Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Ledoux

La loi du logarithme itéré pour les variables aléatoires prégaussiennes à valeurs dans un espace de Banach à norme régulière

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 609-622

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__609_0>

LA LOI DU LOGARITHME ITERE POUR LES VARIABLES ALEATOIRES PREGAUSSIENNES A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH A NORME REGULIERE

Michel LEDOUX

Les variables aléatoires prégaussiennes constituent une classe privilégiée de variables aléatoires dans l'étude de la propriété de limite centrale en dimension infinie. Mais le caractère prégaussien n'est pas réservé au seul théorème de la limite centrale et le comportement en logarithme itéré des variables aléatoires prégaussiennes mérite une égale attention. Nous nous proposons, dans cette note, de résoudre la question de la loi du logarithme itéré pour les variables aléatoires prégaussiennes à valeurs dans un espace de Banach réel séparable à norme deux fois directionnellement dérivable de dérivée seconde bornée et lipschitzienne en dehors de l'origine.

Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B, \|.\|)$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Désignons par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de copies indépendantes de X et notons, pour tout entier n,

$$S_n(X) = X_1 + \dots + X_n$$

et

$$a_n = (2n L_2 n)^{\frac{1}{2}} ,$$

où L_2 est la fonction sur $\mathbb{R}_+$ définie par $L_2 x = \mathrm{Log}(\max(e, \mathrm{Log}\, x))$.

Nous dirons que la v.a. X satisfait au théorème de la limite centrale si la suite $\left(\frac{S_n(X)}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi dans $(B, \mathcal{B})$. Nous dirons que X satisfait à la loi du logarithme itéré bornée si, presque sûrement (p.s.),

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty \ ;$$

elle satisfait à la loi compacte s'il existe une partie compacte convexe symétrique $K(X)$ de B telle que, p.s.,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{S_n(X)}{a_n}, K(X)\right) = 0 \quad \text{et} \quad C\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right) = K(X)$$

où $d(x,K(X)) = \inf\{\|x-y\| \ , \ y \in K(X)\}$ et $C\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. L'ensemble $K(X)$ est connu habituellement sous le nom de boule unité de l'espace autoreproduisant associé à la covariance de X.

S'il est aisé de vérifier, en présence de la propriété de logarithme itéré bornée (qui, en dimension infinie, est une notion strictement plus faible que celle de loi compacte), que $C\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)$ est une partie p.s. non aléatoire $A(X)$ de $K(X)$, il est par contre beaucoup plus difficile de connaître la nature exacte de cet ensemble. La conjecture en ce domaine est une loi que l'on pourrait baptiser du 0-1 et qui consisterait en l'alternative $A(X) = \emptyset$ ou $A(X) = K(X)$; en cas de réponse positive, il resterait encore à déterminer en quelles circonstances $A(X)$ est vide ou non. Ce dernier problème a été résolu récemment par J. Kuelbs ([9]) dans les espaces de Banach possédant la propriété (A) : un espace de Banach réel séparable B vérifie la propriété (A) si sa norme $\|.\|$ est 2 fois directionnellement dérivable de dérivée seconde bornée et lipschitzienne d'ordre $\alpha > 0$ en dehors de l'origine. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de J. Kuelbs ([7], [8]) pour les définitions précises et les propriétés d'un tel espace. Notons simplement qu'un tel espace est de type 2 ([8]) et que les espaces $L^p = L^p(T,\mathcal{J},\tau)$, où $(T,\mathcal{J},\tau)$ est un espace mesuré, satisfont à la propriété (A) avec $\alpha = 1$ si $p = 2$ ou $p \geq 3$ et $\alpha = p-2$ pour $2 < p < 3$.

Voici maintenant le théorème de J. Kuelbs ([9]) ; il complète, de manière définitive, la loi du logarithme itéré dans les espaces de Hilbert ([4]).

