MARCEL BERGER

Les espaces symétriques noncompacts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 2 (1957), p. 85-177
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_2_85_0>

LES
ESPACES SYMÉTRIQUES NON COMPACTS

PAR M. MARCEL BERGER.

INTRODUCTION.

En recherchant dans [3] les différents groupes d'holonomie homogène possibles pour une variété à connexion affine, j'avais déterminé en particulier les groupes d'holonomie homogène *irréductibles* des variétés dont la connexion affine possède un tenseur de courbure à dérivée covariante nulle. Une telle variété est localement représentable (et globalement, si elle est complète et simplement connexe) par un *espace* (homogène) *symétrique*, c'est-à-dire, en bref, un espace homogène G/H pour lequel H est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif Σ de G. Ces résultats sur les groupes d'holonomie pouvaient donc conduire à la détermination des espaces symétriques *irréductibles;* si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{m}$) le sous-espace propre pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$ induit par celui de G, l'espace symétrique G/H est dit irréductible si la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{m}$ est irréductible. Mais les calculs pour obtenir ces groupes d'holonomie étaient longs, et inachevés en basse dimension; ce qui suggérait de déterminer les espaces symétriques irréductibles directement, par la recherche des automorphismes involutifs d'un groupe de Lie. On étudie d'abord les automorphismes involutifs σ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire les *espaces locaux symétriques*, ensemble d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et d'un automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$, de points fixes la sous-algèbre $\mathfrak{h}$; on note un tel espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

D'après des résultats de K. Nomizu [24], on peut supposer, si l'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est irréductible, que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *semi-simple*. La base de la recherche des automorphismes involutifs d'une algèbre réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ est l'existence, pour tout automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$, d'une sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$, qui est invariante par σ; l'espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ détermine donc un espace local symétrique de $\mathfrak{g}_1$ et l'on est ramené au problème de la détermination des espaces symétriques de groupes compacts; ces derniers ont été déterminés par E. Cartan dans [11]; ce sont en particulier des espaces riemanniens (pour une métrique définie positive).

On détermine ainsi tous les espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ des algèbres semi-simples. Mais tous les espaces obtenus ne sont pas *irréductibles*; pour déterminer ceux qui le sont, il est nécessaire d'étudier la représentation (linéaire réelle) $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, ce qui se fait par l'intermédiaire de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ d'un espace symétrique local compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ naturellement associé à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Lorsqu'on détermine ainsi les diverses représentations $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ des espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ pour lesquels les algèbres $\mathfrak{g}$ sont *simples*, on constate le phénomène suivant. Rappelons d'abord que si $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), W)$ est une représentation irréductible de l'algèbre simple complexe $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans l'espace vectoriel complexe W, et $(\rho(\mathfrak{p}), W)$ la représentation dans W d'une forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$, obtenu par restriction à $\mathfrak{p}$ de $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), W)$, on définit une représentation de $\mathfrak{p}$ dans un espace réel V, qui est irréductible, mais que deux cas seulement sont possibles : soit $\dim_{\mathbf{R}} V = 2 \dim_{\mathbf{C}} W$, et la représentation est dite de 2ᵉ classe, soit $\dim_{\mathbf{R}} V = \dim_{\mathbf{C}} W$, et la représentation est dite de 1ᵉ classe. Le phénomène constaté est le suivant : soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ deux formes réelles de $\tilde{\mathfrak{p}}$ et une représentation irréductible $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), W)$. Alors, les deux représentations $(\rho(\mathfrak{p}), W)$ et $(\rho(\mathfrak{p}'), W)$ n'ont pas nécessairement la même classe lorsque les formes réelles $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont isomorphes. Ce résultat semblait cependant implicitement contenu dans l'ensemble de [10]. Ce phénomène est lié au fait suivant : on sait que dans une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{p}$, les différentes sous-algèbres compactes maximales $\mathfrak{g}_1$ sont toutes isomorphes par un automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{p}$. Une forme réelle telle que $\mathfrak{p}$ est déterminée par un automorphisme involutif τ de la forme compacte $\mathfrak{p}_u$, dont les points fixes forment la sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$. Il se trouve que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}'_1$ sont les sous-algèbres des points fixes de deux automorphismes τ et τ' de $\mathfrak{p}_u$ définissant des formes réelles $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$, il n'existe pas nécessairement d'automorphisme intérieur de $\mathfrak{p}_u$ pour lequel $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}'_1$ sont isomorphes, lorsque les formes réelles $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont isomorphes. Ce fait avait été reconnu par E. Cartan dans [12]. Il est alors facile de démontrer que les représentations $(\rho(\mathfrak{p}), W)$ et $(\rho(\mathfrak{p}'), W)$ ont certainement même classe si les sous-algèbres compactes maximales correspondantes $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}'_1$ sont isomorphes dans $\mathfrak{p}_u$ par unautomorphisme intérieur. On détermine alors les seuls cas pour lesquels la classe de $(\rho(\mathfrak{p}), W)$ n'est pas univoquement déterminée par la structure de la forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$: ce sont les représentations notées **Spin*** $(4n)$ dans [3], et celles justement sur lesquelles le phénomène a été rencontré.

Déterminant les espaces symétriques G/H quelconques, il était naturel d'étudier ceux qui généralisent les espaces *hermitiens* symétriques : ceux-ci ont été étudiés dans [5]; ils sont hermitiens et même kählériens dès que la variété sous-jacente de G/H admet une structure presque-complexe invariante par G. Il n'en est plus de même dans le cas des espaces symétriques quelconques : il faut alors distinguer entre la notion d'espace C-*symétrique*, espace homogène symétrique muni d'une structure presque-complexe invariante par G et la notion d'espace symétrique *semi-kählérien*, espace symétrique muni d'une forme d'Hermite de rang maximum (de signature quelconque) et invariante par G.

Toutes les propriétés d'un espace symétrique peuvent s'étudier sur son espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; mais elles ne peuvent être « remontées » en propriétés de G/H que si H est *connexe;* mais H n'a aucune raison d'être connexe en général. C'est pourquoi on établit qu'un automorphisme involutif Σ d'un groupe de Lie (quelconque) laisse invariant un sous-groupe compact, maximal convenablement choisi, K de G. Ce qui permet d'abord de montrer que le groupe H est le produit topologique du groupe C formé des points fixes dans K de l'automorphisme de K induit par Σ et d'un espace vectoriel réel; en particulier, le sous-groupe H a toujours un nombre fini de composantes connexes. On en déduit aussi, en un sens à préciser, qu'une propriété de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se remontera si et seulement si elle se remonte pour l'espace symétrique compact maximal K/C.

Utilisant un résultat de Mostow [21], l'existence d'un sous-groupe compact maximal K de G invariant par Σ entraîne que, topologiquement, l'espace homogène symétrique G/H est un espace fibré, de base l'espace symétrique K/C et de fibre homéomorphe à un espace vectoriel réel. La topologie des espaces symétriques est donc ramenée à celle des espaces symétriques compacts. On déduit aussi de l'existence de cette fibration que si l'espace symétrique G/H est *compact*, alors le groupe G est nécessairement compact.

Le contenu des différents chapitres est le suivant :

Le chapitre I rappelle la définition d'un espace symétrique et les propriétés de la connexion affine canonique qu'on peut y définir. On définit ensuite les notions d'espace local symétrique, et celles d'espaces symétriques ou locaux symétriques qui sont C-symétriques et semi-kählériens.

L'ensemble des chapitres II et III est consacré à la détermination de toutes les structures d'espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple. Après avoir défini les notions d'espaces locaux symétriques *isomorphes* et *ext-isomorphes*, on ramène d'abord le problème de la classification des structures d'espaces locaux symétriques isomorphes (ou ext-isomorphes) au cas où l'algèbre $\mathfrak{g}$ et sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$ sont deux algèbres *simples*. On associe à tout espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son espace local symétrique compact maximal $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$, en montrant qu'on peut toujours définir l'algèbre réelle $\mathfrak{g}$ à partir de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$ par un automorphisme involutif τ *commutant* avec l'automorphisme involutif σ définissant la structure symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Deux structures locales symétriques isomorphes ont des espaces compacts maximaux isomorphes. On ramène la classification à celle des espaces compacts en montrant que, réciproquement, si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ ont même espace compact maximal $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$, c'est que : soit ils sont isomorphes, soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ est isomorphe à l'espace *associé* de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, défini par l'automorphisme involutif $\sigma\tau$. On peut alors déterminer les espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ d'une algèbre $\mathfrak{g}$ simple (de forme compacte simple) en recherchant les espaces symétriques $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ de la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$, qui se prolongent en un espace local symétrique de toute l'algèbre $\mathfrak{g}$. Ce qui est fait dans le chapitre III, pour toutes les formes réelles simples $\mathfrak{g}$. Le cas où l'algèbre $\mathfrak{g}$ est *pseudo-complexe* simple, c'est-à-dire celui où sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$ n'est pas simple, est traité à part.

Le chapitre IV est consacré à la détermination, parmi les espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple, de ceux qui sont irréductibles, C-symétriques, semi-kählériens. Ce qui se fait en étudiant la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$. On traite à part le cas où $\mathfrak{g}$ est non simple ou bien est simple mais pseudo-complexe, pour se ramener au cas où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ sont toutes les deux *simples*. On compare la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ à celle $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ de l'espace local symétrique compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ correspondant à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Pour caractériser ceux de ces espaces qui sont semi-kählériens, on obtient un théorème analogue à celui de [5] : l'espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (pour lequel $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ sont simples) est semi-kählérien si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{h}$ contient un centre à une dimension *dans* ses sous-algèbres compactes maximales. Et l'on caractérise en même temps, parmi les espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ simples) ceux qui ne sont *pas irréductibles :* ce sont ceux pour lesquels la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ contient un centre à une dimension, mais qui n'est pas dans une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{h}$. On détermine aussi dans le chapitre IV la nature exacte de la représentation linéaire $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, par l'intermédiaire de la représentation complexifiée $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}}), \tilde{\mathfrak{m}})$ dont on montre que c'est la même que la représentation complexifiée de $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$. Quant aux représentations $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ des espaces symétriques compacts $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$, elles ont été déterminées par E. Cartan dans [11].

L'ensemble des résultats des chapitres II, III et IV est condensé dans le tableau II, qui donne toutes les structures non ext-isomorphes d'espaces locaux symétriques et, pour chacune de ces structures, la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ et si cet espace local symétrique est réductible, C-symétrique ou semi-kählérien. Le tableau II définit ces structures par l'algèbre $\mathfrak{g}$ et l'algèbre $\mathfrak{h}$; ceci est justifié parce qu'on montre dans l'ensemble des chapitres II et III que, non seulement deux espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ pour lesquels $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont isomorphes, sont eux-mêmes ext-isomorphes, mais encore que deux espaces symétriques quelconques G/H et G/H′, dont les espaces locaux symétriques sont $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ (avec $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ isomorphes), sont encore isomorphes.

L'examen du tableau II montre que deux espaces symétriques peuvent avoir le même groupe H sans être isomorphes; ce qui n'arrive pas pour les espaces symétriques *riemanniens :* cela tient à ce qu'un groupe linéaire irréductible *non compact* peut laisser invariantes plusieurs métriques non proportionnelles. Le tableau II montre enfin le phénomène, signalé plus haut, concernant la classe des représentations réelles irréductibles.

Dans le chapitre V, on étudie les propriétés des espaces symétriques G/H pour lesquels G est *semi-simple*. Il faut d'abord préciser, étant donnés un espace local symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et un groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$, à quelle condition $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se « remonte » en un espace symétrique G/H. Si l'on définit le groupe G comme le quotient $G^\star/Z_G$ du groupe simplement connexe $G^\star$ par le sous-groupe Z_G, discret Z_G du centre Z de $G^\star$, il faudra, et ce sera suffisant, que l'automorphisme $\Sigma^\star$ de $G^\star$, qui remonte l'automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$, conserve globalement Z_G. On indique alors rapidement comment les automorphismes involutifs $\Sigma^\star$, correspondant aux divers espaces locaux symétriques $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, transforment le centre Z de $G^\star$.

On établit ensuite qu'il existe toujours une décomposition topologique $G = K.N$ du groupe semi-simple G en produit du sous-groupe compact maximal K par la sous-variété N homéomorphe à un espace vectoriel reel, qui est invariante par l'automorphisme involutif Σ définissant l'espace symétrique G/H, soit $\Sigma(K) = K$ et $\Sigma(N) = N$. On en déduit toutes les propriétés globales des espaces symétriques G/H à G semi-simple : d'abord, une décomposition sous-jacente $H = C.E$, avec $C \subset K$ et $E \subset N$, pour le sous-groupe H. D'où la nature du groupe d'holonomie homogène Ψ de G/H : il est identique au groupe $(\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$ [d'après [24], on était seulement assuré que le groupe d'holonomie homogène restreint Ψ_0 était identique à la représentation $(\mathrm{ad}(H_0), \mathfrak{m})$ de la composante connexe de l'élément neutre de H]. La recherche des espaces symétriques semi-kählériens est ramenée à celle des espaces symétriques kählériens (pour un groupe H non connexe). On peut aussi ramener l'étude des géodésiques de l'espace symétrique G/H à celle des géodésiques de l'espace symétrique compact K/C; ces dernières ont été étudiées dans [12]. On utilise enfin des résultats de Mostow [21], pour montrer que l'espace symétrique G/H admet une fibration de fibre homéomorphe à un espace vectoriel réel : on précise la nature de la base et de la fibre, dont on montre qu'elles peuvent être considérées comme des sous-variétés totalement géodésiques de G/H, et que G/H induit, sur l'une une métrique riemannienne à courbure positive ou nulle, sur l'autre une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.

Le chapitre VI généralise certaines des propriétés des espaces locaux symétriques et des espaces symétriques à groupe semi-simple, au cas d'un groupe de Lie *quelconque*. On montre d'abord que tout automorphisme involutif d'une algèbre de Lie réelle respecte une décomposition de Levi-Malcev de $\mathfrak{g}$. On en déduit l'existence d'un sous-groupe compact maximal K du groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui est invariant par Σ. Puis que le groupe H est le produit C.E d'un sous-groupe C de K par un espace vectoriel réel E; et, appliquant [21], une fibration de G/H, de base K/C et de fibre homéomorphe à un espace vectoriel réel.

Enfin, on déduit de cette fibration que les seuls espaces symétriques compacts sont ceux dont le groupe G est compact.

Dans [1], Allamigeon a étudié les espaces symétriques *harmoniques* et les a déterminés à l'aide du tableau II.

Les résultats de ce travail figurent en partie dans deux Notes aux *Comptes rendus* [2], qui contiennent quelques erreurs : on a signalé ces dernières.

Depuis la rédaction de cet article, j'ai eu connaissance des travaux [29], [31], [34]. Dans [29], la classification des espaces locaux symétriques est faite lorsque l'algèbre $\mathfrak{g}$ est une algèbre réelle simple *classique*. Dans [31] figurent : d'une part, une démonstration du lemme 10.2 : [31], p. 19, lemme 1.3 ; d'autre part, une formule générale permettant de déterminer la classe d'une représentation linéaire irréductible d'une algèbre de Lie simple réelle à l'aide du poids dominant de la représentation complexifiée, formule qui est en accord avec les résultats du n° 48 ; [31], p. 11, théorème VII. Enfin, [34] donne une interprétation géométrique des espaces symétriques du tableau II.

Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du texte.

CHAPITRE I.

Définitions.

1. Espace symétrique :

Définition 1.1 ([24], p. 52). — *On appelle* espace symétrique *un espace homogène* G/H *tel que :*

a. le groupe G *est un groupe de Lie connexe,*

b. le groupe G *est effectif sur* G/H, *c'est-à-dire que* H *ne contient pas de sous-groupe invariant non discret de* G*;*

c. il existe un automorphisme involutif (c'est-à-dire dont le carré est l'automorphisme identité) Σ, *de* G, *tel que, si l'on note* H_Σ *le sous-groupe fermé des éléments de* G *invariants par* Σ, *et par* H_0 *la composante connexe de l'élément neutre de* H_Σ, *alors on a pour* H *:*

$$H_0 \subset H \subset H_\Sigma.$$

Le sous-groupe H *sera appelé le* groupe d'isotropie *de l'espace symétrique* G/H.

Remarque. — Dans le cas où la condition *b* n'est pas satisfaite, on peut la satisfaire en considérant, au lieu de G, le quotient G/C de G par le sous-groupe invariant C de G qui est contenu dans H; puisque C est dans H, il est invariant par l'automorphisme involutif Σ définissant G/H et défini donc un espace homogène du groupe G/C : (G/C)/(H/C), qui satisfait aux conditions *a*, *b*, *c*.

Symétrie par rapport à un point de G/H. — L'automorphisme Σ définit par passage aux quotients un homéomorphisme différentiable de la variété M sous-jacente de G/H, pour lequel le point origine de G/H (c'est-à-dire la classe correspondant à un élément de H) est un point fixe isolé : c'est la *symétrie* par rapport à l'origine. On transporte ensuite cette symétrie, à l'aide du groupe G, en une symétrie par rapport à un point quelconque de M.

Exemple. — La variété sous-jacente M d'un groupe de Lie G peut toujours être considérée comme un espace symétrique de la façon suivante : on munit le groupe de Lie $G \times G$ (*produit direct* de G par G) de l'automorphisme involutif Σ, défini par $\Sigma(g, h) = (h, g)$, quels que soient g et h appartenant à G. Le groupe d'isotropie H est l'ensemble des (g, g), où g parcourt G; il est isomorphe au groupe G et l'espace homogène $M = (G \times G)/H$ est homéomorphe à la variété sous-jacente de G, puisque la classe modulo H de (g, h) est la même que celle de (gh^{-1}, e) (où e désigne l'élément neutre de G). La symétrie par rapport à l'origine n'est autre, lorsqu'on a identifié G et M, que l'application $g \to g^{-1}$.

2. Espace local symétrique. — L'automorphisme Σ induit un automorphisme involutif σ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G; et l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, n'est autre que la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, constituée des points fixes pour σ de $\mathfrak{g}$. A tout espace symétrique G/H est donc associé un « espace (homogène) local » (*voir* définition dans Tits [26], p. 44), que nous noterons $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, espace local qui est caractérisé par la donnée d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ et d'un automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$. Une telle structure sera appelée un *espace local symétrique;* la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ sera appelée *l'algèbre d'isotropie de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Par abréviation, on écrira « E. L. S. » pour « espace local symétrique ». On prendra garde de ne pas confondre la notion d'espace local symétrique avec celle d'« espace localement symétrique », définie dans le numéro suivant.

Pour étudier les espaces symétriques G/H, il est naturel d'étudier d'abord les E. L. S. Mais, en général, si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ne se *remontera* pas en un espace symétrique G/H, puisqu'un automorphisme (involutif) de $\mathfrak{g}$ ne pourra pas, en général, se remonter en un automorphisme de G. C'est cependant toujours le cas, évidemment, si G est simplement connexe. Même dans le cas important où G est *simple*, nous verrons au n° 52 que tout E. L. S. de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ne peut pas toujours se remonter en un espace symétrique G/H de G.

3. Connexion affine canonique. — Soit G/H un espace symétrique (pour l'automorphisme involutif Σ) et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son E. L. S. (pour l'automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$). Notons $\mathfrak{m}$ le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre -1 de σ. Puisque $\mathfrak{h}$ est le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre $+1$ de σ, on a

$$(3.1) \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \qquad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$$

et l'on pourra écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, où le signe $+$ désignera, comme dans toute la suite (sauf mention explicite du contraire, c'est-à-dire dans le chapitre III et les tableaux I et II) une *somme directe* pour les espaces vectoriels sous-jacents de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{m}$, mais non nécessairement une somme directe pour les algèbres de Lie. Cette décomposition de $\mathfrak{g}$ sera appelée *canonique*.

En particulier, considérons la *représentation adjointe* $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; les formules (3.1) montrent que cette représentation conserve $\mathfrak{m}$; on notera $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ cette représentation restreinte à $\mathfrak{m}$. De même, de ce que $\sigma(X) = -X$ pour tout $X \in \mathfrak{m}$, on déduit que la représentation adjointe de H dans $\mathfrak{g}$ conserve $\mathfrak{m}$; on notera $(\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$ cette représentation. En général, le groupe d'isotropie H et le groupe $(\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$ ne sont pas isomorphes.

Remarque. — La condition *b* de la définition 1.1 est équivalente à la suivante : « la représentation $\mathfrak{h} \to (\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est fidèle ». Donc le groupe d'isotropie H est toujours un *revêtement* du groupe $\mathrm{ad}(H)$ opérant dans $\mathfrak{m}$.

On définit sur la variété sous-jacente M de l'espace symétrique G/H une *connexion affine canonique* (Nomizu [24], p, 52-55), pour laquelle le tenseur de torsion est nul et le tenseur de courbure à dérivée covariante nulle. Cette connexion affine canonique est compatible avec la symétrie par rapport à un point quelconque de M; dans le cas particulier où cette connexion est celle d'une métrique (ce qui, [24], p. 55, est toujours le cas si G est semi-simple), la symétrie par rapport à un point $x \in M$ n'est autre que l'application $y \to s_x(y)$ définie par : « x est le milieu d'un segment géodésique $[y, s_x(y)]$ ». Et cette symétrie est une isométrie.

Réciproquement, un des intérêts des espaces symétriques est que (E. Cartan, K. Nomizu, [24], p. 58) :

Soit V *une variété, munie d'une connexion affine telle que le tenseur de torsion et le tenseur dérivée covariante du tenseur de courbure soient tous les deux nuls; une telle variété est appelée* localement symétrique. *Alors* V *est localement représentable par un espace symétrique.*

Ce qui entraîne (Ehresmann [16]) *que, si la variété* V *est complète pour sa connexion affine* (*notion qui coïncide, si la connexion est celle d'une métrique définie positive, avec la notion d'espace topologique complet pour la topologie induite par la métrique*), *alors il existe un revêtement de* V *qui est un espace symétrique.*

4. Groupes d'holonomie. — La connexion affine canonique d'un espace symétrique possède un groupe d'holonomie homogène Ψ et un groupe d'holonomie homogène restreint Ψ_0, qui est la composante connexe de l'élément neutre dans Ψ ([24], p. 40). Ce dernier groupe Ψ_0 est habituellement noté σ ([3], [6]); mais ici nous emploierons la notation Ψ_0 pour éviter toute confusion avec les automorphismes involutifs définissant les E. L. S. et qui seront toujours notés σ.

D'après [24], p. 50, l'algèbre de Lie de Ψ (ou de Ψ_0) est isomorphe à $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_1)$, où $\mathfrak{h}_1$ désigne l'idéal de $\mathfrak{h}$ défini par $\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}$. Et, lorsque G est semi-simple, on a ([24], p. 56) : $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{h}$. Donc, lorsque l'espace symétrique G/H est à G semi-simple, on a, pour le groupe d'holonomie homogène restreint : $\Psi_0 = (\mathrm{ad}(H_0), \mathfrak{m})$. Mais nous verrons au chapitre V (proposition 56.1) que la structure des espaces symétriques G/H à G semi-simple permet de montrer qu'on a exactement $\Psi = (\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$.

5. Espaces symétriques irréductibles :

Définition 5.1. — (Nomizu [24], p, 55-56). — *L'espace symétrique* G/H (*resp. son E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$) *est dit* irréductible *lorsque la représentation linéaire* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ *est irréductible.*

Proposition 5.1 ([24], p. 56). — *Tout E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *irréductible est tel que : soit* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, soit* $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = 0$.

Le cas $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = 0$ est à part et se traite directement; un tel E. L. S. est défini par la donnée d'une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{h}$ et d'une représentation $(\rho(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel réel $\mathfrak{m}$; l'algèbre $\mathfrak{g}$ est alors la somme semi-directe de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}$, pour cette représentation (*voir* n° 48 ou [25], exposé 22, p. 3), c'est-à-dire que l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathfrak{g}$ est la somme directe (d'espaces vectoriels) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, pour la structure d'algèbre de Lie définie par les crochets :

$[X, Y] = 0$ quels que soient X et Y dans $\mathfrak{m}$;
$[X, Y] = \rho(X).Y$ quels que soient dans X et $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{m}$;
$[X, Y]$ est le crochet dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Les espaces symétriques du type ci-dessus sont tous ceux correspondant ainsi aux représentations *fidèles*, réelles, d'une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{h}$. Ils sont irréductibles si et seulement si cette représentation $(\rho(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est irréductible; les représentations irréductibles réelles des algèbres de Lie réelles sont connues [10], donc les espaces symétriques correspondants sont bien déterminés.

Du point de vue de leur connexion affine canonique, les E. L. S. du type ci-dessus sont beaucoup plus simples : d'après [24], p. 50, leur groupe d'holonomie homogène restreint est réduit à l'identité; ce sont des variétés à courbure nulle (localement euclidienne ou « locally flat »). Du seul point de vue de variétés à connexion affine, (et non pour la structure d'espace homogène) un tel E. L. S. possède un revêtement universel qui est la variété d'un groupe abélien simplement connexe G, muni de la structure d'espace symétrique définie par l'automorphisme involutif : $\Sigma(g) = g^{-1}$.

Si l'on veut déterminer tous les espaces symétriques irréductibles, il suffit donc d'étudier de déterminer les espaces symétriques G/H à G *semi-simple.*

Pour cela, nous procédons en trois temps :

a. dans les chapitres II et III, nous déterminerons tous les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple;

b. parmi les E. L. S. obtenus, tous ne sont pas irréductibles, la condition $\mathfrak{g}$ semi-simple n'étant pas suffisante pour que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit irréductible. Contrairement au cas des espaces symétriques riemanniens définis positifs, même lorsque $\mathfrak{g}$ est *simple*, l'espace symétrique $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ peut être *réductible*. Nous déterminerons dont la nature de la représentation linéaire $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ et préciserons en particulier quand elle est irréductible. Les résultats des cas *a* et *b* sont condensés dans le tableau II. D'après le n° 4, le tableau II fournira donc ainsi la nature du groupe d'holonomie homogène restreint Ψ_0 de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$;

c. dans le chapitre V (proposition 52.1), nous préciserons quels sont les groupes de Lie G, d'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, pour lesquels un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ peut se remonter en un espace symétrique G/H.

6. Espaces C-symétriques et espaces semi kählériens. — Soient G/H un espace symétrique, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ son E. L. S. et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ la décomposition canonique de $\mathfrak{g}$.

Définition 6.1. — *L'espace symétrique* G/H (*resp. l'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$) *sera dit* C-symétrique *s'il existe une structure complexe de l'espace vectoriel* $\mathfrak{m}$, *qui est invariante par la représentation linéaire* $(\mathrm{ad}(\mathrm{H}), \mathfrak{m})$ [*resp.* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$].

