On a vu plus haut que la fonction L admet une valeur constante le long d'une géodésique arbitraire et ainsi, en particulier, le long de la géodésique joignant x et y, valeur qui pourtant dépend du choix du paramètre σ, la substitution $\sigma \to A\sigma + B$ amenant le changement $L \to A^{-2}L$. Nous allons montrer que la valeur constante en question devient égale à $\Gamma(x; y)$ si l'on normalise le paramètre σ de façon qu'il admet les valeurs respectives 0 et 1 aux points x et y. Observons d'abord que le paramètre est *entièrement déterminé* par ces conditions; nous l'appellerons *paramètre normalisé relativement à* x *et* y. Désignons ensuite par z le point courant de la géodésique et par σ_z la valeur de σ qui,

---

(1) On entend ici par voisinage d'un certain point l'intérieur d'une surface simple fermée entourant ce point. On dira, dans les circonstances figurant au texte, que le point x est suffisamment voisin du point x_0 et, dans des circonstances analogues, que deux points x et y sont suffisamment voisins.

(2) Pour des énoncés plus précis *voir* HADAMARD **1**, p. 120—123, 156—159, 408; HADAMARD **3**, p. 106—123 (pour p. 121 *cf.* les *Errata*), 497—511; A. SZÜCS **1**, p. 380—391.

dans une paramétrisation arbitraire[1], correspond à z. Admettons, pour commencer, qu'il s'agit d'une géodésique de temps. Si l'on pose d'abord σ_z égal à l'arc $s(x; z)$ (compté à partir de x) de cette géodésique, on obtient évidemment $L = 1$. Pour le paramètre normalisé $\tau_z = s(x; z) : s(x; y)$, il vient par conséquent $L = s^2(x; y) = \Gamma(x; y)$. Pour des géodésiques d'espace, le choix $\sigma_z = |s(x; z)|$ donne $L = -1$, et le paramètre normalisé $\tau_z = |s(x; z)| : |s(x; y)|$ fournit encore $L = -|s(x; y)|^2 = s^2(x; y) = \Gamma(x; y)$. Enfin, si la géodésique est isotrope, on a encore $L = \Gamma(x; y)$, puisque ces valeurs sont nulles, toutes les deux. *En résumé*

$$L(z, \dot{z}) = \Gamma(x; y) \tag{35}$$

où z est un point arbitraire de la géodésique qui joint x et y, $\dot{z}^k = dz^k/d\tau$ et τ est le paramètre normalisé admettant les valeurs respectives 0 *et* 1 *en x et en y.*

Puisque $L(z, \dot{z}) = \Gamma(x; y)$, on a aussi $\Gamma(x; y) = \int_0^1 L(z, \dot{z})\, d\tau$, l'intégrale étant prise le long de la géodésique C joignant x et y. Soient maintenant $x + \delta x$ et $y + \delta y$ deux points infiniment voisins, le premier de x, le second de y, et $C + \delta C$ la géodésique qui les joint. On a cette fois-ci $\Gamma(x + \delta x; y + \delta y) = \int_0^1 L(z, \dot{z})\, d\tau$, l'intégrale étant prise le long de $C + \delta C$ et le paramètre τ normalisé relativement à $x + \delta x$ et $y + \delta y$. Il vient dès lors, grâce à la *formule aux limites*[2] du Calcul des Variations,

$$\delta \Gamma(x; y) = \Gamma(x + \delta x; y + \delta y) - \Gamma(x, y) = \left[\frac{\partial L(z, \dot{z})}{\partial \dot{z}^k}\, \delta z^k\right]_{(z=x)}^{(z=y)}, \tag{36}$$

où c'est le paramètre τ, normalisé relativement à x et y, qui figure dans les dérivées $\dot{z}^k = dz^k/d\tau$. Cette formule nous donne

$$\frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial x^k} = -\frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \text{ et } \frac{\partial \Gamma(x, y)}{\partial y^k} = \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^k}, \tag{37}$$

et dès lors, en raison de ce qui précède et des formules (35), (32) et (28),

$$\Gamma(x; y) = L(x^j, \dot{x}^k) = H(x^j, p_k) = \frac{1}{4} H\left(x^j, \frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial x^k}\right), \tag{38}$$

ou, écrit d'une manière détaillée,

---

[1] Il n'est évidemment jamais question que de paramètres *admissibles*; *voir* plus haut, p. 167.

[2] *Voir* p. ex. HADAMARD **3**, p. 144 et 152; GOURSAT III (1915), p. 567.

$$(38^{bis}) \qquad \Delta_1 \Gamma(x; y) = g^{jk}(x) \frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial x^j} \frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial x^k} = 4 \Gamma(x; y), \text{(}^1\text{)}$$

équation d'importance capitale, qui subsiste évidemment si l'on y échange x et y.

Remarquons dans un autre ordre d'idées que, dans le cas où les géodésiques C et $C + \delta C$ sont *isotropes*, on peut encore tirer de la formule (36) la relation importante

$$(39) \qquad \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^k} \delta y^k - \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \delta x^k = 0 \text{ ou } g_{jk}(y) \dot{y}^j \delta y^k - g_{jk}(x) \dot{x}^j \delta x^k = 0,$$

valable pour un paramètre admissible *arbitraire*.

En effet, les égalités $\Gamma(x; y) = \Gamma(x + \delta x; y + \delta y) = 0$ entraînent $\delta \Gamma(x; y) = 0$, ce qui, de son côté, entraîne (39) pour le paramètre normalisé τ. Le passage au paramètre σ arbitraire est immédiat, car les termes de (39) se multiplient par le même facteur A^{-1} quand $\sigma = A\tau + B$.

En vue d'une application prochaine, nous transcrivons encore les formules (35) et (37), relatives au paramètre normalisé τ, pour le cas d'un paramètre arbitraire σ. Ce dernier paramètre admettant les valeurs respectives σ_x et σ_y aux points x et y, on aura $\tau = (\sigma - \sigma_x):(\sigma_y - \sigma_x)$ et par conséquent

$$(35^{bis}) \qquad \Gamma(x; y) = (\sigma_y - \sigma_x)^2 L(z, \dot{z}).$$

On aura de même

$$(37^{bis}) \qquad \frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial x^k} = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^k} \text{ et } \frac{\partial \Gamma(x; y)}{\partial y^k} = (\sigma_y - \sigma_x) \frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^k}.$$

85. Coordonnées normales. — Considérons une région $\mathcal{R}$, un point x_0 intérieur à $\mathcal{R}$ et supposons que tout autre point x intérieur à $\mathcal{R}$ peut être joint à x_0 par une géodésique parfaitement déterminée, située dans $\mathcal{R}$ et variant d'une manière continue et suffisamment dérivable avec x (²). On reprend le paramètre σ des équations (25) et *on pose* $\sigma = 0$ *en* x_0, par où la paramétrisation de chaque géodésique est déterminée à une substitution $\sigma \to A\sigma$ près. Envisageons un point x de $\mathcal{R}$, la géodésique C qui le joint au point x_0, et formons les quantités

---

(¹) On peut encore procéder de la manière suivante

$$\Gamma = L = \frac{1}{2} \dot{x}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} g^{jk} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} g^{jk} \frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} \frac{\partial \Gamma}{\partial x^k}.$$

(²) *Voir* HADAMARD **1**, p. 156—159.

$$\xi^k = \sigma_x \left(\frac{d\,x^k}{d\,\sigma}\right)_0 = \sigma_x\,\dot{x}_0^k, \tag{40}$$

où les paramètres directeurs sont ceux de la géodésique C au point x_0, σ_x est la valeur que le paramètre σ admet au point x, le tout étant d'abord calculé au moyen d'une paramétrisation fixée. Or les quantités ξ^k, étant invariantes par toute substitution $\sigma \to A\,\sigma$, ne dépendent pas du choix du paramètre, c'est-à dire qu'*elles ne dépendent que du point* x ou, si l'on veut, des coordonnées x^k de ce point. Inversement, *les quantités* ξ^k *déterminent le point* x. Il suffit de montrer que deux points x différents fournissent deux systèmes de valeurs ξ^k différents. Supposons donc un instant, pour fixer les idées, que σ est normalisé sur chaque géodésique de façon qu'il admet la valeur 1 au point d'intersection de la géodésique avec une certaine surface fermée, intérieure à $\mathcal{R}$, entourant x_0 et coupée en un seul point par chaque géodésique issue de x_0. Cela étant, considérons deux points x différents. Si ces points appartiennent à des géodésiques tangentes en x_0 à des droites différentes, les rapports mutuels des ξ^k seront différents. Pour deux points situés sur deux arcs opposés admettant la même tangente, les signes des ξ^k seront opposés. Enfin pour deux points différents situés sur le même arc géodésique, on aura les mêmes paramètres directeurs, mais des valeurs différentes de σ.

En résumé, *le point* x *et le système des quantités* ξ^k *sont mutuellement déterminés* l'un par l'autre, ce qui fait que ces quantités pourront être introduites comme de nouvelles coordonnées de x. Ces coordonnées, inventées par Riemann, sont appelées *coordonnées normales* (¹) du point x (autour de x_0). Le point x_0, dont toutes les coordonnées deviennent nulles, est appelé l'*origine* du système de coordonnées en question.

Le système de coordonnées (40) est tangent en x_0 au système original des x^k. On a visiblement $\partial\,x^j/\partial\,\xi^k = \delta_k^j$ au point x_0, les coefficients g_{jk} de la forme métrique resteront donc inaltérés en ce point (*cf.* la formule (11)). Si l'on part d'un second système de coordonnées $x^{k'}$, le système de coordonnées normales $\xi^{k'}$, déduit de ce dernier système de la manière ci-dessus, est lié au système ξ^k par une transformation linéaire à coefficients constants

$$\xi^{j'} = \left(\frac{\partial\,x^{j'}}{\partial\,x^k}\right)_0 \xi^k. \tag{41}$$

(¹) Ces coordonnées sont des fonctions suffisamment dérivables des anciennes coordonnées et *vice versa*; *voir* la note précédente.

Les géodésiques issues du point x_0 sont dans un système de coordonnées normales, prises comme coordonnées affines, représentées par des lignes droites issues de l'origine de ces coordonnées.

Pour des géodésiques de temps, il est souvent avantageux de spécialiser σ et d'écrire, tout comme dans le cas d'une forme métrique définie positive,

$$\xi^k = s\left(\frac{dx^k}{ds}\right)_0 = s\,\dot{x}_0^k, \tag{42}$$

s désignant la longueur de l'arc géodésique (x_0, x).

L'emploi de coordonnées normales amène de grandes simplifications dans beaucoup de calculs. Pour commencer, nous modifions légèrement nos notations. Le point x_0, origine des coordonnées normales, sera désigné par o, le point x de coordonnées normales ξ^k par ξ; le point courant z de la géodésique sera ici ζ. Nous écrirons respectivement $g_{jk}(0)$, $g_{jk}(\xi)$, $g_{jk}(\zeta)$ au lieu de $g_{jk}(x_0)$, $g_{jk}(x)$, $g_{jk}(z)$ etc. L'expression $\Gamma(x_0; x)$, carré de la distance géodésique entre x_0 et x devient dans les nouvelles notations $\Gamma(0; \xi)$. Les formules (40), transcrites d'une manière convenable, deviennent à leur tour

$$\zeta^k = \sigma_\zeta \left(\frac{d\zeta^k}{d\sigma}\right)_0 = \sigma\,\dot{\zeta}_0^k. \tag{43}$$

Il en vient, le long de chaque géodésique,

$$\dot{\zeta}^k = \frac{d\zeta^k}{d\sigma} = \dot{\zeta}_0^k = u^k = \text{const.} \tag{44}$$

Dès lors, la relation $L(z, \dot{z}) = \text{const.}$ s'écrit dans les notations actuelles

$$L(\zeta, \dot{\zeta}) = L(\zeta, u) = g_{jk}(\zeta)\, u^j u^k = \text{const.} \tag{45}$$

On a, en particulier, $L(\xi, u) = L(0, u)$ et par suite

$$\sigma_\xi^2 L(\xi, u) = \sigma_\xi^2 L(0, u) \tag{46}$$

ou

$$g_{jk}(\xi)\, \xi^j \xi^k = g_{jk}(0)\, \xi^j \xi^k. \tag{47}$$

Le premier membre de (46) étant, en vertu de (35^{bis}), égal à $\Gamma(0; \xi)$, on a l'*identité fondamentale*

$$\Gamma(0; \xi) = g_{jk}(0)\, \xi^j \xi^k. \tag{48}$$

Nous donnons encore quelques identités importantes, remontant à Riemann. On tire de (48)

$$\frac{\partial \Gamma(0;\zeta)}{\partial \zeta^j} = 2\,g_{jk}(0)\,\zeta^k = 2\,\sigma_\zeta\, g_{jk}(0)\,u^k,$$

ce qui montre que $\partial \Gamma/\partial \zeta^j$ est linéaire et homogène en σ_ζ. Il en résulte, d'après (37^{bis}), que

(49) $$\frac{\partial L(\zeta,\dot\zeta)}{\partial \dot\zeta^j} = \frac{\partial L(\zeta,u)}{\partial u^j} = 2\,g_{jk}(\zeta)\,u^k = 2\,u_j = \text{const.}$$

le long de chaque géodésique[1]. On a donc, en particulier, $g_{jk}(\xi)u^k = g_{jk}(0)u^k$, ce qui, multiplié par σ_ξ, donne

(50) $$g_{jk}(\xi)\,\xi^k = g_{jk}(0)\,\xi^k.$$ [2]

Ces formules impliquent évidemment (47).

86. Quelques formules auxiliaires. — Ces formules se rapportent aux paramètres Δ_1 et $\Delta_2 = \Delta$ (n° **81**). La plus grande partie des calculs sera faite en coordonnées générales, et ce n'est que pour expliciter $\Delta(\Gamma)$ qu'on aura à recourir à des coordonnées normales.

Nous posons, pour simplifier l'écriture, $\Gamma(x_0;\, x) = \Gamma$, $g_{jk}(x) = g_{jk}$, $g^{jk}(x) = g^{jk}$. Nous désignons, comme d'habitude, par g la valeur absolue du déterminant $|g_{jk}|$ et par σ le paramètre usuel; $\sigma = 0$ en x_0.

1°. *On a* pour une fonction U arbitraire

(51) $$\Delta_1(\Gamma,\, U) = g^{jk}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j}\frac{\partial U}{\partial x^k} = 2\,\sigma\frac{dU}{d\sigma},$$

la différentiation étant faite suivant la géodésique joignant x_0 et x.

En effet, il résulte de (37^{bis}) et de (29)

(52) $$g^{jk}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^j} = \sigma\, g^{jk}\frac{\partial L}{\partial \dot x^k} = 2\,\sigma\,\dot x^k,$$

par conséquent

---

[1] On voit que, en coordonnées normales, non seulement les composantes contravariantes u^j de la «vitesse» sont constantes le long de la «trajectoire», mais qu'il en est de même de ses composantes covariantes u_j. On tire de (49) au moyen des équations (25), ou de (50) par différentiation

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l}\xi^j\xi^k = 0 \quad\text{et}\quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j}\xi^j\xi^k = 0 \quad\text{ou}\quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^l}u^j u^k = 0 \quad\text{et}\quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^j}u^j u^k = 0.$$

A l'origine des coordonnées normales, l'une quelconque des deux dernières identités est valable pour des u^j arbitraires, d'où l'on conclut que toutes les dérivées $\partial g_{jk}/\partial \xi^l$ s'annulent en ce point.

[2] J'emprunte la déduction élégante qui précède à la Thèse de M. Malmheden (**1**, p. 57). La méthode utilisée au numéro précédent aussi a été sensiblement influencée par celle de M. Malmheden.

$$\Delta_1(\Gamma, U) = 2\sigma \dot{x}^k \frac{\partial U}{\partial x^k} = 2\sigma \frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{d x^k}{d\sigma} = 2\sigma \frac{d U}{d\sigma}.$$

On tire de (51) pour une fonction F arbitraire

(51*bis*) $$\Delta_1(F(\Gamma), U) = 2 F'(\Gamma)\cdot\sigma\frac{d U}{d\sigma}.$$

2°. *On a* pour l'opérateur Δ, défini par la formule (23), U et V étant des fonctions arbitraires,

(53) $$\Delta(U V) = U\Delta V + 2\Delta_1(U, V) + V\Delta U.$$

En effet, en utilisant la notation (17), on peut écrire

$$\Delta(U V) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j(U V)).$$

Dès lors, l'identité (53) découle immédiatement de

$$\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j(U V) = U(\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j V) + V(\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j U).$$

3°. *On a*

(54) $$\Delta(F(\Gamma) U) = U\Delta F(\Gamma) + 4 F'(\Gamma)\cdot\sigma\frac{d U}{d\sigma} + F(\Gamma)\cdot\Delta U$$

et

(55) $$\Delta F(\Gamma) = F'(\Gamma)\cdot\Delta\Gamma + 4 F''(\Gamma)\cdot\Gamma.$$

La première formule est une conséquence immédiate de (53) et de (51*bis*). Quant à la seconde,

$$\Delta(F(\Gamma)) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j F(\Gamma)) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(F'(\Gamma)\sqrt{g}\,\mathrm{grad}^j \Gamma)$$
$$= F'(\Gamma)\cdot\Delta\Gamma + \mathrm{grad}^j\,\Gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}F'(\Gamma).$$

Le dernier terme est égal à $F''(\Gamma)\,\mathrm{grad}^j\,\Gamma\,\mathrm{grad}_j\,\Gamma$, ce qui, en vertu de (38*bis*) se réduit à $4 F''(\Gamma)\cdot\Gamma$.