THEOREME 1. Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B, \|.\|)$ possédant la propriété (A) ; si X satisfait à la loi du logarithme itéré bornée, alors $C(\frac{S_n(X)}{a_n}) = K(X)$ p.s..

Fixons à présent notre attention sur les v.a. prégaussiennes qui constituent l'objet de ce travail. Une v.a. X à valeurs dans un espace de Banach B telle que pour tout élément f du dual B' de B, $E\{f(X)\} = 0$ et $E\{f^2(X)\} < \infty$, est dite prégaussienne s'il existe une v.a. gaussienne centrée $G(X)$ dans B de même structure de covariance, c'est-à-dire telle que, pour tous $f, g \in B'$,

$$E\{f(X)g(X)\} = E\{f(G(X))g(G(X))\} .$$

Bien entendu, une v.a. qui vérifie le théorème de la limite centrale est préguassienne. Des propriétés élémentaires de $K(X)$ ([4], Lemma 2.1), nous retenons l'égalité $K(X) = K(G(X))$ et en conséquence la compacité de $K(X)$. La proposition suivante regroupe quelques unes des propriétés essentielles des v.a. prégaussiennes.

PROPOSITION 2. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans B telles que pour tout élément f de B', $E\{f^2(Y)\} \leq E\{f^2(X)\}$, et si X est prégaussienne, alors Y est également prégaussienne. De plus l'espace PG des v.a. prégaussiennes à valeurs dans B est un sous-espace vectoriel de l'espace des v.a. sur B.

<u>Démonstration</u>. Des propriétés usuelles de comparaison entre les vecteurs gaussiens ([3]), nous déduisons que la v.a. gaussienne $G(Y)$ construite à partir de la covariance de Y est effectivement dans B ; ceci justifie la première affirmation de la proposition. La deuxième en est une conséquence immédiate puisque, pour établir le caractère linéaire de PG, il suffit de vérifier que la somme de deux v.a. prégaussiennes X et Y est encore prégaussienne. C'est évident si X et Y sont indépendantes ; dans le cas contraire, l'inégalité triviale

$$E\{f^2(X+Y)\} \leq 2(E\{f^2(X)\} + E\{f^2(Y)\})$$

permet de construire deux copies indépendantes X' et Y' de X et Y telles que

$$E\{f^2(X+Y)\} \leq 2\,E\,\{f^2(X'+Y')\} = E\{f^2(2^{\frac{1}{2}}(X'+Y'))\} ,$$

et la conclusion s'obtient, comme annoncé, du premier point.

Dans un travail récent, généralisant des résultats de G. Pisier et J. Zinn dans les espaces $L^p(2 \leq p < \infty)$ ([11]) , V. Goodman, J. Kuelbs et J. Zinn ont résolu la question du théorème de la limite centrale pour les v.a. prégaussiennes à valeurs dans un espace de Banach possédant la propriété (A) ([4]) ; leur théorème s'énonce :

THEOREME 3. Une v.a. X à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B,\|.\|)$ possédant la propriété (A) satisfait au théorème de la limite centrale si et seulement si elle est prégaussienne et

$$(1) \qquad \lim_{t \to \infty} t^2\, P\,\{\|X\| > t\} = 0 .$$

En outre, la suite $\left(\frac{S_n(X)}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilité si et seulement si la v.a. X est prégaussienne et

$$(2) \qquad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} t^2\, P\,\{\|X\| > t\} < \infty .$$

Du théorème de liaison entre les propriétés de limite centrale et de logarithme itéré ([4], [5]), on déduit immédiatement qu'une v.a. prégaussienne X à valeurs dans un espace de Banach vérifiant (A) satisfait à la loi du logarithme itéré compacte (resp. bornée) si elle vérifie (1) (resp. (2)) et

$$(3) \qquad E\left\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right\} < \infty .$$

Au mois d'août de cette année, le Professeur J. Kuelbs nous a signalé le théorème suivant, qui renforce ce dernier résultat concernant la loi du logarithme itéré.