Si la structure complexe de $\mathfrak{m}$ est définie par l'automorphisme J de $\mathfrak{m}$, de carré -1, on devra avoir

$$\mathrm{J}(\mathrm{ad}(h).\mathrm{M}) = \mathrm{ad}(h).(\mathrm{J}.\mathrm{M}) \quad \text{quels que soient} \quad h \in \mathrm{H}, \qquad \mathrm{M} \in m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X} \in \mathfrak{h}$$
$$[\text{resp. } \mathrm{J}(\mathrm{ad}(\mathrm{X}).\mathrm{M}) = \mathrm{ad}(\mathrm{X}).(\mathrm{J}.\mathrm{M})].$$

La définition 6.1 se justifie ainsi :

Proposition 6.1. — *Si* G/H *est un espace* C-*symétrique, sa variété sous-jacente peut être munie d'une structure de variété analytique complexe invariante par* G.

Il suffit d'appliquer le n° 2 de [20]; en effet, les conditions (2.2), (2.3), (2.4) de [20] sont vérifiées par hypothèse et la condition (2.6) est une conséquence triviale de la relation $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$,

Définition 6.2. — *L'espace symétrique* G/H (*resp. l'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$) *est dit semi-kählérien si : a. il est* C-*symétrique; b. pour cette structure complexe de* $\mathfrak{m}$, *la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathrm{H}), \mathfrak{m})$ [*resp.* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$] *laisse invariante une forme d'Hermite de* $\mathfrak{m}$, *de signature quelconque, mais non dégénérée.*

La proposition 6.1 montre qu'un espace symétrique semi-kählérien est un espace symétrique G/H pour lequel la variété sous-jacente M est munie d'une structure complexe analytique et d'une forme d'Hermite, non dégénérée, à dérivée covariante nulle dans la métrique à connexion affine canonique; cette forme d'Hermite étant évidemment invariante par G.

De ce qu'une représentation linéaire d'un groupe de Lie *connexe* est bien déterminée par la représentation linéaire de son algèbre de Lie, on déduit que :

PROPOSITION 6.2. — *Soit* G/H *un espace symétrique, d'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *et tel, de plus, que* H *soit connexe. Alors, si l'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est* C-*symétrique (resp. semi-kählérien), l'espace symétrique* G/H *est lui-même* C-*symétrique (resp. semi-kählérien).*

Remarque. — *a.* Contrairement à ce qui se passe pour les espaces symétriques riemanniens définis positifs, un espace symétrique peut être C-symétrique sans être semi-kählérien; exemple, les espaces symétriques, appelés pseudo-complexes, du n° 17, lorsqu'ils sont irréductibles.

Dans le chapitre IV, nous déterminerons tous les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, à $\mathfrak{g}$ semi-simple, qui sont C-symétriques et tous ceux qui sont semi-kählériens. Les résultats sont indiqués dans le tableau II.

b. Contrairement à celle d'irréductivité, les notions d'espaces S-symétriques et d'espaces symétriques semi-kählériens sont *globales*. Il y aura donc, étant donné un E. L. S. C-symétrique ou semi-kählérien, à reconnaître si un espace symétrique G/H, d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, est lui-même C-symétrique ou semi-kählérien. Si G est semi-simple, *voir* le n° 57.

CHAPITRE II.

ESPACES LOCAUX SYMÉTRIQUES DANS LE CAS SEMI-SIMPLE. GÉNÉRALITÉS.

7. ESPACES SYMÉTRIQUES ISOMORPHES : DÉFINITION 7.1. — *Deux espaces symétriques* G/H *et* G/H′, *du même groupe de Lie* G, *définis par les automorphismes involutifs* Σ *et* Σ' *respectivement, sont dits* isomorphes *s'il existe un automorphisme de* G *tel que* $\Sigma' = \Phi\Sigma\Phi^{-1}$.

Cette définition se justifie ainsi : lorsque G/H et G/H′ sont isomorphes, les variétés sous-jacentes M et M′ sont homéomorphes, pour l'homéomorphisme déduit de Φ par passage aux quotients; et cet homéomorphisme respecte les opérations de G sur M et M′. De plus, cet homéomorphisme respecte les connexions affines canoniques : en effet, la relation $\Sigma' = \Phi\Sigma\Phi^{-1}$ peut s'écrire $\Sigma'\Phi = \Phi\Sigma$, d'où, quel que soit $h \in \mathrm{H}$: $\Sigma'(\Phi(h)) = \Phi(h)$, ce qui prouve que $\Phi(\mathrm{H}) = \mathrm{H}'$. Et par le même raisonnement sur les E. L. S. correspondants $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, on montre que, pour les décompositions canoniques $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{m}'$, on a $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ et $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$, où φ désigne l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ induit par Φ. En particulier la représentation $(\mathrm{ad}(\mathrm{H}), \mathfrak{m})$ est isomorphe, par Φ, à la représentation $(\mathrm{ad}(\mathrm{H}'), \mathfrak{m}')$.

Si deux espaces symétriques G/H et G/H' sont isomorphes, il est clair qu'il en sera de même de leurs E. L. S. (en un sens évident). Mais pour être assurés que, réciproquement, deux E. L. S. isomorphes fournissent des espaces symétriques isomorphes, il faut préciser la notion d'isomorphisme entre deux E. L. S :

DÉFINITION 7.2. — *Les deux E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, de la même algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, définis par les automorphismes involutifs σ et σ', seront dits* isomorphes (*resp.* ext-isomorphes) *s'il existe un automorphisme intérieur φ (resp. un automorphisme quelconque φ) de $\mathfrak{g}$, tel que $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$.*

Si G/H et G/H' sont deux espaces symétriques d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ isomorphes, alors G/H et G/H' sont isomorphes; car, par définition d'un automorphisme intérieur d'une algèbre de Lie, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi = \exp(\operatorname{ad} X)$; l'automorphisme φ de $\mathfrak{g}$ peut donc toujours se remonter en l'automorphisme intérieur Φ de G défini par $\Phi(g) = (\exp X) g (\exp X)^{-1}$. Et si Σ et Σ' sont les automorphismes donnant naissance à G/H et G/H', on a bien $\Sigma' = \Phi\Sigma\Phi^{-1}$, parce que $(\Sigma')^{-1}\Phi\Sigma\Phi^{-1}$ induit l'identité sur $\mathfrak{g}$ et que G est connexe.

Par contre, si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont seulement ext-isomorphes, les espaces symétriques G/H et G/H', dont les E. L. S. sont $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ respectivement, ne seront plus nécessairement isomorphes. Cependant, on prendra garde que s'il n'existe aucun automorphisme de G qui induise l'automorphisme non intérieur φ de $\mathfrak{g}$, les espaces symétriques G/H et G/H' peuvent cependant être isomorphes : il suffira pour cela qu'il existe un automorphisme Ψ de G, induisant l'automorphisme ψ de $\mathfrak{g}$, et tel que $\psi\sigma\psi^{-1} = \varphi\sigma\varphi^{-1}$. On en verra un exemple, pour le groupe $\mathbf{SO}^8(16)$, dans le n° 28.

Par classer les E. L, S. *on entendra déterminer dans l'ensemble des E. L. S. les différentes classes d'équivalence pour la relation d'équivalence : « $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont isomorphes ».*

Cependant, dans plusieurs cas (*voir* le théorème 23.2), par exemple pour la forme réelle $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$, on trouvera, pour des algèbres d'isotropie isomorphes, des E. L. S. non isomorphes, mais seulement ext-isomorphes. Mais on pourra toujours montrer que des espaces symétriques, dont les E. L. S. sont ces derniers, sont isomorphes.

Il est donc justifié de faire rentrer *ces* E. L. S. ext-isomorphes dans la classification ci-dessus.

Dans ce chapitre et le suivant, nous allons classer les E. L. S., $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle *semi-simple*.

8. RÉDUCTION DU PROBLÈME DANS LE CAS SEMI-SIMPLE. — Supposons d'abord l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *semi-simple* et *non simple*; on peut donc écrire : $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$, où le signe $\oplus$ désigne une *somme directe* d'algèbres de Lie et où les $\mathfrak{g}_i (i = 1, \ldots, n)$

sont des algèbres de Lie simples. Soit σ un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$; quel que soit l'indice i, l'algèbre $\sigma(\mathfrak{g}_i)$ est encore un idéal simple de $\mathfrak{g}$, donc il existe un indice j tel que $\sigma(\mathfrak{g}_i)=\mathfrak{g}_j$. L'automorphisme involutif σ détermine donc une permutation involutive de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$; ces n indices sont donc répartis par paires $(i, \sigma(i))$. On peut donc, par récurrence, se ramener aux trois cas suivants :

I.	$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$,	avec	$\sigma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_1$	et	$\sigma(\mathfrak{g}_2)=\mathfrak{g}_2$;
II.	$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$,	avec	$\sigma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$	et	$\sigma(\mathfrak{g}_2)=\mathfrak{g}_1$;
III.	$\mathfrak{g}$ simple.				

Traitons d'abord les cas I et II.

Cas I. — Ce cas est celui de la *somme directe* de deux E. L. S. Si l'on désigne par $\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{h}_2$) la sous-algèbre des points fixes de σ dans $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$), on écrira, par convention, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1)\oplus(\mathfrak{g}_2/\mathfrak{h}_2)$. Si G/H est un espace symétrique dont l'E. L. S. est $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, et si l'on peut écrire $G=G_1\times G_2$, où G_1 (resp. G_2) est un groupe de Lie quelconque d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$), le signe $\times$ désignant le produit direct de deux groupes, alors l'espace homogène G/H est non seulement un produit topologique : $G/H=(G_1/H_1)\times(G_2/H_2)$, mais encore la connexion affine de l'espace symétrique G/H est le produit de celle de G_1/H_1 et de celle de G_2/H_2.

Pour les structures locales, la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est visiblement la somme directe $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{m}_1)\oplus(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_2), \mathfrak{m}_2)$, où l'on a écrit $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}_1+\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2=\mathfrak{h}_2+\mathfrak{m}_2$) la décomposition canonique de l'E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{h}_2$). Ce qui entraîne que :

a. l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{g}_2/\mathfrak{h}_2$ *est toujours réductible;*

b. il est G-*symétrique si et seulement si les deux E. L. S.* $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{h}_2$ *sont* G-*symétriques;*

c. il est semi-kählérien si et seulement si les deux E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{h}_2$ *sont semi-kählériens.*

9. Le cas d'échange. — Dans le cas II, les algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont nécessairement isomorphes : on les identifiera. Tout automorphisme échangeant $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ peut s'écrire $\sigma(X, Y)=(\alpha Y, \beta X)$, où α (resp. β) est un automorphisme de $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$); de plus, l'identification de $\mathfrak{g}_1$ et de $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}_2$ permet de considérer β comme un automorphisme de $\mathfrak{g}_1$. Pour que l'automorphisme de σ de $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ soit involutif, il faut et il suffit que $\sigma^2(X, Y)=(\alpha\beta X, \beta\alpha Y)=(X, Y)$, c'est-à-dire que σ est de la forme $\sigma(X, Y)=(\alpha Y, \alpha^{-1}X)$, où α est un automorphisme arbitraire de $\mathfrak{g}_1$. On notera $\sigma(\alpha)$ cet automorphisme, et $\sigma(1)$ celui correspondant à l'automorphisme identité, c'est-à-dire défini par $\sigma(1)(X, Y)=(Y, X)$.

Notons encore par la lettre α l'automorphisme de $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ défini par $\alpha(X, Y)=(\alpha X, Y)$. On a la formule $\sigma(\alpha)=\alpha\sigma(1)\alpha^{-1}$. Cette formule montre, en particulier, que si tous les automorphismes de $\mathfrak{g}_1$ sont *intérieurs*, alors toutes les structures d'E. L. S. de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, qui échangent $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont isomorphes à celle définie par $\sigma(1)$. Si α est un automorphisme non intérieur de $\mathfrak{g}_1$, les automorphismes $\sigma(1)$ et $\sigma(\alpha)$ définissent seulement des E. L. S. ext-isomorphes; et pour les espaces symétriques qui leur correspondent éventuellement, il faudra regarder si α peut se remonter.

Explicitons maintenant la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ de l'E, L. S. de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ défini par $\sigma(1)$; pour les autres $\sigma(\alpha)$, on vient de voir qu'on obtient des représentations isomorphes. La décomposition canonique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ est définie par : $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{m}$) est l'ensemble des (X, X) [resp. $(X, -X]$, où X parcourt $\mathfrak{g}_1$. La représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est donc définie par

$$[(X, X), (Y, -Y)] = ([X, Y], -[X, Y]).$$

Comme l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ s'identifie à l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ et que l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$ s'identifie aussi à $\mathfrak{g}_1$ — en tant qu'espace vectoriel — cette formule montre donc que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est identique à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_1$: $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{g}_1)$. Cette représentation est réductible s'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{m}_1$, tel que $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$, c'est-à-dire que $\mathfrak{m}_1$ doit être un *idéal* de $\mathfrak{g}_1$. On en déduit que :

a. l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, *dans le cas II, est irréductible, si est seulement si l'algèbre* $\mathfrak{g}_1$ *est simple.*

Il est moins trivial de savoir si l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est C-symétrique ou semi-kählérien. La condition *a* permet de se ramener au cas où $\mathfrak{g}_1$ est simple. On utilise alors la méthode et les notations des nos 44 à 49. Considérons l'algèbre complexifiée $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ et la représentation adjointe $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{g}}_1)_C, (\mathfrak{g}_1)_C)$ qu'elle définit. De même que pour la condition *a*, cette représentation ne sera irréductible que si l'algèbre complexe $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ est simple. C'est le cas où, d'après le n° 17, l'algèbre réelle $\mathfrak{g}_1$ n'est pas une algèbre réelle simple *pseudo-complexe*. Dans ce cas, on voit, comme dans la démonstration de la proposition 45.1, que la représentation intermédiaire $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_1)_C, (\mathfrak{g}_1)_C$ est irréductible, donc que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{g}_1)$ est de 1re classe; comme elle est irréductible (*voir a*), l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ n'est certainement pas G-symétrique.

Si au contraire l'algèbre réelle simple $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre pseudo-complexe $\hat{\mathfrak{p}}$, on a (*voir* n° 17); $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \tilde{\mathfrak{p}} + \tilde{\mathfrak{p}}$ et la représenlation $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{g}})_C, \hat{\mathfrak{p}})_C)$ est *a fortiori* réductible et comme la représentation $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{p}}), \hat{\mathfrak{p}})$ est irréductible, c'est qu'elle est de 2e classe (n° 44), et que l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est, dans ce cas, C-symétrique. Enfin, un tel E. L. S. n'est certainement jamais semi-kählérien; car, de même qu'au n° 17, on voit que la représentation $\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{p}})_C$ ne peut pas laisser invariante une forme d'Hermite. En conclusion :

b. Dans le cas II, l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est complexe si et seulement si l'algèbre réelle* $\mathfrak{g}_1$ *est pseudo-complexe; il n'est jamais semi-kählérien.*

Remarquons déjà (*voir* plus loin le n° 52) que l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, dans le cas II, se remonte toujours en un espace symétrique G/H de $G = G_1 \times G_2$, quel que soit le groupe de Lie G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$. On définira Σ par $\Sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, quels que soient $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$ (le groupe G_2 est isomorphe au groupe G_1). C'est le cas de l'exemple du n° 1, pour un groupe semi-simple : l'espace homogène symétrique G/H qu'on obtient peut être considéré comme la variété du groupe G_1, muni de la symétrie par rapport à l'élément neutre, définie par $g_1 \to g_1^{-1}$.

Il reste donc à étudier le cas où l'algèbre $\mathfrak{g}$ est *simple*. La classification correspondante étant longue, nous donnerons d'abord dans ce chapitre les résultats nécessaires préliminaires; la classification proprement dite sera faite au chapitre suivant.

10. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle *semi-simple*. On sait qu'il existe une forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$, telle qu'on puisse écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \sqrt{-1}\cdot\mathfrak{g}_{-1}, \qquad \mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{-1},$$

où $\mathfrak{g}_1$(resp. $\mathfrak{g}_{-1}$) est le sous-espace propre de $\mathfrak{g}_u$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) d'un automorphisme involutif τ de $\mathfrak{g}_u$ (pour ceci, qui est classique, *voir* par exemple [25], Exposés 11 et 12). L'algèbre $\mathfrak{g}$ étant donnée, un automorphisme tel que τ détermine aussi un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$; un automorphisme tel que τ sera appelé un $\star$*-automorphisme* de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}_u$ (*voir* [21], p. 249). Une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_u$ telle que $\mathfrak{g}_1$, c'est-à-dire qui peut être considérée comme la sous-algèbre des points fixes d'un $\star$-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$, sera appelée une $\star$*-algèbre* de $\mathfrak{g}_u$. On dira que les $\star$-algèbres $\mathfrak{g}_1$ sont les sous-algèbres compactes maximales des algèbres réelles $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie quelconque, on notera Aut($\mathfrak{l}$) le groupe de tous les automorphismes de $\mathfrak{l}$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle semi-simple et $\mathfrak{g}_u$ sa forme compacte, définie par un $\star$-automorphisme τ, fixé une fois pour toutes. On peut alors plonger Aut($\mathfrak{g}$) et Aut($\mathfrak{g}_u$) dans le groupe Aut($\tilde{\mathfrak{g}}$) de tous les automorphismes de la complexifiée $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ (ou de $\mathfrak{g}_u$, c'est la même) (dans toute la suite, le *tilda* désignera toujours le passage d'une algèbre réelle à sa complexifiée. Rappelons les deux propositions suivantes :

Proposition 10.1 (Murakami [22], p. 106). — *Soit $\mathfrak{g}$ une forme réelle d'une algèbre de Lie réelle semi-simple compacte $\mathfrak{g}_u$, définie à partir de $\mathfrak{g}_u$ par l'$\star$-automorphisme τ. Pour un automorphisme σ de $\mathfrak{g}_u$, les trois propriétés suivantes sont équivatentes :*

$$\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1; \qquad \sigma\tau = \tau\sigma; \qquad \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u).$$

Les automorphismes possédant l'une des trois propriétés ci-dessus définissent donc indifféremment un automorphisme de $\mathfrak{g}$ ou de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$; on pourra les noter par la même lettre.

Proposition 10.2 (Murakami [22], p. 108). — *Tout automorphisme σ de l'algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ peut, un $\bigstar$-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$ étant donné, se mettre d'une façon et d'une seule sous la forme $\sigma = \alpha\beta$, où $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ et $\beta = \exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)$, avec $X \in \mathfrak{g}_{-1}$.*

La proposition 10.1 entraîne en particulier qu'il existe une application $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_1)$, qu'on *notera* $\sigma \to k(\sigma)$; on *posera* aussi $K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$.

Lemme 10.1. — *Quel que soit l'automorphisme σ de $\mathfrak{g}$ et l'élément X de $\mathfrak{g}_{-1}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\sigma(X) = -X; \qquad \sigma\exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)\sigma^{-1} = (\exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X))^{-1}.$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, la condition $\sigma(X) = -X$ est équivalente à la suivante : $[\sigma(X), Z] = -[X, Z]$ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$. Cette dernière relation peut s'écrire $\sigma[X, \sigma^{-1}Z] = -[X, Z]$ pour tout Z dans $\mathfrak{g}$, et est donc équivalente à l'égalité entre dérivations de $\mathfrak{g}$: $\sigma\,\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\,.\,X)\sigma^{-1} = -\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\,.\,X)$. D'autre part, puisque $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, l'application $\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\,.\,X) \to \exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)$ est injective, ce qui démontre le lemme, puisqu'on a la relation

$$\exp(\sigma\,\mathrm{ad}(\sqrt{-1}\,.\,X)\sigma^{-1}) = \sigma\exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)\sigma^{-1}$$

(pour le fait que l'application ci-dessus est injective, *voir* par exemple [22], p. 108).

Lemme 10.2. — *Soit σ un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}$ et τ un $\bigstar$-automorphisme donné de $\mathfrak{g}$. Il existe un automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{g}$ tel que l'automorphisme involutif $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ de $\mathfrak{g}$ commute avec τ.*

Utilisons la décomposition de σ fournie par la proposition 10.2 et relative à l'$\bigstar$-automorphisme τ donné : $\sigma = \alpha\beta$, avec $\alpha \in K$ et $\beta = \exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)$. D'après [22], p. 106-108), l'automorphisme α (resp. β) peut être considéré comme défini par une matrice carrée *orthogonale réelle* (resp. *hermitienne*). Exprimons que σ est involutif :

$$\sigma = \alpha\beta = \beta^{-1}\alpha^{-1} \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma} = \alpha\beta^{-1} = \beta\alpha^{-1}.$$

Calculons $\sigma\bar{\sigma}$ de deux façons :

$$\sigma\bar{\sigma} = (\alpha\beta)(\beta\alpha^{-1}) = \alpha\beta^2\alpha^{-1} \qquad \text{et} \qquad \sigma\bar{\sigma} = (\beta^{-1}\alpha^{-1})(\alpha\beta^{-1}) = \beta^{-2}.$$

En comparant : $\beta^{-2} = \alpha\beta^2\alpha^{-1}$. Puisque $\beta^2 = \exp(2\,\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X)$ et que $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, le lemme 10.1 entraîne que $\alpha(X) = -X$, d'où l'on déduit en appliquant de nouveau le lemme 10.1 :

$$\beta^{\frac{1}{2}} = \alpha\beta^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-1}, \qquad \text{où} \qquad \beta^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\,X\right).$$

Posons alors $\varphi = \beta^{\frac{1}{2}}$; l'automorphisme φ est un automorphisme intérieur par définition et l'on a

$$\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1} = \beta^{\frac{1}{2}}\alpha\beta\beta^{-\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}}\alpha\beta^{\frac{1}{2}} = \alpha.$$

Parce que $\sigma' = \alpha$ et que $\alpha\tau = \tau\alpha$ (proposition 10.1), on a donc $\sigma'\tau = \tau\sigma'$.

11. Le lemme 10.2 montre que dans la classe d'équivalence (pour les structures isomorphes) d'un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple, il existe toujours un E. L. S. qui est défini par un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ commutant avec un $\star$-automorphisme de $\mathfrak{g}$ donné à l'avance. *Pour classer les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on peut donc supposer que l'automorphisme involutif définissant $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ commute avec un $\star$-automorphisme τ définissant $\mathfrak{g}$ à partir de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$*. Et la proposition 10.1 montre alors que, dans ce cas, l'automorphisme τ définissant $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ induit un automorphisme $k(\sigma)$ de $\mathfrak{g}_1$, qui reste *a fortiori* involutif. Mais l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ étant compacte, ses E. L. S. sont connus; ils ont été déterminés par E. Cartan dans [11] et, comme rappelé ci-dessus au n° 10, correspondent aux différentes formes réelles de la forme compacte $\mathfrak{g}_1$. Nous allons préciser dans les n°s 11 à 15 comment on passe des E. L. S. de $\mathfrak{g}$ aux E. L. S. de l'algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$; le résultat en vue étant la scolie du n° 15.

Lemme 11.1. — *Soit $\mathfrak{g}_u$ une algèbre de Lie compacte simple et σ un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_u$, commutant avec un $\star$-automorphisme donné τ de $\mathfrak{g}$. Si σ induit sur $\mathfrak{g}_1$ (sous-algèbre des points fixes, dans $\mathfrak{g}_u$, de τ) l'automorphisme identique, alors σ ne peut être que l'identité ou τ.*

Puisque σ et τ commutent, on peut écrire $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}'_{-1} + \mathfrak{g}''_{-1}$, avec $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}'_{-1} + \mathfrak{g}''_{-1}$, où $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}'_{-1}$ (resp. $\mathfrak{g}''_{-1}$) est le sous-espace propre de σ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1). Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}'_{-1} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}''_{-1} = \mathfrak{c}$. De ce que σ et τ sont des automorphismes, on déduit les relations

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}, \qquad [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}, \qquad [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}] \subset \mathfrak{c}, \qquad [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = 0,$$

d'où l'on déduit, par Jacobi, que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_u$ engendré par $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ et $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_u$. Puisque $\mathfrak{g}_u$ est *simple*, on a donc :

soit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{b} = 0$, d'où $\sigma = \tau$;

soit $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, donc $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{c} = 0$ et que σ est l'identité, ce qui démontre le lemme.

12. Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ un E. L. S. à $\mathfrak{g}$ semi-simple, que l'on peut supposer (lemme 10.2) défini par un automorphisme involutif, σ, commutant avec l'$\star$-automorphisme τ définissant $\mathfrak{g}$ à partir de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$. Puisque σ et τ commutent, σ laisse donc invariants globalement $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$; on peut donc écrire :

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-11} + \mathfrak{g}_{-1-1}, \tag{12.1}$$

où $\mathfrak{g}_{11}$ (resp. $\mathfrak{g}_{1-1}$) est le sous-espace propre de $\mathfrak{g}_1$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de σ et $\mathfrak{g}_{-11}$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1-1}$) le sous-espace propre de $\mathfrak{g}_{-1}$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de σ.

De ce que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_{-1}$, on déduit que l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ peut s'écrire $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_{11}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11}$; puisque $\mathfrak{g}_{11}$ est une algèbre compacte, c'est que la forme compacte de $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{g}_{11}+\mathfrak{g}_{-11}$ et que $\mathfrak{g}_{11}$ est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{h}$. *L'espace local symétrique* $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ *sera dit l'E. L. S. compact maximal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. D'autre part, puisque les deux automorphismes involutifs σ et τ commutent, l'automorphisme produit $\sigma\tau$ est encore involutif et commute encore avec τ; il définit donc un nouvel E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$. *On dira que cet E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, *défini par* $\sigma\tau$, *est l'E. L. S. associé de l'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}'$ se lit sur la formule (12.1); en effet, les points fixes de $\sigma\tau$ dans $\mathfrak{g}_u$ sont $\mathfrak{h}'_u=\mathfrak{g}_{11}+\mathfrak{g}_{-1-1}$ et l'algèbre $\mathfrak{h}'$ cherchée est $\mathfrak{h}'=\mathfrak{g}_{11}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1}$; elle a pour forme compacte $\mathfrak{h}'_u$ et pour sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_{11}$. Deux E. L. S. associés ont même E. L. S. compact maximal. Deux E. L. S. associés peuvent parfois être isomorphes; on en rencontrera des exemples dans le chapitre suivant.

