LES ESPACES ABSTRAITS TOPOLOGIQUEMENT AFFINES.

PAR

MAURICE FRÉCHET

à STRASBOURG.

Table des Matières.

Introduction.

De nombreux travaux ont été consacrés à la définition axiomatique[1] des champs de vecteurs et à celle d'espaces liés à ces champs de vecteurs sous les noms d'espaces linéaires, espaces vectoriels, espaces affines, etc....

Dans la plupart de ces travaux, les points de l'espace considéré étaient des points d'un espace à 1, 2, 3, ..., un nombre entier n quelconque de dimensions. En outre, le fait que le nombre de coordonnées ou de paramètres dont dépend un point d'un espace n'est déterminé que si on fait intervenir des considérations de continuité était ignoré ou méconnu. Enfin, on n'avait guère aperçu tout le parti qu'on peut tirer de ces considérations pour l'étude de champs fonctionnels très divers.

C'est à MM. S. Banach[2] et N. Wiener[3] qu'on doit d'avoir élargi ces anciens horizons. Reprenant les systèmes d'axiomes qui définissent, avec quelques variantes, les champs de vecteurs, ces auteurs, d'une façon indépendante, leur ont lié nettement les considérations de continuité que leurs prédécesseurs avaient cru habile d'écarter. Cela leur a permis de faire entrer dans un même cadre des champs fonctionnels divers et importants.

Or, nous avons indiqué récemment toute une suite de champs fonctionnels (très utiles en Analyse) qui se trouvent avoir le même nombre de dimensions au sens que nous avons attaché à cette expression.[4] Cette particularité doit être la marque d'une structure commune. Et, en effet, plusieurs d'entre eux[5] peuvent être considérés comme des espaces de Banach. Mais, d'autre part, Urysohn a montré[6] que plusieurs autres de ces champs fonctionnels (qui ont le même nombre de dimensions que les précédents) ne peuvent être considérés, au moins d'une façon naturelle, comme des espaces de Banach.

Ceci nous a conduit à définir des espaces analogues à ceux de MM. Banach et Wiener, un peu moins simples mais plus généraux, de façon à englober les espaces signalés par Urysohn.

---

[1] Voir par exemple: Le operazione distributive e le loro appliazione all'Analisi, par Pincherle et Amaldi, Bologna, 1901, 1er Chapitre.

[2] Opérations dans les ensembles abstraits, Fund. Mathém., t. III, 1922, p. 135.

[3] Bull. Soc. Math. France, t. 50, 1922, p. 124.

[4] Sur la notion de nombre de dimensions, C. R. Ac. Sc. Paris, 26 Mai 1924, t. 178, p. 1782.

[5] A savoir, en particulier, les espaces désignés dans la communication rappelée, note 1, par les noms d'espaces C, C', Ω_1, Ω, D_ω.

[6] Sur un problème de M. Fréchet, C. R. Congrès Soc. Sav., Dijon, 1924.

En désignant les espaces de Banach comme des espaces (D) vectoriels complets (terminologie qui sera expliquée plus loin), nous les différencierons des espaces plus généraux que nous avons définis sous le nom d'espaces topologiquement affines. Parmi ceux-ci, il y a lieu de distinguer les espaces plus simples que nous avons appelés espaces (D) affines complets parmi lesquels viennent se ranger les espaces envisagés par Urysohn.

Pour arriver à cette dernière notion, nous avons dû *établir une distinction* qu'on trouvera peut-être subtile *entre les notions de distance de deux points et de longueur d'un vecteur*. Mais cette distinction est dans la nature des choses et nous permet d'atteindre la généralité nécessitée par les faits. En particulier, elle permet de mettre en évidence que, si la conception de l'espace abstrait affine est logiquement indépendante des considérations de continuité (sauf sur chaque droite prise isolément), on n'obtiendra pourtant des résultats intéressants qu'en rétablissant des liens naturels entre ces deux ordres d'idées.

La table des matières placée en tête donnera une idée suffisante du plan et du contenu du présent mémoire. Celui-ci est le développement d'une note publiée dans les C. R. Ac. Sc. Paris, 9 Février 1925, tome 180, p. 419—421.

PREMIER CHAPITRE.

Deux définitions équivalentes des espaces abstraits affines.

I. Définition vectorielle.

Remarque préliminaire. On trouve définis parfois les espaces linéaires, affines, vectoriels ou similaires comme des ensembles d'éléments ou points d'une nature quelconque sur lesquels il est possible d'effectuer des opérations similaires à celles qu'on envisage dans l'analyse vectorielle ordinaire. Une telle conception sous-entend que cela n'est possible que si l'ensemble en question jouit de propriétés spéciales, hypothèse qui n'est pas exacte (voir page 36).

Si donc on veut que la notion d'espace affine apporte quelque chose de nouveau qui distingue celui-ci d'un espace ou d'un ensemble quelconque, il faut considérer *qu'un espace affine* n'est pas seulement un ensemble de points, mais *un système* constitué par: 1° un ensemble de points, 2° des opérations applicables à ces points et analogues aux opérations vectorielles classiques.

C'est le point de vue que nous adopterons ici. Logiquement, ces opérations pourront jouer de la même façon sur deux ensembles en correspondance biunivoque; autrement dit leur définition sera indépendante de la nature des points de l'espace envisagé. En fait, on n'obtiendrait aucun résultat utile si l'on ne se souciait pas, pour chaque espace d'une nature déterminée, de définir des opérations vectorielles véritablement en rapport avec la nature de cet espace.

Pour définir un espace affine abstrait, nous suivrons l'exposé présenté ailleurs[1], où nous avons défini les espaces vectoriels abstraits en tâchant de combiner les avantages des exposés dûs indépendamment à M. M. Banach et Wiener. Il nous suffira de supprimer la dernière condition adoptée pour les espaces vectoriels pour obtenir les espaces affines. (Mais quand nous viendrons aux considérations topologiques, la différence sera bien plus profonde.)

On définira d'abord une famille de vecteurs abstraits puis un espace abstrait affine.

Définition des familles de vecteurs abstraits. Une famille de vecteurs abstraits est le système constitué par 1° un ensemble σ d'éléments de nature quelconque appelés vecteurs abstraits, 2° trois opérations à effectuer sur ces vecteurs, désignées par les notations $+$, $.$, $\|\ldots\|$ et liées entre elles et à l'ensemble σ par les conditions suivantes:

Soient ξ, η, ζ des éléments quelconques de la famille σ considérée, a, b des nombres réels quelconques.

1° $\xi+\eta$ est un élément bien déterminé de la famille σ,
2° $\xi+\eta=\eta+\xi$,
3° $(\xi+\eta)+\zeta=\xi+(\eta+\zeta)$,
4° $\xi+\eta=\xi+\zeta$ entraîne $\eta=\zeta$,
5° Il existe un élément de σ, qu'on peut désigner par 0 tel que $\xi+0=\xi$,
6° $a\,.\,\xi$ est un élément bien déterminé de la famille σ,
7° $a\neq 0$ et $a\,.\,\xi=a\,.\,\eta$ entraînent $\xi=\eta$,
8° $\xi\neq 0$ et $a\,.\,\xi=b\,.\,\xi$ entraînent $a=b$,
9° $a\,.\,(\xi+\eta)=a\,.\,\xi+a\,.\,\eta$,
10° $(a+b)\,.\,\xi=a\,.\,\xi+b\,.\,\xi$,
11° $1\,.\,\xi=\xi$,
12° $(a\,.\,b)\,.\,\xi=a\,.\,(b\,.\,\xi)$,
13° $\|\xi\|$ est un nombre réel ≥ 0 et que nous appellerons longueur de ξ,

[1] Les espaces vectoriels abstraits; Bull. Calcutta Math. Soc., 1925.

14° $\|\xi\|=0$ est équivalent à $\xi=0$,

15° $\|a.\xi\|=|a|.\|\xi\|$.

Définition vectorielle d'un espace abstrait affine. Nous appellerons espace abstrait affine un système constitué par 1° un ensemble E d'éléments de nature quelconque appelés points de cet espace ou points abstraits, 2° une famille de vecteurs abstraits liée à l'ensemble de points abstraits par les conditions suivantes.

Appelons couple ordonné d'éléments la suite de deux éléments de E pris dans un certain ordre.