THEOREME 4. Soit X une v.a. prégaussienne à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B,\|.\|)$ possédant la propriété (A) ; on suppose que X vérifie la condition d'intégrabilité (3) et que, pour tout t assez grand,

$$P\{\|X\| > t\} \leq \frac{\varphi(t)}{t^2}$$

où φ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \frac{[\mathrm{Log}(L_2 t)]^2 \varphi(t)}{L_2 t} < \infty \ ;$$

alors X satisfait à la loi du logarithme itéré compacte.

Nous nous proposons à présent d'énoncer la solution complète de la loi du logarithme itéré pour les v.a. prégaussiennes à valeurs dans un espace possédant la propriété (A) ; cet énoncé caractérise la loi du logarithme itéré pour les v.a. prégaussiennes à partir de la seule condition d'intégrabilité (3) et précise donc, dans les espaces possédant la propriété (A) , la relation entre le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré.

THEOREME 5. (Voir remarque finale). Une v.a. prégaussienne X à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(B,\|.\|)$ possédant la propriété (A) satisfait à la loi du logarithme itéré compacte si et seulement si elle vérifie la condition (3) ; en particulier, la loi bornée est équivalente à la loi compacte. En outre, si X est symétrique et vérifie (3) , pour toute suite croissante non bornée $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} \theta_j = 0 \quad \text{p.s.}$$

où l'on a posé, pour tout entier n et tout $j \in I(n) = \{2^n, \ldots, 2^{n+1}-1\}$,

$$\theta_j = X_j \, I_{\{\|X_j\| > b_{2^n}\}} \, .$$

<u>Démonstration</u>. Nous nous restreignons au cas d'une v.a. X symétrique, le cas général s'en déduisant par symétrisation. Pour tout entier n et tout

$j \in I(n)$, posons

$$\xi_j = X_j \, I_{\{\|X_j\| \le a_{2^n}\}}$$

et

$$\eta_j = X_j \, I_{\{\|X_j\| > a_{2^n}\}} .$$

En vertu du lemme de Borel-Cantelli et de la condition d'intégrabilité sur X ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j = 0 \quad \text{p.s.} ,$$

ce qui, joint à un argument de symétrie, nous assurera dans un premier temps la propriété de logarithme itéré bornée si nous exhibons une constante positive finie M telle que la série de terme général $P\{\|\sum_{j\in I(n)} \xi_j\| > 2Ma_{2^n}\}$ soit convergente. Justifions en quelques mots cette affirmation ; d'après l'inégalité de Lévy ,

$$P\{\sup_{k\in I(n)} \|\sum_{j=2^n}^{k} \xi_j\| > 2Ma_{2^n}\} \le 2P\{\|\sum_{j\in I(n)} \xi_j\| > 2Ma_{2^n}\} ,$$

et donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in I(n)} \frac{1}{a_{2^n}} \|\sum_{j=2^n}^{k} \xi_j\| < \infty \quad \text{p.s.} .$$

Soit à présent un entier n , $2^i \le n < 2^{i+1}$; on a

$$\frac{1}{a_n} \|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\| \le \sum_{k=o}^{i-1} \frac{a_{2^k}}{a_{2^i}} \left(\frac{1}{a_{2^k}} \|\sum_{j\in I(k)} \xi_j\|\right) + \sup_{k\in I(i)} \frac{1}{a_{2^i}} \|\sum_{j=2^i}^{k} \xi_j\| ,$$

d'où l'on déduit, pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'existence d'une constante $C_1(\omega)$ telle que

$$\frac{1}{a_n} \|\sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega)\| \le C_1(\omega)[1 + \sum_{k=o}^{i-1} (2^{k/2 - i/2})] \le 4C_1(\omega) .$$