4°. Pour $F(\Gamma) = \Gamma^\beta$, *on tire* des formules (54) et (55)

(56) $$\Delta(\Gamma^\beta U) = \beta\Gamma^{\beta-1}\left[(4(\beta - 1) + \Delta\Gamma) U + 4\sigma\frac{d U}{d\sigma}\right] + \Gamma^\beta\cdot\Delta U.$$

5°. *On a*

(57) $$\Delta\Gamma = 2\left(m + \sigma\frac{d\log\sqrt{g}}{d\sigma}\right).$$

où m désigne la dimension de l'espace de Riemann et g désigne, cette fois-ci, la valeur absolue du déterminant g_{jk}, non plus dans un système de coordonnées générales, mais *dans un système de coordonnées normales arbitraire qui admet x_0 comme origine.*

Vérifions d'abord que l'expression ci-dessus reste inaltérée si on passe d'un système de coordonnées normales à un autre. Or on a vu qu'un tel changement s'opère au moyen de coefficients constants (formule (41)), g sera donc multiplié par une constante (formule (20)) et $d \log \sqrt{g}/d\sigma$ ne sera pas changé. Bien entendu, ce dernier fait résulte aussi, quoique d'une manière implicite, du calcul qui suit.

On a d'abord en coordonnées générales (*cf.* les formules (23) et (52))

$$\Delta \Gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial \Gamma}{\partial x^k}\right) = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}\, \sigma \dot{x}^j)$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} \dot{x}^j + 2 \frac{\partial}{\partial x^j}(\sigma \dot{x}^j) = 2\sigma \frac{d \log \sqrt{g}}{d\sigma} + 2 \frac{\partial}{\partial x^j}(\sigma \dot{x}^j).$$

Dès lors, si le système des x^k est un système de coordonnées normales admettant x_0 comme origine, on aura, d'après les formules (43) et (44), $\sigma \dot{x}^j = x^j$ et

$$\frac{\partial(\sigma \dot{x}^j)}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^j}\left(= \sum \frac{\partial x^j}{\partial x^j}\right) = m.$$

87. Le conoïde caractéristique. — Les *géodésiques de longueur nulle* ou *bicaractéristiques* issues d'un certain point x engendrent le *conoïde caractéristique*(¹) de sommet x. Les points y de ce conoïde satisfont à l'équation $\Gamma(x; y) = 0$. La fonction $\Gamma(x; y)$ s'annule du second ordre au point x, point singulier du conoïde, où toutes les dérivées $\partial \Gamma/\partial y^k$ s'annulent. Par contre, tout autre point(²) du conoïde est un point régulier; $\Gamma(x; y)$ s'y annule du premier ordre, l'une au moins des susdites dérivées étant différente de zéro en un tel point. Tous ces faits découlent immédiatement des formules (37^{bis}) et (29).

Dans le cas de *signature lorentzienne*, le seul qui intervient dans nos applications, le conoïde divise l'espace (voisin de x) en trois régions. Deux d'entre elles, où l'on a $\Gamma(x; y) > 0$, sont intérieures au conoïde et une, avec $\Gamma(x; y) < 0$, lui est extérieure. Les géodésiques, issues de x et menant à l'intérieur, sont des géodésiques de temps, tandis que celles menant à son extérieur sont des géodésiques d'espace.

(¹) HADAMARD **1**, p. 47 et 124.

(²) Toutes nos considérations se rapportent à un voisinage suffisamment restreint de x.

Les faits énumérés se réduisent aux faits correspondants relatifs à l'espace lorentzien traité dans les chapitres précédents. En effet, en introduisant des coordonnées normales, avec leur origine en x, le conoïde devient un cône ordinaire $g_{jk}(0)\eta^j\eta^k = 0$. Par un choix convenable de ces dernières coordonnées on peut même s'arranger de manière à ce que $\Gamma(x;\,y)$ se réduise à la forme lorentzienne (1) du n° **14**

$$\Gamma(x;\,y) = \eta^{1\,2} - \eta^{2\,2} - \cdots - \eta^{m\,2}. \tag{58}$$

88. Surfaces caractéristiques. — Une surface caractéristique est définie par les équations *simultanées*

$$S(y^1, y^2, \ldots, y^m) = S(y) = 0 \tag{59}$$

et

$$g^{jk}\frac{\partial S}{\partial y^j}\frac{\partial S}{\partial y^k} = 0. \tag{60}$$

Le conoïde du numéro précédent, appelé de prime abord conoïde caractéristique, est une surface caractéristique d'après la définition que nous venons de poser. En effet, en prenant $S(y) = \Gamma(x;\,y)$, le conoïde satisfait aux équations (59) et (60) (*cf.* l'identité (38^{bis})). L'équation (60) admet l'interprétation géométrique que voici. [1]

Posons, selon la formule (30),

$$H(y;\,\pi) = g^{jk}\pi_j\pi_k = \pi_j\pi^j, \tag{61}$$

où

$$\pi_j = \frac{\partial S}{\partial y^j} \quad \text{et} \quad \pi^j = g^{jk}\pi_k = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \pi_j} \tag{62}$$

sont respectivement les composantes covariantes et contravariantes du gradient de S. La direction *normale* à la surface $S = 0$ étant, en chaque point régulier de S, donnée par celle du gradient de S, l'équation (60) exprime que *cette direction est isotrope.* Elle sera par suite orthogonale à elle-même et dès lors aussi *tangente* à la surface. On a là d'ailleurs la seule direction isotrope qui soit tangente, puisque deux directions isotropes différentes ne sont jamais orthogonales l'une à l'autre. [2]

(1) *Cf.* pour tout ce qui suit le n° **62**, où sont envisagées les surfaces caractéristiques de l'espace lorentzien.

(2) En effet, il est géométriquement évident que toute direction, orthogonale à une direction isotrope et différente de cette dernière, est une direction d'espace, tout plan tangent à un cône caractéristique étant extérieur à ce cône.

Tout cela étant admis, nous allons montrer[1] que *par tout point régulier d'une surface caractéristique il passe une et une seule bicaractéristique située sur la surface.* Il résultera aussi que *deux surfaces caractéristiques tangentes en un point sont tangentes le long d'une bicaractéristique.*

Considérons les lignes tracées sur la surface $S=0$ qui en tous leurs points sont tangentes à la normale menée en ce point ou, en d'autres termes, au gradient. En rapportant la surface à $m-1$ paramètres, l'existence de ces lignes s'établit aisément.

Ceci étant admis, une telle ligne satisfait au système d'équations différentielles[2]

$$\frac{dy^j}{dt}=\pi^j \quad \text{ou} \quad \frac{dy^j}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \pi_j}, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{63}$$

Le fait que la ligne est de longueur nulle est garanti par les dernières équations et l'équation (60). Tout revient donc à démontrer qu'elle est une géodésique.[3]

Observons maintenant que la fonction $S(y)$ et ses dérivées partielles π_j sont, comme fonctions du point y, manifestement définies dans un certain voisinage de la surface $S=0$. Il en sera donc de même de la fonction $H(y,\pi)$. On a évidemment

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial y^j}=\frac{\partial \pi_j}{\partial y^k}\left(=\frac{\partial^2 S}{\partial y^j\,\partial y^k}\right). \tag{64}$$

On pose $H(y,\pi(y))=\bar{H}(y)$ et on trouve, en utilisant (64) et (63),

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial y^j}=\frac{\partial H}{\partial y^j}+\frac{\partial H}{\partial \pi_k}\cdot\frac{\partial \pi_k}{\partial y^j}=\frac{\partial H}{\partial y^j}+2\frac{\partial \pi_j}{\partial y^k}\cdot\frac{dy^k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y^j}+2\frac{d\pi_j}{dt}.$$

D'autre part, puisque $\bar{H}(y)=0$ aux points réguliers de $S(y)=0$, le gradient de $\bar{H}(y)$ aura en ces points la direction du gradient de $S(y)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial \bar{H}(y)}{\partial y^j}=2\cdot\lambda(y)\cdot\frac{\partial S(y)}{\partial y^j},$$

la fonction $\lambda=\lambda(y)$ étant bien déterminée aux susdits points. Cela nous permet d'écrire

$$\frac{d\pi_j}{dt}-\lambda\cdot\pi_j=-\frac{1}{2}\frac{\partial H(y,\pi)}{\partial y^j}. \tag{65}$$

Il s'agit d'éliminer λ. Posons à cet effet, le long de la ligne considérée, $\pi_j=k(t)\cdot p_j$, la fonction $k(t)$ étant arbitraire jusqu'à nouvel ordre. On aura, en raison de l'homogénéité de H et de ses dérivées,

$$H(y,\pi)=k^2 H(y,p),\quad \frac{\partial H(y,\pi)}{\partial y^j}=k^2\frac{\partial H(y,p)}{\partial y^j},\quad \frac{\partial H(y,\pi)}{\partial \pi_j}=k\frac{\partial H(y,p)}{\partial p_j}.$$

Dès lors, les relations (63) et (65) deviennent

---

(1) Les remarques qui suivent, et qui ne sont qu'une mise au point de quelques faits connus, nous seront très utiles dans un ouvrage à venir. Aucune application n'en étant donnée dans le présent travail, le lecteur pourra passer sur le reste de ce numéro.

(2) M. Malmheden a étendu la méthode d'intégration qui suit au cas où H est en fonction des π_j une fonction homogène de degré arbitraire; MALMHEDEN **1**, Appendice II, p. 110—112.

(3) Bien entendu, il s'agit de montrer qu'elle a le caractère géodésique par rapport à l'espace de Riemann envisagé et non seulement par rapport au sous-espace défini par $S=0$.

$$\frac{d y^j}{d t} = \frac{1}{2} k \frac{\partial H(y, p)}{\partial p_j} \quad \text{et} \quad k \frac{d p_j}{d t} + (k' - \lambda k) p_j = -\frac{1}{2} k^2 \frac{\partial H(y, p)}{\partial y^j}.$$

En choisissant k de façon que $k' - \lambda k = 0$ et en posant $d\sigma = k \cdot dt$, on arrive aux *équations canoniques* (*cf.* formule (34))

$$\frac{d y^j}{d \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial H(y, p)}{\partial p_j} \quad \text{et} \quad \frac{d p_j}{d \sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H(y, p)}{\partial y^j}.$$

La ligne est donc une *géodésique* et dès lors, par ce qui précède, une *bicaractéristique*.

Le dernier système d'équations est *indépendant de la surface caractéristique* envisagée. Il en ressort que *si deux surfaces de cette nature ont un élément de contact (point et plan tangent) en commun, il en émanera une bande caractéristique commune d'éléments de contact; en d'autres termes, les deux surfaces se toucheront le long d'une bicaractéristique commune.* En effet, les π_j, correspondant aux deux surfaces, auront les mêmes rapports mutuels au point commun. On pourra donc choisir les valeurs initiales des p_j égales, puisque les valeurs initiales des $k(t)$ sont arbitraires.

On voit aussi par ce qui précède que toute surface caractéristique peut être obtenue comme enveloppe de conoïdes caractéristiques.

Voici une dernière remarque qui appartient à un ordre d'idées légèrement différent. Nous avons vu que les bicaractéristiques tracées sur une surface caractéristique sont orthogonales à tout déplacement fait le long de la surface. Cela étant, prenons sur chaque bicaractéristique un point unique (ces points variant d'une manière continue et suffisamment dérivable). Il s'ensuit que *les points en question forment une variété d'espace*[1] *T à $m-2$ dimensions, à laquelle chaque bicaractéristique est orthogonale.*

Réciproquement, envisageons une variété d'espace T arbitraire, à $m-2$ dimensions. En chaque point de T on peut mener *deux bicaractéristiques orthogonales à T*[2], qui engendrent deux surfaces distinctes. Nous disons que *ces surfaces sont caractéristiques.* Soit Σ l'une de ces surfaces. Il suffit de montrer qu'une bicaractéristique arbitraire C appartenant à Σ est, en chacun de ses points y, orthogonale à un déplacement infinitésimal arbitraire δy fait le long de la surface. Désignons à cet effet par x et $x + \delta x$ les points d'intersection de la variété T et des bicaractéristiques C et $C + \delta C$ passant respectivement par y et $y + \delta y$. On aura, en vertu de la formule (39),

$$g_{jk}(y) \frac{d y^j}{d \sigma} \delta y^k = g_{jk}(x) \frac{d x^j}{d \sigma} \delta x^k.$$

Le second membre s'annulant par hypothèse, le premier membre s'annulera lui aussi.

On voit aussi que la variété initiale T ne joue aucun rôle particulier parmi les variétés d'espace (à $m-2$ dimensions) situées sur Σ et qu'elle pourrait, dans la construction ci-dessus, être remplacée par n'importe laquelle de ces variétés.

89. Le noyau fractionnaire. — Nous voilà arrivés à un des problèmes principaux du présent chapitre, celui de construire le noyau qui, dans un espace de Riemann, correspond au noyau $r^{\alpha-m}/H_m(\alpha)$ servant de base à la méthode d'intégration fractionnaire, développée dans les chapitres précédents.

---

(1) Une variété d'espace se caractérise ici, en analogie avec le cas lorentzien, *cf.* p. 37, par l'inégalité $g_{jk}\, dx^j\, dx^k < 0$, vérifiée par tout déplacement infinitésimal le long de la variété.

(2) *Cf.* p. 131.

Soit x un point de l'espace de Riemann envisagé, et considérons en même temps les points y suffisamment voisins([1]) de x et satisfaisant à l'inégalité $\Gamma(x; y) > 0$, c'est-à-dire appartenant à l'un quelconque des deux domaines intérieurs au conoïde caractéristique qui a son sommet en x (*cf.* le n° **87**).

Désignons comme plus haut par $s = s(x; y) = s(y; x)$ la distance géodésique des points x et y, c'est-à-dire que $s = \{\Gamma(x; y)\}^{1/2}$. Nous nous proposons de construire une fonction $V^\alpha(x; y)$, dépendant d'un paramètre α, qui satisfait à l'équation

$$\Delta_y V^{\alpha+2}(x; y) = V^\alpha(x; y) \tag{66}$$

et qui devient singulier sur le conoïde comme $s^{\alpha-m}$. A l'exemple de M. Hadamard nous admettons d'abord que *les coefficients $g_{jk}(y)$ sont des fonctions holomorphes des variables y^j.* Il en sera alors de même de s, sauf sur le conoïde, et de s^2 partout.([2]) Nous posons

$$V^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k \cdot s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha) \cdot L_m(\alpha + 2k)} = s^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k \cdot s^{2k}}{H_m(\alpha, k)}, \tag{67}$$

les coefficients V_k ne dépendant que de x et de y, tandis que $K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ ne dépendent que de α (et de la dimension m). Introduisons maintenant un système de coordonnées normales, admettant le point x comme origine, en gardant la notation g pour la valeur absolue du déterminant des coefficients g_{jk} correspondants. Si nous remplaçons encore le paramètre σ, utilisé dans les numéros **82**—**86**, par s qui, nous le savons, est un paramètre *admissible* (*cf.* le n° **84**), les formules (56) et (57) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\Delta_y V^{\alpha+2} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{\alpha+2k-m} \Bigg\{ & \frac{\alpha+2+2k-m}{K_m(\alpha+2) \cdot L_m(\alpha+2+2k)} \\ & \times \left[\left(\alpha + 2k + s\frac{d \log \sqrt{g}}{ds}\right) V_k + 2s\frac{dV_k}{ds}\right] + \frac{\Delta V_{k-1}}{K_m(\alpha+2) \cdot L_m(\alpha+2k)} \Bigg\},\end{aligned} \tag{68}$$

la notation d/ds désignant une différentiation suivant la géodésique (de temps) qui va de x à y. On choisit maintenant $L_m(\alpha)$ de sorte qu'on ait

---

([1]) Nous admettons en particulier que x et chaque y peuvent être joints par une géodésique d'une manière univoque (*cf.* p. 169).