I. A tout couple ordonné A, B d'éléments de la classe E correspond un élément ξ déterminé de la famille σ de vecteurs associée à E et on exprime cette correspondance par la notation $\overline{AB}=\xi$.

II. Etant donnés un élément ξ de la famille σ et un élément A de la classe E, il existe un élément B et un seul, tel que $\overline{AB}=\xi$.

III. Quel que soit A de E: $\overline{AA}=0$.

IV. Quels que soient les éléments A, B, C de E

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Remarques. On observera qu'en vertu des conditions 13°, 14°, 15°, l'égalité $\|a.\xi\|=0$ équivaut à l'alternative $a=0$ ou $\xi=0$.

On observera, d'autre part, que l'on a $\overline{AB}+\overline{BA}=0$ et $\overline{AB}+(-1).\overline{AB}=0$ d'où $\overline{BA}=(-1).\overline{AB}$.

Il nous sera aussi utile par la suite d'introduire la définition d'une *droite abstraite*.

Par analogie avec ce qui se passe dans l'espace euclidien,[1] nous appellerons *droite abstraite* AB l'ensemble des points M de l'espace affine, qu'on obtient en faisant varier le *nombre* ϱ dans la relation

$$\overline{AM}=\varrho.\overline{AB},$$

où A et B sont deux points distincts quelconques de cet espace. En posant $\varrho'=1-\varrho$, on voit que cet ensemble est le même que celui des points N obtenus en faisant varier ϱ' dans la relation

$$\overline{BN}=\varrho'.\overline{BA}$$

[1] Comme on a donné à cette expression des sens variés, nous entendons par là l'espace étudié dans la géométrie élémentaire classique.

La droite BA est donc le même ensemble que la droite AB et elle contient évidemment les points A et B obtenus pour $\varrho = 0$ et $\varrho = 1$.

On définira aussi les *translations*, comme d'ordinaire: Soit ξ un vecteur quelconque; il détermine une transformation biunivoque de l'espace affine en lui-même où, à tout point A de l'espace, on fait correspondre le point A' tel que $\overline{AA'} = \xi$. On pourra appeler cette transformation, la translation ξ. Il est manifeste qu'un espace affine est homogène par rapport à ses translations. C'est-à-dire qu'étant donnés deux points quelconques B et B', il y a toujours une translation qui transforme l'espace en lui-même et B en B'. Dans cette translation, une droite sera transformée en une droite et les longueurs seront conservées.

Exemples d'espaces affines.

1° Les exemples les plus simples sont ceux *des espaces euclidiens à une, deux on trois dimensions,* qui sont justement ceux qui ont donné naissance à la notion d'espace affine.

Comme ils vont rentrer dans la catégorie suivante, nous n'aurons pas à les étudier à part.

2° *Les espaces à n dimensions.* Il est bien connu que ces espaces sont affines et la façon de le voir est toute semblable à celle qui va nous permettre de considérer un cas plus géneral.

3° *Les espaces à une infinité de dimensions.* Ce titre n'étant donné qu'à un point de vue mnémotechnique, considérons un ensemble G d'éléments ou points X dont chacun est déterminé par une suite infinie de nombres $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ que nous appellerons *coordonnées* du point X.

Nous dirons que cet ensemble G est *linéaire* si 1° comprenant le point ξ de coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ il comprend nécessairement, quel que soit le nombre réel a, le point de coordonnées $a\xi_1, a\xi_2, \ldots a\xi_n, \ldots$ 2° comprenant en outre le point η de coordonnées $\eta_1, \eta_2, \ldots$ il comprend le point de coordonnées $\xi_1 + \eta_1$, $\xi_2 + \eta_2, \ldots$

Ceci étant, disons que deux couples ordonnés de points X, Y et X', Y' de l'ensemble G sont *équipollents* si les différences des coordonnées correspondantes sont égales:

$$y_1 - x_1 = y'_1 - x'_1, \ldots \; y_n - x_n = y'_n - x'_n, \ldots$$

Nous pourrons appeler *vecteur* ξ l'ensemble des couples ordonnés X', Y' équipollents à un couple ordonné fixe X, Y de points de l'ensemble G. Nous représenterons ces relations par la notation $\overline{XY}=\xi=\overline{X'Y'}$. Et nous appellerons *projections* du vecteur ξ, les quantités

$$\xi_1=y_1-x_1, \ldots, \xi_n=y_n-x_n, \ldots$$

En particulier, les couples ordonnés $\overline{X'Y'}$ équipollents au vecteur $\overline{XX}$ sont formés de deux points non distincts et nous appellerons 0 le vecteur correspondant:

$$\overline{XX}=0.$$

Ceci étant, on voit que la suite des projections d'un vecteur peut aussi être considérée comme la suite des coordonnées d'un point de G et réciproquement.

Etant donnés deux vecteurs ξ, η, on appellera *somme* de ξ et de η, le vecteur ayant pour projections les sommes des projections de ξ et de η: $\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots$ Et si a est un nombre quelconque, on appellera $a.\xi$ le vecteur ayant pour projections $a\xi_1$, $a\xi_2, \ldots$

Pour définir la longueur de ξ, on pourra, *par exemple* opérer comme suit. On posera $\|\xi\|=0$ pour $\xi=0$ et si $\xi\neq0$, c'est-à-dire si les projections de ξ ne sont pas toutes nulles, on appellera ξ_0 la première qui n'est pas nulle et on posera $\|\xi\|=|\xi_0|$.

On voit immédiatement en utilisant l'hypothèse que l'ensemble G des points de l'espace considéré est linéaire, que le système formé par l'ensemble G et la famille de vecteurs qu'on vient de définir constitue un espace affine, c'est-à-dire satisfait aux conditions 1° à 15° et I à IV.

Cette constatation aurait peu d'intérêt si nous n'ajoutions: *non seulement ce système est un espace affine, mais il est définissable comme un espace affine en y adoptant comme sens des opérations vectorielles, des significations en rapport avec la nature des éléments ou points considérés*, puisque les opérations proprement vectorielles $\xi+\eta$, $a.\xi$ correspondent aux opérations algébriques $\xi_k+\eta_k$ et $a\xi_k$ effectuées sur les projections des vecteurs ξ et η.

Il serait, en effet, bien facile de prouver qu'à peu près n'importe quel ensemble (ayant au moins la puissance du continu) peut être considéré d'une infinité de façons comme espace affine, si l'on accepte de considérer comme entièrement arbitraire la relation entre les *opérations* vectorielles qui s'effectuent sur les points de cet espace et la *nature* des points de cet espace. Mais on arriverait ainsi à des conséquences singulières et peu intéressantes que nous signalerons plus loin (page 36).

En outre, l'intérêt des constatations précédentes serait bien limité si les mêmes opérations vectorielles étaient considérées comme indépendantes des considérations de continuité, c'est à dire indépendantes de la définition de la convergence des suites de points de cet espace, ou plus généralement de celles des transformations continues d'ensembles de points de cet espace. Mais c'est un point que nous traiterons en détail plus loin (page 36).

4° *Espaces fonctionnels.* Considérons un ensemble linéaire H de fonctions d'une variable.

Nous dirons que cet ensemble est *linéaire* si 1° comprenant la fonction $f(x)$, il comprend nécessairement, quel que soit le nombre réel a, la fonction $af(x)$; 2° comprenant en outre la fonction $\varphi(x)$, il comprend aussi la fonction $f(x)+\varphi(x)$.

Nous pourrons alors considérer chaque fonction $f(x)$ de H comme un *point abstrait.* Et nous pourrons dire que deux couples ordonnés de points abstraits f, φ et f_1, φ_1 sont *équipollents* lorsque les différences $\varphi(x)-f(x)$ et $\varphi_1(x)-f_1(x)$ ne sont pas distinctes.

Nous pourrons appeler *vecteur* ξ, la collection de tous les couples ordonnés f, φ équipollents à un couple donné. Et nous représenterons cette relation par la notation $\xi=\overline{f\varphi}$. Chaque vecteur ξ est déterminé par la différence $\xi(x)=\varphi(x)-f(x)$ qui ne varie pas quand on remplace f, φ par un couple ordonné équipollent.

En particulier, nous appellerons 0, le vecteur représenté par $\xi(x)$ quand cette fonction est identiquement nulle. De sorte que $0=\overline{ff}$ quel que soit f de H.