13. Rappels. — Dans toute la suite de ce chapitre et dans le chapitre suivant, on supposera avoir choisie l'algèbre réelle semi-simple compacte $\mathfrak{g}_u$ de la façon suivante : si $\tilde{\mathfrak{g}}$ désigne l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}_u$ ou d'une forme réelle quelconque de $\mathfrak{g}_u$, on notera $\tilde{\mathfrak{t}}$ une sous-algèbre de Cartan donnée de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\Sigma=\{\alpha\}$ le système des racines (non nulles sera toujours sous-entendu) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\tilde{\mathfrak{t}}$. Les éléments E_α de $\mathfrak{g}$, correspondant aux racines α, seront choisis de façon à former une base de Weyl de Σ; pour ceci et dans la suite, ce qui sera mentionné sans références, *voir* [25], exposé 11. L'algèbre de Lie réelle compacte $\mathfrak{g}_u$ est alors engendrée par les $(E_\alpha+E_{-\alpha})$, les $\sqrt{-1}(E_\alpha-E_{-\alpha})$ et les $-\sqrt{-1}\,.\,H'_\alpha=\sqrt{-1}[E_\alpha, E_{-\alpha}]$, où α parcourt Σ. Les $\sqrt{-1}\,.\,H'_\alpha$ engendrent une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_u$, qui sera notée $\mathfrak{t}$. On utilisera aussi la notion de *système fondamental* de racines simples : *voir* [25], exposé 10; un tel système est appelé *fundamental basis* dans [17], [18], [22], [23]. En particulier, un tel système fondamental Σ_0 comprend un nombre de racines α égal au *rang* de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}_u$; ce rang r est défini par $r=\dim_{\mathbf{C}}\tilde{\mathfrak{t}}=\dim_{\mathbf{R}}\mathfrak{t}$; toute racine de Σ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de Σ_0.

L'espace vectoriel réel $\mathfrak{t}=\mathbf{R}^r$ sera muni du produit scalaire défini par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et noté (λ, μ). On appellera *rotation du système* Σ des racines de $\mathfrak{g}$ une transformation orthogonale (pour le produit scalaire qui vient d'être défini) de $\mathfrak{t}$ qui conserve Σ. On appellera *rotation particulière* une rotation du système Σ conservant un système fondamental Σ_0; on ne précisera ce système fondamental (qui n'est pas unique pour un système Σ d'une algèbre semi-simple donnée) que lorsque ce sera nécessaire.

14. Structure des automorphismes involutifs :

Proposition 14.1. — *Soit $\mathfrak{g}_u$ une algèbre semi-simple compacte, définie à partir de sa complexifiée $\tilde{\mathfrak{g}}$ par une base de Weyl associée à un système de racines Σ. Pour toute rotation particulière s d'un système fondamental Σ_0 de $\mathfrak{g}$, il existe un automorphisme $\tilde{\sigma}_0$, et un seul, de $\mathfrak{g}$, qui induise sur $\tilde{\mathfrak{r}}$ la rotation particulière donnée et qui soit tel que $\tilde{\sigma}_0(E_\alpha) = u_0(\alpha) E_s(\alpha)$, avec $u_0(\alpha) = u_0(-\alpha) = \pm 1$ et $u_0(\alpha) = +1$ si $\alpha \in \Sigma_0$. Cet automorphisme $\tilde{\sigma}_0$ définit un automorphisme σ_0 de la forme compacte $\mathfrak{g}_u$. En outre, si la rotation particulière considérée est involutive, alors $\tilde{\sigma}_0$ et σ_0 sont aussi involutifs.*

La première partie de cette proposition est due à F. Gantmacher ([17], p. 130, théorème 21). La deuxième partie s'en déduit facilement; il suffit de montrer que $u_0(\alpha) = u_0(s(\alpha))$. C'est évident si $\alpha \in \Sigma_0$; dans le cas contraire, on utilise la formule suivante, donnée dans le théorème 21 de [17] :

$$u_0(\alpha + \beta) = \frac{N_{s(\alpha)\,s(\beta)}}{N_{\alpha\beta}}\, u_0(\alpha)\, u_0(\beta)$$

et on l'applique à $s(\alpha) s(\beta)$; comme tous les éléments qui y figurent valent ± 1, ils sont égaux à leurs inverses, et l'on a $u_0(s(\alpha) + s(\beta)) = u_0(\alpha + \beta)$. On en déduit, par récurrence, que lorsqu'on construit les $u_0(\alpha)$ comme dans la démonstration du théorème 21 de [17], à partir de $u_0(s(\alpha)) = u_0(\alpha)$ pour $\alpha \in \Sigma_0$, que $u_0(s(\alpha)) = u_0(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

L'unicité affirmée dans la proposition 14.1 montre que si la rotation particulière considérée est l'identité, alors σ_0 est l'automorphisme identique. Rappelons enfin que les rotations particulières d'un système fondamental Σ_0 donné d'une algèbre $\mathfrak{g}_u$ compacte semi-simple, correspondent bijectivement aux composantes connexes de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$, c'est-à-dire encore à $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)/\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_u)$, où $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_u)$ désigne le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}_u$.

Lemme 14.1. — *Soit Σ_0 un système fondamental d'une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ complexe* simple. *Si t et f sont deux rotations particulières de Σ_0, telles que f commute avec t : $ft = tf$, alors la rotation f est : soit l'identité, soit t.*

Supposons d'abord que $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'ait pas pour structure D_4 (pour les notations d'algèbres simples complexes ou réelles, *voir* chapitre III, tableau I). Alors le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ n'a que deux composantes connexes au plus et le lemme est alors évident. Dans le cas de D_4, les rotations particulières d'un système fondamental donné Σ_0 constituent le groupe à six éléments des permutations de trois objets, et l'on vérifie alors que si f est un élément de ce groupe qui est de carré 1 et commute avec l'élément t aussi de carré 1, alors on a : soit $f = 1$, soit $f = t$.

Définition. — *Un automorphisme involutif σ d'une algèbre compacte semi-simple $\mathfrak{g}_u$ sera appelé un* G*-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$ s'il existe une base de Weyl de la* *complexifiée $\tilde{\mathfrak{g}}$, relative à la sous-algèbre de Cartan $\tilde{\mathfrak{c}}$, et un système fondamental Σ_0, tels que :*

a. σ induit une rotation particulière s de Σ_0 ;

b. on a $\sigma = \sigma_0 \exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}\,.\lambda)$, où Σ_0 désigne l'automorphisme défini de façon unique dans la proposition 14.1 par le système fondamental Σ_0 et la rotation particulière s, et où λ est un élément de $\mathfrak{c}$ invariant par s.

Il revient au même de dire que σ est défini par la rotation s de c et par les relations

$$\sigma(E_\alpha) = \exp(\alpha, \lambda)\, u_0(\alpha)\, E_{s(\alpha)}, \tag{14.1}$$

où les coefficients $u_0(\alpha)$ sont ceux définis dans la proposition 14.1. Un G-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$ est donc bien déterminé par la donnée d'une sous-algèbre de Cartan de type $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}_u$, d'une rotation particulière et d'un système fondamental, et par un élément λ de $\mathfrak{c}$; si $\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$ désigne une base orthonormée de $\mathfrak{c}$, on écrira les coordonnées de λ sous la forme

$$\lambda = (\pi\lambda_1, \ldots, \pi\lambda_r)$$

et les r nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ seront appelés les G-*nombres du* G-*automorphisme* σ. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, pour une algèbre semi-simple compacte $\mathfrak{g}_u$, on dira G-automorphisme, sans préciser la sous-algèbre de Cartan, ni le système fondamental et la rotation particulière correspondants; en particulier, dans le cas particulier où $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ n'a que deux composantes connexes au plus, la rotation particulière sera bien définie par « G-automorphisme intérieur » ou « G-automorphisme extérieur ».

Soient σ et τ deux G-automorphismes d'une même algèbre compacte semi-simple $\mathfrak{g}_u$, pour les mêmes données (non précisées) et définis par leurs complexifiés :

$$\tilde{\sigma}(E_\alpha) = v(\alpha)\, E_{t(\alpha)},$$
$$\tilde{\tau}(E_\alpha) = u(\alpha)\, E_{s(\alpha)}.$$

Nous serons assuré qu'ils commutent, soit s'ils sont tous les deux intérieurs, soit s'ils induisent tous les deux la même rotation particulière : $s = t$. En effet, on aura dans le premier cas :

$$\tilde{\tau}\tilde{\sigma}(E_\alpha) = u(\alpha)\, v(\alpha) E_\alpha = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}(E_\alpha)$$

et dans le second cas :

$$\tilde{\tau}\tilde{\sigma}(E_\alpha) = v(s(\alpha))\, u(\alpha) E_\alpha ;$$

mais comme σ et τ sont involutifs et que $u(\alpha) = \pm 1$ et $v(\alpha) = \pm 1$, on a $v(t(\alpha)) = v(\alpha)$ et $u(s(\alpha)) = u(\alpha)$, d'où, puisque $s = t$:

$$v(s(\alpha))\, u(\alpha) = v(\alpha)\, u(\alpha) = v(\alpha)\, u(t(\alpha))$$

et donc $\sigma\tau = \tau\sigma$. Dans le cas où σ est intérieur et τ extérieur, ils ne commutent plus nécessairement. Il faut qu'on ait

$$\tilde{\tau}\tilde{\sigma}(E_\alpha) = v(\alpha)\,u(\alpha)E_\alpha = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}(E_\alpha) = u(t(\alpha))\,v(\alpha)E_\alpha)$$

d'où la condition $u(\alpha) = u(t(\alpha))$, quel que soit α. Cette condition pourra être regardée sur les G-nombres de σ : on devra avoir $\exp(\lambda, \alpha) = \exp(\lambda, t(\alpha))$. Ce sera en particulier certainement le cas si l'élément λ définissant σ est invariant par la rotation t.

Proposition 14.2. — *Soit $\mathfrak{g}_u$ une algèbre de Lie compacte semi-simple, définie à partir de sa complexifiée par une sous-algèbre de Cartan et un système de racines Σ. Pour tout automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_u$, il existe un automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{g}_u$ tel que l'automorphisme (involutif) $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ soit un* G-*automorphisme, pour un système fondamental $\Sigma_0 \subset \Sigma$.*

Cette proposition, due à Gantmacher ([18], p. 229, théorème 8), est à la base de la détermination des formes réelles des algèbres de Lie complexes simples, telle qu'elle est faite dans [18].

15. Relation entre un E. L. S. et son E. L. S. compact maximal. — Nous allons appliquer les résultats ci-dessus pour résoudre le problème posé dans le n° 11 : trouver les relations entre un E. L. S. et son E. L. S. compact maximal.

Lemme 15.1. — *Soient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ deux E. L. S. de l'algèbre semi-simple réelle $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont ext-isomorphes, alors leurs E. L. S. compacts maximaux sont aussi ext-isomorphes.*

On peut d'abord (lemme 10.2) supposer que les automorphismes involutifs σ et σ' de $\mathfrak{g}$, qui définissent respectivement $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, commutent avec un $\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}$, choisi une fois pour toutes. Puisque, par hypothèse, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont isomorphes, c'est qu'il existe un automorphisme η de $\mathfrak{g}$, tel que $\sigma' = \eta\sigma\eta^{-1}$. Écrivons η sous la forme $\eta = \alpha\beta$ (proposition 10.2), avec $\alpha \in K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$ et $\beta = \exp(\mathrm{ad}\sqrt{-1}.X)$, où $X \in \mathfrak{g}_{-1}$; et exprimons que σ' et τ commutent : comme $\alpha \in K$, c'est que α et τ commutent (proposition 10.1) ; il vient donc

$$\tau\beta\sigma\beta^{-1} = \beta\sigma\beta^{-1}\tau.$$

D'après le lemme 10.1, on déduit de $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ que $\tau\beta = \beta^{-1}\tau$, d'où, puisque σ et τ commutent :

$$\beta^{-2} = (\sigma\tau)\,\beta^2(\sigma\tau)^{-1}.$$

Donc, d'après le lemme 10.1 : $(\sigma\tau)(X) = -X$, et comme $\tau(X) = -X$, on a finalement $\sigma(X) = X$. On en déduit $\sigma\beta = \beta\sigma$ et $\sigma\beta^{-1} = \beta^{-1}\sigma$, soit $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$; et comme $\alpha \in K$, on a pour $k(\sigma)$ et $k(\sigma')$:

$$k(\sigma') = \alpha\,k(\sigma)\,\alpha^{-1}.$$

Donc $k(\sigma')$ et $k(\sigma)$ déterminent des E. L. S. de $\mathfrak{g}_1$ qui sont ext-isomorphes.

LEMME 15.2. — *Soient* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ *deux E. L. S. définis par les deux automorphismes involutifs* σ *et* σ' *de l'algèbre de Lie réelle* simple $\mathfrak{g}$. *Si les E. L. S. compacts maximaux de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ *sont isomorphes (resp. s'ils sont ext-isomorphes pour un automorphisme extérieur de* $\mathfrak{g}_1$ *qui est prolongeable en un automorphisme de* $\mathfrak{g}$*), alors :*

soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ *sont isomorphes (resp. ext-isomorphes);*
soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est isomorphe (resp. ext-isomorphe) à l'E. L. S. associé de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$.

a. D'après la proposition 14.2, on peut choisir une fois pour toutes un $\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}$ et de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$, tel que τ soit un G-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$, pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}_u$ et une rotation particulière t d'un système fondamental Σ_0. D'après le lemme 15.1 et le lemme 10.2, on peut choisir les automorphismes involutifs σ et σ' qui définissent les E. L. S. donnés $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$, de façon qu'ils commutent avec τ, et sans que les E.L.S. compacts maximaux de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ cessent d'être isomorphes. D'après la propositions 10.1, les automorphismes σ et σ' de $\mathfrak{g}$ déterminent alors des automorphismes involutifs $k(\sigma)$ et $k(\sigma')$ de la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$, associée à l'$\star$-automorphisme τ. Par hypothèse, si l'on appelle $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ et $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}'_{11}$ les E. L. S. compacts de $\mathfrak{g}_1$ déterminés par $k(\sigma)$ et $k(\sigma')$ respectivement, ces deux E. L. S. sont isomorphes.

b. L'algèbre $\mathfrak{g}_1$ n'est pas semi-simple en général, mais elle est toujours somme directe : $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^0 \oplus \mathfrak{z}$, de son centre $\mathfrak{z}$ et de son algèbre dérivée $\mathfrak{g}_1^0$. Et un automorphisme quelconque de $\mathfrak{g}_1$ conserve cette décomposition en somme directe. De plus, si l'on pose $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{c}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$ et si l'on pose $\mathfrak{c}_1^0 = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{g}_1^0$, alors $\mathfrak{c}_1^0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1^0$. Soit ρ un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_1$ qui définit un E. L. S. de $\mathfrak{g}_1$ isomorphe à la fois à $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ et $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}'_{11}$. Étant un automorphisme, ρ conserve la décomposition $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^0 \oplus \mathfrak{z}$, donc définit un automorphisme involutif de l'algèbre compacte semi-simple $\mathfrak{g}_1^0$. Appliquons la proposition 14.2 à ρ : on peut supposer que ρ est un G-automorphisme de $\mathfrak{g}_1^0$, pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_1^0$, sans que E. L. S. de $\mathfrak{g}_1$ qu'il définit cesse d'être isomorphe à $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ et $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}'_{11}$, parce qu'un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_1^0$ se prolonge trivialement en un automorphisme intérieur de la somme directe $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^0 \oplus \mathfrak{z}$.

c. Puisque $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ ont des E. L. S. compacts maximaux isomorphes à l'E. L. S. de $\mathfrak{g}_1$ défini par l'automorphisme involutif défini dans le cas *b*, c'est qu'il existe des automorphismes intérieurs η_1 et η'_1 de $\mathfrak{g}_1$, tels que $k(\sigma) = \eta_1 \rho \eta_1^{-1}$ et $k(\sigma') = \eta'_1 \rho \eta_1'^{-1}$. Mais η_1 et η'_1 se prolongent en des automorphismes intérieurs de l'algèbre initiale $\mathfrak{g}$, lorsqu'on est dans le cas « *isomorphes* »; dans le cas « ext-isomorphes », ils se prolongent encore d'après les hypothèses du lemme. On supposera donc dans la suite avoir choisi les automorphismes involutifs σ et σ' de $\mathfrak{g}$ tels que $k(\sigma) = \rho$ et $k(\sigma') = \rho$; ceci n'aura pas changé la propriété de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ d'avoir même E. L. S. compact maximal et d'autre part, n'aura pas non plus altéré les classes d'équivalence (pour la relation « être isomorphes ») des E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$. Enfin ces automorphismes σ et σ' commuteront toujours avec τ, puisqu'un automorphisme de $\mathfrak{g}$, qui provient d'un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_1$, conserve $\mathfrak{g}_1$, donc (proposition 10.1) commute avec τ.

d. Puisque les automorphismes σ et σ' induisent ρ sur $\mathfrak{g}_1$, ils conservent donc la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_1$ de $\mathfrak{g}_1$; comme ils commutent avec τ, donc appartiennent à $K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_u)$, ils conservent donc la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}_u$, d'après [22], p. 117, lemme 10. Un automorphisme involutif σ (resp. σ') de $\mathfrak{g}_u$ conservant la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$, induit sur $\mathfrak{c}$ une rotation s (resp. s') et est défini par

$$\tilde{\sigma}(E_\alpha) = u(\alpha) E_{s(\alpha)} \quad \text{avec} \quad u(\alpha) = u(s(\alpha)) = \pm 1 \quad \text{pour tout } \alpha,$$
$$\tilde{\sigma}'(E_\alpha) = u'(\alpha) E_{s'(\alpha)} \quad \text{avec} \quad u'(\alpha) = u'(s'(\alpha)) = \pm 1 \quad \text{pour tout } \alpha$$

[pour les propriétés des $u(\alpha)$ et $u'(\alpha)$, *voir* par exemple [23], p. 110]. De ce que τ et σ (resp. σ') commutent, on déduit, comme au n° 14, qu'on a, pour la rotation t de $\mathfrak{c}$, induite par τ, les relations $u(\alpha) = u(t(\alpha))$ et $u'(\alpha) = u'(t(\alpha))$, pour tout α.

e. Considérons l'automorphisme $\sigma\sigma'$ de $\mathfrak{g}_u$: on va montrer qu'il est involutif. Posons $\varphi = \sigma\sigma'$; l'automorphisme φ commute avec τ et conserve la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$, sur laquelle il induit une rotation ; soit $f = ss'$ cette rotation de $\mathfrak{c}$. D'autre part, induit sur $\mathfrak{g}_1$ l'automorphisme $k(\varphi) = k(\sigma) k(\sigma') = \rho^2$, c'est-à-dire l'identité. Or, d'après [22], p. 114, lemme 7, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}_u$, soit λ cet élément. Les deux automorphismes φ et τ, laissant $\mathfrak{g}_1$ fixe point par point, laissent donc fixe λ et d'après [23], p. 106, proposition 1, ils induisent une rotation particulière d'un même système fondamental Σ_0. Ces rotations particulières sont f et t ; puisque φ et τ commutent, les hypothèses du lemme 14.1 sont donc remplies, et la rotation f induite par φ sur $\mathfrak{c}$ est donc : soit l'identité, soit la rotation t induite par τ sur $\mathfrak{c}$.

Si f est l'identité, on a $\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}(E_\alpha) = u(\alpha) u(\alpha) u'(\alpha) u'(\alpha) = E_\alpha$ parce que les $u(\alpha)$ et les $u'(\alpha)$ valent ± 1 ; et φ est bien involutif.

Si f est la rotation t, on a

$$\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}(E_\alpha) = u(\alpha) u'(s(\alpha)) u(t(\alpha)) u'(t(s(\alpha))) E_\alpha = E_\alpha$$

d'après les propriétés des $u(\alpha)$ et $u'(\alpha)$ établies ci-dessus. Donc l'automorphisme φ est encore involutif.

f. Les conditions du lemme 11.1 sont donc remplies : $\varphi = \sigma\sigma'$ est un automorphisme involutif de l'algèbre simple compacte $\mathfrak{g}_u$, qui induit l'identité sur $\mathfrak{g}_1$. Donc on a : soit $\varphi = \tau$, soit φ est l'identité. Si φ est l'identité, c'est que $\sigma = \sigma'$ et les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont isomorphes ; si $\varphi = \tau$, c'est que $\sigma' = \sigma\tau$, et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ est l'E. L. S. associé de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; ce qui achève la démonstration du lemme.

Conclusion. — Les lemmes 15.1 et 15.2 résolvent complètement le problème posé. Ils entraînent que :

SCOLIE. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle, simple et non pseudo-complexe, et* *dont les sous-algèbres compactes maximales ont la structure de l'algèbre* $\mathfrak{g}_1$. *Les classes d'équivalence* $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ *d'E. L. S. de* $\mathfrak{g}_1$ — *pour la relation d'équivalence « être ext-isomorphes pour un automorphisme de* $\mathfrak{g}_1$ *prolongeable en un automorphisme de* $\mathfrak{g}$ » — *et qui sont telles que* $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ *est l'E. L. S. compact maximal d'au moins un E. L. S. de* $\mathfrak{g}$, *sont en correspondance biunivoque avec les couples* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}')$ *de classes d'équivalence d'E. L. S. associés de* $\mathfrak{g}$ — *pour la relation d'équivalence « être ext-isomorphes ».*

16. Marche suivie. — Nous procéderons de la façon suivante; partant d'une algèbre de Lie réelle, simple $\mathfrak{g}$, nous déterminerons d'abord toutes les classes $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ d'E. L. S. isomorphes de la structure $\mathfrak{g}_1$ des sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}$. Ceci se fait en utilisant les résultats de [11] qui fournissent toutes les classes d'E. L. S. compacts. Il faudra ensuite ne conserver que les $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ qui sont prolongeables à $\mathfrak{g}$. N'ayant pas de critère général pour cela, nous utiliserons des conditions nécessaires, données ci-dessous dans la proposition 16.1. Après avoir éliminé certains cas par des méthodes particulières, il ne restera que des E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ que nous pourrons prolonger effectivement.

Dans le cas de structures compactes maximales $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ non isomorphes, mais seulement ext-isomorphes, on vérifiera dans tous les cas que les espaces symétriques correspondants sont toujours isomorphes, pour tous les groupes G d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$.

Proposition 16.1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une structure d'algèbre de Lie réelle, simple et* $\mathfrak{g}_u$ *sa structure compacte; soit* $\mathfrak{g}_1$ *la structure de ses sous-algèbres compactes maximales. Soit* $\mathfrak{g}_{11}$ *une structure d'*$\star$*-algèbre de* $\mathfrak{g}_1$*; pour que* $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ *soit l'E. L. S. compact maximal d'un E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$, *il faut que :*

a. il existe deux structures d'$\star$*-algèbres de* $\mathfrak{g}_u$ *(éventuellement identiques) :* $\mathfrak{h}_u$ *et* h'_u, *qui soient telles que la structure* $\mathfrak{g}_{11}$ *soit une structure d'*$\star$*-algèbre de* $\mathfrak{h}_u$ *et de* $\mathfrak{h}'_u$*;*

b. on ait la relation de dimension

$$\dim \mathfrak{h}_u + \dim \mathfrak{h}'_u = \dim \mathfrak{g}_u - \dim \mathfrak{g}_1 + 2 \dim \mathfrak{g}_{11}. \tag{16.1}$$

Ces conditions nécessaires proviennent de ce qui a été dit au n° 12 : $\mathfrak{h}_u$(resp. $\mathfrak{h}'_u$) est la forme compacte de l'algèbre d'isotropie de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$(resp. E.L.S. associé $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$); et l'on a vu que $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{-11}$ et $\mathfrak{h}'_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{-1-1}$. La formule (16.1) ci-dessus est alors une conséquence directe de la formule (12.1).

17. Algèbres réelles simples pseudo-complexes. — Un cas que l'on peut traiter à part est celui de ce que nous appellerons une *algèbre réelle simple pseudo-complexe* : c'est-à-dire que cette algèbre réelle $\hat{\mathfrak{g}}$ n'est autre qu'une algèbre de Lie simple complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$, considérée comme algèbre réelle de dimension double : $\dim_{\mathrm{R}} \hat{\mathfrak{g}} = 2 \dim_{\mathrm{C}} \tilde{\mathfrak{g}}$. Dans ce cas, si l'on note $\mathfrak{g}_u$ la forme compacte de $\tilde{\mathfrak{g}}$, la forme

compacte de $\hat{\mathfrak{g}}$ est la somme directe $\mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{g}_u$; la forme réelle $\hat{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{g}_u$ étant définie par l'automorphisme involutif τ qui échange les deux $\mathfrak{g}_u$: $\tau(X, Y) = (Y, X)$. La sous-algèbre compacte maximale correspondante de $\hat{\mathfrak{g}}$ est donc isomorphe à $\mathfrak{g}_u$. Il est clair que tout automorphisme (involutif) de cette sous-algèbre compacte maximale se prolonge en un automorphisme de toute la somme directe $\mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{g}_u$; car si φ est cet automorphisme, on posera $\sigma(X, Y) = (\varphi(X), \varphi(Y))$. On précise facilement les E. L. S. correspondants et leurs *associés*; pour cela, appelons $\mathfrak{k}_i (i = 1, \ldots, p)$ les différentes structures non isomorphes d'$\star$-algèbre de l'algèbre compacte simple, $\mathfrak{g}_i (i = 1, \ldots, p)$ les formes réelles de $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui leur correspondent par l'intermédiaire des $\star$-automorphismes $\varphi_i (i = 1, \ldots, p)$.

Premier cas. — L'automorphisme involutif est $\sigma_i(X, Y) = (\varphi_i(X), \varphi_i(Y))$. Dans ce cas, l'algèbre d'isotropie est, dans $\mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{g}_u$, la somme directe $\mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{k}_i$. L'algèbre d'isotropie de $\hat{\mathfrak{g}}$ s'obtient en prenant la forme réelle de $\mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{k}_i$ définie par l'automorphisme involutif que τ induit sur $\mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{k}_i$; cet automorphisme échange les deux $\mathfrak{k}_i$, et définit donc l'algèbre réelle pseudo-complexe $\hat{\mathfrak{k}}_i$ de l'algèbre $\tilde{\mathfrak{k}}$ complexe, complexifiée de $\mathfrak{k}_i$. On obtient donc l'E. L. S. $\hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i$; un tel E. L. S. sera appelé *pseudo-complexe*.