([2]) Les coordonnées normales qu'on va introduire tout à l'heure seront aussi des fonctions holomorphes des anciennes coordonnées et réciproquement. Ces faits résultent des théorèmes d'existence classiques relatifs aux systèmes d'équations différentielles ordinaires.

$$\frac{\alpha + 2 - m}{L_m(\alpha + 2)} = \frac{1}{L_m(\alpha)},$$

et on détermine les V_k par le système d'équations différentielles récurrentes

$$(69) \qquad \begin{cases} 2s\dfrac{d\,V_k}{ds} + \left(2k + s\dfrac{d \log \sqrt{g}}{ds}\right) V_k + \Delta\, V_{k-1} = 0; \\ V_{-1} \equiv 0, \quad V_0(x;\,x) = 1\,. \end{cases}$$

Comme chez M. Hadamard, la solution est uniquement déterminée par le postulat que les $V_k(x;\,y)$ sont des fonctions régulières (c'est-à-dire suffisamment dérivables) de y.[1] Notons qu'on trouve en particulier

$$V_0(x;\,y) = \left(\frac{g(y)}{g(x)}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

Les formules de récurrence posées étant satisfaites, il vient

$$\Delta\, V^{\alpha+2} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k \cdot s^{\alpha+2k-m}}{K_m(\alpha + 2) \cdot L_m(\alpha + 2k)}\,.$$

En choisissant encore $K_m(\alpha)$ en sorte que

$$\frac{\alpha}{K_m(\alpha + 2)} = \frac{1}{K_m(\alpha)},$$

l'équation (66) se trouvera résolue.

$K_m(\alpha)$ et $L_m(\alpha)$ auront les propriétés désirées si l'on pose

$$K_m(\alpha) = K \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad L_m(\alpha) = L \cdot 2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right),$$

K et L étant indépendants de α. Nous écrivons encore

$$H_m(\alpha,\,k) = K_m(\alpha) \cdot L_m(\alpha + 2k)$$

---

[1] Pour $k = 0$, la solution est déterminée par la condition $V_0(x;\,x) = 1$. Pour $k > 0$, l'équation peut s'écrire

$$2\frac{d}{ds}(s^k\, V_k) + \frac{d}{ds}\log \sqrt{g} \cdot s^k\, V_k + s^{k-1} \cdot \Delta\, V_{k-1} = 0.$$

La solution est encore déterminée. En effet, V_k étant régulier pour $y = x$, c'est-à-dire pour $s = 0$, on aura pour cette valeur $s^k\, V_k = 0$, ce qui fait que $s^k\, V_k$ est déterminée, et il en est alors évidemment de même de V_k. On trouve par un calcul facile

$$V_0 = \left(\frac{g(y)}{g(x)}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad V_k = -V_0\, s^{-k} \int_0^s \frac{s^{k-1}}{2\,V_0} \cdot \Delta\, V_{k-1}\, ds.$$

et nous déterminons le produit KL en sorte qu'on ait

$$(70)\qquad H_m(\alpha, 0) = H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right),$$

la fonction $H_m(\alpha)$ étant le facteur spécial, relatif à l'espace lorentzien (formule (20) du n° **16**). Il vient en définitive

$$(71)\qquad H_m(\alpha, k) = K_m(\alpha) L_m(\alpha + 2k) = \pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\alpha+k-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 2k + 2 - m}{2}\right).$$

Signalons encore la formule de récurrence

$$(72)\qquad H_m(\alpha, k) = (\alpha + 2k - m) \cdot H_m(\alpha, k - 1),$$

et observons que cette formule, associée à la formule (70), détermine entièrement la fonction $H_m(\alpha, k)$.[1]

Les questions de convergence de la série (67) seront étudiées au n° **91**.

90. Comparaison avec les solutions élémentaires de M. Hadamard. — Il y a lieu de comparer les calculs ci-dessus avec ceux de M. Hadamard.

Considérons à côté du système récurrent (69) le système analogue, dans lequel q désigne un nombre fixe arbitraire qui n'est pas un entier négatif,

$$(73)\qquad \begin{cases} 2s\dfrac{dT_k}{ds} + \left(2k + s\dfrac{d\log\sqrt{g}}{ds}\right) T_k + \dfrac{\Delta T_{k-1}}{2(q+k)} = 0, \\ T_{-1} \equiv 0, \quad T_0(x; x) = 1. \end{cases}$$

Il est clair qu'on a

$$(74)\qquad T_0 = V_0,\ T_k = \frac{V_k}{2^k (q+1)(q+2)\dots(q+k)} = \frac{\Gamma(q+1)}{2^k\,\Gamma(q+1+k)} \cdot V_k.$$

En particulier, si l'on prend $q = \dfrac{\alpha - m}{2}$, on trouve à l'aide des formules (70) et (71)

---

[1] Dans le cas elliptique, la fonction correspondante $H_m(\alpha, k)$ se détermine par la formule de récurrence (72) combinée avec la relation

$$H_m(\alpha, 0) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \cdot 2^\alpha \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)},$$

cette dernière fonction étant le facteur adapté à l'opérateur de Laplace (*cf.* la formule (7) du n° **6**).

$$T_k = \frac{H_m(\alpha)}{H_m(\alpha, k)} \cdot V_k, \tag{75}$$

c'est-à-dire que

$$T^\alpha = s^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{\infty} T_k s^{2k} = H_m(\alpha) \cdot s^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k s^{2k}}{H_m(\alpha, k)} = H_m(\alpha) \cdot V^\alpha. \tag{76}$$

Le système d'équations (69), qui détermine les V_k, étant indépendant de q ou de α, il en est de même des V_k, tandis que les T_k dépendent de α de la façon mise en évidence par la formule (75).

Si $q = \frac{\alpha - m}{2}$ est un entier négatif, il y aura dégénérescence pour les T_k à partir de $k = -q$, puisque l'équation (73) cesse d'avoir un sens pour $k = -q$.

M. Hadamard ne considère que la valeur particulière $q = \frac{2-m}{2} = p$. Dans le cas impair, il en tire la solution élémentaire(¹)

$$U = s^{2-m} \sum_{k=0}^{\infty} U_k s^{2k}, \tag{77}$$

où nous avons désigné par U_k les quantités T_k qui correspondent à la susdite valeur particulière. Pour les valeurs paires de m, p est un entier négatif; l'équation (73) cessera donc d'avoir un sens pour $k = \frac{m-2}{2}$ et il n'existera pas de solution élémentaire de la forme (77).

On voit que nous avons tourné cette difficulté en introduisant le noyau (ou — si l'on veut — la solution élémentaire) fractionnaire V^α. M. Hadamard de son côté(²) introduit pour m pair, dans la voie ouverte par Picard, une solution élémentaire renfermant un terme logarithmique. Elle a la forme

$$s^{2-m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-2} U_k \cdot s^{2k} + w - 2\,\mathcal{U} \log s,$$

où les U_k, w et $\mathcal{U}$ sont des fonctions régulières, w n'étant déterminé qu'à une solution régulière près de l'équation $\Delta u = 0$.(³) Il ne manque pas d'intérêt d'observer que cette solution élémentaire logarithmique est, à un facteur constant

(¹) HADAMARD **1**, p. 136.

(²) HADAMARD **1**, p. 143; application à la résolution du problème de Cauchy p. 316. La remarque qui commence au bout de la page 98 du présent ouvrage est erronée et doit être supprimée.

(³) Bien entendu, M. Hadamard traite l'équation générale du second ordre au lieu de l'équation relative à Δ, traitée ici.

et à une fonction régulière additive près, identique à la fonction

$$(77^{bis}) \qquad \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial \alpha}\right)_{(\alpha=2)}.[1]$$

91. Questions de convergence et de majoration. — Venons à la question de convergence de nos séries. M. Hadamard[2] a, par une application ingénieuse de la méthode des séries majorantes[3], montré que la série figurant dans la formule (77) converge absolument et uniformément tant que s est inférieur à une quantité fixe. La convergence est uniforme aussi par rapport à x quand x varie dans une région strictement intérieure à la région $\mathcal{R}$ considérée au nº **85**. Nous pouvons largement profiter de la susdite démonstration, en observant que nonobstant qu'on y suppose que le nombre q a la valeur particulière p et que m est impair, on n'y utilise réellement que le fait que q n'est pas un entier négatif et que, par conséquent, les équations (73) ne cessent jamais d'avoir un sens.

En résumé, lorsque les coefficients de la forme métrique sont des fonctions holomorphes des coordonnées, la fonction $\Gamma = s^2$ et les coefficients V_k figurant dans l'expression (67) de V^α seront des fonctions holomorphes[4] des coordonnées du point y et la série (67) convergera absolument et uniformément dès que s est assez petit (sauf peut-être — quant à l'uniformité — au voisinage du co noïde, où le facteur $s^{\alpha-m}$ peut devenir infini). Il résulte de l'holomorphisme en fonction de y que les séries obtenues de (67) par des différentiations terme à terme ont des propriétés analogues, d'où il résulte que nos calculs, qui reposaient sur de telles différentiations, étaient légitimes.

Occupons-nous maintenant de la convergence uniforme de la série (76) par rapport à α. Soit a un nombre réel qui n'est pas un entier négatif.

On sait par ce qui précède que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |V_k| s^{2k} : |H_m(a, k)|$ est convergente.

Cela admis, et $l \geqq 0$ étant un entier arbitraire, la série

---

[1] *Cf.* pour tout ce qui précède les nos **58** et **59**. L'expression (77^{bis}) se réduit dans le cas lorentzien à $\delta_m r^{2-m}$, où δ_m est donné par la formule (37) du nº **59**.

[2] Hadamard **1**, p. 137—140 et p. 408—412.

[3] Rappelons qu'on se trouve toujours dans le cas *holomorphe*, ce qui veut dire que les coefficients g_{jk} de la forme métrique sont des fonctions holomorphes des coordonnées. Le domaine de convergence de la série (77) dépend des rayons de convergence des développements en séries entières des coefficients g_{jk} autour des points de la la région $\mathcal{R}$.

[4] *Voir* note [3] p. 180. L'holomorphisme en fonction des coordonnées de x résultera de la symétrie en x et y établie plus loin.

$$\sum_{k=l}^{\infty} \frac{|H_m(a, l)|}{|H_m(a, k)|} |V_k| s^{2k}$$

sera convergente, elle aussi. Pour $\Re(\alpha) \geqq a$ et $a - m + 2k \geqq 0$ on a aussi $\Re(\alpha - m + 2k) \geqq 0$, par conséquent $|\alpha - m + 2k| \geqq \Re(\alpha - m + 2k) \geqq a - m + 2k$. On a donc, en vertu de la formule (72), pour les mêmes valeurs de k

$$\frac{|H_m(\alpha, k)|}{|H_m(\alpha, k-1)|} \geqq \frac{|H_m(a, k)|}{|H_m(a, k-1)|}.$$

En désignant par l un quelconque de ces nombres k, il ressort que la série de factorielles

$$F(\alpha, l) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{H_m(\alpha, l)}{H_m(\alpha, k)} \cdot V_k s^{2k} \tag{78}$$

$$= V_l s^{2l} + \frac{V_{l+1} s^{2(l+1)}}{\alpha - m + 2l + 2} + \cdots + \frac{V_{l+h} s^{2(l+h)}}{(\alpha - m + 2l + 2) \ldots (\alpha - m + 2l + 2h)} + \cdots$$

est absolument et *uniformément* convergente pour $\Re(\alpha) \geqq a$.

Avant d'aller plus loin, notons la relation

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} F(\alpha, l) = V_l s^{2l}. \tag{78bis}$$

Les termes de la série uniformément convergente (78) étant des fonctions holomorphes de α, cette série représentera, elle aussi, une fonction holomorphe de α. En la multipliant par la fonction holomorphe $s^{\alpha - m}/H_m(\alpha, l)$ et en y ajoutant un nombre fini de termes holomorphes, on obtient la fonction V^α (*cf.* la formule (67)), qui est donc une fonction *holomorphe* de α.

Nous allons maintenant construire une majorante de la fonction V^α en nous restreignant à des valeurs de α dont la partie réelle est assez grande, soit $\Re(\alpha) \geqq m$. Prenons d'abord $\alpha = m$, ce qui donne $q = \dfrac{\alpha - m}{2} = 0$.

La série $\Sigma T_k s^{2k}$ figurant dans (76) devient d'après (74) $\Sigma V_k s^{2k}/2^k k!$. Nous savons que cette série converge absolument (et uniformément) tant que s est inférieur à une quantité fixe. C'est ce que nous supposons dans la suite et nous posons

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|V_k| s^{2k}}{2^k \cdot k!} = C. \tag{79}$$

D'autre part, il vient des formules (72) et (70), pour $\Re(\alpha) > m$,

$$|H_m(\alpha, k)| = \left| H_m(\alpha) \cdot \prod_{p=1}^{k} (\alpha + 2p - m) \right| \geqq |H_m(\alpha)| \prod_{p=1}^{k} (2p) = 2^k \cdot k! \, |H_m(\alpha)| \cdot$$

Il s'ensuit

$$(80) \qquad |V^\alpha| = \left| s^{\alpha-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k s^{2k}}{H_m(\alpha, k)} \right| \leqq \frac{|s^{\alpha-m}|}{|H_m(\alpha)|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|V_k| \, s^{2k}}{2^k \cdot k!} \leqq C \frac{|s^{\alpha-m}|}{|H_m(\alpha)|},$$

la valeur de C étant indépendante de α.

Il est facile de donner une majorante de forme très simple de la fonction

$$\frac{1}{H_m(\alpha)} = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 2 - m}{2}\right)}.$$

On tire de la formule de Stirling pour $\Re(z) \geqq 0$ et $|z| \to \infty$

$$\log \Gamma(z) = z (\log z - 1) + O(\log |z|).$$

Il s'ensuit pour $\Re(\alpha) \geqq m$ et $|\alpha| \to \infty$

$$\log H_m(\alpha) = \alpha (\log \alpha - 1) + O(\log |\alpha|).$$

On a donc, dans les mêmes conditions,

$$(81) \qquad \frac{1}{|H_m(\alpha)|} \leqq \left| \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-\alpha} \right| \cdot |\alpha|^p, \text{[1]}$$

l'exposant p étant *indépendant* de α. Cette inégalité se trouve établie pour $|\alpha|$ assez grand, soit $|\alpha| > A$, et pour $\Re(\alpha) \geqq m$. Nous disons que, en augmentant p (le cas échéant), l'inégalité subsiste dans tout le demi-plan $\Re(\alpha) \geqq m$. En effet, pour $\Re(\alpha) \geqq m$ et $|\alpha| \leqq A$, le premier membre est borné supérieurement, le second membre inférieurement, et on a de plus $|\alpha| \geqq m > 1$.

Soit maintenant β un nombre *fixe*, tel que $\Re(\beta) \geqq 0$. On montre aisément que la quantité $1 : |H_m(\alpha + \beta)|$ satisfait, elle aussi, à une inégalité de la forme (81), l'exposant p étant toujours indépendant de α. On a en effet, d'après ce qui précède

$$(82) \qquad \frac{1}{|H_m(\alpha + \beta)|} \leqq \left| \left(\frac{\alpha + \beta}{e}\right)^{-\alpha-\beta} \right| \cdot |\alpha + \beta|^p \cdot$$

---

[1] En posant $\alpha = \xi + i\eta = \varrho e^{i\theta}$, on a évidemment $\left| \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-\alpha} \right| = \varrho^{-\xi} e^{\theta\eta + \xi}$.

Le rapport entre la dernière expression et le second membre de (81) est asymptotiquement égal à $(|\alpha| \cdot e^{-1})^{-\Re(\beta)}$, quand $|\alpha|$ tend vers l'infini. Vu que $\Re(\beta) \geqq 0$, le second membre de (82) se trouve asymptotiquement majoré par celui de (81). Ce point acquis, la démonstration s'achève comme plus haut.

En vertu de l'inégalité (80), on a en résumé:

Le nombre β étant fixe et tel que $\Re(\beta) \geqq 0$, *les noyaux* V^α et $V^{\alpha+\beta}$, fonctions holomorphes de α toutes les deux, *satisfont dans le demi-plan* $\Re(\alpha) \geqq m$ *aux inégalités*

$$(83)\quad |V^\alpha| \leqq C \cdot s^{\Re(\alpha)-m} \left| \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-\alpha} \right| \cdot |\alpha|^p \quad \text{et} \quad |V^{\alpha+\beta}| \leqq C s^{\Re(\alpha+\beta)-m} \left| \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-\alpha} \right| \cdot |\alpha|^p,$$

les valeurs de C et de p étant indépendantes[1] *de α.*

92. La formule de Green. — Reprenons le domaine D, limité par une ou plusieurs surfaces fermées T, considéré au n° **18.** Envisageons le champ des vecteurs A et écrivons, en nous reportant aux formules (21^{bis}) et (22) du n° **81**, l'intégrale

$$\int_D \operatorname{div} A \, d\Omega = \int_D \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^k} (\sqrt{g} A^k) \cdot \sqrt{g} \, dy^1 \ldots dy^m = \int_D \frac{\partial}{\partial y^k} (\sqrt{g} A^k) \, dy^1 \ldots dy^m.$$

En utilisant la formule (26) du n° **18**, on obtient

$$(84)\qquad \int_D \operatorname{div} A \, d\Omega = \int_T A^k J_k \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^1 \ldots d\lambda^{m-1},$$

où les J_k sont les déterminants fonctionnels (*cf.* formule (25) du n° **18**)

$$J_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{d(y^1, y^2, \ldots, y^{k-1}, y^{k+1}, \ldots, y^m)}{d(\lambda^1, \lambda^2, \qquad \ldots \qquad, \lambda^{m-1})}.$$

La relation (84) exprime l'une des formes principales du *théorème de Gauss* relatif à un espace de Riemann.