En vue d'évaluer la probabilité $P\{\|\sum_{j\in I(n)} \xi_j\| > 2Ma_{2^n}\}$, nous nous reportons à l'inégalité (2.7) de [7] (ou plus précisément à sa démonstration) qui fournit une constante $C_2 = C_2(M)$, uniforme en n , telle que

$$P\{\|\sum_{j\in I(n)} \xi_j\| > 2M\, a_{2^n}\} \leq P\{\|G(\xi_{2^n})\| > M(2L_2 2^n)^{\frac{1}{2}}\}$$

$$+ C_2\, 2^n\, E\{(\frac{\|\xi_{2^n}\|}{a_{2^n}})^{2+\alpha} + (\frac{\|G(\xi_{2^n})\|}{a_{2^n}})^{2+\alpha}\}$$

où $G(\xi_{2^n})$ est une v.a. gaussienne de même covariance que ξ_{2^n} . Il est aisé d'observer que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n\, E\{(\frac{\|\xi_{2^n}\|}{a_{2^n}})^{2+\alpha}\} \leq C_3\, E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} ,$$

si bien que la propriété de logarithme itéré bornée résultera de la convergence de la série de terme général

$$P\{\|G(\xi_{2^n})\| > M(2L_2\, 2^n)^{\frac{1}{2}}\} + 2^n\, E\{(\frac{\|G(\xi_{2^n})\|}{a_{2^n}})^{2+\alpha}\} ;$$

or, pour tout entier n et tout réel $t>0$, l'inégalité de T.W. Anderson ([1], également citée dans [4] et [8]) nous montre que

$$P\{\|G(\xi_{2^n})\| > t\} \leq P\{\|G(X)\| > t\} ,$$

où $G(X)$ est une v.a. gaussienne à valeurs dans B de même structure de covariance que X . La convergence souhaitée se déduit alors sans peine de l'intégrabilité gaussienne ([2]) et d'un bon choix de M .

En vue d'atteindre la propriété de logarithme itéré compacte, nous notons $\Phi(x)$ une fonction de Young équivalente asymptotiquement à $\frac{x^2}{L_2 x}$ et $\|\cdot\|_\Phi$ la norme d'Orlicz associée. Nous venons d'injecter l'espace PG des v.a. prégaussiennes Z de B muni de la norme $(E\{\|G(Z)\|^2\})^{\frac{1}{2}} + \|Z\|_\Phi$ dans l'espace des v.a. Z à valeurs dans B telles que

$$E\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|S_n(Z)\|}{a_n}\} < \infty$$

([10], Proposition 2.2) ; le graphe de cette injection étant fermé, nous déduisons du théorème du même nom l'existence d'une constante positive finie

C_4 telle que pour toute v.a. Z à valeurs dans B ,

$$E\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|S_n(Z)\|}{a_n}\} \leq C_4[(E\{\|G(Z)\|^2\})^{\frac{1}{2}} + \|Z\|_\Phi] ,$$

le second membre étant éventuellement infini. Considérons à présent une v.a. prégaussienne X telle que $\|X\|_\Phi < \infty$; par le théorème de convergence des martingales vectorielles, nous construisons une suite croissante $(\mathfrak{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-tribus finies de $\mathfrak{F}$ engendrant la tribu $X^{-1}(\mathcal{B})$ et telle que, si

$$X_k = E\{X|\mathfrak{F}_k\} \ (X_o = E\{X|\mathfrak{F}_o\} = E\{X\} = 0) ,$$

on ait

$$\lim_{k\to\infty} \|X - X_k\|_\Phi = 0 .$$

Pour tout entier k , posons $Y_k = X_{k+1} - X_k$; nous déduisons d'un petit jeu sur les espérances conditionnelles l'égalité

$$E\{f(X)g(X)\} = \sum_{k\in\mathbb{N}} E\{f(Y_k)g(Y_k)\}$$

pour tous $f,g \in B'$. En conséquence, si $(G(Y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de v.a. gaussiennes indépendantes telle que pour tout entier k , $G(Y_k)$ possède la même covariance que Y_k , la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} G(Y_k)$ a même loi que $G(X)$.
Le caractère gaussien des v.a. $G(Y_k)$ et $G(X)$ et les théorèmes d'intégrabilité classiques des sommes de v.a. indépendantes ([6]) donnent ainsi