Précisons, pour cet E. L. S., la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$. L'algèbre compacte maximale de $\hat{\mathfrak{g}}$, de structure $\mathfrak{g}_u$, est, dans $\mathfrak{g}_u \oplus \mathfrak{g}_u$, l'ensemble des (X, X), où X parcourt $\mathfrak{g}_u$; de même, le sous-espace $\mathfrak{m}_u$ de la décomposition canonique est l'ensemble des $(X, -X)$. Les quatre sous-espaces $\mathfrak{g}_{11}$, $\mathfrak{g}_{1-1}$, $\mathfrak{g}_{-11}$, $\mathfrak{g}_{-1-1}$ de la formule (12.1) sont donc :

$$(17.1) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \mathfrak{g}_{11} : & \text{l'ensemble des } (K, \ K), & \mathfrak{g}_{1-1} : & \text{l'ensemble des } (M, \ M), \\ \mathfrak{g}_{-11} : & \text{l'ensemble des } (K, -K), & \mathfrak{g}_{-1-1} : & \text{l'ensemble des } (M, -M); \end{array} \right.$$

où K parcourt l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{k}_i$ et M le sous-espace $\mathfrak{m}_i$ de la décomposition canonique $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{m}_i$. Les matrices définissant la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{k}_i), \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_i)$ peuvent donc s'écrire, pour la décomposition de $\mathfrak{m}_u = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_i$ en $\mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-1-1}$:

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix},$$

où A est la matrice de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_i), \mathfrak{m}_i)$. Comme on le verra au n° 43, on en déduit que la représentation $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{k}}_i), \mathfrak{m})$ de l'E. L. S. $\hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i$ est représentée par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}.$$

Cette représentation est toujours de 2ᵉ classe (*voir* n° 44); donc proposition 44.1) l'E. L. S. correspondant est toujours C-symétrique. Étudions son irréductibilité : la représentation réelle $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{k}}_i), \mathfrak{m})$ sera irréductible (resp. réductible) si la représentation complexe $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{k}}_i)_C, \mathfrak{n}_C)$ qu'elle définit est irréductible (resp. réductible). La forme de la matrice ci-dessus montre que cette représentation complexe est définie par les matrices $A+\sqrt{-1}\,.\,A=(1+\sqrt{-1})A$; cette représentation est donc de même nature que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_i)_c, (\mathfrak{m}_i)_c)$; cette dernière est irréductible (resp. réductible) si la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_i), \mathfrak{m}_i)$ est de 1^{re} classe (resp. 2^{e} classe), ou, puisqu'il s'agit de l'E.L.S. *compact* $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$, si cet E. L. S. est non kählérien (resp. kählérien).

Précisons dès maintenant, à l'aide de la proposition 49.1, que l'E. L. S. $\hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i$ est semi-kählérien si et seulement si l'algèbre d'isotropie $\hat{\mathfrak{k}}_i$ contient le T, c'est-à-dire si $\mathfrak{k}_i$ contient T, donc si l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$ est kählérien.

Deuxième cas. — L'automorphisme involutif est $\tau\sigma_i$. C'est le cas de l'E. L. S. *associé* de l'E. L. S. précédent; l'algèbre d'isotropie est $\mathfrak{h}'=\mathfrak{g}_{11}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1}$ et le sous-espace $\mathfrak{m}$ de la décomposition canonique est $\mathfrak{m}'=\mathfrak{g}_{1-1}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11}$. D'après les formules (17.1) ci-dessus, l'algèbre d'isotropie est donc isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{k}_i+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{m}_i$, c'est-à-dire à la forme réelle $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{g}$. L'E. L. S. cherché est donc $\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_i$. Les formules (17.1) permettent de déterminer la représentation $(\mathrm{ad}(\hat{\mathfrak{g}}), \mathfrak{m}')$: c'est la représentation adjointe $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_i), \mathfrak{g}_i)$: elle est donc irréductible, parce que $\mathfrak{g}_i$ est *simple* (*voir* n° 9) et n'est jamais de 2^{e} classe, parce que la représentation complexifiée deux fois : $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{g}}), \tilde{\mathfrak{g}})$ est encore irréductible, puisque l'algèbre complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$ est *simple*; donc, proposition 44.1, cet E. L. S. n'est jamais C-symétrique (pour ce qui concerne la classe d'une représentation réelle, *voir* n° 44).

En conclusion des deux cas ci-dessus :

Pour une algèbre réelle simple pseudo-complexe $\hat{\mathfrak{g}}$, *les seuls E. L. S. possibles sont les suivants :*

a. l'E. L. S. $\hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i(i=1, \ldots, p)$, *qui est toujours* C-*symétrique; il est irréductible et non semi-kählérien si l'E. L. S. compact* $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$ *n'est pas kählérien; il est réductible et semi-kählérien si* $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$ *est kählérien;*

b. l'E. L. S. $\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_i(i=1, \ldots, p)$ *qui est toujours irréductible mais n'est jamais* C-*symétrique.*

Notations. — Pour les algèbres simples pseudo-complexes, nous emploierons les notations suivantes : pour les structures classiques, ce seront celles du n° 20 : $\mathbf{SL}(n, C)$; $\mathbf{SO}(n, C)$; $\mathbf{Sp}(n, C)$. Pour les structures exceptionnelles, on désignera l'algèbre pseudo-complexe de la structure compacte $\mathbf{G}_2$ (resp. $\mathbf{F}_4$; $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$; $\mathbf{E}_8$) par $\mathbf{G}_2^C$ (resp. $\mathbf{F}_4^C$; $\mathbf{E}_6^C$; $\mathbf{E}_7^C$; $\mathbf{E}_8^C$).

18. E. L. S. DUAUX. — Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ un E. L. S. de l'algèbre semi-simple réelle $\mathfrak{g}$. On a vu au n° 12 que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ définit un couple (τ, σ) d'automorphismes involutifs, commutant, de la forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ l'E. L. S. compact maximal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Inversons les rôles de τ et σ : l'automorphisme σ de $\mathfrak{g}_u$, étant

involutif, définit une forme réelle $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}_u$ (en général non isomorphe à $\mathfrak{g}$), dont une algèbre compacte maximale est $\mathfrak{h}_u$, la forme compacte de $\mathfrak{h}$. L'automorphisme involutif τ, commutant avec l'$\star$-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$ qui définit la forme réelle $\mathfrak{g}'$, définit donc, d'après la proposition 10.1 un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}'$, c'est-à-dire un E. L. S. de $\mathfrak{g}'$.

Cet E. L. S. sera appelé l'E. L. S. dual de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

L'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}'$ de cet E. L. S. $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'$ se détermine ainsi : c'est la forme réelle de la forme compacte $\mathfrak{g}_1$, qui est déterminée par l'$\star$-automorphisme que σ induit sur $\mathfrak{g}_1$. Cette algèbre $\mathfrak{h}'$ est donc, pour sa structure, la forme réelle de $\mathfrak{g}_1$ dont une sous-algèbre compacte maximale est $\mathfrak{g}_{11}$.

19. Forme normale d'un E. L. S. compact. — Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\tilde{\mathfrak{c}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\{E_\alpha\} \cup \{H'_\alpha = -[E_\alpha, E_{-\alpha}]\}$ (où α parcourt le système Σ des racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$ pour la sous-algèbre de Cartan $\tilde{\mathfrak{c}}$) une base de Weyl de $\tilde{\mathfrak{g}}$. La collection $\{E_\alpha\} \cup \{H'_\alpha\}$ engendre, sur le corps des réels, un espace vectoriel qui est une algèbre de Lie pour le crochet induit par celui de $\tilde{\mathfrak{g}}$; cette algèbre de Lie est évidemment une forme réelle de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Quelles que soient la sous-algèbre de Cartan et la base de Weyl considérées, toutes les algèbres semi-simples réelles ainsi obtenues sont isomorphes entre elles. *On notera $\mathfrak{g}_n$ la structure d'une telle forme réelle de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et on l'appellera la forme normale de $\tilde{\mathfrak{g}}$, ou de sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$.* (Pour tout ceci, *voir* [25], exposé 11, p. 11 ; la forme normale est appelée dans [26], p. 31 : « équivalent réel de $\mathfrak{g}$ ».)

Soit maintenant un E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$, défini par l'$\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}_u$. D'après la proposition 14.2, on peut supposer que, pour une base de Weyl donnée de $\tilde{\mathfrak{g}}$, l'automorphisme τ est un G-automorphisme de $\mathfrak{g}_u$, dont le complexifié est défini par

$$\tilde{\tau}(E_\alpha) = \nu(\alpha)\, E_{t(\alpha)}, \qquad \text{avec} \quad \nu(\alpha) = \nu(-\alpha) = \nu(t(\alpha)) = \pm 1.$$

La forme normale $\mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}_u$ peut être considérée comme engendrée, en tant qu'espace vectoriel sur R, par les E_α et les $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$, où α parcourt le système Σ des racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$. On voit donc que τ détermine un automorphisme involutif τ_n de $\mathfrak{g}_n$, défini par $\tau_n(E_\alpha) = \nu(\alpha) E_\alpha$. Ainsi :

A tout E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$, on peut associer un E. L. S. $\mathfrak{g}_n/\mathfrak{h}$ de la forme normale $\mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}_u$. Cet E. L. S. sera appelé la forme normale de $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$.

Déterminons maintenant l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ de la forme normale $\mathfrak{g}_n/\mathfrak{h}$ de l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$. Donnons d'abord une définition. Puisqu'elle est compacte, l'$\star$-algèbre $\mathfrak{h}_u$ est somme directe de son algèbre dérivée $\mathfrak{h}_u^0$, qui est semi-simple, et de son centre $\mathfrak{z}$: $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}_u^0 + \mathfrak{z}$. L'algèbre $\mathfrak{h}_u^0$, étant semi-simple, possède une forme normale $\mathfrak{h}_n^0$. Par définition, la forme normale de $\mathfrak{h}_u$ sera la somme directe $\mathfrak{h}_n$ de $\mathfrak{h}_n^0$ et de $\mathfrak{z}$: $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{h}_n^0 + \mathfrak{z}$. (Dans le chapitre suivant et dans le cas particulier où le centre $\mathfrak{z}$ est de dimension 1, on le désignera par $\mathbf{T}$ dans la forme compacte et par $\mathbf{R}$ dans la forme normale; ce qui est justifié parce que le *groupe* d'isotropie de l'espace symétrique compact comprend le *tore* $\mathbf{T}$, à une dimension, et que le groupe d'isotropie de l'espace symétrique normal comprendra le *groupe* $\mathbf{R}$, additif, des nombres réels.)

PROPOSITION 19.1. — *L'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ de la forme normale $\mathfrak{g}_n/\mathfrak{h}$ de l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ n'est autre que la forme normale $\mathfrak{h}_n$ de $\mathfrak{h}_u$. L'E. L. S. forme normale de $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ est donc $\mathfrak{g}_n/\mathfrak{h}_n$.*

En effet, l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}_u^0$ a pour complexifiée la sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$, qui est engendrée, en tant qu'espace vectoriel sur C, par les éléments : $E_\alpha + \nu(\alpha) E_{t(\alpha)}$ et leurs crochets ([22], p. 116, lemme 8). L'algèbre à déterminer $\mathfrak{h}$ est donc engendrée, en tant qu'espace vectoriel sur R, par les $(E_\alpha + \nu(\alpha) E_{t(\alpha)})$ et leurs crochets, auxquels il faut ajouter le centre $\mathfrak{z}$. D'après le lemme 8 de [22], p. 116, les $(E_\alpha + \nu(\alpha) E_{t(\alpha)})$ et les crochets $[E_\alpha + \nu(\alpha) E_{t(\alpha)}, E_{-\alpha} + \nu(-\alpha) E_{t(-\alpha)}]$, constituent une base de Weyl de $\tilde{\mathfrak{h}}^0$. Ce qui entraîne que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n^0 + \mathfrak{z}$, donc que $\mathfrak{h}$ est la forme normale de $\mathfrak{h}_u$.

CHAPITRE III.

CLASSIFICATION DES E. L. S. DANS LE CAS SIMPLE.

20. NOTATIONS. — Dans tout ce chapitre, nous ferons les deux conventions suivantes :

— nous désignerons une structure d'algèbre de Lie simple réelle par le groupe de Lie simple réel qui lui est généralement associé (et dont, évidemment, l'algèbre de Lie est l'algèbre considérée);

— aucune confusion n'étant possible, nous désignerons par le signe + seulement, les sommes directes d'algèbres de Lie.

Les notations utilisées ici pour les groupes de Lie sont dérivées de celles de Chevalley [14]. Voir aussi [3]. Dans le tableau I du n° 21, nous indiquerons la notation correspondante de Tits ([26], p. 245-248).

GL(n, C) [resp. **GL**(n, R)] : groupe de toutes les matrices carrées d'ordre n, de déterminant $\neq 0$, complexes (resp. réelles);

SL(n, C) [resp. **SL**(n, R)] : sous-groupe de **GL**(n, C) [resp. **GL**(n, R)] formé des matrices de déterminant égal à 1;

$\mathbf{SO}^i(n)$: sous-groupe de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$ formé des matrices laissant invariante la forme quadratique $-\sum_{p=1}^{i} x_p^2 + \sum_{q=i+1}^{n} x_q^2$ (où $\{x_1, \ldots, x_n\}$ désigne une base de R^n).

En particulier, $\mathbf{SO}^0(n)$ n'est autre que le groupe classique compact $\mathbf{SO}(n)$;

$\mathbf{U}^i(n)$ [resp. $\mathbf{SU}^i(n)$] : sous-groupe de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{C})$ [resp. $\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$] formé des matrices laissant invariante la forme d'Hermite : $-\sum_{p=1}^{i} z_p \bar{z}_p + \sum_{q=i+1}^{n} z_q \bar{z}_q$ (où $\{z_1, \ldots, z_n\}$ désigne une base de C^n). En particulier, $\mathbf{U}^0(n)$ [resp. $\mathbf{SU}^0(n)$] n'est autre que le groupe classique compact $\mathbf{U}(n)$ [resp. $\mathbf{SU}(n)$];

$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$ [resp. $\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$] : sous-groupe de $\mathbf{GL}(2n, \mathrm{C})$ [resp. $\mathbf{GL}(2n, \mathrm{R})$] formé des matrices laissant invariantes la forme extérieure $\sum_{p=1}^{n} z_p \wedge z_{p'}$ $\left(\text{resp. } \sum_{p=1}^{n} x_p \wedge x_{p'}\right)$, où $\{z_1, \ldots, z_n, z_{1'}, \ldots, z_{n'}\}$ (resp. $\{x_1, \ldots, x_n, x_{1'}, \ldots, x_{n'}\}$) désigne une base de C^{2n} (resp. R^{2n}).

$\mathbf{Sp}^i(n)$: sous-groupe de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{C})$ formé des matrices laissant invariantes simultanément :

la forme d'Hermite : $-\sum_{p=1}^{i} (z_p \bar{z}_p + z_{p'} \bar{z}_{p'}) + \sum_{q=i+1}^{n} (z_q \bar{z}_q + z_{q'} \bar{z}_{q'})$

et la forme extérieure : $\sum_{p=1}^{n} z_p \wedge z_{p'}$

(où $\{z_1, \ldots, z_n, z_{1'}, \ldots, z_{n'}\}$ désigne une base de C^{2n}). En particulier, $\mathbf{Sp}^0(n)$ n'est autre que le groupe classique compact $\mathbf{Sp}(n)$.

$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$: sous-groupe de $\mathbf{GL}(n, \mathrm{C})$ formé des matrices laissant invariante la forme quadratique $\sum_{p=1}^{n} z_p^2$ (où $\{z_1, \ldots, z_n\}$ désigne une base de C^n).

$\mathbf{SU}^\star(n)$: sous-groupe de $\mathbf{GL}(2n, \mathrm{C})$ formé des matrices laissant invariante l'application $z_p \to \bar{z}_{p'}$ $(p = 1, \ldots, n)$ (où l'on a désigné par $\{z_1, \ldots, z_n, z_{1'}, \ldots, z_{n'}\}$ une base de C^{2n}).

$\mathbf{SO}^\star(2n)$ sous-groupe de $\mathbf{GL}(2n, \mathrm{C})$ formé des matrices laissant invariantes simultanément :

la forme quadratique : $\sum_{p=1}^{n} z_p z_{p'}$

et la forme d'Hermite : $\sum_{p=1}^{n} (z_p \bar{z}_p - z_{p'} \bar{z}_{p'})$.

Enfin, on désignera par $\mathbf{T}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et par $\mathbf{R}$ le groupe additif des nombres réels.

Pour les formes réelles des structures exceptionnelles, les notations seront dérivées de celles d'E. Cartan [11]. $\mathbf{E}_6^1$ désignera l'algèbre de Lie réelle correspondant à l'espace local symétrique proprement riemannien noté (E I) dans [11], p. 131 ; et de même :

$\mathbf{E}_6^2$ pour (E II),	$\mathbf{E}_6^3$ pour (E III),	$\mathbf{E}_6^4$ pour (E IV),
$\mathbf{E}_7^1$ pour (E V),	$\mathbf{E}_7^2$ pour (E VI),	$\mathbf{E}_7^3$ pour (E VII),
$\mathbf{E}_8^1$ pour (E VIII),	$\mathbf{E}_8^2$ pour (E IX),	
$\mathbf{F}_4^1$ pour (F I),	$\mathbf{F}_4^2$ pour (F II),	$\mathbf{G}_2^*$ pour (G).

Rappelons aussi, avec les conventions du n° 20, les isomorphismes d'*algèbre* de Lie :

$$\mathbf{R}=\mathbf{T}=\mathbf{SO}(2),\qquad \mathbf{SU}(2)=\mathbf{SO}(3)=\mathbf{Sp}(1),\qquad \mathbf{SO}(4)=\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2),$$
$$\mathbf{SO}(5)=\mathbf{Sp}(2),\qquad \mathbf{SO}(6)=\mathbf{SU}(4).$$

21. Tableau I. — Dans le tableau suivant, qu'on trouvera aussi dans Tits ([26], p. 245-248, tableau IV), nous donnons, sur une même ligne : la structure simple réelle considérée, sa forme compacte, la structure de ses sous-algèbres compactes maximales, la notation correspondante de Tits [26]. L'abréviation F. N. indiquera les formes réelles qui sont la forme normale (*voir* n° 19) de leur forme compacte.

Ce tableau fournit essentiellement : *a*. les diverses algèbres de Lie réelles simples ; *b*. les diverses structures d'★-algèbres des algèbres simples compactes.

De plus, ce tableau sera utile quand nous rechercherons, afin d'utiliser les conditions nécessaires de la proposition 16.1, quelles sont toutes les formes réelles admettant des sous-algèbres compactes maximales de structure donnée. Mentionnons enfin, dans le cas des structures exceptionnelles, que le *caractère* de la forme réelle est, dans la notation de Tits [26], l'indice qui figure entre parenthèses. La donnée de ce caractère est utile pour comparer les formes réelles, telles qu'elles sont données ici, avec celles déterminées dans [18].

Tableau I.

Forme réelle $\mathfrak{g}$.	Forme compacte $\mathfrak{g}_u$.	Sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$.	Notation de Tits.	Forme normale.
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SU}(n)$	$\mathbf{SO}(n)$	$\mathrm{A}_{(n-1)(r)}$	F. N.
$\mathbf{SU}^*(2n)$	$\mathbf{SU}(2n)$	$\mathbf{Sp}(n)$	$\mathrm{A}_{(2n-1)(q)}$	
$\mathbf{SU}^i(n)$	$\mathbf{SU}(n)$	$\mathbf{SU}(i)+\mathbf{SU}(n-i)\,\mathbf{T}$	$\mathrm{A}_{(n-1)(c,i-1)}$	
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SU}(n)+\mathbf{SU}(n)$	$\mathbf{SU}(n)$	A_{n-1}	
$\mathbf{SO}^*(2n)$	$\mathbf{SO}(2n)$	$\mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$	$\mathrm{D}_{n(q)}$	
$\mathbf{SO}^i(n)$	$\mathbf{SO}(n)$	$\mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)\,\mathbf{T}$	$\begin{cases}\mathrm{B}_{\left[\frac{n}{2}\right](r,i-1)} & \text{si } n \text{ impair}\\ \mathrm{D}_{\left[\frac{n}{2}\right](r,i-1)} & \text{si } n \text{ pair}\end{cases}$	F. N. pour $i=\left[\dfrac{n}{2}\right]$
$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}(n)+\mathbf{SO}(n)$	$\mathbf{SO}(n)$	$\begin{cases}\mathrm{B}_{\left[\frac{n}{2}\right]} & \text{si } n \text{ impair}\\ \mathrm{D}_{\left[\frac{n}{2}\right]} & \text{si } n \text{ pair}\end{cases}$	

Forme réelle $\mathfrak{g}$.	Forme compacte $\mathfrak{g}_u$.	Sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1$.	Notation de Tits.	Forme normale.
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$	$\mathrm{C}_{n(r)}$	F. N.
$\mathbf{Sp}^i(n)$	$\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{Sp}(i)+\mathbf{Sp}(n-i)$	$\mathrm{C}_{n(q.i)}$	
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}(n)+\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{Sp}(n)$	C_n	
$\mathbf{G}_2^*$	$\mathbf{G}_2$	$\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$	$\mathrm{G}_{2(2)}$	F. N.
$\mathbf{G}_2^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{G}_2+\mathbf{G}_2$	$\mathbf{G}_2$	G_2	
$\mathbf{F}_4^1$	$\mathbf{F}_4$	$\mathbf{Sp}(3)+\mathbf{SU}(2)$	$\mathrm{F}_{4(4)}$	F. N.
$\mathbf{F}_4^2$	$\mathbf{F}_4$	$\mathbf{SO}(9)$	$\mathrm{F}_{4(-20)}$	
$\mathbf{F}_4^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{F}_4+\mathbf{F}_4$	$\mathbf{F}_4$	F_4	
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{Sp}(4)$	$\mathrm{F}_{6(6)}$	F. N.
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{SU}(6)+\mathbf{SU}(2)$	$\mathrm{E}_{6(2)}$	
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$	$\mathrm{E}_{6(14)}$	
$\mathbf{E}_6^4$	$\mathbf{E}_6$	$\mathbf{F}_4$	$\mathrm{E}_{6(-26)}$	
$\mathbf{E}_6^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{E}_6+\mathbf{E}_6$	$\mathbf{E}_6$	E_6	
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{SU}(8)$	$\mathrm{E}_{7(7)}$	F. N.
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$	$\mathrm{E}_{7(-5)}$	
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{E}_7$	$\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$	$\mathrm{E}_{7(-25)}$	
$\mathbf{E}_7^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{E}_7+\mathbf{E}_7$	$\mathbf{E}_7$	E_7	
$\mathbf{E}_8^1$	$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{SO}(16)$	$\mathrm{E}_{8(8)}$	F. N.
$\mathbf{E}_8^2$	$\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$	$\mathrm{E}_{8(-24)}$	
$\mathbf{E}_8^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{E}_8+\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_8$	E_8	

22. Une convention. — Il s'agit ici d'un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, pour lequel l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ est simple et l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ contient un centre à une dimension : $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^0+\mathfrak{z}$; et l'on a supposé être dans le cas de la décomposition de la formule (12.1).

Pour noter le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{h}$, les conventions et les notations du n° 20 laissent le choix entre $\mathbf{T}$ et $\mathbf{R}$. Nous ferons la convention suivante :

on écrira $\mathfrak{z}=\mathbf{T}$ si $\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}_{11}$;
on écrira $\mathfrak{z}=\mathbf{R}$ si $\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}_{-11}$.

Cette convention se justifie ainsi : considérons l'espace symétrique du groupe *adjoint* G_a de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (*voir* n° 52). Un sous-groupe compact maximal de G_a est celui engendré, dans G_a, par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{11}+\mathfrak{g}_{1-1}$, et lorsque $\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}_{11}$, ce sous-groupe compact maximal K_a de G_a contient donc le *tore* $\mathbf{T}$. Puisque le groupe d'isotropie H_a est engendré par $g_{11}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11}$, ce groupe H_a contient donc le tore $\mathbf{T}$. Si, au contraire, $\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}_{-11}$, l'élément $\mathfrak{z}$ engendre dans G_a un sous-groupe à un paramètre isomorphe au *groupe* $\mathbf{R}$; donc, de même, le groupe d'isotropie H_a contient ce groupe $\mathbf{R}$,

On prendra garde, cependant, que dans le cas où $\mathfrak{z}\in\mathfrak{g}_{11}$, certains espaces symétriques G/H, dont l'E. L. S. est $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, peuvent être tels que H contienne le groupe $\mathbf{R}$ (et non le tore $\mathbf{T}$); ce sont ceux pour lesquels les sous-groupes compacts maximaux du groupe G ne contiennent plus le tore $\mathbf{T}$.

La convention ci-dessus est en accord avec celle faite au n° 19 pour noter la forme normale de l'algèbre de Lie abélienne à une dimension.

23. Isomorphismes entre ★-algèbres :

Théorème 23.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle semi-simple. Quels que soient les deux ★-automorphismes τ et τ' de $\mathfrak{g}$ la définissant à partir de sa forme compacte, il existe un automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{g}$ tel que $\tau' = \varphi\tau\varphi^{-1}$. En particulier, toutes les sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes par un automorphisme intérieur.*

Le théorème 23.1 est un cas particulier du théorème 51.1, appliqué au groupe adjoint G_a de la structure $\mathfrak{g}$.

Ce théorème est en défaut dans le cas des ★-algèbres des algèbres semi-simples compactes. On a le résultat plus précis suivant :

Théorème 23.2. — *Soit $\mathfrak{g}_u$ une algèbre de Lie réelle simple compacte. Soient τ et τ' deux automorphismes involutifs de $\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}'_1$ les sous-algèbres des points fixes de τ et τ' respectivement. Si les deux algèbres $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}'_1$ sont isomorphes, il existe toujours un automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{g}_u$ tel que $\tau' = \varphi\tau\varphi^{-1}$, à la seule exception suivante : l'algèbre $\mathfrak{g}_u$ a pour structure* $\mathbf{SO}(4n)$. *Dans ce cas, si $n > 2$, la seule exception est pour les algèbres $\mathfrak{g}_1$ de structure* $\mathbf{SU}(2n) + \mathbf{T}$ *et il n'y a que deux cas possibles : $\tau' = \alpha\tau\alpha^{-1}$, selon que α appartient à l'une ou l'autre des deux composantes connexes de* $\mathrm{Aut}(\mathbf{SO}(4n))$. *Pour* $\mathbf{SO}(8)$, *il n'y a qu'un type possible d'algèbre $\mathfrak{g}_1$ de structure* $\mathbf{SO}(4) + \mathbf{SO}(4)$ *et trois types possibles pour les algèbres $\mathfrak{g}_1$ de structure* : $\mathbf{SO}(7)$, $\mathbf{SO}(5) + \mathbf{SO}(3)$, $\mathbf{SO}(6) + \mathbf{SO}(2) = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{T}$.