Remarquons d'ailleurs que la représentation $\xi(x)$ de tout vecteur ξ appartient à H et que, réciproquement, toute fonction $\xi(x)$ de H représente le vecteur déterminé par le couple ordonné $0, \xi(x)$.

Etant donnés deux vecteurs ξ, η représentés par les fonctions $\xi(x)$ et $\eta(x)$ de H, on appellera $\xi+\eta$ le vecteur représenté par $\xi(x)+\eta(x)$, (qui appartient à H) et, si a est un nombre réel, on appellera $a\,.\,\xi$, le vecteur représenté par la fonction $a\xi(x)$ qui appartient à H. Quant à la longueur de ξ, il s'agit d'associer à ξ un nombre $\|\xi\|$ vérifiant les conditions 13°, 14°, 15°.

Pour déterminer la longueur $\|\xi\|$, remarquons que l'ensemble des fonctions de H peut être réparti en sous-ensembles qui sont les droites abstraites passant par le point W correspondant à la fonction identiquement nulle. Ces sous-ensembles n'ont en commun que le point W. Supposons qu'on choisisse arbitrairement sur chacune, Δ, de ces droites, un point η_Δ. Il représente une fonction $\eta_\Delta(x)$ et celle-ci, un vecteur η_Δ dont on prendra la longueur comme unité de longueur sur Δ. Alors la fonction $\xi(x)$ qui représente un vecteur quelconque ξ, appartiendra, si $\xi \neq 0$, à une certaine droite δ issue de W, c'est-à-dire qu'il existera un nombre λ tel que $\xi=\lambda\,.\,\eta_\delta$. On prendra $\|\xi\|=|\lambda|$. Si a est un nombre quelconque, $a\,.\,\xi=a\lambda\,.\,\eta_\delta$ donc $\|a\,.\,\xi\|=|a\lambda|$, et par suite on a bien réalisé la condition

$$\|a.\xi\| = |a| \, \|\xi\|.$$

Il reste une difficulté, c'est d'indiquer comment pourra être *effectué* le choix *arbitraire* du point $\eta_\varDelta$ sur chaque droite $\varDelta$. Nous y reviendrons au moment de traiter séparément les divers champs fonctionnels (page 51).

On voit maintenant sans difficulté que le système formé par l'ensemble H et la famille de vecteurs qu'on vient de définir constitue un espace affine, c'est-à-dire satisfait aux conditions 1° à 15° et I à IV. Non seulement ce système constitue un espace affine, mais c'est un espace affine où les opérations vectorielles sont en rapport avec la nature des éléments ou points considérés, puisque les opérations vectorielles $\xi+\eta$ et $a.\xi$ correspondent aux opérations algébriques $\xi(x)+\eta(x)$ et $a\,\xi(x)$ effectuées sur les représentations fonctionnelles de nos vecteurs abstraits.

II. Définition géométrique des espaces abstraits affines.

Sans entrer dans le détail des démonstrations que nous avons données ailleurs[1], nous signalerons pour mémoire qu'on peut donner des espaces abstraits affines une définition moins analytique que la précédente. Grâce à un language géométrique approprié, cette seconde définition met mieux en évidence les analogies d'un espace abstrait affine avec l'espace euclidien.

D'une part, on peut démontrer[1] les propriétés géométriques suivantes de tout espace abstrait affine, défini comme plus haut:

a) *A tout couple de points de cet espace, soient A et B, correspond un nombre* $\|\overline{AB}\| = \|\overline{BA}\| \geq 0$ *qu'on peut aussi appeler longueur AB ou BA.*

b) *L'égalité* $\|\overline{AB}\| = 0$ *exprime que A et B ne sont pas distincts.*

c) *Toute droite abstraite est un ensemble de points abstraits applicable sur une droite euclidienne* (c'est-à-dire qu'il existe entre ces deux droites une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve les longueurs).

d) *Par deux points abstraits distincts A et B, il passe une droite abstraite* (qu'on appellera la droite AB ou BA).

e) *Si deux droites abstraites ont en commun deux points distincts, elles coïncident.*

Il peut arriver qu'un espace abstrait affine ne comprenne que les points d'une seule droite abstraite. C'est seulement dans le cas contraire que les pro-

[1] Sur une définition géométrique des espaces abstraits affines, Ann. Soc. Math. Polonaise, t. IV, 1925.

priétés qui suivent peuvent jouer. Pour les exprimer, nous dirons que trois ou plus de trois points sont alignés s'ils sont situés sur une même droite. Nous appellerons aussi *plan abstrait* un ensemble de points:

non réduit à un point, ni à une droite;

contenant chaque droite abstraite passant par deux (distincts) des points de cet ensemble;

irréductible par rapport aux deux propriétés précédentes, c'est-à-dire qui coïncide avec ceux de ses sous-ensembles qui possèdent ces deux propriétés.

L'existence d'un tel ensemble est admise dans la condition suivante:

f) *Par trois points abstraits non alignés passe au moins un plan.*

En vue de la propriété suivante, nous appellerons *segment* AB l'ensemble des points C de la droite AB qui sont *entre* A et B, c'est-à-dire tels que $\|AC\| + \|CB\| = \|AB\|$.

g) *Toute droite d'un plan divise ce plan en deux régions.*[1] Nous entendons par là qu'on peut répartir les points du plan autres que ceux de la droite en deux ensembles (ou régions), le segment AB qui joint deux points du plan n'ayant aucun point commun avec la droite donnée si A et B appartiennent à la même région et dans ce cas seulement.

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si elles sont dans un même plan et n'ont aucun point commun. Ceci va nous permettre d'énoncer la propriété qui généralise le postulatum d'Euclide:

h) *Etant donnés une droite abstraite AB et un point abstrait C non situé sur cette droite, il existe une droite abstraite et une seule, passant par C et parallèle à AB.*

En outre:

i) Deux droites parallèles qui rencontrent deux droites parallèles interceptent sur celles-ci des longueurs égales. Ce qu'on peut encore exprimer ainsi: *dans tout parallélogramme, les côtés opposés ont des longueurs égales.*

j) *Les diagonales d'un parallélogramme ne sont pas parallèles.*

Un espace abstrait affine peut n'avoir pas d'autres points que ceux d'un plan abstrait de cet espace. C'est seulement dans le cas contraire que la propriété suivante a un sens:

---

[1] Nous avons préféré donner aux diverses conditions une forme qui fasse image, plutôt que la forme logiquement la plus réduite, comme le serait par exemple ici un axiome bien connu de Pasch et qui n'a rien d'intuitif.

k) *Si deux parallélogrammes $ABB''A''$, $A'B'B''A''$ non situés dans un même plan ont un côté commun $A''B''$, les côtés opposés à ce côté commun sont aussi côtés opposés d'un même parallélogramme $ABB'A'$.*

Inversement, *l'ensemble des propriétés géométriques* a)...k) *caractérise l'espace abstrait affine le plus général.* Nous entendons par là que, si l'on considère un ensemble d'éléments dits points abstraits et un ensemble d'éléments dits droites abstraites qui vérifient les conditions a)...k), il existe un espace affine abstrait vérifiant les conditions 1° à 15° et I à IV dont les points sont les points abstraits donnés, dont les droites sont les droites abstraites données, la longueur d'un vecteur $\overline{AB}$ étant égale à la longueur AB. Naturellement, quel que soit le point de départ: les points et droites donnés ou l'espace affine déduit de ceux-ci, les plans abstraits seront les mêmes puisqu'ils sont définis de la même manière.[1] Et deux droites parallèles dans un cas seront parallèles dans l'autre, pour la même raison.

Il y a d'ailleurs lieu de remarquer que nous n'avons pas cherché à réduire le système de conditions a)...k) au système le plus étroit de conditions indépendantes. Nous avons simplement voulu montrer qu'on pouvait définir l'espace abstrait affine le plus général sous une forme géométrique familière.

Remarque sur la longueur. Considérons un vecteur quelconque ξ. Il est déterminé par sa longueur $\|\xi\|$, sa direction et son sens. C'est-à-dire que si l'on pose

$$u = \frac{1}{\|\xi\|} \cdot \xi$$

d'où

$$\xi = \|\xi\| \cdot u,$$

ξ est déterminé par sa longueur $\|\xi\|$ et par le vecteur u de longueur unité, parallèle à ξ et de même sens. On peut aussi supposer que $u = \overline{WM}$, W étant une origine fixe quand ξ varie. Le vecteur $\overline{WM}$ représente l'unité de longueur prise sur la droite Δ qui porte ξ ou sur toute droite parallèle. Et lorsque la direction Δ varie, M décrit un ensemble T de points (tous distincts de W), symétrique par rapport à W et qu'on peut appeler *l'ensemble d'étalonnage.*[2]

---

[1] Voir note précédente.