$$\lim_{k\to\infty} E\{\|\sum_{j\geq k} G(Y_j)\|^2\} = 0 .$$

Regroupant nos convergences, nous choisissons, pour tout réel ε strictement positif, un entier k tel que

$$(E\{\|\sum_{j\geq k} G(Y_j)\|^2\})^{\frac{1}{2}} + \|X-X_k\|_\Phi \leq \frac{\varepsilon}{2C_4} ,$$

de sorte que ,

$$E\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|S_n(X - X_k)\|}{a_n}\} \leq \varepsilon$$

puisque $\sum_{j\geq k} G(Y_j)$ constitue une version de $G(X - X_k)$; nous concluons à la loi du logarithme itéré compacte en vertu du théorème d'approximation de G. Pisier ([10], Théorème 3.1).

Nous justifions à présent la seconde affirmation du théorème 5. A nouveau, la démonstration se réduit, en raison d'un argument de symétrie et du lemme de Borel-Cantelli, à établir, pour tout réel ε strictement positif, la convergence de la série de terme général

$$P\{\|\sum_{j\in I(n)} \theta'_j\| > 2\varepsilon a_{2^n}\} \text{ où, si } j\in J(n)\,,$$

$$\theta'_j = X_j I_{\{b_{2^n} < \|X_j\| \le a_{2^n}\}}\,.$$

Une répétition des arguments précédents nous permet de nous limiter à l'étude de la série de terme général $P\{\|G(\theta'_{2^n})\| > \varepsilon(2L_2 2^n)^{\frac{1}{2}}\}$ où $G(\theta'_{2^n})$ est une v.a. gaussienne de même covariance que θ'_{2^n}.

La première étape va consister à déduire de la compacité de $K(X)$ l'intégrabilité uniforme de la famille de v.a. $f^2(X)$, f parcourant la boule unité de B' ; cette déduction repose essentiellement sur la formule

$$\sup\{(E\{f^2(X)\})^{\frac{1}{2}}, \|f\|_{B'} \le 1\} = \sup\{\|x\|, x\in K(X)\}$$

intrinsèque à la construction de $K(X)$. Pour tout réel $c>0$, notons X_c la v.a. $X I_{\{\|X\|>c\}}$; on a

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\|f\|_{B'}\le 1} E\{f^2(X) I_{\{|f(X)|>c\}}\} \le \lim_{c\to\infty} \sup_{\|f\|_{B'}\le 1} E\{f^2(X_c)\}$$

$$\le \limsup_{c\to\infty} \left(\sup_{x\in K(X_c)} \|x\|^2\right).$$

Nous procédons par l'absurde en supposant non nulle cette dernière limite ; cette hypothèse fournit un réel δ strictement positif et une suite non bornée $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ainsi qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B tels que, pour tout entier n, $x_n\in K(X_{c_n})$ et $\|x_n\|\ge 2\delta$. Un élément x_n de $K(X_{c_n})$ est de la forme

$$x_n = E\{\psi_n X_{c_n}\}$$

où ψ_n est une v.a. de la boule unité de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P; \mathbb{R})$; mais l'égalité

$$x_n = E\{\psi_n X_{c_n}\} = E\{(\psi_n I_{\{\|X\|>c_n\}})X\}$$

prouve que x_n appartient également à $K(X)$. La compacité de $K(X)$ permet d'extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ convergeant vers un élément x de $K(X)$ de norme plus grande que 2δ.

Il existe ainsi une forme linéaire f sur B telle que $f(x)>\delta$ et un sous-ensemble strictement dénombrable $\mathbb{N}_2$ de $\mathbb{N}_1$ tel que $f(x_n)\geq\delta$ pour tout entier n de $\mathbb{N}_2$. La contradiction s'obtient alors de l'inégalité de Schwarz

$$\delta \leq f(x_n) = E\{\psi_n f(X_{c_n})\} \leq (E\{f^2(X)\, I_{\{\|X\|>c_n\}}\})^{\frac{1}{2}}$$

et du théorème de la convergence dominée.