Le théorème 23.2 est démontré dans l'ensemble de [12] (*voir* p. 467) pour les algèbres simples $\mathfrak{g}_u$ *classiques*. La technique de détermination des formes réelles simples utilisée dans Gantmacher ([17] et [18]), permet de démontrer facilement le théorème 23.2. Utilisant les notations de [18], p. 230, on voit que les deux G-automorphismes τ et τ', définis par les G-nombres $\lambda(\tau)$ et $\lambda(\tau')$, seront reliés par l'automorphisme φ si φ transforme le vecteur $\lambda(\tau)$ (de la sous-algèbre de Cartan invariante par τ et τ') en le vecteur $\lambda(\tau')$. Si l'on suit la détermination des formes réelles, c'est-à-dire des automorphismes involutifs des formes compactes simples, on voit que, pour des G-automorphismes donnant naissance à des sous-algèbres de points fixes isomorphes, il existe toujours un automorphisme intérieur transformant $\lambda(\tau)$ en $\lambda(\tau')$, sauf pour $\mathfrak{g}_u = \mathbf{SO}(2m)$ et des G-nombres de la forme $\frac{1}{2}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, où les $\varepsilon_i (i = 1, \ldots, m)$ valent ± 1. Changer le signe de l'un seulement des ε_i correspond à un automorphisme *non intérieur* de $\mathbf{SO}(2m)$, tandis que changer le signe de deux des ε_i, soient ε_p et ε_q, correspond à l'automorphisme intérieur défini, par rapport à la symétrie et à l'hyperplan orthogonal à la racine $(\delta_p + \delta_q)$. Enfin, les G-nombres $-\lambda(\tau)$ définissent le même G-automorphisme que les G-nombres $\lambda(\tau)$. Si donc m est impair, on pourra passer, par un automorphisme intérieur, d'un $\lambda(\tau)$ comprenant un nombre pair de ε_i égaux à 1, à un $\lambda(\tau')$ en comprenant un nombre impair ; cela est impossible si m est pair, c'est-à-dire pour les structures $\mathbf{SO}(4n)$ et les $\bigstar$-algèbres de structure $\mathbf{SU}(2n)+\mathbf{T}$. Quant au cas de $\mathbf{SO}(8)$, on procède de même. On verra une conséquence importante de cette particularité dans le n° 48.

24. $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$. — La structure des sous-algèbres compactes maximales est (tableau I, n° 21) $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SO}(n)$. Tous les $\bigstar$-automorphismes de $\mathfrak{g}_1$ sont prolongeables à $\mathfrak{g} = \mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$; en effet, les seuls cas à considérer sont (tableau I, n° 21) :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(i) + \mathbf{SO}(n-i)$. — Ce cas s'obtient en considérant l'E. L. S. forme *normale* de l'E. L. S. compact $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(i)+\mathbf{SU}(n-i)+\mathbf{T}$, c'est-à-dire l'E. L. S.

$$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}(i, \mathrm{R})+\mathbf{SL}(n-i)+\mathbf{R}$$

puisque la structure compacte maximale de $\mathbf{SL}(i, \mathrm{R})+\mathbf{SL}(n-i, \mathrm{R})+\mathbf{R}$ est bien $\mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)$ (*voir* n° 19). D'après le scolie du n° 15, il reste seulement, pour épuiser le cas où $\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)$, à déterminer l'E. L. S. *associé* de celui ci-dessus. Pour cela, on utilise la proposition 16.1 : l'algèbre d'isotropie cherchée $\mathfrak{h}'$ doit avoir $\mathfrak{g}_{11}$ comme structure compacte maximale et, d'autre part, sa dimension est fournie par la formule (16.1) ; on trouve $\dim \mathfrak{h}' = \frac{n(n-1)}{2}$, et l'examen du tableau I montre alors que $\mathfrak{h}'$ ne peut être que $\mathbf{SO}^i(n)$, d'où l'E. L. S. cherché :

$$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SO}^i(n).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)+\mathbf{T}$ (lorsque n est pair). — Ce cas est celui que fournit la forme *normale* de $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{R}\right)$$

$\left[\text{puisque la structure compacte maximale de } \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{R}\right) \text{ est bien } \mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)+\mathbf{T}\right]$. On détermine l'E. L. S. *associé* par la même méthode que ci-dessus. On trouve $\dim \mathfrak{h}' = \frac{n^2}{2} - 1$ et l'algèbre compacte maximale de $\mathfrak{h}'$ doit être $\mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)+\mathbf{T}$; le tableau I montre alors que $\mathfrak{h}' = \mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right)+\mathbf{T}$, d'où l'E. L. S. cherché :

$$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right)+\mathbf{T}.$$

Mais, dans ce cas, on a vu au n° 23, théorème 23.2, qu'il existe deux structures *non isomorphes* (seulement *ext-isomorphes*) d'E. L. S. $\mathbf{SO}(2m)/\mathbf{SU}(m)+\mathbf{T}$, lorsque m est pair; désignons par $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ et $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}'_{11}$ deux représentants de ces structures non isomorphes; et soient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ deux E. L. S. de $\mathfrak{g} = \mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$, définis par les automorphismes involutifs σ et σ' de $\mathbf{SU}(n)$, commutant avec l'$\bigstar$-automorphisme τ de $\mathbf{SU}(n)$ qui définit la forme réelle $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$; ces E. L. S. étant de plus tels que leurs E. L. S. compacts maximaux soient $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ et $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}'_{11}$. On vient de voir ci-dessus que les formes compactes de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont de structure $\mathbf{SU}(2m)/\mathbf{Sp}(m)$. Le théorème 23.2 affirme qu'il existe un automorphisme intérieur φ de $\mathbf{SU}(n)$ tel que $\sigma' = \sigma\varphi\sigma^{-1}$. Le fait que σ et σ' commutent avec τ et que $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$, impliquent (démonstration du lemme 15.1) que $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$, où α est automorphisme intérieur de $\mathbf{SU}(n)$ *commutant avec* τ; d'après la proposition 10.1, les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ sont donc *isomorphes*. Il n'y a donc pas à distinguer les E. L. S. compacts maximaux de structure $\mathbf{SO}(2m)/\mathbf{SU}(m) + \mathbf{T}$.

25. $\mathbf{SU}^\star(2n)$. — La structure compacte maximale est $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{Sp}(n)$. Tous les $\bigstar$-automorphismes de $\mathfrak{g}_1$ sont prolongeables; en effet, les cas possibles sont :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(i) + \mathbf{Sp}(n-i)$. — Exhibons deux G-automorphismes, de la forme compacte $\mathbf{SU}(2n)$, qui commutent. Le premier, τ, *extérieur*, sera défini par la rotation particulière $\delta_p \to -\delta_{p'}$ [où $p' = p+1$ si p est impair et $p' = p-1$ si p est pair, et où $\{\delta_1, \ldots, \delta_{2n}\}$ désigne une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SU}(2n)$] et par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = (0, \ldots, 0).$$

D'après Gantmacher [18], p. 244, l'$\bigstar$-automorphisme τ a pour algèbre d'isotropie $\mathbf{Sp}(n)$ et correspond à la forme réelle $\mathbf{SU}^\star(2n)$. Le deuxième, σ intérieur, sera défini par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{2i}, \underbrace{1, -1, \ldots, 1, -1}_{2n-2i}).$$

L'algèbre d'isotropie de l'$\bigstar$-automorphisme σ est ([18], p. 232)

$$\mathbf{SU}(2i) + \mathbf{SU}(2n-2i) + \mathrm{T}.$$

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_{11}$ des points fixes à la fois pour σ et τ est bien $\mathbf{Sp}(i) + \mathbf{Sp}(n-i)$: on le voit en la regardant comme l'algèbre d'isotropie de l'automorphisme induit par τ sur $\mathbf{SU}(2i) + \mathbf{SU}(2n-2i) + \mathrm{T}$; sur $\mathbf{SU}(2i)$, ou $\mathbf{SU}(2n-2i)$, l'automorphisme τ induit sur un automorphisme défini par la rotation particulière $\delta_p \to -\delta_{p'}$ [l'indice p allant de 1 à $2i$ pour $\mathbf{SU}(2i)$ et de $2i+1$ à $2n$ pour $\mathbf{SU}(2n-2i)$] et des G-nombres tous nuls; on obtient donc bien

$$\mathbf{Sp}(i) + \mathbf{Sp}(n-i),$$

à condition de montrer que σ induit le tore $\mathbf{T}$ l'automorphisme $\mathrm{X} \to -\mathrm{X}$; ce qui provient de ce que $\mathbf{T}$ est engendré par l'élément

$$\mathrm{X} = (\delta_1 + \ldots + \delta_{2i}) = -(\delta_{2i+1} + \ldots + \delta_{2n}),$$

sur lequel la rotation particulière ci-dessus induit bien l'automorphisme $X \to -X$. Il reste enfin à vérifier que σ et τ commutent, ce qu'on déduit de ce que

$$\gamma(\sigma) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, -1)$$

est invariant par la rotation particulière ci-dessus (d'après le n° 14); ou encore de ce que l'automorphisme τ défini ci-dessus laisse invariante globalement la sous-algèbre d'isotropie de σ.

L'algèbre d'isotropie de l'E. L. S. correspondant aux deux automorphismes commutant σ et τ se détermine comme étant une algèbre dont la forme compacte est $\mathbf{SU}(2i)+\mathbf{SU}(2n-2i)+\mathbf{T}$ et la structure compacte maximale $\mathbf{Sp}(i)+\mathbf{Sp}(n-i)$; c'est donc $\mathbf{SU}^\star(2i)+\mathbf{SU}^\star(2n-2i)+\mathbf{R}$, d'où l'E. L. S. cherché :

$$\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{SU}^\star(2i)+\mathbf{SU}^\star(2n-2i)+\mathbf{R}.$$

Détermination de l'E. L. S. *associé* comme ci-dessus; on trouve

$$\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{Sp}^i(n).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$. — Ce cas correspond à l'E. L. S. *dual* de l'E. L. S. déjà obtenu : $\mathbf{SL}(2n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$ (définition et construction de l'E. L. S. dual : n° 18). En effet, la forme compacte de $\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$ est $\mathbf{Sp}(n)$, qui est bien la structure compacte maximale de $\mathbf{SU}^\star(2n)$. L'algèbre d'isotropie de l'E. L. S. dual est la forme réelle de $\mathbf{SO}(2n)$, dont la structure compacte maximale est $\mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$; c'est donc $\mathbf{SO}^\star(2n)$, d'où l'E. L, S.

$$\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{SO}^\star(2n).$$

Détermination de l'E. L. S. associé comme ci-dessus :

$$\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})+\mathbf{T}.$$

26. $\mathbf{SU}^i(n)$. — Ici, $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(i)+\mathbf{SU}(n-i)+\mathbf{T}$. *A priori*, les diverses structures d'$\star$-algèbres de $\mathbf{SU}(i)+\mathbf{SU}(n-i)+\mathbf{T}$ sont fort nombreuses; on en élimine d'abord un certain nombre de la façon suivante :

a. Nous traiterons à part le « cas d'échange », c'est-à-dire le cas où l'$\star$-automorphisme considéré (à prolonger) de $\mathfrak{g}_1$ échange $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$, lorsque $i = n-i$. Lorsqu'on n'est pas dans ce cas, c'est donc que, mis à part le tore $\mathbf{T}$ dont on reparlera au *c*, l'automorphisme considéré est défini par deux $\star$-automorphismes de $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$, qu'on notera respectivement σ_i et σ_{n-i}. D'après la proposition 14.2, on peut supposer que σ_i et σ_{n-i} sont des G-automorphismes de $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$ respectivement, pour des sous-algèbres de Cartan qui soient celles, données, déterminées par une sous-algèbre de Cartan donnée de $\mathbf{SU}(n)$. Si l'on désigne par $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ une base orthonormée de cette sous-algèbre de Cartan, on peut donc supposer que σ_i et σ_{n-i}

induisent, sur les sous-algèbres de Cartan respectives de $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$, des rotations qui soient :

pour σ_i : soit l'identité, soit

$$\begin{gathered}\delta_1 \to -\delta_i,\\ \delta_2 \to -\delta_{i-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\end{gathered}$$

pour σ_{n-i} : soit l'identité, soit

$$\begin{gathered}\delta_{i+1} \to -\delta_n,\\ \delta_{i+2} \to -\delta_{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

(*voir*, par exemple, [17], p. 134),

Les deux seuls cas possibles sont : soit σ_i et σ_{n-i} sont tous deux intérieurs (les deux rotations sont l'identité), soit σ_i et σ_{n-i} sont tous deux extérieurs (les deux rotations sont celles ci-dessus). En effet, un automorphisme de $\mathfrak{g}_1$ qui ne serait pas de l'un de ces types induirait sur la sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SU}(n)$ considérée une rotation qui transformerait la racine de $\mathbf{SU}(n)$: $(\delta_1-\delta_{i+1})$ en $(\delta_1+\delta_n)$, qui n'est pas une racine de $\mathbf{SU}(n)$, ce qui est contradictoire avec le fait qu'un tel automorphisme est induit par un automorphisme de $\mathbf{SU}(n)$.

b. Dans le cas où σ_i et σ_{n-i} sont tous les deux extérieurs, on élimine encore les cas mixtes; par exemple le cas où σ_i aurait pour algèbre d'isotropie, dans $\mathbf{SU}(i)$, la sous-algèbre $\mathbf{SO}(i)$; et σ_{n-i}, dans $\mathbf{SU}(n-i)$, la sous-algèbre $\mathbf{Sp}\left(\frac{n-i}{2}\right)$ (si $n-i$ est pair). En effet, dans ce cas, les G-nombres de σ_{n-i} seraient ([18], p. 244) : $(0, \ldots, 0)$ et ceux de σ_i : $(0, 1, \ldots, 0, 1)$ si i est pair et $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ si i est impair. Dans les deux cas, la réunion des G-nombres ci-dessus ne peut convenir à un automorphisme de $\mathbf{SU}(n)$ ([18], p. 243-244).

c. Précisons maintenant ce qui se passe pour le tore $\mathbf{T}$. Ce dernier est engendré par l'élément X :

$$X = (\delta_1 + \ldots + \delta_i) = -(\delta_{i+1} + \ldots + \delta_n).$$

Dans le cas où σ_i et σ_{n-i} sont tous deux intérieurs, X est changé en X et le tore $\mathbf{T}$ est conservé; dans le cas où σ_i et σ_{n-i} sont tous deux extérieurs, X est changé en $-X$ et $\mathfrak{g}_{11}$ ne contient pas $\mathbf{T}$. Finalement, les seuls cas possibles sont [compte tenu des différentes structures d'$\star$-algèbres de $\mathbf{SU}(n)$, lisibles dans le tableau I] :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(k) + \mathbf{SU}(i-k) + \mathbf{SU}(h) + \mathbf{SU}(n-i-h) + \mathbf{T} + \mathbf{T} + \mathbf{T}$. — On obtient ce cas en prenant pour G-nombres de σ_i et de σ_{n-i} :

$$\begin{aligned}\gamma(\sigma_i) &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i-k}),\\ \gamma(\sigma_{n-i}) &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{h}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i-h}).\end{aligned}$$

Ces automorphismes sont induits sur $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$ par le G-automorphisme intérieur σ de $\mathbf{SU}(n)$ défini par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i-k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{h}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i-h})$$

qui commute certainement avec le G-automorphisme intérieur τ de $\mathbf{SU}(n)$ définissant la forme réelle $\mathbf{SU}^i(n)$ (nº 14) et dont les G-nombres sont

$$\gamma(\tau) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i}).$$

On obtient l'E. L. S.

$$\mathbf{SU}^i(n)/\mathbf{SU}^k(k+h) + \mathbf{SU}^{i-k}(n-k-h) + \mathbf{T}.$$

L'E. L. S. associé se détermine comme étant celui correspondant à l'automorphisme $\sigma\tau$, qui est encore un G-automorphisme intérieur défini par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma\tau) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i-k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{h}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i-h}).$$

L'E. L. S. correspondant est isomorphe au précédent, pour un changement convenable d'indices.

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(i) + \mathbf{SO}(n-i)$. — Cas du *dual* de l'E. L. S. déjà rencontré : $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}(i, \mathrm{R}) + \mathbf{SL}(n-i, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$. On obtient l'E. L. S.

$$\mathbf{SU}^i(n)/\mathbf{SO}^i(n).$$

L'E. L. S. *associé* est isomorphe : car en appliquant la proposition 16.1, on trouve $\dim \mathfrak{h}'_u = \frac{n(n-1)}{2}$, et il n'y a qu'une $\star$-algèbre de $\mathbf{SU}(n)$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, qui admette pour $\star$-algèbre $\mathbf{SO}(i) + \mathbf{SO}(n-i)$, c'est $\mathbf{SO}^i(n)$.

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}\left(\frac{i}{2}\right) + \mathbf{Sp}\left(\frac{n-i}{2}\right)$ (lorsque i et $n-i$ sont pairs). — On obtient ce cas comme E. L. S. *dual* de l'E. L. S. $\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{SU}^\star(2i) + \mathbf{SU}^\star(2n-2i) + \mathbf{R}$. On trouve

$$\mathbf{SU}^i(n)/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$$

et l'E. L. S. associé est isomorphe.

Cas d'échange. — L'automorphisme η de $\mathfrak{g}_1$ à prolonger échange $\mathbf{SU}(i)$ et $\mathbf{SU}(n-i)$; puisque $\mathrm{Aut}(\mathbf{SU}(i))$ n'a que deux composantes connexes, ce qui a été dit au nº 9 montre qu'il n'y a que deux cas possibles à étudier, pour obtenir toutes les classes d'E. L. S. isomorphes de $\mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i)$; soit η est défini par $\eta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, soit η est défini par $\eta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\alpha\mathrm{Y}, \alpha^{-1}\mathrm{X})$, où $\mathrm{X} \in \mathbf{SU}(i)$, $\mathrm{Y} \in \mathbf{SU}(n-i)$ et où α désigne un automorphisme non intérieur arbitraire de $\mathbf{SU}(i)$. Dans les deux cas, on peut préciser *a priori* ce qu'il advient du tore T;

on a vu, en effet, que **T** était engendré par l'élément

$$X = (\delta_1 + \ldots + \delta_i) = -(\delta_{i+1} + \ldots + \delta_n).$$

Et, dans le premier cas, l'automorphisme η induit la rotation $\delta_p \to \delta_{p+i} (p = 1, \ldots, i)$, donc X est changé en $-X$; l'algèbre $\mathfrak{g}_{11}$ a donc pour structure $\mathbf{SU}(i) = \mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)$. Dans le second cas, on peut supposer que η induit la rotation $\delta_p \to -\delta_{p+i} (p = 1, \ldots, i)$ et l'élément X est donc conservé : l'algèbre $\mathfrak{g}_{11}$ a pour structure $\mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathbf{T}$. Dans les deux cas, nous allons pouvoir prolonger η :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathbf{T}$. — Ce cas s'obtient avec l'E.L.S. *dual* de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right) + \mathbf{T}$. On trouve l'E. L. S.

$$\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{SO}^*(n)$$

pour l'E. L. S. associé se détermine comme ci-dessus :

$$\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{R}\right).$$

Ces deux espaces ne figuraient pas dans [2].

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)$. On exhibe un automorphisme convenable de $\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)$. On peut représenter $\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)$ par les matrices carrées d'ordre n pair.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

qui vérifient

$$A = -{}^t\bar{A}, \qquad D = -{}^t\bar{D}, \qquad B = {}^t\bar{C}.$$

L'automorphisme involutif de $\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)$ cherché est alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Il reste à trouver l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ de cet automorphisme. Cette algèbre est celle des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A = -{}^t\bar{A} \quad \text{et} \quad B = {}^t\bar{B}.$$

On définit une application de $\mathfrak{h}$ sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre $\frac{n}{2}$, qui est bijective et respecte les structures d'algèbres de Lie, en posant

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \to A + \sqrt{-1}.B.$$

L'algèbre $\mathfrak{h}$ est donc $\mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, C\right) + \mathbf{R}$ et son algèbre compacte maximale est bien $\mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)$. On obtient donc l'E. L. S.

$$\mathbf{SU}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, C\right) + \mathbf{R},$$

l'E. S. S. *associé* est isomorphe.

27. $\mathbf{SO}^{\star}(2n)$. — Ici, $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$. Précisons d'abord ce qu'il advient du tore $\mathbf{T}$, selon que l'automorphisme considéré η de $\mathfrak{g}_1$, à prolonger en un automorphisme σ de $\mathfrak{g}_u = \mathbf{SO}(2n)$ tel que $\eta = k(\sigma)$, est induit par un automorphisme intérieur ou extérieur de $\mathbf{SU}(n)$. D'après [18], p. 234, on peut supposer être dans la situation suivante : $\mathbf{SO}(2n)$ et $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$ ont une sous-algèbre de Cartan commune $\mathfrak{c}$, et pour cette sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$, les racines de $\mathbf{SO}(2n)$ sont les $\frac{\pm \delta_p \pm \delta_q}{2}$ (où $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ désigne une base orthonormée de $\mathfrak{c}$ et où, comme dans toute la suite de ce chapitre, lorsqu'il s'agira de racines, des indices seront différents s'ils sont représentés par des lettres différentes); et les racines de $\mathbf{SU}(n)$ sont les $\frac{\delta_p - \delta_q}{2}$, le tore $\mathbf{T}$ étant engendré par l'élément $X = (\delta_1 + \ldots + \delta_n)$. D'après la proposition 14.2, on peut supposer que η est un G-automorphisme pour la sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SU}(n)$: $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} \cap \mathbf{SU}(n)$, et que η induit sur $\mathfrak{c}'$ une rotation qui est : soit l'identité, soit celle définie par

$$(27.1) \qquad \delta_1 \to -\delta_2, \qquad \delta_3 \to -\delta_4, \qquad \ldots .$$

Dans le cas où cette rotation est l'identité, montrons qu'elle induit nécessairement l'identité sur le tore $\mathbf{T}$. En effet, puisque l'automorphisme η est prolongeable en un automorphisme σ de $\mathbf{SO}(2n)$, c'est que nécessairement la rotation induite par η sur $\mathfrak{c}$ transforme une racine de $\mathbf{SO}(2n)$ en une racine de $\mathbf{SO}(2n)$; prenons en particulier la racine $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ et décomposons-la suivant la décomposition de $\mathfrak{c}$ en $\mathfrak{c}' + \mathbf{T}$; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}X.$$

Supposons que la rotation de $\mathfrak{c}'$ soit l'identité et celle de $\mathbf{T}$ soit $X \to -X$. La racine considérée deviendrait alors

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n}, \frac{1}{2} - \frac{2}{n}, \ldots, -\frac{2}{n}\right)$$

qui ne peut être une racine de $\mathbf{SO}(2n)$ que si $n = 4$. Mais ce cas peut être éliminé, parce qu'alors on a l'isomorphisme $\mathbf{SO}^{\star}(8) = \mathbf{SO}^2(8)$ ([26], p. 254) et $\mathbf{SO}^2(8)$ sera étudiée parmi les formes réelles $\mathbf{SO}^i(n)$.

Montrons de même que si la rotation considérée de $\mathbf{SU}(n)$ est celle de la formule (27.1), on a nécessairement pour le tore l'automorphisme $X \to -X$. On procède comme ci-dessus en considérant la racine $\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$ et en supposant que l'on a $X \to -X$. La formule (27.1) et la décomposition de $\frac{\delta_1+\delta_2}{2}$ donnée ci-dessus montrent que, dans ce cas, cette racine serait transformée en

$$\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}, \frac{2}{n}-\frac{1}{2}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n}\right)$$

qui ne peut être racine de $\mathbf{SO}(2n)$ que si $n=4$. Il n'y a donc que les cas suivants à traiter :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$. — On l'obtient en prenant un couple (σ, τ) de G-automorphismes intérieurs définis par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \qquad \gamma(\sigma) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i}).$$

D'après [18], p. 234, l'algèbre d'isotropie de σ est $\mathbf{SO}(2i) + \mathbf{SO}(2n-2i)$ et celle de τ est $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$. Enfin, σ et τ commutent parce qu'intérieurs (n° 14) et les points fixes à la fois pour σ et τ forment visiblement une sous-algèbre de structure $\mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$, puisque les G-nombres du G-automorphisme intérieur que σ induit sur $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$ sont

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-i}).$$

L'algèbre d'isotropie de σ dans $\mathbf{SO}^*(2n)$ est donc une algèbre de forme compacte $\mathbf{SO}(2i) + \mathbf{SO}(2n-2i)$ et de structure compacte maximale $\mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$, c'est donc $\mathbf{SO}^*(2i) + \mathbf{SO}^*(2n-2i)$, d'où l'E. L. S.

$$\mathbf{SO}^*(2n)/\mathbf{SO}^*(2i) + \mathbf{SO}^*(2n-2i).$$

Détermination de l'E. L. S. associé par la proposition 16.1 :

$$\mathbf{SO}^*(2n)/\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(n)$. — C'est le cas de l'E. L. S. *dual* de $\mathbf{SO}^n(2n)/\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$ qu'on rencontrera dans le numéro suivant. En effet, la forme compacte de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$ est $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$, qui est la structure compacte maximale de $\mathbf{SO}^*(2n)$; et $\mathbf{SO}(n)$ est la structure maximale compacte de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$. L'algèbre d'isotropie de l'E. L. S. dual a pour forme compacte $\mathbf{SO}(n) + \mathbf{SO}(n)$ et pour structure compacte maximale $\mathbf{SO}(n)$; c'est donc $\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$,

$$\mathbf{SO}^*(2n)/\mathbf{SO}(n, \mathrm{C}).$$

Son *associé* lui est isomorphe.

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$ (n pair). — On exhibe deux automorphismes commutant (σ, τ)

convenables de la forme compacte $\mathbf{SO}(2n)$ de la façon suivante : on engendre $\mathbf{SO}(2n)$ par les matrices $E_{IJ}(I, J = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n)$, où E_{IJ} représente la matrice carrée d'ordre $2n$, symétrique gauche et dont tous les éléments sont nuls à l'exception du terme de la I$^{\text{ième}}$ ligne et de la J$^{\text{ième}}$ colonne (resp. J$^{\text{ième}}$ ligne, I$^{\text{ième}}$ colonne) qui vaut $+1$ (resp. -1). L'automorphisme involutif σ de $\mathbf{SO}(2n)$ défini par

$$\sigma(E_{IJ}) = \varepsilon(I)\,\varepsilon(J)\,E_{I'J'},$$

où $\varepsilon(I) = +1$ si $I = 1, \ldots, n$ et $\varepsilon(I) = -1$ si $I = n+1, \ldots, 2n$ et $I' = I + n$ si $I = 1, \ldots, n$ et $I' = I - n$ si $I = n+1, \ldots, 2n$. Les points fixes de cet automorphisme sont $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$.