[2] C'est Minkowski qui a introduit le premier la conception de la surface d'étalonnage, *dans l'espace à n dimensions.*

Or il est important de remarquer que *les éléments géométriques d'un espace abstrait affine sont indépendants de cet ensemble d'étalonnage.* Celui-ci doit rester naturellement tel que toute droite passant par le centre fixe W rencontre l'ensemble d'étalonnage en deux points seulement symétriques par rapport à W. Si l'on substitue à un tel ensemble T un ensemble S jouissant des mêmes propriétés, on aura multiplié les longueurs des vecteurs situés sur deux droites parallèles ou confondues par un même nombre sans changer leurs rapports. Mais les droites, les plans, les segments, . . . n'auront pas changé.

En d'autres termes, dans l'espace abstrait affine le plus général, il n'y a absolument aucune dépendance entre les unités de longueur et par suite les longueurs de deux vecteurs non parallèles. Qu'une de ces longueurs soit beaucoup plus petite que l'autre n'a aucune espèce de signification. Il n'en est plus ainsi — et il faut qu'il n'en soit plus ainsi, — si l'on introduit, comme nous allons le faire, les considérations de continuité.

DEUXIÈME CHAPITRE.

Introduction des considérations de continuité.

Les espaces topologiques. Dans ce qui précède nous n'avons pas fait intervenir la notion de voisinage des points de l'espace affine abstrait considéré.

Or il me parait essentiel de faire intervenir cette notion si l'on veut que l'espace affine soit réellement un espace particulier. *Si on ne fait pas intervenir une notion analogue à celle du voisinage ou de la convergence d'une suite de points, tout ensemble ayant la puissance du continu, par exemple, pourra être regardé comme un espace affine.* C'est-à-dire qu'on pourra associer à cet espace une famille de vecteurs, des droites, des plans, . . . de la façon indiquée plus haut.

On arrivera alors à des conceptions contre nature et, croyant introduire un certain ordre dans un espace déterminé, on y introduira le désordre. Par exemple, nous pourrons utiliser la correspondance biunivoque établie par G. Cantor entre les points de la droite euclidienne et les points de l'espace euclidien. Alors, on nommera droites abstraites, plans abstraits de l'espace E constitué par les points de la droite euclidienne, les ensembles qui correspondent aux droites et aux plans usuels de l'espace euclidien à trois dimensions. On définira de même les vecteurs abstraits de l'espace E. On aura alors défini dans l'espace constitué des points d'une droite euclidienne, des vecteurs, des droites, des plans abstraits, qui satisferont à toutes les conditions et à tous les théorèmes énoncés ci-dessus.

Il y aura sur cette droite des droites qui ne se coupent pas, on pourra y tracer des parallélogramme, des trièdres, etc. . . . On y fera une géométrie logique, mais contraire au bon sens.

(Il ne semble pas que les auteurs qui ont traité de l'espace affine aient tous prêté à ces conséquences une attention suffisante. Et même certains ont explicitement déclaré qu'ils voulaient exclure de leurs définitions les considérations de continuité.)

Nous sommes donc amenés à relier la conception de l'espace affine abstrait à celle des espaces topologiques abstraits.[1]

Un grand nombre des propriétés topologiques de l'espace euclidien s'étendent immédiatement à tous les espaces où une définition de la limite étant donnée (qui est en général imposée par la nature des éléments ou points de l'espace et les applications qu'on a en vue), cette définition peut s'exprimer par l'intermédiaire d'une *distance.*[1] Nous entendons par là qu'à tout couple A, B d'éléments ou points de l'espace considéré correspond un nombre $(A, B)=(B, A)\geq 0$, qui n'est nul que si A et B ne sont pas distincts et qui satisfait aux deux conditions suivantes:

I. Pour trois points A, B, C arbitraires, on a toujours

$$(A, B)\leq(A, C)+(C, B).$$

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points $A_1, A_2, \ldots$ de cet espace tende vers le point A de cet espace est que la distance (A, A_n) tende vers zéro.

Un tel espace sera appelé un espace (D) (initiale de distance).[1] Dans le cas où l'on n'impose pas la condition I, (A, B) sera un écart[1] et l'espace sera un espace (E)[1].

Naturellement, un point A sera appelé *élément d'accumulation* d'un ensemble F s'il existe une suite infinie d'éléments de F qui sont distincts et convergent vers A.[1]

D'ailleurs, on peut concevoir des espaces où la notion de point d'accumulation d'un ensemble ne se définit pas nécessairement par l'intermédiaire d'une distance. Nous avons appelé *espace topologique*[1] tout espace où on a donné une

[1] Sur une terminologie des espaces abstraits, C. R. Congrès Soc. Savantes, Dijon, 1924.

définition (entièrement quelconque) des points d'accumulation des ensembles de points de cet espace.

Les espaces (*D*) **vectoriels.** On évitera les objections faites plus haut si on lie les notions de longueur et de continuité ou de voisinage par la condition supplémentaire suivante qu'on imposera dans ce but:

V'. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ de l'espace considéré converge vers un point A de cet espace est que la longueur $\|\overline{A_n A}\|$ tende vers zéro quand n croît indéfiniment.

Cette condition, jointe aux conditions b) et c), p. 33, montre que, dans ce cas, la longueur jouera le rôle d'un »écart» et que l'espace considéré sera un espace (E), en employant la terminologie que nous avons introduite dans la topologie des ensembles abstraits.

Au cas où la longueur vérifierait en outre la condition

$$\|\overline{AB}\| \leq \|\overline{AC}\| + \|\overline{CB}\|$$

quels que soient les points A, B, C, cet écart deviendrait une distance, l'espace serait un espace (D) (voir aussi p. 32) et, en même temps, comme on aurait pour deux vecteurs quelconques ξ, η

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$$

l'espace serait vectoriel au sens de M. Wiener. On aurait ce que nous avons appelé *espace* (D) *vectoriel.*[1]

Les espaces de M. Banach. Enfin, on aurait un espace (D) vectoriel *complet* si on avait en outre la propriété suivante[2]:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points A_1, $A_2, \dots A_n, \dots$ de l'espace considéré soit convergente est que la longueur $\|\overline{A_n A_p}\|$ puisse être rendue aussi petite que l'on veut quand n et p sont assez grands.

Les espaces (D) vectoriels complets ne sont autres que ceux qui ont été définis par M. Banach.

Il faut remarquer que dans un tel espace, on a pour trois points quelconques A, B, C

---

[1] Sur une terminologie des ensembles abstraits, C. R. Congrès Soc. Savantes, Dijon, 1924.

[2] Propriété qui est la généralisation du critère de convergence de Cauchy aux espaces (D) avec cette différence qu'elle devient une hypothèse et non un théorème.

$$\left|\|\overline{AC}\| - \|\overline{BC}\|\right| \leq \|\overline{AB}\| \leq \|\overline{AC}\| + \|\overline{BC}\|$$

et que, si les trois points $A\ B\ C$ sont alignés, l'un des signes d'inégalité peut être supprimé.

Mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit, la ligne droite n'y est pas nécessairement le plus court chemin d'un point à un autre.

Il est bien évident que si on considère une ligne polygonale variable $A\,A_1\,A_2 \ldots A_n\,B$ joignant deux points fixes A et B, on aura

$$\|\overline{AB}\| \leq \|\overline{AA_1}\| + \|\overline{A_1A_2}\| + \cdots + \|\overline{A_nB}\|.$$

La longueur $A\,B$ ne sera supérieure au périmètre d'aucune ligne polygonale joignant A et B. Mais *il n'est pas impossible qu'elle lui soit égale. A titre d'exemple*, considérons l'espace (D) vectoriel complet constitué par les points du plan euclidien avec les mêmes droites, les mêmes vecteurs, les mêmes suites convergentes de points et les mêmes limites, mais où l'on convient d'appeler longueur $\|\overline{AB}\|$, la somme des longueurs euclidiennes $A\,C + B\,C$ où A, C, B sont trois sommets consécutifs d'un rectangle (aplati on non) dont les côtés sont parallèles à deux droites fixes ox et oy. Il est facile de s'assurer qu'on pourra y définir la somme de deux vecteurs $\xi + \eta$ et le produit $a \,.\, \xi$ comme pour les vecteurs plans euclidiens et qu'on satisfera à toutes les conditions imposées à un espace (D) vectoriel complet. Et cependant, on voit que pour les trois points particuliers A, B, C qu'on vient de considérer, on aura

$$\|\overline{AB}\| = \|\overline{AC}\| + \|\overline{CB}\|$$

sans que C soit sur la droite AB.