Cette uniforme intégrabilité détermine un entier $n_o = n_o(\varepsilon)$ tel que

$$\sigma^2 = \sup\{E\{f^2(X)I_{\{\|X\|>b_{2^{n_o}}\}}\}\, ,\, \|f\|_{B'}\leq 1\} < \varepsilon^2 .$$

Nous notons à présent $G(\theta_{2^{n_o}})$ une v.a. gaussienne de B de même covariance que $\theta_{2^{n_o}}$, de sorte que, en vertu de l'inégalité de T.W. Anderson,

$$P\{\|G(\theta'_{2^n})\| > \varepsilon(2L_2 2^n)^{\frac{1}{2}}\} \leq P\{\|G(\theta_{2^{n_o}})\| > \varepsilon(2L_2\, 2^n)^{\frac{1}{2}}\}$$

pour tout $n\geq n_o$. Or, par séparabilité de B, la v.a. $\exp(\beta\|G(\theta_{2^{n_o}})\|^2)$ est intégrable pour tout $\beta < \frac{1}{2\sigma^2}$ ([3], Théorème 1.3.3) ; choisissant alors $\frac{1}{2\varepsilon^2} < \beta < \frac{1}{2\sigma^2}$, la série considérée initialement est convergente et ainsi s'achève la démonstration du théorème.

Notre travail serait incomplet sans l'exemple d'une v.a. prégaussienne à valeurs dans un espace de Banach possédant la propriété (A) satisfaisant à la loi du logarithme itéré mais ne vérifiant pas le théorème de la limite centrale ; l'exemple que nous présentons est inspiré d'un exemple de V. Goodman, J. Kuelbs et J. Zinn ([4], Paragraphe 7).

Pour tout entier r, définissons la quantité 2_r^k par la récurrence $2_o^k = k$ et $2_r^k = 2^{2_{r-1}^k}$. Définissons en outre, pour $r \geq 3$, deux suites indépendantes $(\delta_j)_{j \geq 1}$ et $(Z_j)_{j \geq 1}$ de v.a. réelles telles que $\delta_i \delta_j = 0$ si $i \neq j$,

$$P\{\delta_j = 1\} = \frac{1}{2_{r-2}^j} \quad \text{et} \quad P\{\delta_j = 0\} = 1 - P\{\delta_j = 1\},$$

Z_j est symétrique et

$$Z_j^2 = \begin{cases} 2_r^k & \text{avec probabilité } \dfrac{2_{r-2}^j}{2_{r-2}^k \, 2_r^k} I_{\{j \leq 2_{r-2}^k\}} \quad (k \geq 1), \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Considérons à présent la v.a. X à valeurs dans ℓ^p $(2 < p < \infty)$ définie par

$$X = \sum_{j \geq 1} \delta_j Z_j e_j$$

où $(e_j)_{j \geq 1}$ désigne la base canonique de ℓ^p ; nous notons $\|.\|_p$ la norme de ℓ^p de sorte que

$$\|X\|_p = \Big(\sum_{j \geq 1} \delta_j |Z_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Compte tenu des théorèmes 3 et 5, les trois propriétés suivantes suffisent à notre contre-exemple :

a) $E\{\dfrac{\|X\|_p^2}{L_2\|X\|_p}\} < \infty$;

b) $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} t^2 P\{\|X\|_p > t\} < \infty$ mais $t^2 P\{\|X\|_p > t\}$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers l'infini ;

c) $\sum_{j \geq 1} (E\{|\delta_j Z_j|^2\})^{p/2} < \infty$, ce qui est équivalent, d'après [12], à dire que X est prégaussienne.