Si maintenant $\mathbf{SO}(2n)$ est tel que n soit pair, on partagera les $2n$ indices ci-dessus en quatre morceaux, en posant $n = 2m$:

$$1, \quad \ldots, \quad m, \quad m+1, \quad \ldots, \quad 2m, \quad 2m+1, \quad \ldots, \quad 3m, \quad 3m+1, \quad \ldots, \quad 4m.$$

On prendra pour τ l'automorphisme défini par

$$\tau(E_{IJ}) = \eta(I)\,\eta(J)\,E_{\bar{I}\bar{J}},$$

où

$$\eta(I) = +1 \quad \text{et} \quad \bar{I} = I + m \quad \text{si} \quad I = 1, \ldots, m, \quad \text{ou} \quad 3m+1, \ldots, 3m$$

et

$$\eta(I) = -1 \quad \text{et} \quad \bar{I} = I - m \quad \text{si} \quad I = m+1, \ldots, 2m, \quad \text{ou} \quad 3m+1, \ldots, 4m.$$

Les automorphismes σ et τ commutent; pour les deux, la sous-algèbre des points fixes a pour structure $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$. Il faut montrer encore que les points fixes communs à σ et τ forment une algèbre $\mathfrak{g}'_{11}$ de structure $\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$; par exemple, la formule (16.1) montre que $\dim \mathfrak{g}_{11} = \frac{n(n+1)}{2}$; et $\mathfrak{g}'_{11}$ est une $\star$-algèbre de $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$; le tableau I montre que c'est nécessairement $\mathfrak{g}'_{11} = \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$. On obtient donc un E. L. S. dont l'algèbre d'isotropie a pour forme compacte $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$ et dont la structure compacte maximale est $\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$; c'est donc $\mathbf{SU}^\star(n) + \mathbf{R}$;

$$\mathbf{SO}^\star(2n)/\mathbf{SU}^\star(n) + \mathbf{R}.$$

Son E. L. S. *associé* lui est isomorphe.

28. $\mathbf{SO}^i(n)$. — Ici, $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SO}(i) + \mathbf{SO}(n-i)$. Éliminons d'abord les cas où $\mathfrak{g}_{11}$ serait de la forme $\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{i}{2}\right) + \mathbf{T} + \mathbf{SO}(h) + \mathbf{SO}(n-i-h)$. On est donc dans le cas où l'automorphisme η de $\mathfrak{g}_1$ s'écrit $\eta = \sigma_i + \sigma_{n-i}$, où σ_i (resp. σ_{n-i}) désigne un automorphisme de $\mathbf{SO}(i)$ [resp. $\mathbf{SO}(n-i)$]. Si l'on note $\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ $\left(\text{avec } k = \frac{i}{2}\right)$ une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}'$

de $\mathbf{SO}(i)$, les racines de $\mathbf{SO}(i)$ sont les $\delta_n \pm \delta_q$; d'après la proposition 14.2 et [18]. p. 234, on peut supposer que σ_i est le G-automorphisme intérieur de $\mathbf{SO}_i$ défini par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma_i) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Quant à σ_{n-i}, il faut distinguer deux cas : soit c'est un G-automorphisme intérieur défini par des G-nombres de la forme

$$\gamma(\sigma_{n-i}) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$$

pour une base orthonormée $\{\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m\}$ $\left(\text{avec } m = k + 1 + \left[\frac{n-k-i}{2}\right]\right)$ d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}''$ de $\mathbf{SO}(n-i)$; soit c'est le G-automorpbisme extérieur défini par la rotation particulière

$$\delta_p \to \delta_p \quad (p = k+1, \ldots, m-1) \qquad \text{et} \qquad \delta_m \to -\delta_m$$

et par des G-nombres de la forme

$$\gamma(\sigma_{n-i}) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1).$$

Dans les deux cas, si $\eta = k(\sigma)$, où σ est un automorphisme de $\mathbf{SO}(n)$, le G-automorphisme σ devrait être défini par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1\right),$$

ce qui est impossible ([18], p. 232-234 et 244-245). Il reste donc seulement à examiner les cas :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(k) + \mathbf{SO}(i-k) + \mathbf{SO}(h) + \mathbf{SO}(n-i-h)$. — Cas analogue à celui rencontré dans $\mathbf{SU}^i(n)$. On trouve les E. L. S.

$$\mathbf{SO}^i(n)/\mathbf{SO}^k(k+h) + \mathbf{SO}^{i-k}(n-k-h).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{i}{2}\right) + \mathbf{SU}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ (quand i et $n-i$ sont pairs). — C'est le cas du dual de $\mathbf{SO}^\star(n)/\mathbf{SO}^\star(i) + \mathbf{SO}^\star(n-i)$. On obtient (détermination comme dans les cas semblables d'E. L. S. duaux) :

$$\mathbf{SO}^i(n)/\mathbf{SU}^{\frac{i}{2}}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathbf{T}$$

et L'E. L. S. associé est isomorphe.

Pour les deux structures $\mathfrak{g}_{11}$ ci-dessus, il faut préciser ce qui se passe dans les cas exceptionnels du théorème 23.2. Lorsque

$$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(k) + \mathbf{SO}(i-k) + \mathbf{SO}(h) + \mathbf{SO}(n-k-h),$$

il n'y a d'exception possible que si i ou $n-i$ vaut 8. Mais dans ce cas $n > 8$;

donc on pourra raisonner comme à la fin du n° 24 : tous les E. L. S. correspondants de la forme réelle $\mathbf{SO}^i(n)$ sont *isomorphes*.

Dans le cas $\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}\left(\frac{i}{2}\right) + \mathbf{SU}\left(\frac{n-i}{2}\right) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ lorsque l'un au moins de i ou $n-i$ est multiple de 4, le théorème 23.2 dit qu'il y a plusieurs types possibles pour $\mathfrak{g}_{11}$, donnant seulement des E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ *ext-isomorphes*, pour un isomorphisme α de $\mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)$, conservant $\mathbf{SO}(i)$ et $\mathbf{SO}(n-i)$. Soient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ les E. L. S. correspondants de $\mathfrak{g} = \mathbf{SO}^i(n)$ et supposons qu'il existe deux *espaces symétriques* G/H et G/H' du groupe de Lie G dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, définis par les automorphismes Σ et Σ' de G, dont les E. L. S. respectifs soient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$. L'automorphisme $\Sigma'\Sigma^{-1}$ de G induit sur $\mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)$ un automorphisme β conservant $\mathbf{SO}(i)$ et $\mathbf{SO}(n-i)$, donc tel que α et β appartiennent à la même composante connexe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i))$; l'automorphisme α peut donc se relever en un automorphisme de G et les espaces symétriques G/H et G/H' sont donc *isomorphes*.

Cas d'échange. — C'est lorsque $i = n-i = \frac{n}{2}$ et que l'automorphisme de $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SO}(i)+\mathbf{SO}(n-i)$, à prolonger à $\mathbf{SO}(n)$, échange $\mathbf{SO}(i)$ et $\mathbf{SO}(n-i)$. Dans ce qui suit, on posera $i = n-i = m$. Rappelons d'abord que le groupe discret $\mathrm{A}_m = \mathrm{Aut}(\mathbf{SO}(m))/\mathrm{Int}(\mathbf{SO}(m))$ est réduit à l'élément neutre si m est impair. Si m est pair et différent de 8, le groupe A_m comprend deux éléments : l'élément neutre et un élément qu'on peut représenter dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{SO}(m))$ par l'automorphisme induisant la rotation particulière :

$$\delta_p \to \delta_p \quad (p = 1, \ldots, k-1) \qquad \text{et} \qquad \delta_k \to -\delta_k,$$

où l'on a posé $2k = m$, et où $\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ désigne une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SO}(m)$. On notera τ_1 cet élément. Dans le cas où $m = 8$, le groupe A_8 est isomorphe au groupe des permutations de trois objets : on notera τ_1, τ_2, τ_3 les trois éléments de A_8 qui sont involutifs (et admettent une représentation analogue à celle donnée précédemment pour τ_1), et par τ_4 et τ_5 les deux autres éléments; on a les relations $\tau_5 = \tau_4^{-1}$ et $\tau_4 = \tau_2\tau_1$.

D'après le n° 9, tous les E. L. S. obtenus par l'automorphisme sont isomorphes si m est impair. Supposons maintenant m pair. D'après le n° 9, il n'y a que deux types possibles d'E. L. S. non isomorphes : celui pour lequel l'automorphisme φ de $\mathfrak{g}_1$ est $\sigma(1)$ (notations du n° 9), défini par $\sigma(1)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, et celui pour lequel φ est $\sigma(\tau_1)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\tau_1\mathrm{Y}, \tau_1\mathrm{X})$. Remarquons d'abord que l'automorphisme α_1 de $\mathfrak{g}_1$, défini par $\alpha_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{X}, \tau_1\mathrm{Y})$ se prolonge en un automorphisme β_1 de $\mathbf{SO}(n)$: en effet, appelons $\{\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_m\}$ une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SO}(n)$, telle que $\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ [resp. $(\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m)$] soit une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{SO}(i)$ [resp. $\mathbf{SO}(n-1)$]. L'automorphisme τ_1 est défini par la rotation particulière qui est l'identité sur $\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ et

$$\delta_p \to \delta_p \quad (p = k+1, \ldots, m-1) \qquad \text{et} \qquad \delta_m \to -\delta_m$$

et α_1 se prolonge en l'automorphisme β_1 de $\mathbf{SO}(n)$ défini par la rotation particulière

$$\partial_p \to \partial_p \quad (p=1, \ldots, n-1) \qquad \text{et} \qquad \partial_n \to -\partial_n.$$

On a vu au n° 9 qu'on a alors $\sigma(\tau_1)=\alpha_1\sigma(1)\alpha_1^{-1}$; donc, pour les E. L. S. correspondants, définis par, s'ils existent, les automorphismes σ et σ' de $\mathbf{SO}(n)$, on a, dans $\mathbf{SO}(n)$: $\sigma'=\beta_1\sigma\beta_1^{-1}$; ces E. L. S., non isomorphes, sont donc *ext-isomorphes*, dans $\mathbf{SO}(n)$. Ils le sont encore dans $\mathbf{SO}^m(2m)$, parce que β_1, conservant l'algèbre $\mathfrak{g}_1$, définit aussi un automorphisme de $\mathbf{SO}^m(2m)$ (proposition 10.1).

Le cas $m=8$ se ramène au précédent; le problème ne se pose que pour les deux éléments τ_4 et τ_5 de A_8, puisque τ_1, τ_2, τ_3 sont du type de l'automorphisme τ_1 ci-dessus; et le cas de τ_5 se ramène à celui de τ_4, parce que $\tau_5=\tau_4^{-1}$. De ce que $\tau_4=\tau_2\tau_1$ on déduit sans difficulté que, si l'on pose $\alpha_1(X, Y)=(X, \tau_1 Y)$ et $\gamma_2(X, Y)=(\tau_2 X, Y)$, on a

$$\sigma(\tau_4)=(\alpha_1\gamma_2)\,\sigma(1)\,(\alpha_1\gamma_2)^{-1}.$$

Si l'on prolonge, comme ci-dessus, α_1(resp. γ_2) en un automophisme de tout $\mathbf{SO}(n)$, on voit que l'E. L. S. correspondant à $\sigma(\tau_4)$ est *ext-isomorphe* à l'E. L. S. correspondant à $\sigma(1)$. En conclusion, tous les E. L. S. de $\mathbf{SO}^m(2m)$, pour le cas d'échange, sont ext-isomorphes à l'E. L. S. défini par $\sigma(1)$. Mais ceci est insuffisant pour être assuré que, pour les *espaces symétriques* correspondants, l'automorphisme extérieur de $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$ peut se remonter en un automorphisme d'un groupe quelconque d'algèbre de Lie $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$. Pour cela, procédons comme à la fin du n° 24; on verra ci-dessous qu'on obtient deux E. L. S. associés : $\mathbf{SO}^m(2m)/\mathbf{SL}(m, \mathrm{R})+\mathbf{R}$ et $\mathbf{SO}^m(2m)/\mathbf{SO}(m, \mathrm{C})$. Le second est justiciable du théorème 23.2, parce que sa forme compacte est $\mathbf{SO}(2m)/\mathbf{SO}(m)+\mathbf{SO}(m)$; toutes les algèbres d'isotropie de structure $\mathbf{SO}(m)+\mathbf{SO}(m)$ de $\mathbf{SO}(2m)$ sont isomorphes par un automorphisme intérieur; ce qui entraîne que les E. L. S. correspondants de $\mathbf{SO}(8m)$ sont définis par σ et σ', tels que $\sigma'=\varphi\sigma\varphi^{-1}$, où φ est intérieur; comme au n° 24, on en déduit que $\sigma'=\alpha\sigma\alpha^{-1}$, où α est intérieur mais commute avec l'$\star$-automorphisme définissant la forme réelle $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$, donc définit un automorphisme intérieur de $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$, qui peut se remonter en un automorphisme d'un groupe de Lie quelconque d'algèbre de Lie $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$. Il n'y a donc, dans le cas d'échange, qu'une structure $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ à examiner, celle pour laquelle $\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(m)$:

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(m)$. — On obtient ce cas pour la forme *normale* de l'E. L. S. compact $\mathbf{SO}(2m)/\mathbf{SU}(m)+\mathbf{T}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{SO}^m(2m)/\mathbf{SL}(m, \mathrm{R})+\mathrm{R},$$

puisque la structure compacte maximale de $\mathbf{SL}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{R}\right)+\mathbf{R}$ est $\mathbf{SO}\left(\frac{n}{2}\right)$ et sa forme compacte $\mathbf{SU}\left(\frac{n}{2}\right)+\mathbf{T}$. Détermination habituelle de l'E. L. S. associé; on trouve

$$\mathbf{SO}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{SO}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right).$$

29. $\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$. — Ici, $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$. D'une façon tout à fait semblable au nº 27, nous allons montrer que si un automorphisme η de $\mathfrak{g}_1$ est tel que $\eta = k(\sigma)$, où σ est un automorphisme de $\mathbf{Sp}(n)$, alors :

si η induit sur $\mathbf{SU}(n)$ un automorphisme intérieur, il conserve le tore $\mathbf{T}$;
si η induit sur $\mathbf{SU}(n)$ un automorphisme extérieur, il ne conserve pas $\mathbf{T}$.

a. Soit $\mathfrak{c}$ une sous- algèbre de Cartan donnée de $\mathbf{Sp}(n)$ et de $\mathbf{SU}(n)+\mathbf{T}$. On posera $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} \cap \mathbf{SU}(n)$. Si $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{c}$, le tore $\mathbf{T}$ est engendré par l'élément $\mathrm{X} = (\delta_1 + \ldots + \delta_n)$ et $\mathfrak{c}'$ est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{c}$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées, par rapport à la base $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ est nulle. On peut supposer que η est un G-automorphisme et que, puisqu'il est prolongeable à $\mathbf{Sp}(n)$, il induit sur $\mathfrak{c}$ une rotation.

b. Si cette rotation est l'identité sur $\mathfrak{c}'$ il est impossible qu'elle soit $\mathrm{X} \to -\mathrm{X}$ sur $\mathbf{T}$. En effet, elle doit transformer la racine δ_1 de $\mathbf{Sp}(n)$ en une autre racine de $\mathbf{Sp}(n)$. Écrivons, de même qu'au nº 27 :

$$\delta_1 = \left(1-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\mathrm{X}.$$

Une telle rotation transformerait donc δ_1 en

$$\left(1-\frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots, -\frac{2}{n}\right)$$

qui ne peut être une racine de $\mathbf{Sp}(n)$ que si $n=2$. Éliminons ce cas : $\mathbf{SU}(2)$ ne possède pas, en effet, d'automorphisme extérieur et la rotation ci-dessus est identique, pour $n=2$, à celle du cas *c*.

c. Si cette rotation est $\delta_1 \to -\delta_2$, $\delta_3 \to -\delta_4$, ..., il est impossible qu'elle induise l'identité sur $\mathbf{T}$. En effet, elle transformerait la racine δ_1 en

$$\left(\frac{2}{n}-1, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n}\right)$$

qui ne peut être une racine de $\mathbf{Sp}(n)$ que pour $n=2$. Mais dans ce cas, cette rotation peut être considérée comme celle du cas *b*. Les seuls cas possibles sont donc :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(i)+\mathbf{SU}(n-i)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$. — C'est le cas de l'E. L. S. forme *normale* de l'E. L. S. compact : $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(i)+\mathbf{Sp}(n-i)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}(i, \mathrm{R})+\mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{R}).$$

Détermination de la structure *associée* comme ci-dessus :

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(n)$. — S'obtient avec la forme *normale* de $\mathbf{Sp}(n)/\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}.$$

L'E. L. S. *associé* est isomorphe.

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$ (quand n est pair). — On exhibe deux automorphismes commutant convenables de la forme compacte $\mathbf{Sp}(n)$. Le premier est le G-automorphisme τ définissant la forme réelle $\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$, dont l'algèbre d'isotropie est $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$, et dont les G-nombres sont

$$\gamma(\tau) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$$

pour une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{Sp}(n)$, une base orthonormée $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ ([18], p. 233-234). Pour définir le second, on considère la rotation de $\mathfrak{c}$ définie par

$$\delta_p \to -\delta_{n-p} \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

on peut prolonger cette rotation en un automorphisme σ de $\mathbf{Sp}(n)$, involutif, tel que le complexifié $\tilde{\sigma}$ vérifie

$$\tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\delta_p - \delta_{p+1}}) = \mathrm{E}_{\delta_{n-p-1} - \delta_{n-p}} \quad (p = 1, \ldots, n-1) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{2\delta_1}) = \mathrm{E}_{2\delta_1}.$$

Cet automorphisme commute bien avec τ, d'après le n° 14, puisque la rotation ci-dessus laisse invariante le vecteur de $\mathfrak{c}$ dont les coordonnées sont $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. D'autre part, les points fixes à la fois pour σ et τ forment une algèbre de structure $\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$. En effet, l'automorphisme σ induit sur $\mathbf{SU}(n)$, l'automorphisme donnant la forme réelle $\mathbf{SU}^\star(n)$, puisque σ induit sur $\mathfrak{c}$ la rotation particulière conservant le système fondamental $\{\delta_p - \delta_{p+1}\}$ $(p = 1, \ldots, n-1)$ et que ses G-nombres sont $(0, \ldots, 0)$ ([18], p. 244); et le tore $\mathbf{T}$, engendré par $\mathrm{X} = \delta_1 + \ldots + \delta_n$, n'est pas conservé puisque X est changé en $-\mathrm{X}$.

Il reste à déterminer l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ de l'E. L. S. correspondant à ces deux automorphismes involutifs commutant; pour cela, on utilise la proposition 16.1 : les algèbres compactes $\mathfrak{h}_u$ et $\mathfrak{h}'_u$ doivent être des $\star$-algèbres de $\mathbf{Sp}(n)$ qui ont, à leur tour, une $\star$-algèbre de structure $\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$. Il n'y a que $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$ et $\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right)$ qui répondent à ces conditions. D'autre part, si l'on veut vérifier la relation de dimension (16.1), il faut prendre

$$\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right) + \mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}\right).$$

On obtient donc L'E. L. S., isomorphe à son *associé* :

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right).$$

30. $\mathbf{Sp}^i(n)$. — Ici, $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{Sp}(i) + \mathbf{Sp}(n-i)$. On procède comme au n° 28 pour éliminer les structures $\mathfrak{g}_{11}$ de la forme $\mathbf{SU}(i) + \mathbf{T} + \mathbf{Sp}(h) + \mathbf{Sp}(n-i-h)$. En écrivant l'automorphisme η de $\mathfrak{g}_1$ sous la forme $\eta = \sigma_i + \sigma_{n-i}$, on pourra supposer que σ_i (resp. σ_{n-i}) est un G-automorphisme de $\mathbf{Sp}(i)$ [resp. $\mathbf{Sp}(n-i)$] et que ses G-nombres sont

$$\gamma(\sigma_i) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \qquad [\text{resp. } \gamma(\sigma_{n-i}) = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)].$$

Les G-nombres du G-automorphisme σ prolongeant η à tout $\mathbf{Sp}(n)$ devraient donc être

$$\gamma(\sigma) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1\right),$$

ce qui est impossible, d'après [18], p. 233-234. Il reste donc seulement les structures suivantes :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(k) + \mathbf{Sp}(i-k) + \mathbf{Sp}(h) + \mathbf{Sp}(n-i-h)$. — Cas analogue à ceux rencontrés dans $\mathbf{SU}^i(n)$ et $\mathbf{SO}^i(n)$. On obtient les E. L. S.

$$\mathbf{Sp}^i(n)/\mathbf{Sp}^k(k+h) + \mathbf{Sp}^{i-k}(n-k-h).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$. — S'obtient comme *dual* de

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}(i, \mathrm{R}) + \mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{R}).$$

On trouve

$$\mathbf{Sp}^i(n)/\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T},$$

E. L. S. isomorphe à son associé.

Cas d'échange. — D'après le n° 9, puisque les automorphismes de $\mathbf{Sp}(n)$ sont toujours intérieurs, il n'y a qu'un seul cas à considérer :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(i)$ $\left(\text{lorsque } i = n - i = \frac{n}{2}\right)$. — S'obtient comme *dual* de

$$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right).$$

On trouve l'E. L. S.

$$\mathbf{Sp}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{SU}^*(n) + \mathbf{R}$$

dont l'E. L. S. associé est

$$\mathbf{Sp}^{\frac{n}{2}}(n)/\mathbf{Sp}\left(\frac{n}{2}, \mathrm{C}\right).$$

Structures exceptionnelles.

Dans le cas des structures simples réelles exceptionnelles (non pseudo-complexes), nous procéderons de la façon suivante, qui est plus rapide : étant donnée la forme réelle $\mathfrak{g}$, sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$, pour la structure compacte maximale $\mathfrak{g}$, nous calculerons, pour les différents $\star$-automorphismes possibles de $\mathfrak{g}_1$ et les $\star$-algèbres correspondantes $\mathfrak{g}_{11}$, la quantité $(\dim \mathfrak{g}_u - \dim \mathfrak{g}_1 + 2\dim \mathfrak{g}_{11})$; puis nous rechercherons, dans les différentes $\star$-algèbres de $\mathfrak{g}_u$ (fournies par le tableau I), les paires $(\mathfrak{h}_u, \mathfrak{h}'_u)$ (*paire* signifiant ici structures distinctes ou identiques) telles que

$$\dim \mathfrak{h}_u + \dim \mathfrak{h}'_u = \dim \mathfrak{g}_u - \dim \mathfrak{g}_1 + 2\dim \mathfrak{g}_{11};$$

ces paires $(\mathfrak{h}_u, \mathfrak{h}'_u)$ devront, enfin, être telles que $\mathfrak{h}_u$ et $\mathfrak{h}'_u$ aient toutes les deux une $\star$-algèbre qui soit de la même stucture que $\mathfrak{g}_{11}$ (on prendra garde à ne pas oublier, en basse dimension, les isomorphismes rappelés au n° 20). Nous aurons ainsi satisfait aux conditions nécessaires de la proposition 16.1; *ces conditions ne sont pas suffisantes,* comme le montre le cas $\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{T}$ du n° 36. Mais dans tous les autres cas, nous pourrons prolonger effectivement l'E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$, satisfaisant aux conditions ci-dessus, en un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Nous ne donnerons pas les détails de cette recherche des structures $\mathfrak{g}_{11}$ et des paires $(\mathfrak{h}_u, \mathfrak{h}'_u)$ qui, pour une forme réelle exceptionnelle donnée, satisfont aux conditions de la proposition 16.1; cette recherche est, en effet, à l'aide du tableau I, purement mécanique. Pour chaque structure $\mathfrak{g}_{11}$ possible, nous indiquerons seulement comment on prolonge l'E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ en un E. L. S. de la forme réelle $\mathfrak{g}$ et nous préciserons cet E. L. S.

31. $\mathbf{G}_2^\star$. — Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2)$. Le seul cas (satisfaisant à la proposition 16.1) est :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{T} + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2)$. — C'est le cas de la forme *normale* de $\mathbf{G}_2/\mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{G}_2^\star/\mathbf{SL}(2, R) + \mathbf{SL}(2, R).$$

L'E. L. S. associé est isomorphe : il en sera ainsi chaque fois que $\mathfrak{h}_u$ et $\mathfrak{h}'_u$ auront même structure.