Mais cet exemple même montre qu'on peut parfois sans altérer les autres définitions et en particulier sans altérer la définition des droites, ni celle de la convergence d'une suite de points de l'espace, modifier la définition de la longueur de façon à satisfaire à certaines conditions supplémentaires.

Les espaces métriques. Nous pourrons appeler *espace métrique*, un espace (D) vectoriel où — en modifiant au besoin la définition de la longueur, toutes choses égales d'ailleurs — on a

$$\|\overline{AB}\| < \|\overline{AC}\| + \|\overline{CB}\|$$

toutes les fois que les points A, B, C ne sont pas alignés.

Comme exemple d'un tel espace, on peut indiquer non seulement les espaces usuels à 1, 2, 3, et même n dimensions, mais aussi l'espace Ω dit de Hilbert. Pour cet espace, j'ai développé ailleurs[1] une géométrie comprenant un grand nombre de propositions de la géométrie élémentaire, en suivant pas à pas un système de postulats et de définitions qui avait été formulé par M. Padoa.

On obtiendrait des résultats intéressants en appliquant (au moins partiellement) le système de définitions de M. Padoa à l'espace métrique abstrait le plus général défini comme ci-dessus.

Les espaces topologiquement affines. J'ai expliqué plus haut que les espaces (D) vectoriels ne permettent pas d'embrasser dans la même conception des espaces fonctionnels qui paraissent peu dissemblables et qu'il y avait lieu de les définir sous une forme plus générale en conservant ce qu'il y a d'essentiel dans la notion des champs de vecteurs. Sous cette forme plus générale, nous devrons en outre maintenir l'intervention des considérations de continuité, sans pourtant conserver la condition V′ qui la réalise de façon trop stricte. Il faut donc conserver une analogie aussi étroite que possible entre l'espace euclidien et l'espace affine, sans exiger de la longueur de jouer en même temps le rôle d'un écart[2] dans tout l'espace.

Dans ce but, on pourrait encore supposer que, dans l'espace abstrait considéré, la limite d'une suite de points est définie par l'intermédiaire d'un écart[2], mais en n'imposant plus à l'écart d'être identique à la longueur. Ou, plus généralement, on supposera que dans cet espace, on a défini d'une manière quelconque les points d'accumulation de chaque ensemble de points de l'espace. Cela suffit pour qu'on puisse faire une étude topologique de cet espace, raison pour laquelle nous l'avons appelé ailleurs un espace topologique. Et la définition des éléments d'accumulation pourra ne pas nécessairement s'exprimer par l'intermédiaire de la longueur.

Mais dans les deux cas, les notions de droite et de longueur ne devront pas être indépendantes des considérations de continuité. En particulier, on écartera les anomalies signalées ci-dessus en imposant les conditions suivantes qui sont vérifiées quand la condition V′ est réalisée, mais dont l'ensemble est moins restrictif que cette condition V′:

---

[1] Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, Nouvelles Annales de Math., 4 S., t. VIII, 1908.

[2] La définition de l'écart a été rappelée plus haut.

Chaque ligne droite abstraite est dans l'espace affine considéré une courbe continue applicable sur une ligne droite euclidienne.

Nous entendons par là tout d'abord que toute *droite abstraite est un ensemble fermé* au sens de la théorie des ensembles c'est à dire que si A est un point d'accumulation d'un ensemble F de points d'une droite abstraite, A doit appartenir à cette droite. Et ensuite que la correspondance biunivoque qui existe par hypothèse entre les points d'une droite abstraite et ceux d'une droite euclidienne de façon à conserver les longueurs soit aussi une correspondance bicontinue. C'est-à-dire que si b est un point d'une droite euclidienne qui est point d'accumulation d'un ensemble g de points de cette droite, le point B qui correspond à b sur une droite abstraite est point d'accumulation de l'ensemble G de points de cette même droite abstraite qui correspond à g; et réciproquement.

Or il y a une suite de points $b_1, b_2, \ldots$ de g qui sont distincts et tels que les longueurs $b_1 b$, $b_2 b, \ldots$ tendent vers zéro. Donc il y aura une suite de points distincts $B_1, B_2, \ldots$ de G tels que les longueurs $\|\overline{BB_1}\|$, $\|\overline{BB_2}\|, \ldots$ tendent vers zéro. Ainsi, la condition suivante doit être vérifiée: si G est un ensemble de points d'une droite abstraite et B un de ses points d'accumulation, s'il en existe, la longueur BC où C est un point quelconque de G distinct de B doit avoir une borne inférieure nulle. Réciproquement, si B et G satisfont à cette condition, il en sera de même pour b et g; donc b sera point d'accumulation de g, donc aussi B de G.

En résumé, si la transformation étudiée est bicontinue, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble G de points d'une droite abstraite ait un point B de cette droite pour point d'accumulation est que la longueur $\|\overline{BC}\|$, où C est un point distinct de B et variable sur G, ait pour borne inférieure zéro.

Autrement dit, *sans que la longueur joue nécessairement le rôle d'une distance dans tout l'espace, elle devra jouer ce rôle sur chaque droite abstraite considérée séparément dans cet espace.*

Enfin, nous avons noté que si l'on fait abstraction des considérations de continuité, un espace affine est homogène relativement à ses translations. Autrement dit un observateur ne pourra distinguer entre les espaces considérés avant et après la translation.

Les considérations de continuité ne devront pas rompre cette homogénéité par rapport aux translations et par conséquent nous supposerons encore que:

toute translation est une transformation bicontinue. Si ces trois conditions sont vérifiées par un espace affine nous aurons un espace topologiquement affine.

Ainsi, un espace sera dit *topologiquement affine*, si c'est un espace où une définition des points d'accumulation des ensembles de ses points a été donnée telle qu'on puisse associer à cet espace un champ de vecteurs réalisant non seulement les conditions 1° à 15° et I à IV (qui en font un espace affine), mais aussi les trois conditions suivantes:

V: V_a — *tout point d'accumulation d'un ensemble de points d'une droite abstraite doit appartenir à cette droite abstraite.*

V_b — *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point A d'une droite abstraite soit élément d'accumulation d'un ensemble F de points de cette droite abstraite est que la longueur $\|\overline{AC}\|$ ait une borne inférieure nulle quand C est un point, distinct de A, variable sur F.*

V_c — *toute translation est une transformation bicontinue.*

Espaces (D) **affines**. Parmi les espaces topologiquement affines, nous distinguerons la classe particulièrement simple des espaces (D) affines. On pourrait appeler ainsi les espaces topologiquement affines qui sont en même temps des espaces (D). Comme il y a intérêt à supposer que la distance, quand elle existe, soit invariante dans les translations, nous restreindrons — au moins en apparence — cette catégorie. Et nous appellerons *espace* (D) *affine* un espace où la limite d'une suite de points est définie par l'intermédiaire d'une distance (voir page 37), un champ de vecteurs étant associé à cet espace de façon à satisfaire aux conditions 1° à 15°, I à IV et aux conditions suivantes:

$V_{b'}$ sur chaque droite prise séparément, la distance (A, B) et la longueur $\|\overline{AB}\|$ ne sont infiniment petites que simultanément.

$V_{c'}$ les distances restent invariantes dans toute translation.

Ces conditions entraînent naturellement les conditions V_b et V_c. Elles entraînent aussi la condition V_a. Car si A est point d'accumulation d'un ensemble de points d'une droite $\varDelta$, il y a sur $\varDelta$ une suite de points $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ dont les distances à A tendent vers zéro. En vertu de l'inégalité $(A_n, A_{n+p}) \leq (A, A_n) + (A, A_{n+p})$ on voit que pour n assez grand (A_n, A_{n+p}) sera petit; il en sera donc de même des longueurs $\|\overline{A_n A_{n+p}}\|$. Alors la droite $\varDelta$ étant applicable sur une droite euclidienne, il y a sur $\varDelta$ un point B tel que $\|\overline{BA_n}\|$ et par suite (B, A_n) tende vers zéro. Donc A coïncide avec un point B de $\varDelta$.