Désignons maintenant par T' une portion de la surface T ayant une orientation d'espace.[2] Nous nous proposons de transformer l'intégrale figurant au second membre de (84), en tant qu'elle est étendue à T', dans une autre intégrale, ne renfermant que des éléments géométriques intrinsèques. Observons

[1] Une forme plus précise de la formule de Stirling que celle utilisée plus haut fournirait aisément $p = 1$.

[2] *Cf.* la note [1], p. 179.

à cet effet que l'expression $A^k J_k$ est égale au déterminant d'ordre m dont les lignes sont formées des composantes contravariantes du vecteur A et de celles des vecteurs $\partial y/\partial \lambda^p$ $(p = 1, 2, \ldots, m-1)$. En introduisant encore un nombre positif infinitésimal η, on voit, en vertu de la formule (21), que la quantité $\sqrt{g}\, A^k J_k \cdot \eta \prod d\lambda^p$ est, au signe près, égale au volume du parallélépipède infinitésimal construit sur les vecteurs $\eta \cdot A$ et $d\lambda^p \cdot \partial y/\partial \lambda^p$. D'autre part, ce parallélépipède peut être considéré comme ayant comme base l'élément de surface dT, parallélépipède à $m-1$ dimensions, construit sur les vecteurs $d\lambda^p \cdot \partial y/\partial \lambda^p$, et comme hauteur le segment $\eta \cdot A_{<n>}$, où $A_{<n>}$ est la projection orthogonale du vecteur A sur la normale extérieure; en formule

$$(85) \qquad A_{<n>} = A^k n_k,$$

les n_k étant les composantes covariantes de la normale extérieure unitaire n. Le volume en question s'exprime donc aussi par le produit[1] $dT \cdot \eta A_{<n>}$, au signe près. On a par conséquent, après avoir divisé par η, toujours au signe près,

$$(86) \qquad A^k J_k \cdot \sqrt{g} \prod d\lambda^p = A_{<n>}\, dT.$$

Le signe aussi est correct, si l'on attribue à dT et aux $d\lambda^p$ des valeurs positives. En effet, d'après la convention posée au n° 13, relativement aux signes des J_k, l'expression $B^k J_k$ a, respectivement, le signe positif ou négatif pour tout vecteur B menant à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface T, tandis que $B^k J_k$ s'annule quand le vecteur B est tangent à la surface. Les circonstances sont les mêmes quant au signe de $B^k n_k$, puisque n est une normale extérieure, et que l'on a $n^k n_k = 1 > 0$, vu que T' a une orientation d'espace et que, par conséquent, n est un vecteur de temps (unitaire).

L'identité (86) fournit pour la portion de surface T' l'identité analogue

$$(87) \qquad \int_{T'} A^k J_k \cdot \sqrt{g} \cdot d\lambda^1 \ldots d\lambda^m = \int_{T'} A_{<n>}\, dT.$$

Nous passons maintenant à la formule de Green. Établissons d'abord la formule

$$(88) \qquad u\,\Delta v - v\,\Delta u = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u),$$

u et v étant des scalaires. On a, en utilisant la formule (22)

---

(1) *Cf.* pour ces questions le n° 21^{bis}, en particulier la formule (55).

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^k}(\sqrt{g}\, u \operatorname{grad}^k v) \\ &= u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) + \frac{\partial u}{\partial y^k} \operatorname{grad}^k v = u\,\Delta v + \operatorname{grad}_k u \operatorname{grad}^k v \\ &= u\,\Delta v + (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v),\end{aligned}$$

ce qui entraîne (88). Dès lors, la formule de Gauss (84) nous fournit la formule de Green

$$(89) \qquad \int_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\Omega = \int_T (u \operatorname{grad}^k v - v \operatorname{grad}^k u)\, J_k \cdot \sqrt{g}\, d\lambda^1 \ldots d\lambda^m.$$

Le long de la portion de surface T', la quantité figurant dans la dernière intégrale peut, d'après les formules (86) et (85), se mettre sous la forme

$$(u \operatorname{grad}^k v \cdot n_k - v \operatorname{grad}^k u \cdot n_k)\, dT.$$

Or $\operatorname{grad}^k v \cdot n_k = \operatorname{grad}_k v \cdot n^k = \dfrac{\partial v}{\partial y^k} n^k = \dfrac{dv}{dn}$, d'après la formule (42) du n° **21**. On a donc en définitive

$$(90) \qquad \int_{T'} (u \cdot \operatorname{grad}^k v - v \cdot \operatorname{grad}^k u)\, J_k \sqrt{g} \prod d\lambda^p = \int_{T'} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) dT.$$

Remarquons en passant que le long d'une portion de surface T'' orientée dans le temps l'égalité (86) aura lieu avec le signe opposé. Cela tient au fait que, la normale n étant dans ce dernier cas un vecteur d'espace, on aura $n^k n_k = -1 < 0$. Enfin, sur une portion caractéristique (ou en un point où le plan tangent est caractéristique) aucune transformation de la nature indiquée n'est possible.

Envisageons pour terminer un domaine D limité par une surface fermée T, celle-ci étant composée de certaines portions orientées respectivement dans l'espace et dans le temps et séparées par des variétés (arêtes) caractéristiques à dimensions $\leqq m-2$. On tire des considérations qui précèdent la formule de Gauss

$$\int_D \operatorname{div} A\, d\Omega = \int_T A_{<n>}\, \varepsilon\, dT$$

et la formule de Green

$$\int_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\Omega = \int_T \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn}\right) \varepsilon\, dT,$$

la quantité ε ayant la valeur $+1$ le long des portions d'orientation d'espace, la valeur -1 le long des portions orientées dans le temps et la valeur 0 le long des variétés caractéristiques.[1]

Nulle application des deux dernières formules ne sera donnée dans le présent travail.

---

[1] Ce facteur ε doit évidemment entrer dans les intégrales dont il est question au n° **61**.

93. Les intégrales I^α et I^α_*. La formule fondamentale. — Nous avons vu au n° **87** que, dans le cas de signature lorentzienne, le seul cas qui nous intéresse dans la suite, le conoïde au sommet x et à l'équation $\Gamma(x; y) = 0$ divise l'espace voisin de x en trois régions. Certaines conventions faites, on pourra, comme dans le cas de l'espace lorentzien, parler sans ambiguïté de la nappe rétrograde et de la nappe directe d'un tel conoïde.[1]

Soit maintenant S une surface à $m-1$ dimensions *d'orientation d'espace*, et admettons que les conoïdes rétrogrades par exemple ayant comme sommet un point arbitraire x situé d'un certain côté de S et assez voisins de S délimitent avec S certains domaines D^x_S. Nous admettons aussi, jusqu'à nouvel ordre, que nos séries (67) convergent dans ce domaine. Cela étant, on pose

$$I^\alpha f(x) = \int\limits_{D^x_S} f(y)\, V^\alpha(x; y)\, dy. \tag{91}$$
[2]

Nous savons que $V^\alpha(x; y)$ devient singulier sur le conoïde comme le facteur $s(x; y)^{\alpha-m} = \Gamma(x; y)^{\frac{\alpha-m}{2}}$; plus précisement $V^\alpha(x; y) = s(x; y)^{\alpha-m} \cdot v^\alpha(x; y)$, où $v^\alpha(x; y)$ est régulier sur le conoïde et où l'on a $v^\alpha(x; x) = V_0(x; x) = 1$ (formules (67) et (69)). Vu encore que, dans un système de coordonnées normales approprié, $\Gamma(x; y)$ admet l'aspect lorentzien (58), l'étude de l'intégrale (91) se réduit immédiatement à celle de notre ancienne intégrale $I^\alpha f(P)$ relative à l'espace lorentzien (p. 47).[3] On pourra donc répéter presque mot à mot les faits démontrés plus haut au sujet de cette dernière intégrale. En particulier, la nouvelle intégrale converge et elle est une fonction holomorphe de α pour $\Re(\alpha) > m-2$),[4] qui peut être prolongée vers la gauche[5] jusqu'à une valeur arbitraire de $\Re(\alpha)$, si la fonction f et la surface S sont suffisamment dérivables. On a en outre

$$I^0 f(x) = f(x), \quad I^{-2p} f(x) = \Delta^p f(x). \tag{91bis}$$
[6]

Nous allons maintenant appliquer à nos intégrales la formule de Green (89). La marche sera tout à fait analogue à celle suivie dans le n° **22**. Pour commencer, nous posons dans la susdite formule $v = V^{\alpha+2}$. En désignant alors par

(1) *Cf.* Bureau **1**, p. 33.

(2) Nous posons ici, pour éviter toute ambiguïté, $dy = \sqrt{g}\, dy^1\, dy^2 \ldots dy^m$, quantité désignée auparavant par $d\Omega$ (*cf.* formule (**21**^{bis})).

(3) Notons que la quantité $\sqrt{g}$ devient $= 1$ au point x.

(4) *Cf.* n° **25**.

(5) *Cf.* n^{os} **27—36**, en particulier p. 51.

(6) *Cf.* n° **37**.

T la surface totale délimitant D_S^x, il vient pour d'assez grandes valeurs de $\Re(\alpha)$, qu'on va préciser,

$$\int_{D_S^x} (u(y)\,\Delta_y\, V^{\alpha+2}(x;\,y) - \Delta\, u(y)\, V^{\alpha+2}(x;\,y))\, d\,y$$
$$= \int_T (u \operatorname{grad}^k V^{\alpha+2} - V^{\alpha+2} \operatorname{grad}^k u)\, J_k \sqrt{g}\, d\,\lambda^1 \ldots d\,\lambda^{m-1}.$$

La surface T est composée d'une portion de la nappe du conoïde et de la portion de surface S^x découpée de S par le conoïde. Les intégrales de volume ci-dessus convergent certainement si l'on prend $\Re(\alpha) > m - 2$. Les circonstances sont moins favorables pour les intégrales de surface, puisque les dérivées premières de $V^{\alpha+2}$ deviennent infinies sur le conoïde tant que $\Re(\alpha) < m$. Par contre, pour $\Re(\alpha) > m$, ces dérivées restent finies et continues sur la surface T. Il y en a plus; pour les mêmes valeurs, la fonction $V^{\alpha+2}$ et ses dérivées en question s'annulent sur le conoïde (*cf.* le n° **22**). Il ne reste donc de l'intégrale de surface que la partie étendue à la portion de surface S^x; celle-ci ayant une orientation d'espace, l'intégrale correspondante pourra s'écrire sous la forme (90), savoir

$$-\int_{S^x} \left(u\,\frac{d\,V^{\alpha+2}}{d\,n} - \frac{d\,u}{d\,n}\,V^{\alpha+2}\right) d\,S,$$

le changement de signe étant dû à la nouvelle convention d'après laquelle on entendra désormais par n la normale unitaire *intérieure.* Observons encore que $\Delta_y\, V^{\alpha+2} = V_\alpha$ selon (66). Dès lors, nous sommes à même d'écrire la *formule fondamentale*

$$(92)\quad \int_{D_S^x} u(y)\, V^\alpha(x;\,y)\, d\,y = \int_{D_S^x} \Delta_y\, u\; V^{\alpha+2}(x;\,y)\, d\,y$$
$$+ \int_{S^x} \left[\frac{d\,u(y)}{d\,n}\, V^{\alpha+2}(x;\,y) - u(y)\,\frac{d\,V^{\alpha+2}(x;\,y)}{d\,n}\right] d\,S.$$

Pour mettre cette formule sous une forme plus condensée, nous posons

$$(93)\quad I^\alpha_{\bullet}\overline{f,\,g,\,h}\,(x) = \int_{D_S^x} f(y)\, V^\alpha(x;\,y)\, d\,y + \int_{S^x} \left[g(y)\, V^\alpha(x;\,y) - h(y)\,\frac{d\,V^\alpha(x;\,y)}{d\,n}\right] d\,S,$$

par où la *formule fondamentale* s'écrit, comme dans le cas lorentzien (formule (61^{bis}) du n° **23**),

$$I^{\alpha} u(x) = \overline{I_*^{\alpha+2} \Delta u, \frac{du}{dn}, u(x)}. \tag{94}$$

Les formules ci-dessus ne sont jusqu'ici démontrées que pour $\Re(\alpha) > m$. Or les intégrales figurant dans (92) restent convergentes pour $\Re(\alpha) > m - 2$ (*cf.* n° **25**), d'où l'on conclut, par les principes du prolongement analytique, que la formule reste valable pour toutes les valeurs vérifiant la dernière condition. Il résulte du même principe que les formules équivalentes (92) et (94) subsistent pour toute valeur de α, jusqu'à laquelle le prolongement est possible, en raison des hypothèses relatives à la fonction u et à la surface S. Comme plus haut, on aura en particulier pour $\alpha = 0$ la *formule d'importance capitale*[1]

$$u(x) = \overline{I_*^{2} \Delta u, \frac{du}{dn}, u(x)}, \tag{95}$$

formule par laquelle se résout le problème de Cauchy, exposé succinctement au numéro qui suit.

Signalons encore les relations $\Delta I_*^{\alpha+2} = I_*^{\alpha}$ et $I^{\alpha} I_*^{\beta} = I_*^{\alpha+\beta}$[2] dont la première se vérifie comme le fait correspondant établi dans le cas lorentzien (n° **42**), tandis que la seconde exige une démonstration qu'on donnera plus loin (n° **95**).

94. Problème de Cauchy. Absence du principe de Huygens. — Pour éviter des redites continuelles, se faisant déjà pressentir au numéro précédent, nous nous bornerons, en ce qui concerne le problème de Cauchy, à quelques indications sommaires. Un tel procédé est d'autant plus légitime que le problème en question a été traité dans le cas lorentzien avec une profusion de détails. Nous renvoyons le lecteur au n° **43** pour l'énoncé du problème, à la formule (95), transcrite à la manière de la formule (3) du n° **44**, pour la solution sous sa forme générale indépendante de la parité de l'espace, enfin aux endroits cités au n° **60** pour la vérification de la solution.

On a vu aux n^os^ **55** et **56** que, dans le cas lorentzien, la solution obéit au principe de Huygens pour les dimensions paires, tandis qu'il y a des intégrales résiduelles (diffusion des ondes) pour les dimensions impaires. Pour les dernières dimensions, il n'y a aucune différence essentielle entre le cas actuel et le cas particulier. Pour les dimensions paires, il y a au contraire une différence fondamentale en ce que ce ne sont que certains termes de la série (67) qui donnent

[1] *Cf.* le n° **44**.
[2] *Cf.* les n^os^ **42** et **24**.

lieu au principe de Huygens. Tout dépend encore des propriétés de la fonction *gamma*. En effet, les fonctions $H_m(\alpha, k)$, figurant dans la formule (67), chacune produit de deux fonctions *gamma*, n'admettent de pôles en $\alpha = 2$ que si l'on a $k \leqq \frac{1}{2}m - 2$; *cf.* la formule (71). Ce ne sont donc que ces termes-là, complétés, en ce qui concerne la double couche (pour des raisons expliquées au n° **15**) par le terme correspondant à $k = \frac{1}{2}m - 1$, qui obéissent au principe de Huygens. Tous les autres termes, en nombre infini, fournissent des intégrales résiduelles (convergentes), étendues à D_S^x ou à S^x.

Les dernières lignes ne sont qu'une reproduction presque littérale de ce que nous avons dit au n° **56***bis* au sujet de la solution de l'équation des ondes amorties. Cependant, dans ce cas particulier, on sait que les termes fournissant les intégrales résiduelles sont effectivement différentes de zéro, puisqu'on les connaît d'une façon tout à fait explicite. Dans le cas général qui nous occupe, ces termes sont définis comme solutions d'un système récurrent d'équations différentielles, et on est loin de les connaître effectivement. Cela explique la question posée par M. Hadamard[1] indiquée dans la note [3] à la page 87 du présent ouvrage et que nous y avons encore élucidée par des renvois à des résultats récents dus à différents auteurs.

95. Formules de composition. Propriétés d'échange. — Dans le cas lorentzien, la formule de composition

$$I^\alpha(I^\beta f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{96}$$

et la formule légèrement plus générale

$$I^\alpha(I_*^\beta \overline{f, g, h}(x)) = I_*^{\alpha+\beta} \overline{f, g, h}(x) \tag{96bis}$$

(*cf.* les n^os^ **23** et **24**) étaient des conséquences faciles d'une formule de composition relative au noyau respectif $r^{\alpha-m}/H_m(\alpha)$ (*cf.* le n° **5**), que nous écrivons ici sous la forme

$$\int\limits_{D_y^x} \frac{r(x;z)^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)} \cdot \frac{r(z;y)^{\beta-m}}{H_m(\beta)} \cdot dz = \frac{r(x;y)^{\alpha+\beta-m}}{H_m(\alpha+\beta)}. \tag{97}$$

---

[1] Hadamard **1**, p. 325.