32. $\mathbf{F}_4^1$. — Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$. Les seuls cas possibles sont :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(2) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SO}(9)$, $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$. — On obtient ce cas comme forme *normale* de $\mathbf{F}_4/\mathbf{SO}(9)$, soit

$$\mathbf{F}_4^1/\mathbf{SO}^1(9)$$

et l'on détermine l'E. L. S. associé ainsi (et on fera de même dans toute la suite): l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}'$ de cet E. L. S. a pour forme compacte $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$

et pour structure compacte maximale $\mathbf{Sp}(2)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$, c'est donc $\mathbf{Sp}^1(3)+\mathbf{SU}(2)$:

$$\mathbf{F}_4^1/\mathbf{Sp}^1(3)+\mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(3)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{Sp}(3)+\mathbf{SU}(2)$. — Ce cas provient de la forme *normale* de $\mathbf{F}_4/\mathbf{Sp}(3)+\mathbf{SU}(2)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{F}_4^1/\mathbf{Sp}(3, \mathrm{R})+\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}).$$

33. $\mathbf{F}_4^2$. — Ici, $\mathfrak{g}_1=\mathbf{SO}(9)$; il n'y a que deux cas possibles :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(8)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(9)$. — On considère deux G-automorphismes σ et τ de la forme compacte $\mathbf{F}_4$, qui commuteront certainement puisque tous les deux sont nécessairement intérieurs (n° 14), et définis par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma)=(0, 0, 0, 2) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau)=(1, 1, 1, 1).$$

D'après [18], p. 235-237, les deux G-automorphismes σ et τ ont tous deux $\mathbf{SO}(9)$ comme structure de leur algèbre d'isotropie. Il faut montrer que les points fixes à la fois pour σ et τ forment une algèbre de structure $\mathbf{SO}(8)$. Dans toute la suite, $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots\}$ désignera une base orthonormée d'une sous-algèbre de Cartan de la forme compacte de la forme réelle considérée et E_α l'élément d'une base de Weyl, associé à la racine α. Avec ces notations, les éléments de $\mathbf{F}_4$ (autres, évidemment, que ceux de la sous-algèbre de Cartan considérée) sont invariants à la fois pour σ et τ sont, eu égard aux G-nombres de σ et τ; les $\mathrm{E}_{(\pm\delta_p\pm\delta_q)}$, pour $p, q=1, 2, 3, 4$. Ce sont bien les éléments correspondant aux racines de $\mathbf{SO}(8)$. On obtient l'E. L. S.

$$\mathbf{F}_4^2/\mathbf{SO}^1(9).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{Sp}(2)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{Sp}(3)+\mathbf{SU}(2)$. — C'est le cas de l'E. L. S. *dual* de l'E. L. S. déjà rencontré : $\mathbf{F}_4^1/\mathbf{SO}^4(9)$. On obtient

$$\mathbf{F}_4^2/\mathbf{Sp}^1(3)+\mathbf{SU}(2).$$

34. $\mathbf{E}_6^1$. — Ici, $\mathfrak{g}_1=\mathbf{Sp}(4)$. Ne sont possibles que :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{Sp}(3)+\mathbf{SU}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{SU}(6)+\mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{F}_4$. — C'est le cas de la forme *normale* de $\mathbf{E}_6/\mathbf{F}_4$, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{F}_4^1$$

et pour E. L. S. *associé :*

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{SU}^*(6)+\mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{Sp}(2)+\mathbf{Sp}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{Sp}(4)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$. — C'est le cas de la forme *normale* de $\mathbf{E}_6/\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{SO}^5(10)+\mathrm{R}$$

dont l'E. L. S. *associé* est

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{Sp}^2(4).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{Sp}(4)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — C'est le cas des deux formes normales :

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{Sp}(4, \mathrm{R}), \quad \mathbf{E}_6^1/\mathbf{SL}(6, \mathrm{R}) + \mathbf{SL}(2, \mathbf{R}).$$

35. $\mathbf{E}_6^2$. — Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. Seuls sont possibles :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(5) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$. — S'obtient avec la paire (τ, σ) de G-automorphismes *intérieurs* (donc commutant nécessairement : nº 14) définis par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\sigma) = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

D'après [18], p. 237-238, l'automorphisme τ a pour algèbre d'isotropie $\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$ (c'est donc bien celui définissant la forme réelle considérée $\mathbf{E}_6^2$), et l'automorphisme σ la structure $\mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$. Il suffit de montrer que les points fixes à la fois pour σ et pour τ ont pour structure $\mathbf{SU}(5) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$; or les G-nombres ci-dessus montrent que ce sont les éléments $E_{\delta_p - \delta_q}$, pour $p, q, = 1, \ldots, 5$, qui, avec la sous-algèbre de Cartan invariante point par point par σ et τ, engendrent $\mathbf{SU}(5) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$. On obtient l'E. L. S.

$$\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SO}^*(10) + \mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — On utilise ici les deux G-automorphismes *intérieurs* σ et τ définis par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\sigma) = (0, 0, 0, 0, 1, 1).$$

D'après [18], p. 237-238, les deux automorphismes σ et τ ont une algèbre d'isotropie de structure $\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. L'algèbre des points fixes à la fois pour σ et pour τ est engendrée par les $E_{\delta_p - \delta_q}$ pour $p, q = 1, 2, 3, 4$ ou pour $p, q = 5, 6$ et par les deux éléments $E_{(\delta_1 + \ldots + \delta_6)}$, $E_{-(\delta_1 + \ldots + \delta_6)}$ qui, joints à la sous-algèbre de Cartan invariante point par point par σ et τ, engendrent visiblement $\mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{T}$. On obtient les E. L. S. *associés :*

$$\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SO}^4(10) + \mathbf{T}, \qquad \mathbf{E}_6^2/\mathbf{SU}^2(6) + \mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(3) + \mathbf{SU}(3) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — Ce cas correspond à la paire (σ, τ) de G-automorphismes intérieurs dont les G-nombres sont

$$\gamma(\sigma) = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

pour lesquels ([18], p. 237-239) l'algèbre d'isotropie a encore pour structure $\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. Les points fixes simultanément pour σ et τ sont, outre la sous-algèbre de Cartan invariante point par point par σ et τ, les éléments $E_{\delta_p - \delta_q}$

pour : soit $p, q = 1, 2, 3$; soit $p, q = 4, 5, 6$; c'est donc la structure

$$\mathbf{SU}(3) + \mathbf{SU}(3) + \mathbf{T} + \mathbf{T}.$$

On obtient l'E. L. S. isomorphe à son *associé* :

$$\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SU}^3(6) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R}).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{F}_4$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{Sp}(4)$. — Cas du dual de $\mathbf{E}_6^1/\mathbf{SU}^*(6) + \mathbf{SU}(2)$. On obtient les E. L. S. associés

$$\mathbf{E}_6^2/\mathbf{Sp}^1(4), \qquad \mathbf{E}_6^2/\mathbf{F}_4^1.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — Cherchons à trouver deux automorphismes commutant convenables. Le premier, τ. doit définir la forme réelle $\mathbf{E}_6^2$ et peut être choisi être le G-automorphisme défini par les G-nombres $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$; son algèbre d'isotropie est alors de structure $\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$, engendrée par les éléments

$$\mathrm{E}_{\pm(\delta_1 + \ldots + \delta_6)} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{\delta_p - \delta_q} \qquad \text{pour} \quad p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Le second, σ, doit induire sur $\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$ un automorphisme involutif dont les points fixes sont $\mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2) = \mathbf{SO}(6) + \mathbf{SU}(2)$, c'est-à-dire l'automorphisme qui définit la forme réelle $\mathbf{SL}(6, \mathrm{R}) + \mathbf{SU}(2)$. On peut toujours supposer qu'il est défini par son complexifié $\tilde{\sigma}$, tel que

$$\tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\delta_p - \delta_q}) = -\mathrm{E}_{\delta_q - \delta_p} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\pm(\delta_1 + \ldots + \delta_6)}) = \mathrm{E}_{\pm(\delta_1 + \ldots + \delta_6)}$$

[en effet, dans $\mathbf{SL}(6, \mathrm{R})$, algèbre des matrices carrées réelles de déterminant 1, la sous-algèbre $\mathbf{SO}(6)$ est celle des matrices antisymétriques]. L'automorphisme σ, prolongeant l'automorphisme du ci-dessus de $\mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2)$, doit définir une rotation système des racines de $\mathbf{E}_6$, rotation telle que

$$\delta_p - \delta_q \to \delta_q - \delta_p \qquad \text{et} \qquad (\delta_1 + \ldots + \delta_6) \to (\delta_1 + \ldots + \delta_6).$$

On vérifie facilement que seule la rotation

$$\delta_p \to -\delta_p + \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{6} \delta_h$$

répond à la question. On doit donc avoir, pour $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\delta_p + \delta_q + \delta_r}) = \varepsilon(p, q, r)\,\mathrm{E}_{\delta_u + \delta_v + \delta_w},$$

où u, v, w désignent les indices de 1, 2, 3, 4, 5, 6 autres que p, q, r. En utilisant les constantes de structure de $\mathbf{E}_6$, telles qu'elles sont données dans [7], p. 90, on a

$$\mathrm{E}_{\delta_u + \delta_v + \delta_w} = [\mathrm{E}_{\delta_u - \delta_p}, [\mathrm{E}_{\delta_v - \delta_q}, [\mathrm{E}_{\delta_w - \delta_r}, \mathrm{E}_{\delta_p + \delta_q + \delta_r}]]]$$

d'où $\varepsilon(p, q, r) = -\varepsilon(u, v, w)$, ce qui prouve que l'automorphisme considéré n'est pas involutif (il est de carré -1). Donc cette structure compacte maximale

$\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ ne peut pas convenir. En utilisant des raisonnements du chapitre suivant (n° 45), on peut en donner une autre démonstration. En effet, le groupe d'isotropie de cet E. L. S., supposé exister : $\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SL}(6, \mathrm{R})+\mathbf{SU}(2)$, définit une représentation linéaire réelle qui doit être de 1^re^ *classe,* alors que sa représentation complexifiée est

$$\mathfrak{g}_3(\mathbf{SU}(6))\times\mathfrak{g}_1(\mathbf{SU}(2)).$$

Or la représentation réelle correspondante est nécessairement de 2^e^ classe : on a utilisé les notations de [3], p. 297-299 et, du chapitre suivant, n° 47.

Remarque. — L'E. L. S. $\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SL}(6, \mathrm{R})+\mathbf{SU}(2)$ est indiqué, par erreur, dans [2].

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(4)+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{Sp}(4)$. — Cas du *dual* de l'E. L. S.

$$\mathbf{E}_6^1/\mathbf{SL}(6, \mathrm{R})+\mathbf{SL}(2, \mathrm{R});$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_6^0/\mathbf{Sp}(4, \mathrm{R}).$$

36. $\mathbf{E}_6^3$. — Ici $\mathfrak{g}_1+\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$. En appliquant la proposition 16.1, il ne reste que les cas :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(9)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{F}_4$. — On obtient ce cas avec le couple (τ, σ) de G-automorphismes (de la forme compacte $\mathbf{E}_6$) ainsi définis : le premier τ est *intérieur* et ses F-nombres sont

$$\gamma(\tau)=(0, 0, 1, -1, 1, -1);$$

d'après [18], p. 237-239, il définit donc la forme réelle $\mathbf{E}_6^3$ et son algèbre d'isotropie est $\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$. Le second, σ, sera le G-automorphisme extérieur défini par la rotation ([18]), p. 246)

$$\delta_p\to-\delta_{p'}+\frac{1}{3}\sum_{h=1}^{6}\delta_h$$

(où $p'=p+1$ si $p=1, 3, 5$ et $p'=p-1$ si $p=2, 4, 6$) et par les G-nombres (0, 0, 0, 0, 0, 0) : d'après [18], p. 246-248, ses points fixes forment une sous-algèbre de structure $\mathbf{F}_4$. Ces deux G-automorphismes σ et τ commutent parce que le vecteur $(0, 0, 1, -1, 1, -1)$ est invariant par la rotation définie ci-dessus (n° 14). Enfin, pour montrer que les points fixes simultanément pour σ et pour τ, forment une algèbre $\mathfrak{g}'_{11}$ de structure $\mathbf{SO}(9)$, il suffit de remarquer que $\mathfrak{g}'_{11}$ doit être une structure d'$\star$-algèbre de $\mathbf{F}_4$ et de $\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$; le tableau I montre qu'il n'y a que $\mathbf{SO}(9)$ qui réponde à la question. On obtient l'E. L. S. isomorphe à son *associé* :

$$\mathbf{E}_6^3/\mathbf{F}_4^2.$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(8)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}$. — S'obtient avec le couple (σ, τ) de G-automorphismes *intérieurs* de la forme compacte $\mathbf{E}_6$, définis par les

G-nombres :

$$\gamma(\sigma) = (1, 1, 1, 1, 0, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

pour lesquels l'algèbre d'isotropie a pour structure $\mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$([18], p. 237-239). Les points fixes à la fois pour σ et pour τ sont, outre la sous-algèbre de Cartan, les éléments

$$E_{\delta_p - \delta_q} \quad \text{et} \quad E_{\pm(\delta_p (+\delta_q + \delta_s)} \qquad \text{pour} \quad p, q = 1, 2, 3, 4$$

qui engendrent $\mathbf{SO}(8) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$. D'où l'E. L. S.

$$\mathbf{E}_6^3/\mathbf{SO}^2(10) + \mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — Cas du *dual* de $\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SO}^4(10) + \mathbf{T}$. On trouve

$$\mathbf{E}_6^3/\mathbf{SU}^2(6) + \mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(2) + \mathbf{Sp}(2)$ *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_u = \mathbf{Sp}(4)$. — S'obtient avec l'E. L. S. déjà rencontré : $\mathbf{E}_6^1/\mathbf{SO}^5(10) + \mathbf{R}$. On obtient

$$\mathbf{E}_6^3/\mathbf{Sp}^2(4).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(5) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$. — Provient du *dual* de $\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SO}^\star(10) + \mathbf{T}$. On trouve les deux E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_6^3/\mathbf{SU}^1(6) + \mathbf{SL}(2, R), \quad \mathbf{E}_6^3/\mathbf{SO}^\star(10) + \mathbf{T}.$$

37. $\mathbf{E}_6^4$. — Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{F}_4$. Les cas possibles sont :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{Sp}(4)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$. — *Dual* de $\mathbf{E}_6^1/\mathbf{F}_4^1$. On trouve les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_6^4/\mathbf{Sp}^1(4), \quad \mathbf{E}_6^4/\mathbf{SU}^\star(6) + \mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(9)$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{F}_4$. — S'obtient avec l'E. L. S. *dual* de $\mathbf{E}_6^3/\mathbf{F}_4^2$. On obtient les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_6^4/\mathbf{F}_4^2, \quad \mathbf{E}_6^4/\mathbf{SO}^1(10) + \mathbf{R}.$$

38. $\mathbf{E}_7^1$. — Ici $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{SU}(8)$. Les cas possibles, après application de la proposition 16.1, sont :

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SO}(12) + \mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{E}_6 + \mathbf{T}$. — On considère le couple (τ, σ) de G-automorphismes, pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de la forme compacte $\mathbf{E}_7$, défini par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \qquad \text{et} \quad \gamma(\sigma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1).$$

D'après [18], p. 239-241, l'algèbre d'isotropie de τ a pour structure $\mathbf{SU}(8)$

(donc τ correspond à la forme réelle $\mathbf{E}_7^1$) et celle de σ a pour structure $\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. Les points fixes, à la fois pour σ et τ sont la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ et les $\mathbf{E}'_{\delta_p-\delta_q}$ pour : soit p, $q=1, 2, 3, 4, 5, 6$; soit p, $q=7, 8$. Ils engendrent donc une algèbre de structure $\mathbf{SU}(6)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{T}$. On obtient les deux E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SO}^*(12)+\mathbf{SU}(2), \qquad \mathbf{E}_7^1/\mathbf{E}_6^2+\mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(4)+\mathbf{SU}(4)+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{SU}(8)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. — C'est le cas de la forme *normale* de l'E. L. S. compact $\mathbf{E}_7/\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. — On obtient les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SO}^6(12)+\mathbf{SL}(2, R), \quad \mathbf{E}_7^1/\mathbf{SU}^4(8).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(8)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SU}(8)$. — Cas de la forme *normale* de l'E. L. S. compact $\mathbf{E}_7/\mathbf{SU}(8)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SL}(8, R).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{Sp}(4)$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{SU}(8)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$. — Cas de la forme *normale* de $\mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$. On obtient les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{E}_6^1+\mathbf{R}, \quad \mathbf{E}_7^1/\mathbf{SU}^*(8).$$

39. $\mathbf{E}_7^2$. — Ici $\mathfrak{g}_1=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. — Il reste comme cas possibles :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$. — Il correspond au couple (τ, σ) de G-automorphismes de la forme compacte $\mathbf{E}_7$, pour la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$, qui sont définis par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma)=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau)=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1).$$

L'algèbre d'isotropie de τ est $\mathbf{SO}(12)+\mathbf{T}$ (c'est-à-dire que τ définit bien la forme réelle $\mathbf{E}_7^2$) et celle de σ est $\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$. Les points fixes pour σ et pour τ simultanément sont : la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ et les éléments

$$E_{\delta_p-\delta_q}, \quad E_{\pm(\delta_6+\delta_8+\delta_p+\delta_q)} \qquad \text{pour} \quad p, q=1, 2, 3, 4, 5$$

qui engendrent bien $\mathbf{SO}(10)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$. On trouve l'E. L. S.

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{E}_6^3+\mathrm{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(8)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. — Cas du couple (σ, τ) de G-automorphismes de $\mathbf{E}_7$, dont les G-nombres sont

$$\gamma(\sigma)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau)=(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0).$$

Tous les deux ont une algèbre d'isotropie de structure $\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. Outre la sous-algèbre de Cartan, les points fixes à la fois pour σ et τ sont les :

$$E_{\delta_p-\delta} \quad \text{pour : soit } p,\, q=1,\,2,\,3,\,4;\ \text{ soit } p,\, q=5,\,6;\ \text{ soit } p,\, q=7,\,8;$$
$$E_{\pm(\delta_5+\delta_6+\delta_p+\delta_q)} \quad \text{pour } p,\, q=1,\,2,\,3,\,4;$$
$$E_{\pm(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4)}$$

dont on voit qu'ils engendrent une algèbre de structure $\mathbf{SO}(8)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$. On obtient ainsi l'E. L. S. isomorphe à son associé :

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{SO}^4(12)+\mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(4)+\mathbf{SU}(4)+\mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SU}(8)$. — Cas du *dual* de

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SO}^6(12)+\mathbf{SL}(2,\,\mathrm{R}).$$

On obtient

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{SU}^4(8)$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(6)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{SU}(8)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$. — Cas du *dual* de l'E. L. S. $\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SO}^\star(12)+\mathbf{SU}(2)$. On trouve les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{SU}^2(8), \quad \mathbf{E}_7^2/\mathbf{E}_6^2+\mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(6)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. — On prendra le couple $(\sigma,\,\tau)$ de G-automorphismes définis par les G-nombres :

$$\gamma(\sigma)=(0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau)=(0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,1,\,0)$$

et qui ont tous les deux pour algèbre d'isotropie une algèbre de structure $\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. Les points fixes à la fois pour σ et τ comprennent : la sous-algèbre de Cartan et les

$$E_{\delta_p-\delta_q}, \quad E_{\pm(\delta_p+\delta_6+\delta_7+\delta_8)} \qquad \text{pour } p,\, q=1,\,2,\,3,\,4,\,5$$

dont on vérifie qu'ils engendrent une sous-algèbre de structure $\mathbf{SU}(6)+\mathbf{T}+\mathbf{T}$. On obtient donc l'E. L. S. isomorphe à son *associé* :

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{SO}^\star(12)+\mathbf{SL}(2,\,\mathrm{R}).$$

Pour cet E. L. S. et ceux du cas précédent, le théorème 23.2 implique qu'il faut distinguer deux cas pour l'E. L. S. $\mathbf{SO}(12)/\mathbf{SU}(6)+\mathbf{T}$ qui intervient ici dans l'E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$ de $\mathfrak{g}_1=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$. Mais les E. L. S. compacts correspondants $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ sont tous, d'après le théorème 23.2, isomorphes pour un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_u=\mathbf{E}_7$. Par le même raisonnement que celui fait au n° 24 pour l'E. L. S. $\mathbf{SL}(2m,\,\mathrm{R})/\mathbf{SL}(m,\,\mathrm{C})+\mathbf{T}$, on montre que les E. L. S. correspondants $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sont toujours *isomorphes*.

40. $\mathbf{E}_7^3$. — Ici $\mathfrak{g}_1=\mathbf{E}_6+\mathbf{T}$, et les seuls cas possibles sont ;

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{Sp}(4)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SU}(8)$. — Provient du *dual* de $\mathbf{E}_7^1/\mathbf{E}_6^1+\mathbf{R}$; on obtient

$$\mathbf{E}_7^3/\mathbf{SU}^\star(8)$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SO}(10) + \mathbf{T} + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SO}(12) + \mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{E}_6 + \mathbf{T}$. — Cas de l'E. L. S. de $\mathbf{E}_7^2/\mathbf{E}_6^2 + \mathbf{T}$; d'où les deux E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^3/\mathbf{SO}^2(12) + \mathbf{SL}(2, R) \quad \mathbf{E}_7^3/\mathbf{E}_6^3 + \mathbf{T}.$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2) + \mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u = \mathbf{SU}(8)$ *et* $\mathfrak{h}'_u = \mathbf{SO}(12) + \mathbf{SU}(2)$. — C'est le cas du *dual* de $\mathbf{E}_7^1/\mathbf{E}_6^2 + \mathbf{T}$; on trouve les E. L. S. *associés* :

$$\mathbf{E}_7^2/\mathbf{SU}^2(8), \quad \mathbf{E}_7^3/\mathbf{SO}^*(12) + \mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{F}_4$, *et* $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h}'_1 = \mathbf{E}_6 + \mathbf{T}$. — On considère un premier automorphisme τ de la forme compacte $\mathbf{E}_7$: celui qui définit la forme réelle $\mathbf{E}_7^3$ et, pour une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$, est défini par les G-nombres :

$$\gamma(\tau) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Il a pour algèbre d'isotropie $\mathbf{E}_6 + \mathbf{T}$.

Le deuxième automorphisme σ doit prolonger l'automorphisme de $\mathbf{E}_6$ dont l'algèbre d'isotropie est $\mathbf{F}_4$, c'est-à-dire celui qui est défini par les G-nombres tous nuls et la rotation particulière

$$\delta_p \to -\delta_{p'} + \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{6}\delta_h \qquad (p' = p + 1 \text{ si } p = 1, 3, 5;\ p' = p - 1 \text{ si } p = 2, 4, 6).$$

Il faut d'abord savoir comment $\mathbf{E}_6$ est plongé dans $\mathbf{E}_7$ en tant qu'algèbre d'isotropie de τ. D'après les G-nombres de τ, nous allons donner les racines α pour lesquelles $\tilde{\tau}(\mathrm{E}_\alpha) = \mathrm{E}_\alpha$, en précisant les racines qui leur correspondent dans la structure $\mathbf{E}_6$ telles qu'elles sont données dans [18], p. 237; ce sont :

$$\begin{array}{lll}
(\delta_p - \delta_q)\ (p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6) & : \text{ mêmes racines} & \\
(\delta_7 + \delta_p + \delta_q + \delta_r) & : \text{ correspondent à} & (\delta_p + \delta_q + \delta_r) \\
(\delta_8 + \delta_p + \delta_q + \delta_r) & : \quad » & -(\delta_p + \delta_q + \delta_r) \\
\pm(\delta_7 - \delta_8) & : \quad » & \pm(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6)
\end{array}$$

$$(\text{avec } p, q, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Puisque les racines de $\mathbf{E}_7$ sont ici les $(\delta_p - \delta_q)$ et $(\delta_p + \delta_q + \delta_r + \delta_s)$ (avec $p, q, r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 + \delta_8 = 0$), il est alors trivial que la rotation ci-dessus (du système des racines de $\mathbf{E}_6$) se prolonge en la rotation du système des racines de $\mathbf{E}_7$ définie par

$$\delta_p \to -\delta_{p'} \qquad (p' = p + 1 \text{ si } p = 1, 3, 5, 7;\ p' = p - 1 \text{ si } p = 2, 4, 6, 8).$$

Cette rotation permet de définir un automorphisme σ de $\mathbf{E}_7$, par son complexifié $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\delta_p - \delta_{p+1}}) = \mathrm{E}_{\delta_p - \delta_{p+1}} \qquad (p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$
$$\tilde{\sigma}(\mathrm{E}_{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}) = \mathrm{E}_{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4},$$

automorphisme qui est involutif et commute avec τ. Les points fixes à la fois pour σ et τ forment une algèbre de structure $\mathbf{F}_4$ par construction. On obtient l'E. L. S. isomorphe à son *associé :*

$$\mathbf{E}_7^3/\mathbf{E}_6^4+\mathbf{R}.$$

41. $\mathbf{E}_8^1$. — Ici $\mathfrak{g}_1=\mathbf{SO}(16)$. Après application de la proposition 16.1, il reste les seules possibilités :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. — Ce cas peut s'obtenir avec le couple (τ, σ) de G-automorphismes de $\mathbf{E}_8$ (qui commutent nécessairement, puisqu'ils sont intérieurs) définis par les G-nombres :

$$\gamma(\tau)=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\sigma)=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1).$$

L'algèbre d'isotropie de τ est $\mathbf{SO}(16)$ (c'est-à-dire que τ définit la forme réelle $\mathbf{E}_8^1$) et celle de σ est $\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. Les points fixes à la fois pour σ et pour τ constituent une algèbre qui est à la fois : une structure d'$\star$-algèbre de $\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$, une structure d'$\star$-algèbre de $\mathbf{SO}(16)$. C'est donc nécessairement $\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$. D'où le seul E. L. S.

$$\mathbf{E}_8^1/\mathbf{E}_7^2+\mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(8)+\mathbf{SO}(8)$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(16)$. — C'est le cas de la forme *normale* de l'E. L. S. compact $\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}(16)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}_8^1/\mathbf{SO}^8(16).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(8)+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathbf{SO}(16)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. — S'obtient avec la forme *normale* de $\mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. On trouve les deux E. L. S. *associées :*

$$\mathbf{E}_8^1/\mathbf{E}_7^1+\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}), \qquad \mathbf{E}_8^1/\mathbf{SO}^\star(16).$$

Ces E. L. S. sont tous isomorphes, comme déjà raisonné pour l'E. L. S. de $\mathbf{E}_7^3$ et avec $\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)$.

42. $\mathbf{E}_8^2$. — Ici $\mathfrak{g}_1=\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. Seules possibilités (proposition 16.1) :

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SU}(8)+\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{SO}(16)$. — Cas du *dual* de l'E. L. S. déjà rencontré : $\mathbf{E}_8^1/\mathbf{E}_7^1+\mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$. On obtient l'E. L. S. isomorphe à son associé :

$$\mathbf{E}_8^2/\mathbf{SO}^\star(16).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{SO}(12)+\mathbf{SU}(2)+\mathbf{SU}(2)$ *avec* $\mathfrak{h}_u+\mathbf{SO}(16)$ *et* $\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. — Cas du *dual* de $\mathbf{E}_8^1/\mathbf{E}_7^2+\mathbf{SU}(2)$. On obtient les deux E. L. S. *associés :*

$$\mathbf{E}_8^2/\mathbf{SO}^4(16), \qquad \mathbf{E}_8^2/\mathbf{E}_7^2+\mathbf{SU}(2).$$

$\mathfrak{g}_{11}=\mathbf{E}_6+\mathbf{T}+\mathbf{T}$ *et* $\mathfrak{h}_u=\mathfrak{h}'_u=\mathbf{E}_7+\mathbf{SU}(2)$. — On considère les deux G-automorphismes (commutant, puisque nécessairement intérieurs) dont les G-nombres sont

$$\gamma(\sigma) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\tau) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$$

et dont les algèbres d'isotropie ont pour structure, toutes les deux : $\mathbf{E}_7 + \mathbf{SU}(2)$. Les éléments points fixes à la fois par σ et par τ sont, outre la sous-algèbre de Cartan : :

$$E_{\delta_p - \delta_q}, \qquad E_{\pm(\delta_p+\delta_q+\delta_r)} \qquad \text{pour } p, q, r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

et

$$E_{\pm(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\delta_5+\delta_6)}.$$

On reconnaît les racines de $\mathbf{E}_6$. On obtient donc l'E. L. S.

$$\mathbf{E}_8^2/\mathbf{E}_7^3 + \mathbf{SL}(2, R).$$

CHAPITRE IV.