Nous allons donner maintenant un certain nombre d'exemples de champs fonctionnels importants qui sont des espaces (D) affines. Ces exemples rentrent dans les catégories considérées plus haut page 30, comme exemples d'espaces affines.

De sorte que pour chacun d'eux, il suffira de montrer qu'il constitue un ensemble linéaire au sens adopté au même endroit et de prouver que les conditions $V_{b'}$ et $V_{c'}$ sont satisfaites. Mais auparavant, nous étendrons aux espaces (D) affines un théorème connu.

Généralisation d'un théorème de Weierstrass. Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle J. Weierstrass a prouvé que $f(x)$ est la limite d'une suite de polynômes qui converge uniformément sur J. Ce théorème peut s'exprimer de la manière suivante: parmi les fonctions continues, il en existe une suite dénombrable $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$ telles que chacune soit linéairement indépendante des précédentes et que toute fonction continue $f(x)$ soit la limite (uniforme sur J) d'une suite de combinaisons linéaires des termes de cette suite:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} [a_0^{(n)} P_0(x) + \cdots + a_n^{(n)} P_n(x)]. \tag{10}$$

Dans le cas particulier de Weierstrass, on peut prendre en particulier $P_n(x) = x^n$.

De même en se limitant aux fonctions continues de période 2π, on peut prendre dans ce cas $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = \cos x$, $P_2(x) = \sin x$, $P_3(x) = \cos 2x, \ldots$

On peut généraliser la propriété commune à ces deux théorèmes et exprimée par la formule (10) et l'étendre aux espaces (D) affines qui sont *séparables*. (Nous entendons par là que de cet espace peut être extraite une suite dénombrable de points

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$$

telle que tout point A appartienne à cette suite ou soit point d'accumulation de cette suite.) Dans le cas d'un espace (D) affine, nous pourrons convenir d'écrire en appelant W un point fixe

$$\overline{WA} = \lim_{p \to \infty} \overline{WB_p}$$

toutes les fois que A est la limite de la suite des points B_p. Alors si cet espace est séparable, il y aura dans la suite des A_i, au moins une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ qui converge vers A, de sorte que

$$\overline{A_0 A} = \lim_{p \to \infty} \overline{A_0 A_{n_p}}.$$

Ceci peut s'écrire

$$\overline{A_0 A} = \lim_{p \to \infty} [\overline{A_0 A_{n_1}} + \overline{A_{n_1} A_{n_2}} + \cdots + \overline{A_{n_{p-1}} A_{n_p}}].$$

Or les vecteurs

$$\overline{A_i A_k}$$

qui dépendent de deux indices entiers forment un ensemble dénombrable de vecteurs qu'on peut ranger en une suite dénombrable $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ La dernière égalité peut alors s'écrire sous la forme

$$\overline{A_0 A} = \lim_{q_p \to \infty} [\eta_{q_1} + \eta_{q_2} + \cdots + \eta_{q_p}]. \tag{11}$$

Or, supprimons de la suite $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots$ chacun des vecteurs qui sont une combinaison linéaire des précédents, de la forme

$$\eta_{n+1} = a_0^{(n)} . \eta_0 + \cdots + a_n^{(n)} . \eta_n .$$

Il restera une suite de vecteurs linéairement indépendants qu'on pourra désigner par $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, et dont les η sont des combinaisons linéaires. On aura donc finalement

$$\overline{A_0 A} = \lim_{n \to \infty} [x_0^{(n)} . \xi_0 + \cdots + x_n^{(n)} . \xi_n] \tag{12}$$

égalité où les $x_k^{(n)}$ sont des constantes numériques qui dépendent du point A et où $\xi_0, \xi_1, \ldots$ est une suite de vecteurs linéairement indépendants entre eux et qui sont déterminés une fois pour toutes.

Dans certains cas, la formule (12) pourra se simplifier quand les $x_k^{(n)}$ sont indépendants de n. Alors on pourra écrire

$$\overline{A_0 A} = x_0 . \xi_0 + x_1 . \xi_1 + \cdots + x_n . \xi_n + \cdots \tag{13}$$

L'établissement de la formule (13) est particulièrement simple dans le cas examiné page 30. Supposons en effet chaque élément X de l'espace considéré *directement* défini par une suite infinie de coordonnées $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Si l'ensemble des points X est linéaire *et si* le point X est la limite du point $X^{(n)}$ dont les coordonnées sont égales à celles de X jusqu'au rang n et nulles ensuite, on aura

$$\overline{X_0 X} = \lim \overline{X_0 X^{(n)}}$$

et

$$\overline{X_0 X^{(n)}} = x_0 . \xi_0 + \cdots + x_n . \xi_n$$

en appelant ξ_n, en général, le vecteur dont les projections sont nulles sauf la $n^{\text{ième}}$ qui est égale à 1. D'où l'on tire (13).

Il est à remarquer que le raisonnement ne s'applique pas à l'espace que nous avons étudié sous le nom d'espace D_ω.[1] Comme cet espace n'est pas séparable, le raisonnement qui nous a fourni la formule moins précise (12) ne s'applique pas non plus.

TROISIÈME CHAPITRE.

I. Exemples d'espaces (D) affines.

Champs fonctionnels.

1°. **L'espace polynomial** ou espace (P). Dans cet espace, chaque point abstrait Q est un polynôme réel $Q(x)$ à coefficients réels et d'un degré quelconque. Nous convenons de considérer une suite de points $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ comme convergeant vers le point Q lorsque les polynômes $Q_1(x), Q_2(x), \ldots Q_n(x), \ldots$ convergent vers $Q(x)$ et cela uniformément dans tout intervalle limité.

Cet espace est un ensemble linéaire au sens de la page 32, puisque, si a est un nombre quelconque, $Q(x)+R(x)$ et $a\,R(x)$ sont, comme $Q(x)$ et $R(x)$ des polynômes. Donc on pourra y attacher un champ de vecteurs comme plus haut, page 32. En ce qui concerne la longueur $\|\overline{QR}\|$ du vecteur représenté par $\xi(x)=R(x)-Q(x)$, on pourra, *par exemple*, prendre, pour $\|\xi\|$ si $\xi\neq 0$, le premier de ses coefficients non nuls.

D'autre part, nous avons démontré ailleurs[2] que la définition adoptée ici pour la limite d'une suite de »points» de cet espace peut s'exprimer par l'intermédiaire d'une »distance». On peut prendre l'une ou l'autre des deux expressions

$$(Q,R)=\frac{(Q,R)_1}{1+(Q,R)_1}+\cdots+\frac{1}{p!}\,\frac{(Q,R)_p}{1+(Q,R)_p}+\cdots$$

ou

$$((Q,R)) = \text{borne inférieure quand } p \text{ varie de } \left[(Q,R)_p+\frac{1}{p}\right]$$

en appelant $(Q,R)_p$ la borne supérieure de $|Q(x)-R(x)|$ quand x varie dans l'intervalle $-p\leq x\leq p$.

[1] Pour cet espace, les coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ sont supposées bornées (les bornes pouvant varier avec X) et on prend comme distance de deux points X, Y

$$(X,Y) = \text{borne supérieure quand } n \text{ varie de } |x_n - y_n|.$$

[2] Revista Matemàtica Hispano-Americana, 1925.

Un tel espace vérifie les conditions $V_{c'}$ et $V_{b'}$. Une translation ξ transforme le point Q en le point R donné par $R(x)-Q(x)=\xi(x)$. Pour deux couples de points Q, Q_1 et R, R_1 transformés l'un de l'autre, on aura $R(x)-Q(x)=$ $=R_1(x)-Q_1(x)$. Les expressions des distances (Q, R) et (Q_1, R_1) sont égales: les distances sont, comme les longueurs, invariantes dans toute translation. D'autre part si on considère une droite QR, tout point S de cette droite sera tel que $\overline{QS}=\lambda \,.\, \overline{QR}$, d'où

$$S(x)=Q(x)+\lambda\,\xi(x).$$

Alors pour deux points S et S_1 correspondant à λ et λ_1, on aura

$$\|\overline{SS_1}\|=\|(\lambda_1-\lambda)\,.\,\xi\|=|\lambda_1-\lambda|\,\|\xi\|$$

et

$$(S, S_1)=\frac{|\lambda_1-\lambda|(\xi, 0)_1}{1+|\lambda_1-\lambda|(\xi, 0)_1}+\cdots+\frac{1}{p!}\,\frac{|\lambda_1-\lambda|(\xi, 0)_p}{1+|\lambda_1-\lambda|(\xi, 0)_p}+\cdots$$

Il est bien évident que la condition nécessaire et suffisante pour que $\|\overline{SS_1}\|$ tende vers zéro est que $|\lambda_1-\lambda|$ tende vers zéro — et qu'alors (S, S_1) tend vers zéro; on démontre de même la réciproque.