Les formules de composition de caractère général relatives au cas actuel sont du même aspect que les formules (96) *et* (96^{bis}) *et dérivent de leur côté de la formule de composition relative au noyau* V^{α}

$$\int_{D_y^x} V^{\alpha}(x;\,z)\cdot V^{\beta}(z;\,y)\,dz = V^{\alpha+\beta}(x;\,y)\cdot{}^{(1)} \tag{98}$$

On suppose ici que les points x et y sont tels que le conoïde rétrograde appartenant à l'un d'eux et le conoïde direct appartenant à l'autre délimitent un certain double-conoïde borné D_y^x, domaine d'intégration dans la formule ci-dessus. (2)

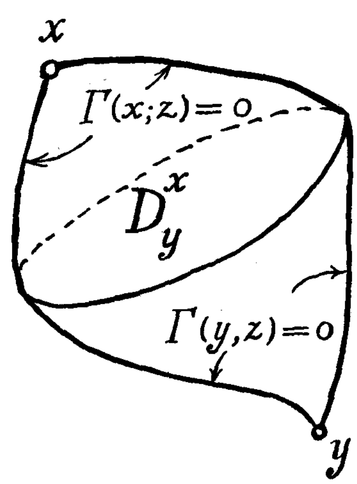

Fig. 13. Le double-conoïde D_y^x.

Si l'on savait déjà, ce qui ne sera démontré que plus loin, que le noyau $V^{\alpha}(x;\,y)$ est symétrique en fonction de x et de y, la formule (98) serait identique à la suivante, dont nous allons nous occuper en premier lieu,

$$\int_{D_y^x} V^{\alpha}(x;\,z)\cdot V^{\beta}(y;\,z)\,dz = V^{\alpha+\beta}(x;\,y). \tag{99}$$

La démonstration de la formule (97) reposait sur des calculs explicites, tandis que celle de (99) sera basée sur une application de la formule de Green, sur le fait que l'opérateur I^0 est l'opérateur identique et sur un théorème d'unicité très simple, emprunté à la théorie des fonctions analytiques.

(1) Pour la signification de dz *cf.* la note (2) à la page 190.

(2) *Cf.* le n° **17** et en particulier la fig. 1, où les points P et Θ jouent les rôles de x et de y.

La formule (99), une fois démontrée, fournit sur le champ (comme on le verra à la fin de ce numéro) la propriété d'échange (ou de symétrie) de la fonction V^{α}, savoir $V^{\alpha}(x; y) = V^{\alpha}(y; x)$, d'où s'ensuit immédiatement d'une part la formule (98) et d'autre part la propriété d'échange des coefficients V_k, savoir $V_k(x; y) = V_k(y; x)$.[1]

Nous démontrons d'abord la relation

$$(100) \qquad \int_{D_y^x} V^{\alpha+2n}(x; z) \cdot V^{\beta}(y; z)\, dz = \int_{D_y^x} V^{\alpha}(x; z) \cdot V^{\beta+2n}(y; z)\, dz,$$

qui, pour commencer, est certainement valable lorsque $\Re(\alpha)$ et $\Re(\beta)$ sont assez grands et pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Observons à cet effet 1°. que par exemple $\Delta_z V^{\alpha+2}(x; z) = V^{\alpha}(x; z)$ (formule (66)) et 2°. que les produits $V^{\gamma}(x; z) \cdot \partial V^{\delta}(y; z)/\partial z^j$ et $V^{\delta}(y; z) \cdot \partial V^{\gamma}(x; z)/\partial z^j$ s'annulent sur la surface du double-conoïde, dès que $\Re(\gamma)$ et $\Re(\delta)$ sont assez grands, fait dû à la présence des facteurs respectifs $s^{\gamma-m}$ et $s^{\delta-m}$ dans les fonctions V^{γ} et V^{δ}. Dès lors, une application réitérée de la formule de Green (89) d'après le schéma

$$\begin{aligned} \int V^{\alpha+2}(x; z) \cdot V^{\beta}(y; z)\, dz &= \int V^{\alpha+2}(x; z) \cdot \Delta_z V^{\beta+2}(y; z)\, dz \\ &= \int \Delta_z V^{\alpha+2}(x; z) \cdot V^{\beta+2}(y; z)\, dz = \int V^{\alpha}(x; z) \cdot V^{\beta+2}(y; z)\, dz \end{aligned}$$

fournit la relation demandée. L'absence des intégrales de surface dans les formules ci-dessus repose sur l'observation 2°.

C'est de la relation (100) qu'on va déduire, à l'aide du théorème d'unicité auquel nous avons fait allusion, la formule (99) — notre objet principal — qui, comme nous l'avons dit, comprend pour ainsi dire tous les autres résultats indiqués. Cependant, pour des raisons méthodiques, il nous paraît préférable de faire précéder cet arrangement par une déduction directe et très simple de la propriété d'échange des coefficients $V_k(x; y)$.

La formule (100) n'est démontrée jusqu'ici que pour d'assez grandes valeurs de $\Re(\alpha)$ et de $\Re(\beta)$, par exemple pour $\Re(\alpha) > m$ et $\Re(\beta) > m$, mais on voit par prolongement analytique qu'elle reste valide par exemple pour $\alpha = \beta = 0$. Écrivons donc la formule

---

[1] M. Hadamard obtient cette propriété par la méthode de descente et en outre, mais seulement pour $k = 0$, par une étude approfondie du système d'équations des géodésiques; *cf.* HADAMARD **1**, p. 366—377.

$$(101) \qquad \int_{D_y^x} V^{2n}(x; z) \cdot V^0(y; z)\, dz = \int_{D_y^x} V^0(x; z) \cdot V^{2n}(y; z)\, dz,$$

où, si l'on veut être rigoureux, on doit écrire au lieu du second membre, par exemple,

$$\underset{\gamma=0}{\text{prol. anal.}} \int_{D_y^x} V^\gamma(x; z) \cdot V^{2n}(y; z)\, dz.$$

Si l'on identifie la nappe du conoïde de sommet y à la surface S figurant dans la formule de définition (91) de l'intégrale $I^\alpha f(x)$, la dernière formule peut s'écrire $I^0\, V^{2n}(y; x) = V^{2n}(y; x)$; on se rappelle que I^0 est l'opérateur identique. En d'autres termes, le second membre de la formule (101) se réduit a $V^{2n}(y; x)$; le premier membre devient donc $V^{2n}(x; y)$. Dès lors, la formule (101) se réduit à la relation d'échange

$$(102) \qquad V^{2n}(x; y) = V^{2n}(y; x).$$

En réalité, le fait que l'opérateur I^0 est l'opérateur identique n'a été énoncé jusqu'ici que pour des surfaces S ayant une orientation d'espace, tandis que la nappe en question est une surface caractéristique, admettant même un point singulier, à savoir son sommet. Cependant, les calculs donnés aux nos **27—37** s'appliquent au cas actuel presque sans modifications, et la difficulté insignifiante provenant du point singulier s'élimine aisément à l'aide des indications données à la page 102.

On tire facilement de l'identité (102) la propriété d'échange des coefficients V_k, c'est-à-dire

$$(103) \qquad V_k(x; y) = V_k(y; x).$$

Il suffit de remplacer dans la formule (78) V_k par $V_k(x; y) - V_k(y; x)$, de faire tendre α vers l'infini, en parcourant les nombres pairs $2n$, et d'appliquer la formule (78^{bis}), en y posant successivement $l = 0, 1, 2, \ldots$

En portant le résultat (103) dans la formule de définition (67) écrite pour $V^\alpha(x; y)$ et $V^\alpha(y; x)$ et en tenant compte de la symétrie de la distance géodésique $s(x; y)$, on obtient aussi la formule d'échange

$$(104) \qquad V^\alpha(x; y) = V^\alpha(y; x).$$

Il en résulte en particulier que V^α qui, comme nous le savons, satisfait à la relation (66) $\Delta_y V^{\alpha+2}(x; y) = V^\alpha(x; y)$, satisfait aussi à $\Delta_x V^{\alpha+2}(x; y) = V^\alpha(x; y)$.

Revenons maintenant à la démonstration de la formule (99). Fixons dans la formule (100) la valeur de β, avec $\Re(\beta) \geqq m$, et posons $\alpha = 0$. En s'appuyant toujours sur le fait que I^0 est l'opérateur identique, on obtient

$$\int_{D_y^x} V^{2n}(x; z)\, V^{\beta}(y; z)\, dz = V^{\beta+2n}(y; x). \tag{105}$$

Nous formons l'expression

$$G(\alpha) = \int_{D_y^x} V^{\alpha}(x; z)\, V^{\beta}(y; z)\, dz - V^{\alpha+\beta}(y; x), \tag{106}$$

où $\Re(\alpha) \geqq m$, $\Re(\beta) \geqq m$, ce qui fait que la quantité à intégrer est *bornée* et continue. La valeur de β étant fixée, $G(\alpha)$ est une fonction *holomorphe* de α qui, d'après la relation (105), s'annule pour $\alpha = 2n$ assez grand.[1] Remarquons encore qu'on a toujours $s(x; z) \leqq s(x; y)$. Ceci posé, on voit par l'inégalité (83) que la fonction holomorphe $G(\alpha)$ satisfait dans le demi-plan $\Re(\alpha) \geqq m$ à une inégalité de la forme

$$|G(\alpha)| \leqq \left| \bar{C} \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{-\alpha} \alpha^p \cdot s(x; y)^{\alpha} \right|, \tag{107}$$

les valeurs de $\bar{C}$ et de p étant indépendantes de α.[2]

Ceci étant admis, il résultera du théorème d'unicité qui suit que la fonction $G(\alpha)$ s'annule identiquement ou, en d'autres termes, *notre relation* (99) *se trouve établie pour* $\Re(\alpha) \geqq m$, $\Re(\beta) \geqq m$.

Voici le *théorème d'unicité* en question. Supposons que les fonctions $g(z)$ et $h(z)$ satisfont à l'inégalité $|g(z)| \leqq |h(z)|$ et qu'elles sont holomorphes dans le demi-plan $\Re(z) \geqq 0$, la fonction $h(z)$ y étant constamment différente de zéro, tandis que $g(z) = 0$ aux points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ avec $\Re(z_n) > 0$ et $|z_n| > 1$; dans ces hypothèses la divergence de la série $\sum \Re(1/z_n)$ entraîne que la fonction $g(z)$ s'annule identiquement.

Dans l'énoncé habituel de ce théorème, la condition de majoration ci-dessus est remplacée par la condition que $g(z)$ est borné.[3] Notre théorème apparemment plus général se réduit immédiatement au théorème particulier, si on applique ce dernier à la fonction $g(z) : h(z)$.

Appliquons le théorème d'unicité ci-dessus à la fonction $G(\alpha)$, en posant $z = \alpha - m$. Remplaçons $g(z)$ par $G(\alpha)$ et $h(z)$ par la fonction holomorphe de α,

---

[1] P. ex. pour $2n \geqq m$.

[2] Bien entendu, les valeurs en question dépendent de x, de y et de β.

[3] *Cf.* p. ex. PÓLYA-SZEGÖ **1**, t. I, Abschnitt III, problème 298, p. 142 et 327.

dont la valeur absolue forme le second membre de la formule (107). Observons encore que les zéros connus de $G(\alpha)$ donnent lieu, après la substitution $z = \alpha - m$, à la série divergente $\sum_{2n>m} 1/(2n - m)$. On conclut que $G(\alpha)$ s'annule identiquement pour $\Re(\alpha) \geqq m$, ce qu'il fallait démontrer. *La formule importante* (99) *se trouve ainsi établie* pour $\Re(\alpha) \geqq m$, $\Re(\beta) \geqq m$. Elle s'étend par prolongement analytique à des valeurs arbitraires de α et de β.

A vrai dire, la formule en question se trouve établie avec $V^{\alpha+\beta}(y; x)$ figurant au second membre, tandis que dans l'énoncé on a $V^{\alpha+\beta}(x; y)$. Ceci dépend du fait que, dans la démonstration, on a fixé β et qu'on a fait varier α. Le chemin opposé aurait conduit à $V^{\alpha+\beta}(x; y)$.

Des dernières remarques il ressort de nouveau qu'on a pour une valeur arbitraire de γ la propriété d'échange $V^{\gamma}(x; y) = V^{\gamma}(y; x)$. En faisant tendre $|\gamma|$ vers l'infini, on retrouve la propriété d'échange des coefficients $V_k(x; y) = V_k(y; x)$, démontrée plus haut moyennant $\gamma = 2n \to \infty$. Mais ce qui importe davantage, c'est que, par la symétrie de V^{γ}, *la formule* (98) *se trouve démontrée en même temps que la formule* (99), *ce qui à son tour implique les formules de composition générales* (96) *et* (96^{bis}).

96. Le cas non analytique. Aperçu de la méthode. [1] — Plaçons-nous maintenant dans le cas où les coefficients g_{jk} de la forme métrique ne sont plus nécessairement analytiques; nous supposons pourtant qu'ils sont *réguliers* suivant la terminologie de M. Hadamard, c'est-à-dire qu'ils sont *suffisamment dérivables.* [2] L'expérience acquise dans le cas lorentzien concernant l'allure appropriée des données nous apprend qu'une telle hypothèse est non seulement commode, mais pour ainsi dire indispensable. [3] Nous allons montrer que la méthode développée plus haut peut encore s'étendre au cas généralisé. Nous nous laisserons guider par quelques observations supplémentaires relatives au cas analytique.

Du point de vue de la résolution du problème de Cauchy, l'utilité du noyau fractionnaire consiste à permettre de calculer par prolongement analytique certaines intégrales qui deviennent divergentes si l'on utilise la solution élémentaire proprement dite. Le cas lorentzien fait ressortir ce point d'une manière très claire, la solution élémentaire y étant tout simplement r^{2-m} et le noyau fraction-

---

[1] Pour éviter des longueurs et des redites, nous nous contenterons en général dans la suite d'esquisser la marche du raisonnement sans trop nous arrêter sur les détails.

[2] *Voir* p. 51 et 160.

[3] *Cf.* HADAMARD **1**, p. 415 et COURANT-HILBERT **1**, II, note [1], p. 469.

naire $r^{\alpha-m}:H_m(\alpha)$. Dans le cas actuel, le noyau fractionnaire V^α est donné par la série (67) qui, en général, contient un nombre illimité de termes. En posant dans cette série $\alpha=2$, on obtient la solution élémentaire proprement dite V^2, qui pourtant, comme nous le savons, ne peut être immédiatement substituée dans la formule (95). Or si l'on prend la série (67) terme à terme, en y posant $\alpha=2$, on voit que ce n'est qu'un nombre limité de termes au début de la série qui donne lieu à des intégrales dangereuses, et le prolongement analytique n'est nécessaire que pour le compte de ces termes-ci. Quant aux autres termes, on pourrait les introduire dans la formule (95) en *substituant* dans leurs expressions $\alpha=2$, en s'abstenant ainsi de tout prolongement analytique pour autant qu'il est question de ces derniers termes.

Conformément à cela posons

$$(108)\qquad V^\alpha(x;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{V_k s^{\alpha-m+2k}}{H_m(\alpha,k)}=\sum_{k=0}^{p}+\sum_{k=p+1}^{\infty}=V_{\rm I}^\alpha(x;z)+V_{\rm II}^\alpha(x;z).$$

Nous choisissons p assez grand pour que $V_{\rm II}^2(x;z)$ en fonction de z s'annule avec ses dérivées du premier ordre sur le conoïde de sommet x. Il suffira de prendre $2p>m-2$.

On obtient aisément, en raison du système récurrent (69)

$$(109)\qquad \Delta_z V_{\rm I}^{\alpha+2}(x;z)=V_{\rm I}^\alpha(x;z)+s(x;z)^{\alpha+2-m+2p}\frac{\Delta_z V_p(x;z)}{H_m(\alpha+2,p)}$$

et

$$(109^{bis})\qquad \Delta_z V_{\rm II}^{\alpha+2}(x;z)=V_{\rm II}^\alpha(x;z)-s(x;z)^{\alpha+2-m+2p}\frac{\Delta_z V_p(x;z)}{H_m(\alpha+2,p)}.$$

En posant $\alpha=0$, on a $V_{\rm I}^0=0$, sauf sur le conoïde de sommet x, et $V_{\rm II}^0=0$ partout.[1] Il vient donc pour $s>0$

$$(109^{ter})\quad \Delta_z V_{\rm I}^2(x;z)=-\Delta_z V_{\rm II}^2(x;z)=s(x;z)^{2-m+2p}\frac{\Delta_z V_p(x;z)}{H_m(2,p)}=A(x;z),$$

pour abréger.