Le calcul fondamental pour vérifier ces trois propriétés est le suivant ; pour tout entier $k \geq 1$,

$$P\{\|X\|_p^2 = 2_r^k\} = \sum_{j\geq 1} P\{\delta_j = 1 \, , \, Z_j^2 = 2_r^k\}$$

$$= \sum_{j\geq 1} \frac{1}{2_{r-2}^j} \cdot \frac{2_{r-2}^j}{2_{r-2}^k \, 2_r^k} I_{\{j \leq 2_{r-2}^k\}} = \frac{1}{2_r^k} \, .$$

On a alors, et dans ce qui va suivre $C(r)$, $C'(r)$ et $C''(r)$ sont des constantes positives finies ne dépendant que de $r \geq 3$,

a) $E\{\frac{\|X\|_p^2}{L_2\|X\|_p}\} \leq C(r) \sum_{k\geq 1} \frac{2_r^k}{2_{r-2}^k} \cdot \frac{1}{2_r^k} < \infty$;

b) soit $2_r^k \leq t < 2_r^{k+1}$; on a

$$P\{\|X\|_p^2 > t\} = P\{\|X\|_p^2 \geq 2_r^{k+1}\} = \sum_{i\geq k+1} \frac{1}{2_r^i} \, ,$$

et donc,

$$\frac{1}{2_r^{k+1}} \leq P\{\|X\|_p^2 > t\} \leq \frac{C'(r)}{2_r^{k+1}} \, ,$$

d'où ce deuxième point ;

c) $E\{\delta_j Z_j^2\} = \frac{1}{2_{r-2}^j} \sum_{k\geq 1} 2_r^k \cdot \frac{2_{r-2}^j}{2_{r-2}^k \, 2_r^k} I_{\{j \leq 2_{r-2}^k\}} \leq \frac{C''(r)}{j}$,

et par conséquent ,

$$\sum_{j\geq 1} (E\{\delta_j Z_j^2\})^{p/2} \leq \sum_{j\geq 1} \left(\frac{C''(r)}{j}\right)^{p/2} < \infty \quad \text{car } p > 2 \, .$$

<u>Remarque finale</u> :

Nous venons d'apprendre que J. Kuelbs a découvert indépendamment notre théorème 5 ; sa démonstration, dont nous ignorons le contenu, figurera dans un article actuellement en préparation.

REFERENCES

[1] T.W. ANDERSON (1955). The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. 6, p. 170-176.

[2] X. FERNIQUE (1970). Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A 270, p. 1698-1699.

[3] X. FERNIQUE (1974). Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'été de Probabilités de St-Flour 1974. Lecture Note in Math. 480, p. 1-96.

[4] V. GOODMAN, J. KUELBS, J. ZINN (1980). Some results on the law of the iterated logarithm in Banach space with applications to weighted empirical processes. A paraître in Ann. Prob.

[5] B. HEINKEL (1979). Relation entre théorème central limite et loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Z. Wahr. verw. Geb. 49, p. 211-220.

[6] J. HOFFMANN-JØRGENSEN (1976). Probability in Banach spaces. Ecole d'été de Probabilités de St-Flour 1976. Lecture Notes in Math. 598, p. 1-186.

[7] J. KUELBS (1974). An inequality for the distribution of a sum of certain Banach space valued random variables. Studia Math. 52, p. 69-87.

[8] J. KUELBS (1975). The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorems for Banach space valued random variables. Ecole d'été de Probabilités de St-Flour 1975. Lecture Notes in Math. 539, p. 225-314.

[9] J. KUELBS (1981). Some results on the cluster set $C(\{\frac{S_n}{a_n}\})$. Preprint.

[10] G. PISIER (1975). Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975-1976, exposés 3 et 4.

[11] G. PISIER, J. ZINN (1978). On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p $(2 \leq p < \infty)$. Z. Wahr. verw. Geb. 41, p. 289-304.

[12] N.V. VAKHANIA (1965). Sur une propriété des répartitions normales dans les espaces ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ et H. C.R. Acad. Sc. Paris, Série A 260, p. 1334-1336.