2°. **L'espace (I) des fonctions entières.** Appelons (I) l'espace dont chaque point est une fonction $f(z)$ entière dans le plan de la variable numérique complexe z. Et considérons dans cet espace, une suite de points $f_1, f_2, \ldots f_p, \ldots$ comme convergeant vers un point f lorsque la suite $f_1(z), f_2(z), \ldots f_p(z) \ldots$ converge vers $f(z)$ non seulement pour chaque valeur de z mais même uniformément dans tout domaine borné du plan des z.

Cet espace est un ensemble évidemment linéaire; on peut y associer comme plus haut (page 32) un champ de vecteurs, et on pourra prendre, *par exemple*, pour $\|\xi\|$, quand $\xi \neq 0$, le module du premier des coefficients de $\xi(x)$ qui n'est pas nul.

D'autre part, j'ai montré dans ma Thèse qu'on peut exprimer la définition de la limite adoptée ci-dessus par l'intermédiaire d'une distance

$$(f, \varphi)=\frac{(f, \varphi)_1}{1+(f, \varphi)_1}+\cdots+\frac{1}{p!}\,\frac{(f, \varphi)_p}{1+(f, \varphi)_p}+\cdots$$

en appelant $(f, \varphi)_p$ le maximum de $|f(z)-\varphi(z)|$ pour $|z|\leq p$.

On pourra aussi prendre pour distance

$$((f,\ \varphi)) = \text{borne inférieure quand } p \text{ varie de } \left[(f,\ \varphi)_p + \frac{1}{p}\right].$$

On verra que les conditions $V_{b'}$ et $V_{c'}$ sont satisfaites exactement comme pour l'espace polynomial.

3°. **L'espace ($\mathfrak{M}$) des fonctions mesurables.** Appelons espace ($\mathfrak{M}$), l'espace dont chaque point est une fonction réelle $f(x)$ d'une variable réelle x, fonction supposée mesurable au sens de M. Lebesgue sur un intervalle fixe J. Et appelons suite de »points» $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ de cet espace convergeant vers f une suite telle que $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ converge *en mesure* vers $f(x)$ sur J. Nous entendons par là d'après F. Riesz, que, quel que soit $\omega > 0$, la mesure de l'ensemble des points de J où $|f_n(x) - f(x)| > \omega$, tend vers zéro quand n croît infiniment.[1]

On sait que toute combinaison linéaire de deux fonctions mesurables est mesurable. L'espace ($\mathfrak{M}$) est donc un champ fonctionnel linéaire et on peut lui associer un champ de vecteurs comme plus haut (page 45). Un choix effectif de la longueur $\|\xi\|$ ne paraît pas pouvoir se faire aussi simplement que dans les espaces (P) et (I). Nous proposons plus loin, faute de mieux, un choix qui pourrait sans doute être amélioré, mais qui suffira à notre objet.

Remarquons auparavant qu'on peut définir la limite d'une suite de points de ($\mathfrak{M}$) par l'intermédiaire d'une distance. Nous avons montré ailleurs[2] qu'on peut prendre pour (f, g) la borne inférieure, quand ω varie, de la somme de ω et de la mesure de l'ensemble des points de J où $|f(x) - g(x)| > \omega$.

Définissons maintenant la longueur. Nous remarquons que si $\xi \neq 0$, c'est-à-dire si $\xi(x)$ n'est pas nul presque partout sur J, la distance $(\xi, 0)$ est > 0; elle est, d'autre part, toujours au plus égale à la longueur de J. Donc, lorsque le nombre réel λ varie, la distance $(\lambda . \xi, 0)$ a une borne supérieure finie $M_\xi > 0$. On a vu aussi que si λ tend vers zéro, $(\lambda . \xi, 0)$ tend vers zéro. Par conséquent, il y a des valeurs de λ telles que $(\lambda . \xi, 0) < \frac{1}{2} M_\xi$. Soit Λ la borne supérieure de celles de ces valeurs qui sont ≤ 1, ce sera un nombre positif fini. Nous

---

[1] Ceci conduit à considérer comme non distinctes deux fonctions égales presque partout, c'est à dire sauf dans un ensemble de mesure nulle.

[2] Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions, Bull. Calcutta Mathem. Soc., vol XI, 1921, p. 187.

pourrons poser $\|\xi\| = \frac{1}{\varDelta}$ quand $\xi \neq 0$ et $\|0\| = 0$. On vérifie facilement que $\|a \,.\, \xi\| = |a| \,.\, \|\xi\|$ quel que soit le nombre réel a.

Il reste à vérifier les conditions $V_{b'}$ et $V_{c'}$. Il est d'abord manifeste comme pour l'espace (P) que les distances sont invariantes dans les translations.

Pour prouver $V_{b'}$, il suffit de prouver que ξ étant un vecteur déterminé et ϱ un nombre variable, $\|\varrho \,.\, \xi\|$ et $(\varrho \,.\, \xi, 0)$ sont petits en même temps. Or $\|\varrho \,.\, \xi\| = |\varrho| \, \|\xi\|$. Donc si $\|\varrho \,.\, \xi\|$ tend vers zéro, ξ étant $\neq 0$, ϱ tend vers zéro. Alors $\varrho \,.\, \xi(x)$ tend évidemment en mesure vers zéro et par suite $(\varrho \,.\, \xi, 0)$ tend vers zéro. Inversement si $(\varrho \,.\, \xi, 0)$ tend vers zéro, $\varrho \,.\, \xi(x)$ tend en mesure vers zéro. Or, comme l'a démontré F. Riesz, on peut extraire de toute suite qui converge en mesure, une suite qui converge uniformément vers zéro, sauf peut être dans un ensemble fixe de mesure aussi petite que l'on veut. D'autre part ξ étant $\neq 0$, $\xi(x)$ est différent de zéro dans un ensemble qui n'est pas de mesure nulle. Il y a donc au moins un point x_0 où $\xi(x_0) \neq 0$ et où $\varrho\, \xi(x_0)$ tend vers zéro pour au moins une suite de valeurs de ϱ extraite de la suite donnée de valeurs de ϱ telle que $(\varrho \,.\, \xi, 0)$ tende vers zéro. Ceci n'est possible qui si cette dernière suite de valeurs de ϱ tend vers zéro. Dès lors $\|\varrho \,.\, \xi\|$ tend aussi vers zéro.

Espaces dont chaque point X est défini par une suite infinie de coordonnées numériques $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$

4°. **Espace** (E_ω). Nous avons appelé ainsi un espace de cette catégorie dans lequel une suite de points $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(p)}, \ldots$ est dite converger vers un point X lorsque pour chaque rang n, les coordonnées correspondantes $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, \ldots$ convergent vers la coordonnée x_n de X. (C'est ce que M. Hilbert appelle la convergence faible.)

Comme les coordonnées des points de (E_ω) ne sont assujetties à aucune condition, cet espace est un ensemble linéaire au sens indiqué page 30, et par suite, on peut lui associer un champ de vecteurs de la façon indiquée à cet endroit.

D'autre part, j'ai montré dans ma Thèse que la définition adoptée pour la limite d'une suite de points peut s'exprimer au moyen d'une distance. On peut prendre, avec des notations évidentes

$$(X,\, Y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \cdots + \frac{1}{n!}\, \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \cdots$$

On peut prendre aussi pour distance

$$((X, Y)) = \text{borne inférieure quand } n \text{ varie de } \left[(X, Y)_n + \frac{1}{n}\right]$$

en appelant $(X, Y)_n$ le plus grand des nombres $|x_1 - y_1|, \ldots |x_n - y_n|$.