Nous allons maintenant utiliser la formule de Green à peu près de la même manière qu'au sujet de la formule (99). Soit $v(z)$ une fonction qui s'annule avec ses dérivées du premier ordre sur le conoïde de sommet x. Pour $\Re(\alpha)$ assez grand, $V_{\rm I}^{\alpha+2}(y;z)$ se comporte de même sur le conoïde de sommet y. Dès lors, on obtient par la formule de Green et la formule (109)

---

[1] Cela tient au facteur $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ de $H_m(\alpha,k)$ (formule (71)).

$$(110)\quad \int\limits_{D_y^x} \Delta v(z)\cdot V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2}(y;z)\,dz$$

$$= \int\limits_{D_y^x} v(z)\cdot\left\{V_{\mathrm{I}}^{\alpha}(y;z) + s(y;z)^{\alpha+2-m+2p}\cdot\frac{\Delta_z V_p(y;z)}{H_m(\alpha+2,p)}\right\}dz.$$

Par prolongement analytique, cette relation devient pour $\alpha = 0$, en vertu de la relation (109^{ter}),

$$(111)\qquad F(x;y) = v(y) + \int\limits_{D_y^x} A(y;z)\,v(z)\,dz,$$

où $F(x;y)$, prolongement analytique du premier membre de (110), peut être considéré comme connu, dès que Δv est donné. Pour $v(z) = V_{\mathrm{II}}^{2}(x;z)$, on aura, d'après ($109^{ter}$), à substituer dans le premier membre de (110) $\Delta v(z) = -A(x;z)$.

On a donc, dans le cas *holomorphe*, obtenu pour la fonction $V_{\mathrm{II}}^{2}(x;z)$ une équation intégrale du type de Volterra à noyau borné et continu.

Passons au cas *non analytique*. Nous y avons déjà supposé que les coefficients g_{jk} sont réguliers. Naturellement on doit aussi supposer qu'il en est de même de la région considérée, surtout au point de vue du problème des géodésiques. On peut alors calculer la distance géodésique s et, à l'aide du système récurrent (69), les coefficients $V_0, V_1, \ldots, V_p$, toutes ces quantités étant des fonctions assez régulières. Cela étant, on peut encore d'une part calculer le noyau $A(y;z)$ et d'autre part le noyau fractionnaire tronqué $V_{\mathrm{I}}^{\alpha}(x;z)$ et dès lors la fonction $F(x;y)$. Enfin, *on définit* $v(z) = V_{\mathrm{II}}^{2}(x;z)$ *comme solution de l'équation de Volterra* (111). Cette solution, qui sera examinée au numéro suivant, a des propriétés de convergence excellentes, chose qu'on devine par la connaissance qu'on a de l'équation de Volterra dans le cas linéaire. On peut aussi montrer que $V_{\mathrm{II}}^{2}(x;z)$ a les propriétés requises: évanouissement avec les dérivées du premier ordre sur le conoïde de sommet x, $\Delta(V_{\mathrm{I}}^{2} + V_{\mathrm{II}}^{2}) = 0$ etc.[1] Dès lors, on arrivera à la solution du problème de Cauchy si l'on porte dans la formule (95), transcrite à la manière de la formule (3) du n° **44**, le noyau $V^2 = V_{\mathrm{I}}^{2} + V_{\mathrm{II}}^{2}$, les intégrales formées avec V_{I}^{2} étant définies comme prolongements analytiques des intégrales correspondantes formées avec V_{I}^{α}.

---

[1] *Voir* les remarques faites à la page 212 au sujet des propriétés analogues de la fonction W_{II}^{2}.

Avant d'aller plus loin, rappelons que la première solution du problème de Cauchy dans le cas non analytique est encore due à M. Hadamard. (¹) C'est en s'inspirant de la méthode utilisée par E. Elia Levi et Hilbert dans le cas elliptique, méthode appelée par Hilbert celle de la «*parametrix*» (solution élémentaire incomplète), que M. Hadamard a formé une «parametrix» adaptée au cas actuel. Tandis que, dans le cas elliptique, les auteurs cités arrivent à une équation intégrale de Fredholm, M. Hadamard réduit la résolution du problème de Cauchy à celle d'une équation intégrale de Volterra — le domaine d'intégration étant du type que nous avons désigné par D_S^x au nº **93** — pour remonter (²) ensuite de la solution du problème général à la solution élémentaire. Afin de traiter les dimensions impaires et paires, il faut encore recourir à des méthodes différentes. Le double-conoïde D_y^x, à l'aide duquel nous formons notre noyau fractionnaire (espèce de solution élémentaire généralisée), ne figure pas chez M. Hadamard.

97. Recours à une équation intégrale de Volterra. — Rappelons brièvement le mécanisme de l'équation de Volterra de seconde espèce dans le cas linéaire. (³) Écrivons l'équation

$$\varphi(x) - \mu \int_a^x K(x; y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{112}$$

K et f étant des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue. Nous supposerons que la fonction $K(x; y)$, le noyau, est bornée dans le triangle limité par les droites $y = a$, $x = b$, $y = x$ $(b > a)$.

Formons les *noyaux itérés* successifs de $K(x; y) = K^{(1)}(x; y)$, définis de proche en proche par les relations de récurrence

$$K^{(n+1)}(x; y) = \int_y^x K(x; s)\, K^{(n)}(s; y)\, ds = \int_y^x K^{(n)}(x; s)\, K(s; y)\, ds;$$

ces noyaux sont tous bornés dans le même domaine que $K(x; y)$. Plus précisément, l'inégalité $|K(x; y)| \leqq M$ entraîne les inégalités

$$|K^{(n+1)}(x; y)| \leqq M^{n+1} \cdot \frac{(x-y)^n}{n!}.$$

(¹) Hadamard **1**, p. 377—379, 415—426.
(²) Hadamard **1**, p. 421—424.
(³) *Cf.* Goursat III (1915), p. 324—329.

En effet, l'inégalité précédente étant supposée valable pour n au lieu de $n+1$, on obtient

$$|K^{(n+1)}(x;y)| \leqq M \cdot \frac{M^n}{(n-1)!} \int_y^x (x-s)^{n-1}\, ds = M^{n+1} \cdot \frac{(x-y)^n}{n!}.$$

Dès lors, la série

$$L(x;y\,|\,\mu) = K(x;y) + \mu \cdot K^{(2)}(x;y) + \cdots + \mu^{n-1} \cdot K^{(n)}(x;y) + \cdots \tag{113}$$

est absolument et uniformément convergente tant que μ reste borné. La fonction $L(x;y\,|\,\mu)$ est une fonction entière de μ, qui s'appelle le *noyau résolvant* relatif au noyau $K(x;y)$. A l'aide du noyau résolvant, la solution de l'équation (112) s'écrit

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^x L(x;y\,|\,\mu) f(y)\, dy. \tag{114}$$

Nous appliquerons des principes analogues à l'équation intégrale (111). Soit dans un ordre d'idées général D_a^b un double-conoïde intérieur à la région $\mathcal{R}$ (nº 85) et $K(x;y)$ une fonction définie pour tout couple de points x et y tels que x appartient à D_a^b et y à D_a^x. Posons $K^{(1)}(x;y) = K(x;y)$ et

$$K^{(n+1)}(x;y) = \int_{D_y^x} K(x;z) K^{(n)}(z;y)\, dz = \int_{D_y^x} K^{(n)}(x;z) K(z;y)\, dz. \tag{115}$$

Nous allons établir l'existence d'une constante B, ne dépendant que de la région $\mathcal{R}$ et telle que l'inégalité

$$|A(x;y)| \leqq M \tag{116}$$

entraîne les inégalités

$$|K^{(n+1)}(x;y)| \leqq \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{M \cdot (MB)^n}{\Gamma\left(\frac{mn+1}{2}\right)} \cdot s(x;y)^{mn} \tag{117}$$

avec

$$B = \frac{\omega_{m-1}\, \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \sqrt{g_{\max}}}{2(m-1)}, \text{[1]}$$

---

[1] Dans le cas lorentzien, on peut améliorer cette estimation en montrant que

$$|A^{(n+1)}(x;y)| \leqq \frac{M \cdot (MB)^n}{(mn)!} \cdot s(x;y)^{mn},$$

avec une certaine valeur de B. Cette majoration est facile à étendre au cas riemannien pour la dimension 2. L'extension aux dimensions supérieures semble exiger des calculs assez laborieux.

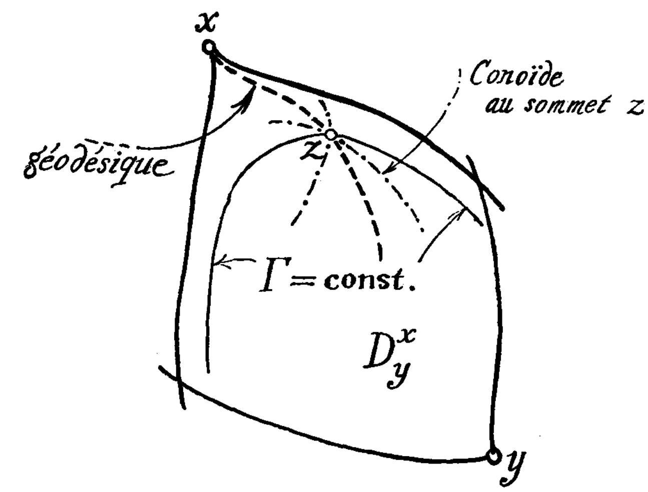

Fig. 14. Les deux nappes du conoïde au sommet z séparées par une surface $\Gamma = \text{const.}$

où m désigne comme toujours la dimension de l'espace, ω_{m-1} est donné par la formule (8) du n° **6** et $g_{\max}$ désigne le maximum de g dans le domaine D^x_y, la quantité g étant relative à certains systèmes de coordonnées normales autour de x.

Pour parvenir à cette limitation, nous aurons besoin de quelques considérations géométriques. Nous montrons d'abord que les surfaces $\Gamma(x; z) = \text{const.} > 0$, x étant fixé et z variable, sont coupées orthogonalement par les géodésiques issues de x. Cela résulte sur le champ de la formule aux limites (36)[1], qui donne $g_{jk}\, dz^j\, \delta z^k = 0$, dz signifiant un déplacement infinitésimal le long de la géodésique et δz un déplacement infinitésimal arbitraire le long de la surface. Les géodésiques en question étant des lignes de temps, il ressort de l'orthogonalité établie tout à l'heure que les surfaces $\Gamma = \text{const.}$ ont une orientation d'espace.[2] On en conclut qu'une bicaractéristique (géodésique de longueur nulle) ne saura être tangente à aucune des surfaces en question, d'où il s'ensuit qu'une telle ligne rencontrera chaque surface en un seul point au plus. On voit par ceci que *les deux nappes du conoïde qui a un certain point z comme sommet seront séparées par la surface $\Gamma = \text{const.}$ passant en z.*

Ces faits étant admis, nous introduisons un système de coordonnées normales autour du point x comme origine, ce système étant choisi de façon que les coef-

---

[1] L'application de cette formule est légitime puisque, $\Gamma = s^2$ étant constant, le paramètre s qui remplace le paramètre normalisé τ, figurant dans la formule originale, ne subit aucun changement au cours de la variation.

[2] *Cf.* la note [1] p. 179.

ficients au point x de la forme métrique se réduisent à ceux de la forme lorentzienne (*cf.* formule (58) du n° **87**). On aura dès lors, dans des notations faciles à comprendre, $\Gamma(x; z) = r_{xz}^2$ (*cf.* formule dernièrement citée, formule (48) du n° **85** et formule (1) du n° **14**); les surfaces $\Gamma(x; z) = \text{const.}$ deviennent des *hyperboloïdes* $r_{xz}^2 = \text{const.}$, telles qui figuraient au n° **57**, par exemple. En particulier, *le conoïde de sommet x devient le cône caractéristique de même sommet.*[1]

Ajoutons à ce qui précède que *les plans tangents* des hyperboloïdes en question *sépareront, eux aussi, les deux nappes du conoïde ayant comme sommet le point de contact.* Cela implique en particulier que *le double-conoïde D_y^x est tout entier compris dans le cône solide D* délimité par l'une des nappes du cône de sommet x (savoir celle qui renferme y) et par le plan Π tangent en y à l'hyperboloïde passant par ce dernier point.

En admettant alors que l'inégalité (117) est valable pour n au lieu de $n+1$ et pour z au lieu de y, z étant un point arbitraire intérieur à D_y^x, on trouve, en raison de (116),

$$(118) \qquad |K^{(n+1)}(x; y)| = \Big|\int_{D_y^x} K^{(n)}(x; z)\, K(z; y)\, dz\Big|$$

$$\leqq \int_{D_y^x} \frac{M\cdot(MB)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m(n-1)+1}{2}\right)}\cdot r_{xz}^{m(n-1)}\cdot M\cdot dz = \frac{M\cdot(MB)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m(n-1)+1}{2}\right)}\cdot M \int_{D_y^x} r_{xz}^{m(n-1)}\, dz.$$

Afin d'arriver à une majorante de la dernière intégrale, notons d'abord que

$$dz = \sqrt{g}\cdot dz^1 \ldots dz^m \leqq \sqrt{g_{\max}}\cdot dz^1 \ldots dz^m.\text{[2]}$$

D'autre part, en nous reportant à la formule qui précède la formule (24) du n° **57** et aux notations du même numéro, nous aurons

$$dz^1 \ldots dz^m = dH_r \cdot dr,$$

l'élément de surface de l'hyperboloïde H_r étant maintenant mesuré au sens lorentzien. Faisons observer que toutes les notions géométriques, telles mesure

---

(1) Dans les notations du n° **85**, on désignerait ce point par o.

(2) Dans un système de coordonnées lorentziennes dont l'axe de temps, soit l'axe des x^1, coïncide avec la droite xy, on a évidemment $r_{xz} \leqq |x^1 - z^1|$. Par cette remarque on arrive, moyennant des calculs très simples, à une majorante du type de (117), où pourtant le dénominateur $\Gamma\left(\dfrac{mn+1}{2}\right)$ est remplacé par $(n+1)!$. La dernière majorante, bien que plus grossière que celle du texte, suffit largement à tous les besoins.

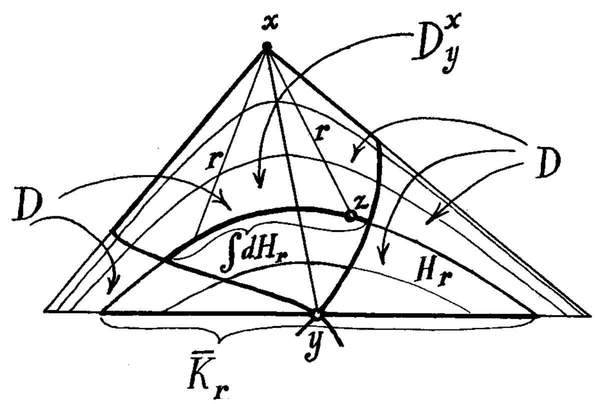

Fig. 15. Le double-conoïde D_y^x et le cône solide D.

de certains éléments, orthogonalité etc., seront à prendre dans le même sens au cours des présentes évaluations. On a donc, en notant que $r = r_{xz}$ varie de o à r_{xy},

(119) $$\int_{D_y^x} r_{xz}^{km}\, dz \leqq \sqrt{g_{\max}} \int_0^{r_{xy}} \left(\int dH_r\right) r^{km}\, dr,$$

l'expression $\int dH_r$ signifiant la surface totale de la calotte d'hyperboloïde comprise dans le domaine D_y^x, qui, évidemment, *est inférieure à la surface totale, soit* K_r, *de la calotte comprise dans le cône solide* D *qui renferme* D_y^x.

En se reportant, d'autre part, à la formule (27) du n° **57**, où l'on a $x_1 - \xi_1 \geqq r$, on voit que (la mesure de) dH_r est inférieur(e) à (celle de) sa projection orthogonale sur un plan quelconque $\xi_1 =$ const. Or, par une transformation de Lorentz convenable, on peut faire jouer à tout plan d'orientation d'espace le rôle d'un de ces derniers plans, ce qui fait voir que dH_r est inférieur à sa projection orthogonale sur un plan d'espace quelconque. Il est manifestement de même de la surface totale K_r de la calotte de H_r comprise dans le solide D, qui est donc inférieure à sa projection orthogonale sur le plan Π limitant D. Or cette projection est identique au domaine intercepté sur Π par H_r. En remarquant d'autre part que la droite xy est orthogonale au plan Π, on voit que l'intersection de H_r et de Π n'est qu'une sphère dans Π, considéré comme un espace à $m - 1$ dimensions, sphère, dont le centre est y et dont le rayon ϱ est donné par $\varrho^2 = r_{xy}^2 - r^2$. Par suite, K_r est inférieur au volume, soit $\overline{K}_r$, de cette sphère ou, en raison de la formule (8) du n° **6** et de celle qui la précède,

$$K_r < \overline{K}_r = \varrho^{m-1} \cdot \frac{\omega_{m-1}}{m-1} = \left(r_{xy}^2 - r^2\right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\omega_{m-1}}{m-1}.$$

D après ce qu'on a dit plus haut, la quantité $\int d H_r$ figurant dans la formule (119) admet la même majoration. On a donc

$$(120)\qquad \int\limits_{D_y^x} r_{xz}^{km}\,dz \leqq \frac{\omega_{m-1}}{m-1}\sqrt{g_{\max}}\int\limits_0^{r_{xy}} r^{km}\left(r_{xy}^2-r^2\right)^{\frac{m-1}{2}}dr$$

$$= \frac{\omega_{m-1}}{m-1}\sqrt{g_{\max}}\,r_{xy}^{(k+1)m}\int\limits_0^1 u^{km}\left(1-u^2\right)^{\frac{m-1}{2}}du.$$

La dernière intégrale est égale à

$$(121)\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{km+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)m}{2}+1\right)} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{km+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)m+1}{2}\right)}.$$

Les formules (119)—(121) avec $k = n-1$ et la formule (118) fournissent, après quelques simplifications, les inégalités (117) que nous avions à démontrer.

Les dernières inégalités une fois établies, la solution de l'équation du type de Volterra

$$(122)\qquad \varphi(x) - \mu\int\limits_{D_a^x} K(x;y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

rattachée au noyau $K(x;y)$, s'obtient en analogie parfaite avec le cas linéaire.

On passe de l'équation (122) à l'équation (111) en remplaçant a, x, y et $K(x;y)$ par x, y, z et $A(y;z)$ respectivement et en posant $\mu = -1$. Les noyaux itérés $A^{(n+1)}(y;z)$, correspondant au noyau $A(y;z)$, satisfont à des inégalités de la forme (117), excepté que l'arc $s(x;y)$ doit être remplacé par l'arc $s(y;z)$. Il en résulte que le noyau résolvant, formé en analogie avec (114),

$$L(y;z\,|\,\mu) = A(y;z) + \mu A^{(2)}(y;z) + \cdots + \mu^{n-1}A^{(n)}(y;z) + \cdots$$

a des propriétés de convergence éminentes et qu'il en est de même de la solution de l'équation (111), savoir

$$(123)\qquad V_{\mathrm{II}}^2(x;y) = v(y) = F(x;y) - \int\limits_{D_y^x} L(y;z\,|\,-1)\,F(x;z)\,dz.$$

98. L'équation des ondes amorties dans les espaces de Riemann. — On a vu que le noyau accessoire $V_{\mathrm{I}}^{\alpha} + V_{\mathrm{II}}^2$ suffit complètement à résoudre le problème de Cauchy dans le cas régulier non analytique. Cependant ce noyau considéré en soi ne possède aucune propriété intéressante. Il lui manque par exemple toute loi de composition. *Nous nous proposons de former aussi dans le cas non ana-*

lytique le noyau fractionnaire complet V^α et de démontrer qu'il possède toutes les propriétés essentielles rencontrées dans le cas analytique. En particulier, ce noyau vérifiera la formule (66) $\Delta V^{\alpha+2} = V^\alpha$, propriété qui, dans le cas holomorphe, servait de point de départ lors de la construction de V^α; il admettra les lois de composition (98) et (99). La première de ces lois permettrait évidemment de construire, aussi dans le cas actuel, un procédé d'intégration fractionnaire, possédant les propriétés fondamentales $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$, $I^\alpha I^\beta_* = I^{\alpha+\beta}_*$.

Nous arriverons à V^α à l'aide de certains noyaux rattachés à l'équation des ondes amorties

$$(124) \qquad \Delta u(x) + \lambda^2 u(x) = f(x), \text{(}^1\text{)}$$

relative à l'espace de Riemann considéré. A l'opérateur $\Delta + \lambda^2$ correspondent, dans le cas analytique, un noyau W^α et, dans le cas non analytique, un noyau $W^\alpha_{\mathrm{I}} + W^2_{\mathrm{II}}$, formés en analogie avec les noyaux rattachés à l'opérateur Δ. Les deux noyaux indiqués permettent, suivant les cas, de résoudre le problème de Cauchy posé pour l'équation (124). Mais il y en a plus, et voilà notre point principal, *le noyau W^2_{II} nous mettra en état d'accomplir la construction de V^α.*

Admettons encore une fois jusqu'à nouvel ordre que les coefficients g_{jk} sont holomorphes et posons, dans l'ordre d'idées du nº **56**^{bis},

$$(125) \qquad W^\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{h} \lambda^{2h} V^{\alpha+2h}$$
$$= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha+m-2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cdot \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}+k} \cdot J_{\frac{\alpha-m}{2}+k}(\lambda s), \text{(}^2\text{)}$$

où les J sont les fonctions de Bessel, définies par la formule (20) du numéro cité. Il est manifeste que W^α devient singulier sur le conoïde de la même manière que V^α et on vérifie facilement la relation

$$(\Delta + \lambda^2)\, W^{\alpha+2} = W^\alpha.$$

On peut, tout comme dans le numéro cité, définir les intégrales $I^\alpha_{(\lambda)}$ et $I^\alpha_{*(\lambda)}$, arriver à une formule de l'aspect de la formule (22) du même numéro et donner, moyennant cette formule, la solution du problème de Cauchy.

(¹) Bien entendu, l'opérateur Δ signifie ici, comme dans tout ce chapitre, l'opérateur du second ordre de Beltrami, défini par la formule (23).

(²) L'identité des deux expressions de W^α découle aisément des calculs qui ont conduit à la formule (23) du numéro cité.

Laissant de côté ce dernier point de vue, envisageons l'inégalité suivante, valable pour ν réel et $\geqq -\frac{1}{2}$,

$$|J_\nu(t)| \leqq \frac{|\frac{1}{2}t|^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \cdot e^{|\mathfrak{J}(t)|}, \text{[1]} \tag{126}$$

t étant une variable complexe. Il résulte facilement de cette limitation et de la convergence de la série (79) que W^2 est une fonction entière de λ.

On a d'autre part [2]

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(t)\,dt}{t^{\nu+\alpha-1}} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{\nu+\alpha-1}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

formule valable pour $\frac{3}{2} - \Re(\nu) < \Re(\alpha) < 2$. En désignant par C un contour qui va de $-\infty$ à $+\infty$ le long de l'axe réel, évitant l'origine par une courbe tracée dans le demi-plan *inférieur*, et en observant que $J_\nu(t)/t^{\nu-1}$ est une fonction impaire, on obtient

$$\int_C \frac{J_\nu(t)\,dt}{t^{\nu+\alpha-1}} = -2ie^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{\nu+\alpha-1}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pi e^{\frac{i\pi(\alpha-1)}{2}}}{2^{\nu+\alpha-2}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

ou encore

$$\frac{1}{\pi}\int_C \frac{J_\nu(t)\,dt}{t^\nu\,(it)^{\alpha-1}} = \frac{1}{2^{\nu+\alpha-2}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

avec $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg\,(it) \leqq \frac{\pi}{2}$, les intégrales curvilignes étant convergentes et les formules étant valables pour $\Re(\alpha) > \frac{3}{2} - \Re(\nu)$. Dans nos applications, il sera question des valeurs $\nu = \frac{2-m}{2} + k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$); la dernière formule sera donc valable, dès que $\Re(\alpha)$ sera assez grand $\left(\Re(\alpha) > \frac{m+1}{2}\right)$.

---

[1] WATSON **1**, p. 49. On entend par $\mathfrak{J}(t)$ la partie imaginaire de t.
[2] WATSON **1**, p. 391, formule (1), en y posant $\mu = 2 - \alpha$.

Posons $t = \lambda \cdot s$ où $s > 0$. On obtient

$$(127) \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_C \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\nu} \cdot \frac{J_\nu(\lambda s)\cdot d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha-1}} = \frac{s^{2\nu+\alpha-2}}{2^{\nu+\alpha-2}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En appliquant alors la seconde expression de la formule (125) qui donne W^α, on trouve, pour $\Re(\alpha)$ assez grand,[1]

$$(128) \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{W^2\,d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \cdot \frac{s^{\alpha-m+2k}}{\pi^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{\alpha+k-1}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m+2k}{2}\right)} = V^\alpha.$$

C'est cette même formule qui, légèrement modifiée, nous fournira plus loin V^α dans le cas *non analytique*, dès que nous aurons, dans ce cas-là, réussi à calculer W^2 ou W^2_{II}, ce qui se fera à l'aide d'une nouvelle équation de Volterra.

En restant toujours dans le cas holomorphe, choisissons de nouveau un nombre entier p tel que $2p > m-2$. Posons, en partant de la seconde expression (125),

$$(129) \qquad W^\alpha = \frac{1}{\pi^{\cdots}2^{\cdots}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty} V_k\cdot\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}+k}\cdot J_{\frac{\alpha-m}{2}+k}(\lambda s)$$

$$= \frac{1}{\pi^{\cdots}2^{\cdots}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{p} + \frac{1}{\pi^{\cdots}2^{\cdots}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=p+1}^{\infty} = W^\alpha_{\mathrm{I}} + W^\alpha_{\mathrm{II}}.$$

On trouve par un réarrangement analogue mais de sens opposé à celui appliqué dans la formule citée

$$(130) \qquad W^\alpha_{\mathrm{I}} = \sum_{h=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{h}\lambda^{2h}\,V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2h},$$

V^α_{I} étant défini par (108). Nous allons démontrer que

$$(131) \qquad (\Delta+\lambda^2)\,W_{\mathrm{I}}^{\alpha+2}$$
$$= W^\alpha_{\mathrm{I}} + \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}}\cdot 2^{\frac{\alpha+m}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+2-m}{2}+p}\cdot J_{\frac{\alpha+2-m}{2}+p}(\lambda s)\cdot\Delta V_p.$$

---

[1] *Cf.* les formules (67) et (71).

27 — 48173. *Acta mathematica.* 81. Imprimé le 8 juin 1949.

On tire en effet de (130), moyennant (109),

$$(\Delta + \lambda^2)\, W_{\mathrm{I}}^{\alpha+2} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha+2}{2}}{h} \lambda^{2h} (\Delta + \lambda^2)\, V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2+2h}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha+2}{2}}{h} \lambda^{2h} \left\{ \left(V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2h} + \lambda^2 V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2+2h} \right) + s^{\alpha+2+2h+2p-m} \cdot \frac{\Delta V_p}{H_m(\alpha+2+2h, p)} \right\}.$$

La première partie de la série, savoir celle comprenant les expressions

$$\left(V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2h} + \lambda^2 V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2+2h} \right),$$

peut s'écrire

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left[\binom{-\frac{\alpha+2}{2}}{h} + \binom{-\frac{\alpha+2}{2}}{h-1} \right] \lambda^{2h} V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2h} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{\alpha}{2}}{h} \lambda^{2h} V_{\mathrm{I}}^{\alpha+2h} = W_{\mathrm{I}}^{\alpha}.$$

La seconde partie de la même série est, d'après la formule (20) du n° **56**^{bis} et la formule (71) du n° **89**, égale au dernier terme de (131).

Vu que $W_{\mathrm{I}}^{0} = 0$, pour $s \neq 0$ (¹), il s'ensuit de (131), si l'on y pose $\alpha = 0$ ($\alpha + 2 = 2$) (*cf.* (109ter)),

$$(132) \qquad (\Delta_y + \lambda^2)\, W_{\mathrm{I}}^{2}(x; y) = -(\Delta_y + \lambda^2)\, W_{\mathrm{II}}^{2}(x; y)$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{\frac{m}{2}}} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{2-m}{2}+p} \cdot J_{\frac{2-m}{2}+p}(\lambda s) \cdot \Delta V_p = A_{(\lambda)}(x; y),$$

pour abréger.

Au moyen de la formule de Green, on obtient, en analogie avec (110), pour toute fonction $w(z)$ qui s'annule sur le conoïde de sommet x avec ses dérivées du premier ordre,

$$(133) \qquad \int_{D_y^x} (\Delta + \lambda^2)\, w(z) \cdot W_{\mathrm{I}}^{\alpha+2}(y; z)\, dz = \int_{D_y^x} w(z) (\Delta_z + \lambda^2)\, W_{\mathrm{I}}^{\alpha+2}(y; z)\, dz.$$

En particulier pour $w(z) = W_{\mathrm{II}}(x; z)$, on arrive, en analogie avec (111), à l'équation intégrale

$$(134) \qquad F_{(\lambda)}(x; y) = w(y) + \int_{D_y^x} w(z)\, A_{(\lambda)}(y; z)\, dz,$$

où $F_{(\lambda)}(x; y)$ est le prolongement analytique pour $\alpha = 0$ du premier membre de (133), avec $(\Delta + \lambda^2)\, w(z) = (\Delta_z + \lambda^2)\, W_{\mathrm{II}}^{2}(x; z) = -A_{(\lambda)}(x; z)$.

(¹) *Cf.* la note (¹), p. 199.

99. Le noyau V^α dans le cas non analytique. — Dans le cas non analytique mais assez régulier, on connaît W_{I}^2 et même W_{I}^α et par là $F_{(\lambda)}(x; y)$ et on *définit* W_{II}^2 par l'équation intégrale (134), d'aspect identique à celui de (111). Le noyau $A_{(\lambda)}$ satisfait, d'après les formules (132) et (126), à une inégalité de la forme

$$(135) \qquad |A_{(\lambda)}(y; z)| \leqq M e^{|\Im\{\lambda s(y; z)\}|},$$

M ne dépendant que de la région $\mathcal{R}$.

On forme maintenant les noyaux itérés $A_{(\lambda)}^{(n)}$ et on établit, en analogie avec l'inégalité (117), que

$$(136) \qquad |A_{(\lambda)}^{(n+1)}(y; z)| \leqq \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{M\cdot(MB)^n}{\Gamma\left(\frac{mn+1}{2}\right)} s(y; z)^{mn} \cdot e^{|\Im\{\lambda s(y; z)\}|},$$

où B ne dépend que de la région $\mathcal{R}$ et m est la dimension de l'espace.

La seule chose exigeant des commentaires, qui, d'ailleurs, sont d'un assez grand intérêt, est le facteur exponentiel. Considérons p. ex. le noyau itéré d'ordre 2. Il est égal à

$$A_{(\lambda)}^{2}(y; z) = \int_{D_z^y} A_{(\lambda)}(y; u)\, A_{(\lambda)}(u; z)\, du.$$

Dans la limitation de $A_{(\lambda)}^{2}$ entre, d'après (135), le produit

$$e^{|\Im\{\lambda s(y; u)\}|} \cdot e^{|\Im\{\lambda s(u; z)\}|} = e^{|\Im\{\lambda [s(y; u)+s(u; z)]\}|}.$$

Or, grâce au caractère lorentzien de l'espace, on a $s(y; u) + s(u; z) \leqq s(y; z)$; par conséquent, l'exponentielle en question est

$$\leqq e^{|\Im\{\lambda s(y; z)\}|}.$$

On observe que l'inégalité géométrique ci-dessus est de sens opposé à l'inégalité accoutumée relative aux triangles géodésiques. On appliquera une méthode de démonstration donnée dans le cas classique par Darboux (¹), méthode basée sur une espèce de coordonnées polaires.

Menons du point y un faisceau d'arcs géodésiques intérieurs au domaine D_z^y et remplissant une certaine région $\mathcal{B}$ qui, de son côté, comprend le triangle géodésique yuz. Choisissons de plus une valeur positive a assez petite, en sorte que la surface $\Gamma(y; t) = a$, y étant fixé et t variable, coupe toutes les géodésiques du faisceau. Nous paramétrisons d'abord la portion de la surface $\Gamma = a$ com-

(¹) DARBOUX **1**, II, p. 410—412.

prise dans la région $\mathcal{B}$ par $m-1$ paramètres $\lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^m$, et rapportons ensuite les points v de la région $\mathcal{B}$ à m paramètres, savoir à $\lambda^1 = s = s(y; v) =$ longueur de l'arc géodésique yv et aux $m-1$ paramètres $\lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^m$ correspondant au point d'intersection t de la géodésique yv avec la surface $\Gamma(y; t) = a$. Ceci posé, l'élément linéaire de l'espace, désigné incidemment par $d\sigma$, prend la forme $d\sigma^2 = \gamma_{pq} \cdot d\lambda^p \cdot d\lambda^q$. Nous disons que $\gamma_{11} = 1$, tandis que $\gamma_{1q} = 0$ pour $q \neq 1$. Afin de vérifier le premier énoncé, il suffit de remarquer que, pour $d\lambda^2 = \cdots = d\lambda^m = 0$, $d\sigma^2$ se réduit à $ds^2 (= d\lambda^1 \cdot d\lambda^1)$. Le second énoncé résulte de ce que les géodésiques issues du point y coupent les surfaces $\Gamma(y; v) =$ const. orthogonalement, fait établi au n° **97**. On en a conclu au même numéro que les dernières surfaces ont une orientation d'espace. Il s'ensuit que

$$d\sigma^2 = ds^2 + \sum_{p,\, q=2}^{m} \gamma_{pq} \cdot d\lambda^p \cdot d\lambda^q,$$

la dernière forme quadratique $\sum \ldots$ étant *définie négative.*

Ce point acquis, considérons un chemin de temps C quelconque, compris entièrement dans la région $\mathcal{B}$, réunissant les points y et z et coupant chaque surface $\Gamma =$ const. en un seul point. On va voir que la longueur de ce chemin, exprimée par l'intégrale $\int\limits_C d\sigma$, est inférieure à $s(y; z)$. En effet

$$\int\limits_C d\sigma = \int\limits_C (ds^2 + \textstyle\sum \ldots)^{\frac{1}{2}} \leqq \int\limits_C ds = s(y; z).$$

Le dernier résultat comprend l'inégalité demandée $s(y; u) + s(u; z) \leqq s(y; z)$.