Dans les deux cas, il est évident que les distances restent invariantes dans toute translation, puisque la distance de X et de Y ne dépend des x et des y que par $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots$

D'autre part, si $\xi = \overline{XY}$ a pour projections $\xi_1, \xi_2, \ldots$ et si $\xi \neq 0$, $\|\xi\|$ désigne la première $|\xi_k|$ de celles des quantités $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots$ qui ne sont pas nulles. Alors il reste à montrer que si ϱ est un nombre variable, tel que $\|\varrho \cdot \xi\|$ tende vers zéro, $(\varrho \cdot \xi, 0)$ tend aussi vers zéro et inversement, ce qui n'offre pas de difficultés.

5°. **L'espace** (R). Nous avons aussi étudié ailleurs[1] un espace, l'espace (R), dont chaque point X est déterminé par un nombre fini, variable avec le point, de coordonnées. Ou, ce qui revient du même, chaque point X est défini par une suite infinie de coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ nulles à partir d'un certain rang (pouvant varier avec X). On y suppose la convergence définie comme dans l'espace (E_ω) qu'on vient d'étudier. De sorte que l'on peut y définir une distance par les mêmes expressions que dans (E_ω). L'espace (R) est évidemment un ensemble linéaire auquel on peut associer un champ de vecteurs comme à la page 45. On voit exactement comme pour (E_ω) que les conditions $V_{b'}$ et $V_{c'}$ sont vérifiées.

Remarque. Nous avons vu que la même définition de la limite d'une suite de points, si elle peut s'exprimer d'une manière par l'intermédiaire d'une distance, peut aussi s'exprimer de plusieurs manières. D'autre part nous avons vu aussi que sans changer la géométrie élémentaire de l'espace affine, on peut modifier les longueurs en modifiant l'ensemble d'étalonnage.

On pourrait donc tenter de modifier la longueur, ou la distance, ou les deux, de façon à les égaler sans modifier ni la convergence des suites de points, ni les droites, ni les plans, ...

Urysohn a montré[2] que si l'on veut conserver les relations simples établies page 42, entre la nature des éléments et les opérations vectorielles, une telle

[1] Voir note 1, p. 28.

[2] Voir note 6, p. 26.

transformation est impossible pour l'espace (I). Il indiquait que le principe de sa démonstration permettait de prouver aussi la même remarque en ce qui concerne l'espace (E_ω). On peut en effet raisonner ainsi: désignons par $|||\xi|||$ une nouvelle expression qui jouerait à la fois le rôle de longueur et de distance. Et soit $\eta^{(p)}$ un vecteur dont les projections sont toutes nulles, sauf la $p^{\text{ième}}$ qui est égale à l'unité. Alors $|||\eta^{(p)}||| \neq 0$ et par suite il existe un vecteur

$$\zeta^{(p)} = \frac{1}{|||\eta^{(p)}|||} \cdot \eta^{(p)}.$$

Le point $X^{(p)}$ dont les coordonnées sont respectivement égales aux projections de $\zeta^{(p)}$ a ses coordonnées toutes nulles sauf la $p^{\text{ième}}$. Donc il tend vers le point W dont les coordonnées sont toutes nulles.

Si la longueur était en même temps une distance, $|||WX^{(p)}|||$ devrait donc tendre vers zéro. Or

$$|||WX^{(p)}||| = |||\zeta^{(p)}||| = 1.$$

II. Exemple d'un espace topologiquement affine.

L'exemple (F) de toutes les fonctions réelles. Considérons l'espace F dont chaque point f est constitué par une fonction réelle $f(x)$ d'une variable numérique x, x variant sur un intervalle fixe. Et convenons de considérer une suite de »points» $f_1, f_2, \ldots$ de cet espace comme convergeant vers le point f, si les nombres $f_1(x), f_2(x), \ldots$ convergent vers le nombre $f(x)$, quel que soit x sur J.

Nous avons prouvé ailleurs[1] qu'on ne peut définir cette convergence par l'intermédiaire d'aucune distance, ni même d'aucun écart; cet espace (F) n'est donc ni un espace (D), ni même un espace (E). A fortiori, ne peut-il être, comme les précédents, un espace (D) affine.

Cependant on peut le considérer comme un espace topologiquement affine, si toutefois on ne s'arrête pas à une difficulté que nous signalerons plus loin.

Nous pouvons considérer d'abord cet espace qui est linéaire comme affine en procédant exactement comme à la page 32, et en admettant d'abord, comme dans ce cas, la possibilité du choix de $\|\xi\|$. Reste à vérifier la condition V. Supposons que des »points» $g_1, g_2, \ldots$ tous situés sur une droite fixe tendent vers le »point» h. On a des expressions de la forme

[1] Bull. Calcutta Math. Soc. (cité plus haut), page 191.

$$g_n(x) = f(x) + \varrho_n \xi(x),$$

où f et ξ sont donnés et $\xi \neq 0$ (c'est-à-dire ici, que $\xi(x)$ n'est pas identiquement nulle). Si par exemple $\xi(x_0) \neq 0$, la suite des nombres $f(x_0) + \varrho_n \xi(x_0)$ devant être convergente il faudra que ϱ_n converge vers un nombre ϱ. Alors g_n convergera vers $g(x) = f(x) + \varrho \xi(x)$. Donc h est un point de la droite et V_a est établi. De plus

$$\|\overline{hg_n}\| = \|\overline{gg_n}\| = |\varrho_n - \varrho| \, \|\xi\|;$$

donc $\|\overline{hg_n}\|$ tend vers zéro. Réciproquement, si $g, g_1, g_2, \ldots$ sont des points d'une même droite et si $\|\overline{gg_n}\|$ tend vers zéro, $|\varrho_n - \varrho| \, \|\xi\|$ tend vers zéro, $\|\xi\|$ restant fixe et $\neq 0$. Donc ϱ_n tend vers ϱ et alors $g_n(x)$ tend vers $g(x)$ quel que soit x. Ainsi V_b est établie. La condition V_c est évidemment vérifiée: Une translation ξ s'obtient ici en faisant correspondre à une fonction quelconque $f(x)$, la fonction $f(x) + \xi(x)$. Or si $f_n(x)$ tend vers $f(x)$, $f_n(x) + \xi(x)$ tend vers $f(x) + \xi(x)$ et réciproquement. La translation est donc bicontinue.

Reste à définir $\|\xi\|$. Toute »droite» joignant les »points» 0 et ξ ($\xi \neq 0$) est un certain ensemble Δ de fonctions, les fonctions $c \,.\, \xi(x)$. Supposons qu'on choisisse dans chaque ensemble Δ une fonction $\eta_\Delta \neq 0$ mais à part cela entièrement arbitraire. Si l'on admet ce choix possible (et c'est là le point délicat que nous avons fait prévoir), il suffira de prendre par définition $\|\eta_\Delta\| = 1$ et de prendre pour tout vecteur $\xi \neq 0$ tel que $\xi = \lambda \,.\, \eta_\Delta$

$$\|\xi\| = |\lambda|.$$

On remarquera qu'on a ici un espace topologiquement affine dont l'ensemble des points a une puissance supérieure à celle du continu.

Un problème à résoudre. Il serait intéressant d'analyser jusqu'à quel point le fait pour un espace topologique d'être topologiquement affine, ou le fait pour un espace (D) d'être un espace (D) affine, impose une limitation au choix de la définition des points d'accumulation dans le premier cas, de la distance dans le second.

Qu'il en impose une, cela ne fait pas de doute. Ainsi, si l'on prend sur une droite abstraite une suite infinie de points $A_1, A_2, \ldots$ tels que $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \cdots$, on a une suite infinie de points dont aucun sous-ensemble infini ne peut avoir d'éléments d'accumulation d'après la condition V. Donc un espace topologiquement affine n'est jamais compact. Mais c'est là une propriété négative, si l'on peut dire. Il faudrait trouver mieux. Par exemple, on voit facilement qu'un espace topologiquement affine est un continu[1] topologiquement homogène[2].

12 Mars 1925.

---

[1] Conformément à la définition de Jordan, un continu est un ensemble fermé non réduit à un point et qui ne peut être décomposé en deux ensembles fermés sans points commun.

[2] Un ensemble est topologiquement homogène si, quels que soient les points A, B de cet ensemble, il existe une transformation biunivoque et bicontinue qui transforme A en B et cet ensemble en lui-même. Dans le cas des espaces topologiquement affines on peut en effet prendre une translation.