En résumé, on a d'une part, avec une constante convenable K,

$$(137) \qquad | W_{\text{II}}^2(x; y) | = w(y) \leqq K \cdot e^{|\Im\{\lambda s(x; y)\}|}$$

et d'autre part, on voit facilement que $W_{\text{II}}^2(x; y)$ s'annule avec ses dérivées du premier ordre sur le conoïde de sommet x, comme il fallait s'y attendre. On a aussi pour $s \neq 0$

$$(138) \qquad (\Delta_y + \lambda^2)\, W^2(x; y) = (\Delta_y + \lambda^2)\, \{ W_{\text{I}}^2(x; y) + W_{\text{II}}^2(x; y)\} = 0.$$

De plus, toutes les fonctions figurant dans l'équation intégrale (134) étant des fonctions entières de λ, il en sera de même de W_{II}^2. Les derniers faits se démontrent sans difficulté, grâce aux propriétés de convergence de la formule de solution de (134).

En nous laissant guider par la formule (128), valable dans le cas holomorphe, nous posons dans le cas non analytique, *par définition*, pour $\Re(\alpha) > 2$,

$$V^\alpha = V_{\mathrm{I}}^\alpha + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{W_{\mathrm{II}}^2\, d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha-1}} = V_{\mathrm{I}}^\alpha + V_{\mathrm{II}}^\alpha, \tag{139}$$

où C est la courbe figurant dans la formule (128) et où l'on choisit

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arg(i\lambda) \leqq \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale converge en raison de l'inégalité (137).

On a encore, d'après les formules (108) et (127)[1], pour $\Re(\alpha)$ assez grand ($\Re(\alpha) > m + 1$),

$$V^\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{W^2\, d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha-1}}. \tag{140}$$

Il est à peu près évident que la première formule, dans laquelle V_{I}^α peut être considéré comme connu, forme le prolongement analytique de la seconde.

Le fait qui nous intéresse en premier lieu est que *la fonction* V^α définie de cette manière *possède toutes les propriétés essentielles que nous avons rencontrées dans le cas analytique.* Il est d'abord clair que les termes principaux sur le conoïde restent les mêmes, puisque V_{I}^α est conservé et que V_{II}^α devient singulier sur le conoïde d'un ordre moins élevé que les termes de V_{I}^α. Vérifions aussi la formule $\Delta V^{\alpha+2} = V^\alpha$. Il suffit évidemment de le faire pour $\Re(\alpha)$ assez grand au moyen de la formule (140). Il vient (*cf.* formule (138))

$$\Delta V^{\alpha+2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{\Delta W^2\, d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{-\lambda^2 W^2\, d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{W^2\, d\lambda}{(i\alpha)^{\alpha-1}} = V^\alpha.$$

J'arrive au dernier point, *la validité des formules de composition* (98) *et* (99) *dans les conditions nouvelles*, question qui me tient particulièrement au cœur. La seule difficulté qui reste est de montrer que le noyau V^α admet une majoration du même genre que plus haut (formule (83)). Or ceci est clair quant à V_{I}^α. En ce qui concerne V_{II}^α, nous arriverons au fait demandé en examinant de plus près les fonctions données par des intégrales du type de (139).

Soit λ une variable complexe et supposons que la fonction $f(\lambda)$ est holo-

[1] *Cf.* aussi la formule (128).

morphe dans le demi-plan inférieur $\Im(\lambda) \leqq 0$ [1], sauf peut-être à l'origine, et qu'elle y satisfait à l'inégalité $|f(\lambda)| \leqq M e^{k|\Im(\lambda)|}$, avec $k \geqq 0$. Formons la fonction de $\alpha = \xi + i\eta$, holomorphe pour $\Re(\alpha) > 0$,

$$g(\alpha) = \int_C \frac{f(\lambda)}{(i\lambda)^{\alpha+1}} d\lambda, \tag{141}$$

le chemin d'intégration C étant le même que dans la formule (128), et les inégalités $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg(i\lambda) \leqq \frac{\pi}{2}$ étant toujours remplies. Ceci posé, *on a l'inégalité*

$$|g(\alpha + b)| \leqq \bar{M}\,|\alpha^{-\alpha} e^{k\alpha}| \text{ avec } \bar{M} = M\left(\pi e^k + \frac{2}{b}\right), \tag{142}$$

valable pour $\Re(\alpha) > 0$ *et pour un nombre positif* b *arbitraire.*

Remarquons d'abord qu'on peut, sans changer la fonction $g(\alpha)$, remplacer le contour C par un autre contour, composé d'une part d'une demi-circonférence de rayon $\xi + 1$, où $\xi = \Re(\alpha)$, décrite autour de l'origine et située dans le demi-plan inférieur, et d'autre part des segments infinis adjacents de l'axe réel. En posant $i\lambda = \varrho e^{i\varphi}$, on a, avec $\eta = \Im(\alpha)$,

$$|(i\lambda)^{-(\alpha+1+b)}| = |\varrho^{-(\alpha+1+b)}| \cdot |e^{-i\varphi(\alpha+1+b)}| = \varrho^{-(\xi+1+b)} e^{\varphi\eta} \leqq \varrho^{-(\xi+1+b)} e^{\frac{\pi}{2}|\eta|}. \tag{143}$$

On obtient ensuite pour $\xi \geqq 0$

$$\int_{\xi+1}^{\infty} \varrho^{-(\xi+1+b)} d\varrho = \frac{(\xi+1)^{-(\xi+b)}}{\xi+b} = \frac{(\xi+1)^{-\xi}}{\xi+b} \cdot (\xi+1)^{-b} < \frac{\xi^{-\xi}}{b},$$

ce qui donne sur les deux segments infinis (*cf.* formule (143))

$$\left|\int_{\pm(\xi+1)}^{\pm\infty} f(\lambda)(i\lambda)^{-(\alpha+1+b)} d\lambda\right| \leqq M e^{\frac{\pi}{2}|\eta|} \int_{\xi+1}^{\infty} \varrho^{-(\xi+1+b)} d\varrho < M e^{\frac{\pi}{2}|\eta|} \cdot \frac{\xi^{-\xi}}{b}.$$

La valeur absolue de l'intégrale étendue à la demi-circonférence de rayon $\xi + 1$ est de son côté inférieure à

$$M e^{k(\xi+1)} \cdot e^{\frac{\pi}{2}|\eta|} \cdot \pi(\xi+1)(\xi+1)^{-(\xi+1+b)} < \pi M e^{k(\xi+1) + \frac{\pi}{2}|\eta|} \cdot \xi^{-\xi}.$$

---

[1] Puisque la fonction $f(\lambda)$ est bornée par hypothèse, il nous suffirait, grâce à un théorème fondamental de Fatou, de supposer que $f(\lambda)$ est holomorphe pour $\Im(\lambda) > 0$.

On a donc l'inégalité préliminaire

$$(144) \qquad |g(\alpha+b)| < M\left(\pi e^{k(\xi+1)} + \frac{2}{b}\right)\cdot \xi^{-\xi}\cdot e^{\frac{\pi}{2}|\eta|}$$
$$\leqq \bar{M} e^{k\xi}\cdot e^{\frac{\pi}{2}|\eta|}\cdot \xi^{-\xi} \text{ avec } \bar{M} = M\left(\pi e^{k} + \frac{2}{b}\right).$$

De la dernière inégalité on déduit aisément l'inégalité définitive (142). Remarquons en effet que la fonction $h(\alpha) = \alpha^{-\alpha} e^{k\alpha}$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re(\alpha) \geqq 0$, à l'exception de l'origine, et que l'on a sur l'axe réel positif et sur l'axe imaginaire

$$(145) \qquad \left|\frac{g(\alpha+b)}{h(\alpha)}\right| \leqq \frac{\bar{M} e^{k\xi}\cdot e^{\frac{\pi}{2}|\eta|}\cdot \xi^{-\xi}}{|h(\alpha)|} = \bar{M}. \text{ [1]}$$

D'autre part le premier membre est dans le demi-plan $\Re(\alpha) \geqq 0$ manifestement inférieur à const. $\exp(|\alpha|^{2-\varepsilon})$ où $0 < \varepsilon < 1$. Il suffit donc, pour voir que l'inégalité $|g(\alpha+b) : h(\alpha)| \leqq \bar{M}$ est remplie dans tout le demi-plan $\Re(\alpha) \geqq 0$, d'appliquer aux deux domaines angulaires (d'ouverture $\pi/2$), limités chacun par l'axe réel positif et par l'un des demi-axes imaginaires, un théorème classique de Phragmén-Lindelöf.[2] L'inégalité (142) est identique à celle que nous venons de vérifier.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la formule de composition (99) aussi dans le cas non analytique. Remarquons à cet effet que la formule (105) se déduit exactement comme plus haut. Cela étant, on forme de nouveau la fonction $G(\alpha)$ définie par la formule (106), fonction qui, d'après la formule (105), s'annule pour tout nombre pair $\alpha = 2n$ assez grand. Pour arriver à la formule (99), il suffira donc, aussi dans le cas actuel, de donner *une majorante holomorphe convenable de* $G(\alpha)$, problème qui se réduit au même problème concernant V^{α}.

Nous commençons par appliquer l'inégalité (142) à la fonction

$$(146) \qquad V_{\text{II}}^{\alpha} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C} \frac{W_{\text{II}}^{2}\, d\lambda}{(i\lambda)^{\alpha-1}}$$

(*cf.* la formule (139)). Nous notons que W_{II}^{2} est une fonction holomorphe de λ dans le demi-plan $\Im(\lambda) \leqq 0$ [3] et que, d'après (137), cette fonction satisfait à

[1] On a $|h(\alpha)| = \varrho^{-\xi}\cdot e^{\theta\eta + k\xi}$.

[2] Phragmén-Lindelöf **1**, p. 385.

[3] Elle est même une fonction entière; *cf.* p. 212.

une limitation de la forme $|f(\lambda)| \leqq e^{k|\Im(\lambda)|}$, posée plus haut au sujet de la fonction $f(\lambda)$ figurant dans la formule (141). On a dans le cas actuel $k = s(x; y)$. Il faut encore remarquer que dans (146) on a l'exposant $\alpha - 1$ (au dénominateur), tandis que pour $g(\alpha + b)$ c'est l'exposant $\alpha + 1 + b$ qui figure dans l'intégrale (141). Avec $b = 1$, le dernier exposant devient $\alpha + 2 = (\alpha - 1) + 3$. On a donc, en vertu de (142), pour d'assez grandes valeurs de $\Re(\alpha)$, les inégalités préliminaires

$$\left| V_{\mathrm{II}}^{\alpha+3} \right| \leqq \left| \bar{M} \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot e^{\alpha s(x;y)} \right| \quad \text{ou} \quad \left| V_{\mathrm{II}}^{\alpha} \right| \leqq \left| \bar{M} \cdot (\alpha - 3)^{-(\alpha-3)} \cdot e^{(\alpha-3)s(x;y)} \right|,$$

ou encore (*cf.* le n° **91**), toujours pour $\Re(\alpha)$ assez grand,

$$\left| V_{\mathrm{II}}^{\alpha} \right| \leqq \left| \bar{M} \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot e^{\alpha s} \cdot \alpha^{p} \right|,$$

majoration qui est essentiellement de la même forme que celle donnée dans la formule (83).

Quant à V_{I}^{α}, défini par la formule (108), il suffit de se reporter aux évaluations du n° **91** pour arriver à une majorante de la forme $|C \cdot \alpha^{-\alpha} \cdot e^{k\alpha} \cdot \alpha^{p}|$. Dès lors, $V^{\alpha} = V_{\mathrm{I}}^{\alpha} + V_{\mathrm{II}}^{\alpha}$ admet aussi une majorante de même forme, les valeurs de C, k, p étant indépendantes de α. Enfin on montre, comme au n° **95**, que la fonction $G(\alpha)$, définie par la formule (106), satisfait à une inégalité semblable. Donc $G(\alpha)$ s'annule identiquement en vertu du théorème d'unicité donné au numéro cité.

La formule de composition (99) étant démontrée, la relation d'échange $V^{\alpha}(x; y) = V^{\alpha}(y; x)$ en découle comme plus haut. Dès lors, la formule de composition (98) et, avec elle, les formules de composition de caractère général (96) et (96^{bis}) se trouvent également établies.

Bibliographie.

M. ABRAHAM. 1. *Theorie der Elektrizität*, II, Leipzig 1905.

R. D'ADHÉMAR. 1. *Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique. Étude de l'intégrale près d'une frontière caractéristique*, Palermo Rend. 20 (1905).

B. B. BAKER et E. T. COPSON. 1. *The mathematical theory of Huygens principle*, Oxford 1939.

R. BALTZER. 1. *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5e éd., Leipzig 1881.

L. BRILLOUIN. 1. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris 1938.

F. BUREAU. 1. *L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique normal*, Mém. Soc. Roy. des Sc. Liége (4) 3 (1938).

H. CARTAN. 1. *Sur les fondements de la théorie du potentiel*, Bull. Soc. Math. de France 69 (1941).

2. *La théorie générale du potentiel dans les espaces homogènes*, Bull. des Sc. Math. (2) 66 (1942).

R. COURANT et D. HILBERT. 1. *Methoden der mathematischen Physik*, I, 2e éd., Berlin 1931, II, Berlin 1937.

G. DARBOUX. 1. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, II, 2e éd., Paris 1889.

P. A. M. DIRAC. 1. *Classical theory of radiating electrons*, Proc. Roy. Soc. A 167 (1938).

N. E. FREMBERG. 1. *Proof of a theorem of M. Riesz concerning a generalization of the Riemann-Liouville integral*, Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förhandl. 15 (1945).

2. *A study of generalized hyperbolic potentials with some physical applications*, Thèse, Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 7 (1946).

3. *Some applications of the Riesz potential to the theory of the electromagnetic field and the meson field*, Proc. Roy. Soc., A 188 (1946).

O. FROSTMAN. 1. *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Thèse, Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 3 (1935).

2. *Sur le balayage des masses*, Acta Szeged 9 (1938) et Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 4 (1939).

3. *Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire*, Arkiv för mat., astr. och fys. 26 A (1938) et Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 4 (1939).

É. GOURSAT. 1. *Cours d'analyse mathématique*, I—III, 2e éd., Paris 1910—1915.

2. *Sur les invariants intégraux*, Journ. de Math. (6) 4 (1908).

L. GÅRDING. 1. *The solution of Cauchys problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals*, Ann. Math. 48 (1947).

J. HADAMARD. 1. *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris 1932.

2. *Équations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique*, Enseign. Math. 35 (1936).

3. *Leçons sur le calcul des variations*, I, Paris 1910.

S. T. MA. 1. *Equivalence of the Riesz method and the λ-limiting process for the classical electromagnetic field of a point source*, Phys. Rev. 71 (1947).

H. MALMHEDEN. 1. *A class of hyperbolic systems of linear differential equations*, Thése, Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 8 (1947).

M. MATHISSON. 1. *Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes*, Acta Math. 71 (1939).

2. *Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischen Typus*, Math. Ann. 107 (1932); une *correction* dans le même volume.

S. B. NILSSON. 1. *The e^4 approximation of the self-energy of the electron treated by analytic continuation*, Arkiv för mat., astr. och fys., 36 A (1948).

I. PETROWSKY. 1. *Sur la diffusion des ondes et les lacunes pour les systèmes d'équations hyperboliques*, Bull. Acad. Sci. USSR, Sér. Math. 8 (1944). En russe. Avec un résumé en français.

2. *On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations*, Rec. Math. N. S. 17 (59) (1945).

E. PHRAGMÉN et E. LINDELÖF. 1. *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse etc.*, Acta Math. 31 (1908).

É. PICARD. 1. *Traité d'analyse*, I, 2e éd., Paris 1901.

H. POINCARÉ. 1. *Sur les résidus des intégrales doubles*, Acta Math. 9 (1887).

G. PÓLYA et G. SZEGÖ. 1. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, I, Berlin 1925.

M. RIESZ. 1. *Intégrale de Riemann-Liouville et solution invariantive du problème de Cauchy pour l'équation des ondes*, Comptes Rendus du Congrès internat. des math. Oslo 1936, II, Oslo 1937.

2. *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes*, Conférence à la Réunion internat. des math., Paris 1937, Soc. Math. de France 66 (1938) et Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 4 (1939).

3. *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Szeged 9 (1938) et Communic. Sémin. Math. de l'Univ. de Lund 4 (1939).

V. VOLTERRA. 1. *Sur les vibrations de corps élastiques isotropes*, Acta Math. 18 (1894).

G. N. WATSON. 1. *A treatise on the theory of Bessel functions*, 1ère éd., Cambridge 1922, 2e éd., Cambridge 1944.

Table des Matières.

CHAPITRE IV.

Le problème de Cauchy pour l'équation des ondes.

CHAPITRE V.

Interprétation géométrique de la solution de l'équation des ondes sphériques.

CHAPITRE VI.

Applications à la théorie relativiste de l'électron.

CHAPITRE VII.

L'équation des ondes dans les espaces de Riemann.