Espaces locaux symétriques, irréductibles, C-symétriques et semi-kähleriens.

43. Métrique d'un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{g}$ semi-simple. — Soit G/H un espace symétrique à G semi-simple; d'après [24], p. 55, théorème 15.5, la connexion affine canonique de G/H est celle d'une métrique définie sur la variété sous-jacente de G/H et invariante par G; si l'on identifie l'espace tangent à cette variété en l'origine au sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de la décomposition canonique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, cette métrique est celle définie par la restriction à $\mathfrak{m}$ de la forme de Killing de G, c'est-à-dire $\mu(X, Y) = \text{Trace de } (\text{ad}(X)\,\text{ad}(Y))$, quels que soient X et Y dans $\mathfrak{m}$.

Pour préciser cette métrique étudions d'abord les rapports entre la représentation $(\text{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ et la représentation $(\text{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ relative à l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. D'après le n° 12, on peut supposer que

$$\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-11} + \mathfrak{g}_{-1-1} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{1-1} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1},$$

avec

$$\mathfrak{h}_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{-11}; \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{11} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11}; \qquad \mathfrak{m}_u = \mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-1-1}; \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{1-1} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1}.$$

Par définition des quatre sous-espaces $\mathfrak{g}_{11}$, $\mathfrak{g}_{1-1}$, $\mathfrak{g}_{-11}$, $\mathfrak{g}_{-1-1}$, on a

$$(43.1) \qquad \begin{cases} [\mathfrak{g}_{11}, \mathfrak{g}_{1-1}] \subset \mathfrak{g}_{1-1}, & [\mathfrak{g}_{11}, \mathfrak{g}_{-1-1}] \subset \mathfrak{g}_{-1-1}, \\ [\mathfrak{g}_{-11}, \mathfrak{g}_{1-1}] \subset \mathfrak{g}_{-1-1}, & [\mathfrak{g}_{-11}, \mathfrak{g}_{-1-1}] \subset \mathfrak{g}_{1-1}. \end{cases}$$

Les matrices de la représentation $(\text{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ peuvent, pour la décomposition de $\mathfrak{m}_u$ en la somme $\mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-1-1}$, se mettre sous la forme

$$(43.2) \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Les formules rappelées ci-dessus pour $\mathfrak{h}_u$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}_u$, $\mathfrak{m}$ montrent qu'on passe de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ à la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ en remplaçant les matrices ci-dessus par les matrices

$$(43.3) \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ -C & D \end{pmatrix}.$$

Pour la métrique Trace $(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$ *les sous-espaces* $\mathfrak{g}_{1-1}$ *et* $\mathfrak{g}_{-1-1}$ *de* $\mathfrak{m}_u$ *sont orthogonaux*. En effet, en découpant naturellement une matrice de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_u$ dans $\mathfrak{g}_u$, relativement à la décomposition de $\mathfrak{g}_u$: $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}_{11} + \mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-11} + \mathfrak{g}_{-1-1}$, on déduit des formules (43.1) ci-dessus que, si $X \in \mathfrak{g}_{1-1}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{-1-1}$, la matrice de Trace $(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$ a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q \\ R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est de trace nulle : donc $\mu_u(X, Y) = 0$, quels que soient $X \in \mathfrak{g}_{1-1}$, $Y \in \mathfrak{g}_{-1-1}$.

Puisque l'algèbre $\mathfrak{h}_u$ est compacte, la métrique $\mu_u(X, Y)$ est *définie positive;* relativement à la décomposition de $\mathfrak{m}_u$ en deux sous-espaces orthogonaux $\mathfrak{g}_{1-1}$ et $\mathfrak{g}_{-1-1}$, on peut donc l'écrire $\mu_u = \mu_1 + \mu_2$; et la définition de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}$, à partir de $\mathfrak{h}_u$ et $\mathfrak{m}_u$ respectivement, montre que *la métrique de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est* $\mu = \mu_1 - \mu_2$. On en déduit en particulier la *signature* de cette métrique : c'est $(\dim \mathfrak{g}_{1-1} - \dim \mathfrak{g}_{-1-1})$, qu'on peut calculer connaissant $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_1$.

Remarque. — On a employé le terme « métrique de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ » sans préciser; il s'agira toujours de la métrique *canonique*, définie par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Cependant, on prendra garde que, contrairement au cas des E. L. S. compacts, il peut exister, sur un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple et à $\mathfrak{h}$ non compact, d'autres métriques que la métrique canonique, sans que pour cela $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit réductible : *voir* n° 47.

44. Classe d'une représentation linéaire réelle irréductible. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle et (ρ, V) [ou $(\rho(\mathfrak{g}), V)$] une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel réel V. Une telle représentation (ρ, V) définit naturellement une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans l'espace vectoriel V_c, complexifié de V; on notera (ρ_c, V_c) cette représentation. Dans le cas de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, définie par la décomposition canonique de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, on écrira $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ la représentation de $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ dans le complexifié $\mathfrak{m}_c$ de $\mathfrak{m}$.

Supposons maintenant que la représentation (ρ, V) soit *irréductible*. La représentation (ρ_c, V_c) n'est pas nécessairement irréductible mais, d'après [10], p. 154-161, deux cas seulement peuvent se produire :

a. La représentation (ρ_c, V_c) est *irréductible:* on peut alors trouver des coordonnées dans V (et dans V_c) telles que la représentation (ρ_c, V_c), pour ces coordonnées, soit définie par des matrices toutes réelles. *Les représentations* (ρ, V) et (ρ_c, V_c) *seront dites de* 1^re^ *classe;*

b. La représentation (ρ_c, V_c) est *réductible*. Dans ce cas, il existe un sous-espace vectoriel W_c de V_c, tel que $\dim W_c = \frac{1}{2}\dim V_c$, pour lequel la représentation induite (ρ_c, W_c) est irréductible. La représentation réelle (ρ, V) se déduit de la représentation (ρ_c, W_c) ainsi : l'espace vectoriel complexe W_c définit naturellement un espace vectoriel réel de dimension double, qui peut être identifié à l'espace initial V, de façon que, si les matrices de la représentation (ρ_c, W_c) sont de la forme $R = P + \sqrt{-1}.Q$, où les matrices P et Q sont réelles, alors les matrices de la représentation (ρ, V) sont

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix}. \tag{44.1}$$

Dans ce cas, *les représentations* (ρ_c, W_c) *et* (ρ, V) *seront dites de* 2^e^ *classe.*

Réciproquement, étant donnée une représentation (ρ_c, W_c), d'une algèbre de Lie dans l'espace vectoriel complexe W_c, si cette représentation est irréductible, elle définit dans l'espace vectoriel réel V, de dimension double de W_c, défini naturellement par W_c, une représentation irréductible si (ρ_c, W_c) est de 2^e^ classe; si (ρ_c, W_c) est de 1^re^ classe, la représentation (ρ, V) est réductible et il existe un sous-espace W de V, de dimension moitié, pour lequel la représentation induite (ρ, W) est irréductible.

La classe d'une représentation irréductible (ρ_c, W_c) est déterminée dans le Mémoire [10] d'É. Cartan ainsi que dans [31], p. 11, théorème VII; nous préciserons cette classe, pour le cas qui nous intéresse, dans le n° 47.

PROPOSITION 44.1. — *Pour que l'E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *soit* C-*symétrique, il faut et il suffit que la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ *soit de* 2^e^ *classe.*

En effet, une représentation de 2^e^ classe étant définie par des matrices du type (44.1), commute avec l'automorphisme J, de carré -1, de $\mathfrak{m}$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix},$$

on I désigne la matrice unité d'ordre $\frac{1}{2}\dim\mathfrak{m}$.

Une représentation $(\rho(\mathfrak{g})_c, V_c)$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$, dans l'espace vectoriel complexe V_c, définit naturellement une représentation, dans le même espace vectoriel W_c, de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$, complexifiée de $\mathfrak{g}$. On notera $(\rho(\tilde{\mathfrak{g}})_c, V_c)$ cette représentation. *Les représentations* $(\rho(\tilde{\mathfrak{g}})_c, V_c)$ et $(\rho(\mathfrak{g})_c, V_c)$ *sont simultanément réductibles ou irréductibles.*

Si $(\rho(\tilde{\mathfrak{g}})_c, V_c)$ est réductible, *a fortiori* $(\rho(\mathfrak{g})_c, V_c)$. Si c'est la représentation $(\rho(\mathfrak{g})_c, V_c)$ qui est réductible, soit W_c' un sous-espace vectoriel de V_c, invariant par cette représentation, c'est-à-dire tel que, quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, la matrice $\rho(X)$ de la représentation $(\rho(\mathfrak{g})_c, V_c)$ vérifie $\rho(X).(W) = W$. La représentation $(\rho(\tilde{\mathfrak{g}})_c, V_c)$ est engendrée par les matrices $\rho(X)$ et les matrices $\sqrt{-1}.\rho(X)$. Et l'on a bien

$$\sqrt{-1}.\rho(X).(W) = \rho(X).(\sqrt{-1}.W) = \rho(X).(W) = W.$$

45. Espaces locaux symétriques irréductibles. — Si un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est irréductible, le n° 5 montre qu'on peut supposer que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Le n° 8 montre qu'il y a seulement à étudier les cas II et III (définis au n° 8); et le cas *a* du n° 9 montre qu'on peut supposer $\mathfrak{g}$ simple, les autres E. L. S. irréductibles étant déterminés dans ce n° 9, et correspondent au cas d'échange et à la représentation adjointe d'une algèbre de Lie réelle simple.

Si $\mathfrak{g}$ est simple, mais pseudo-complexe, le n° 17 résout, dans ce cas, le problème de savoir quels sont les E. L. S. correspondants qui sont irréductibles. Il reste donc à déterminer les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, qui sont irréductibles, lorsque l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ et sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$ sont simples, ce que nous supposerons dans tout ce n° 45.

Pour étudier la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, nous allons la comparer à la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ de l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; introduisons les représentations intermédiaires : $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$, $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u)_c, (\mathfrak{m}_u)_c)$, $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c)$, $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}}_u)_c, (\mathfrak{m}_u)_c)$. Les formules rappelées au début du n° 43 montrent qu'on a les identités $(\mathfrak{m}_u)_c = \mathfrak{m}_c$ et $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c) = (\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}}_u)_c, (\mathfrak{m}_u)_c)$. Mais les représentations $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ sont irréductibles, puisque $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ est un E. L. S. *compact à $\mathfrak{g}_u$ simple;* elles sont précisées, en tant que représentations linéaires réelles irréductibles, dans le Mémoire d'É. Cartan [11], p. 126-132, avec les notations de [10], utilisées dans [3]; on précisera ces notations dans le n° 47. La nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est donnée par :

Proposition 45.1. — *Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ un E. L. S. dont l'E. L. S. compact est $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ et tel que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ soient simples. L'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est irréductible, à l'exception du cas où la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ *est de 2e classe et la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ *de 1re classe.*

Premier cas : $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est de 1re classe. Alors (n° 44), la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u)_c, (\mathfrak{m}_u)_c)$ est irréductible parce que $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est irréductible. On en déduit (n° 44) que la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c)$, puis la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ sont irréductibles; c'est donc que $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est irréductible.

Deuxième cas : $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est de 2e classe. Alors la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u)_c, (\mathfrak{m}_u)_c)$ est réductible, mais définit (n° 44) une représentation irréductible $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u)_c, \mathfrak{n}_c)$, où $\mathfrak{n}_c$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{m}_u)_c = \mathfrak{m}_c$ et de dimension moitié. Comme ci-dessus, on en déduit successivement que les représentations $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{n}_c)$, puis $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{n}_c)$ sont irréductibles. La représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ se déduit de $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ comme indiqué au n° 43, formule (43.3). Si $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ est de 1^re^ classe, c'est que, moyennant un changement de coordonnées convenables, les matrices $R = P + \sqrt{-1}.Q$ de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$, peuvent être choisies réelles; la formule (44.1) montre que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est définie par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix},$$

cette représentation est donc *réductible*. Si, au contraire, $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ est de 2^e^ classe, $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est irréductible par définition.

Remarque. — Lorsque $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est de 1^re^ classe, on est donc assuré, *a priori*, que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ est aussi de 1^re^ classe : on peut le vérifier sur la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, telle qu'elle est donnée dans le tableau II, pour chaque E. L. S. On pourrait aussi se servir de ce résultat pour éliminer certains E. L. S. compacts maximaux $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$, qui ne sont pas prolongeables en un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: *voir*, par exemple, dans le n° 35, le cas $\mathfrak{g}_{11} = \mathbf{SU}(4) + \mathbf{SU}(2)$.

46. Nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$. — (Les résultats de ce numéro sont dus à É. Cartan [10]; on les trouvera aussi dans [3].) Il reste donc à déterminer la classe de $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$, lorsque $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est de 2^e^ classe. Nous allons déterminer plus précisément la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$; si l'on veut seulement la classe de $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$, la proposition 49.2 permet de l'obtenir sans calcul.

On a vu au n° 45 que la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c)$ est connue : elle se déduit de $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$. La représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_c, \mathfrak{m}_c)$ se déduit de $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c)$ par passage de l'algèbre complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$ à sa forme réelle $\mathfrak{g}$. Il faut distinguer plusieurs cas, selon la nature de l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}_u$. Cette algèbre (n° 19) est somme directe d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{h}_u^0$ et de son centre $\mathfrak{z}$; lorsque $\mathfrak{g}_u$ est *simple*, le tableau I montre que le centre $\mathfrak{z}$ n'existe pas, ou est l'algèbre abélienne à *une* dimension; et que l'algèbre semi-simple $\mathfrak{h}_1^0$ est somme directe *d'au plus deux* algèbres *simples* (qui ne sont jamais pseudo-complexes, puisque compactes).

a. Lorsque le centre $\mathfrak{z}$ existe, pour la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_c, \mathfrak{m}_c)$ il constitue le groupe $\mathbf{C}^\star$ des nombres complexes non nuls, et sa représentation est toujours $z \to \exp(\lambda z)$, où λ est un nombre complexe arbitraire, quel que soit $z \in \mathfrak{m}_c$. Et dans la forme réelle $\mathfrak{h}$ de $\tilde{\mathfrak{h}}$, on ne pourra retrouver $\mathbf{C}^\star$ que sous l'un des deux aspects : soit défini par $z \to \exp(\lambda z)$, soit $z \to \exp(\sqrt{-1}.\lambda z)$, quel que soit $z \in \mathfrak{m}_c$ et le nombre *réel* λ. Conformément à la convention du n° 22, nous noterons cette forme réelle de $\mathbf{C}^\star$: par $\mathbf{R}$ dans le premier cas, par $\mathbf{T}$ dans le second.

b. Si $\mathfrak{h}_u^0$ est *simple*, la représentation de sa forme réelle $\mathfrak{h}^0$ se déduit de la représentation de $\tilde{\mathfrak{h}}^0$ comme indiqué dans le Mémoire [10] d'É. Cartan. Si la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_C, \mathfrak{m}_C)$ est réductible, on travaillera naturellement avec la représentation irréductible $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_C, \mathfrak{n}_C)$ qu'elle définit. Dans ce cas *b*, la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}^0)_C, \mathfrak{n}_C)$ est, si l'on veut, la *forme réelle* de la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}}_0)_C, \mathfrak{n}_C)$, correspondant à la forme réelle $\mathfrak{h}^0$ de $\mathfrak{h}^0$.

c. Soit maintenant $\mathfrak{h}_u^0 = \mathfrak{p}_u + \mathfrak{q}_u$, où les deux algèbres $\mathfrak{p}_u$ et $\mathfrak{q}_u$ sont *simples*. Dans ce cas, la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}}^0)_C, \mathfrak{n}_C)$ (on remplacera toujours, sous-entendu, $\mathfrak{m}_C$ par $\mathfrak{n}_C$, lorsqu'il y aura réductibilité) est la suivante : il existe deux espaces vectoriels complexes, P_C et Q_C, et deux représentations $(\varphi(\tilde{\mathfrak{p}}), P_C)$ et $(\psi(\tilde{\mathfrak{q}}), Q_C)$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$ et $\tilde{\mathfrak{q}}$, dans P_C et Q_C respectivement, telles que la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{p}} + \tilde{\mathfrak{q}})_C, \mathfrak{n}_C)$ soit la représentation *produit :* $(\varphi(\tilde{\mathfrak{p}}), P_C) \times (\psi(\tilde{\mathfrak{q}}), Q_C)$; l'espace $\mathfrak{n}_C$ est isomorphe au produit tensoriel $P_C \otimes Q_C$ (définition de la représentation produit : [3], p. 284). D'après [10], p. 151-153, deux cas seulement sont possibles pour la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}^0)_C, \mathfrak{m}_C)$:

1° la forme réelle $\mathfrak{h}^0$ de $\tilde{\mathfrak{h}}^0$ est la somme directe $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ d'une forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$ et d'une forme réelle $\mathfrak{q}$ de $\tilde{\mathfrak{q}}$. Dans ce cas, on est ramené au produit de représentations du type *b*; on a

$$(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}^0)_C, \mathfrak{n}_C) = (\mathrm{ad}(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})_C, \mathfrak{n}_C) = (\varphi(\mathfrak{p}), P_C) \times (\psi(\mathfrak{q}), Q_C);$$

2° Ici, les algèbres $\tilde{\mathfrak{p}}$ et $\tilde{\mathfrak{q}}$ sont isomorphes, et la forme réelle $\mathfrak{h}^0$ est l'algèbre pseudo-complexe $\hat{\mathfrak{p}}$; la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}^0)_C, \mathfrak{n}_C)$ est alors le produit $(\varphi(\hat{\mathfrak{p}}), P_C) \times (\psi(\bar{\alpha}(\hat{\mathfrak{p}}), Q_C)$, où $\bar{\alpha}$ désigne un antiautomorphisme de $\tilde{\mathfrak{p}}$ sur $\tilde{\mathfrak{q}}$, qu'il faudra préciser dans chaque cas.

47. Nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$. — Connaissant la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_C, \mathfrak{m}_C)$, il reste seulement, pour déterminer la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, à savoir quelle est la classe de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_C, \mathfrak{m}_C)$. Cette classe est déterminée pour toutes les représentations linéaires irréductibles (d'algèbres de Lie réelles), dans [10]. Ce qui a été dit ci-dessus dans le n° 46 suffit, en général, joint aux résultats de [11], pour déterminer cette classe. Il y a cependant quelques points à préciser.

Notations — Dans ce numéro et dans le tableau II, les notations seront celles de [3]; rappelons-les rapidement :

La représentation produit de deux représentations $(\varphi(\mathfrak{p}), V)$ et $(\psi(\mathfrak{q}), W)$, qui est une représentation de la somme directe $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ dans le produit tensoriel $V \otimes W$ (définition : [3], p. 284) sera notée par le signe $\times$: $(\varphi(\mathfrak{p}), V) \times (\psi(\mathfrak{q}), W)$;

ceci, que les algèbres de Lie $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ (resp. les espaces vectoriels V et W) soient réelles ou complexes.

Les représentations complexes irréductibles fondamentales d'une algèbre de Lie simple complexe $\tilde{\mathfrak{p}}$, notées g_i $(i = 1, \ldots, r)$ dans [8], seront notées ici en précisant l'algèbre de Lie correspondante entre parenthèses : $g_i(\tilde{\mathfrak{p}})$ $(i = 1, \ldots, l)$.

Le produit faible (définition : [3], p. 284) des représentations $g_k(\tilde{\mathfrak{p}})$ $(k = 1, \ldots, n)$ du type précédent, sera noté $\overset{k}{\underline{\times}}\, g_k(\tilde{\mathfrak{p}})$. Les représentations $g_k(\tilde{\mathfrak{p}})$ peuvent être identiques pour des indices différents; on écrira, par exemple : $\overset{2}{\underline{\times}}\, g(\tilde{\mathfrak{p}}) = g(\tilde{\mathfrak{p}}) \underline{\times}\, g(\tilde{\mathfrak{p}})$.

Dans le cas b du n° 46, on notera $g_i(\mathfrak{p})$ la représentation « forme réelle » de la représentation $g_i(\tilde{\mathfrak{p}})$, lorsque $\mathfrak{p}$ est une forme réelle de $\tilde{\mathfrak{p}}$, sans qu'on précise si cette représentation a lieu dans un espace vectoriel complexe ou réel; car sa classe est déterminée dans [10], p. 168-174 et il n'y a pas de confusion possible pour le passage de l'espace vectoriel complexe à l'espace vectoriel réel (*voir* cependant le n° 48). Et l'on gardera la notation $\underline{\times}$ pour le produit faible.

Dans le cas c(2°) *du* n° 46, lorsque l'antiautomorphisme $\overline{\alpha}$ définit un automorphisme α de $\tilde{\mathfrak{p}}$, si la représentation $(\varphi(\tilde{\mathfrak{p}}), \mathrm{P_C})$ est une représentation fondamentale, soit $g_i(\tilde{\mathfrak{p}})$, telle que la représentation $(\varphi(\overline{\alpha}(\tilde{\mathfrak{p}})), \mathrm{Q_C})$ soit la représentation fondamentale $\overline{g_j(\mathfrak{p})}$, on écrira, au lieu de $(\varphi(\hat{\mathfrak{p}}), \mathrm{P_C}) \times (\varphi(\overline{\alpha}(\hat{\mathfrak{p}})), \mathrm{Q_C})$, la notation $g_i(\hat{\mathfrak{p}}) \times \overline{g_j(\hat{\mathfrak{p}})}$.

Cas particulier. — Si une représentation fondamentale, telle que $g_i(\tilde{\mathfrak{p}})$, $g_i(\hat{\mathfrak{p}})$, $g_i(\mathfrak{p})$, est celle de l'un des groupes linéaires définis au n° 20, on remplacera, dans les notations ci-dessus, cette représentation fondamentale par la notation du n° 20. C'est ainsi qu'on a les identités

$$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) = \mathbf{SL}(n, \mathrm{C}), \qquad g_1(\mathbf{SU}(n)) = \mathbf{SU}(n), \qquad \ldots,$$
$$g_2(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})) = \mathbf{Sp}(n, \mathrm{C}), \qquad g_1(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})) = \mathbf{Sp}(n, \mathrm{R}), \qquad \ldots,$$
$$g_p(\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})) = \mathbf{SO}(n, \mathrm{C}) \quad (\text{pour } p = 2 \text{ si } n \text{ est impair, } p = 3 \text{ si } n \text{ est pair}), \qquad \ldots.$$

Précisions. — Ce qui a été dit au n° 46 montre que les seuls cas, où la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_{\mathrm{C}}, \mathfrak{m}_{\mathrm{C}})$ de l' E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, n'est pas automatiquement déterminée par la représentation $(\mathrm{ad}(\tilde{\mathfrak{h}})_{\mathrm{C}}, \mathfrak{m}_{\mathrm{C}})$ provenant de celle $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ de son E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$, sont ceux du cas c (2°) du n° 46, c'est-à-dire lorsque l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ est une algèbre pseudo-complexe (ou sa somme directe avec une algèbre abélienne à une dimension). Il faut, en effet, dans ce cas, que nous précisions l'antiautomorphisme $\overline{\alpha}$.

E.L.S. $\mathbf{SL}(2n, \mathrm{R})/\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{T}$. — La représentation complexifiée $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_{\mathrm{C}}, \mathfrak{m}_{\mathrm{C}})$ est le produit $g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \mathbf{T}$. Sur la forme réelle compacte $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{SU}(n)$ de l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}^0$, l'automorphisme involutif induit par τ, et qui détermine la forme réelle $\mathfrak{h}^0 = \mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$, est un automorphisme qui *échange* les deux $\mathbf{SU}(n)$, et défini par $\tau(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{Y}, \varkappa(\mathrm{X}))$, où $\varkappa$ est un automorphisme *extérieur* de $\mathbf{SU}(n)$. On peut prendre, parmi ces automorphismes extérieurs, un représentant arbitraire (*voir* n° 9); prenons l'automorphisme *contragrédient*, défini, lorsqu'on représente $\mathbf{SU}(n)$ par des matrices carrées complexes d'ordre n, par $\alpha(A) = -{}^t\overline{A}$. Cet automorphisme de $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{SU}(n)$ se prolonge en un antiautomorphisme de $\mathbf{SL}(n, C) + \mathbf{SL}(n, C)$ défini par la même formule $\overline{\alpha}(A) = -{}^t\overline{A}$. Et la représentation $g_1(\alpha(\mathbf{SL}(n, C)))$ est identique à la représentation $g_{n-1}(\mathbf{SL}(n, C))$. Avec les notations ci-dessus, on trouve donc pour représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_C, \mathfrak{m}_C)$:

$$g_1(\mathbf{SL}(n, C)) \times \overline{g_{n-1}(\mathbf{SL}(n, C))}.$$

D'après [10], p. 165, cette représentation est de 2e classe, parce que les représentations g_1 et g_{n-1} de $\mathbf{SL}(n, C)$ ne sont pas *semblables*. Remarquons enfin que, d'après la proposition 49.1, l'E. L. S. étudié est semi-kählérien, donc que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_C, \mathfrak{m}_C)$ doit laisser invariante une forme d'Hermite (ce qui serait impossible si cette représentation était de 1re classe, d'après [3], p. 292 et 297). On vérifie ici que cette forme d'Hermite est

$$\sum_{i,j} (z_i \otimes z_j)(\overline{z}_j \otimes \overline{z}_i),$$

où l'on a désigné par $\{z_1, \ldots, z_n\}$ une base de C^n, les $z_i \otimes z_j$ (i et $j = 1, \ldots, n$) constituant alors une base de $C^{n^2} = C^n \otimes C^n$. Résultats identiques pour l'E. L. S. $\mathbf{SU}^\star(2n)/\mathbf{SL}(n, C) + \mathbf{T}$.

E. L. S. $\mathbf{SU}^n(2n)/\mathbf{SL}(n, C) + \mathbf{R}$. — Avec les notations de l'exemple précédent, on peut prendre ici pour automorphisme de $\mathbf{SU}(n) + \mathbf{SU}(n)$ l'automorphisme $\tau(X, Y) = (Y, X)$. Et l'on trouve simplement la représentation

$$g_1(\mathbf{SL}(n, C)) \times \overline{g_1(\mathbf{SL}(n, C))}.$$

Cette représentation est bien de 1re classe ([10], p. 165), ce qui est en accord avec la proposition 49.2.

E. L. S. $\mathbf{SO}^n(2n)/\mathbf{SO}(n, C)$ [resp. $\mathbf{Sp}(2n, R)/\mathbf{Sp}(n, C)$]. — Les représentations cherchées sont ici nécessairement :

$$\mathbf{SO}(n, C) \times \overline{\mathbf{SO}(n, C)} \quad \text{et} \quad \mathbf{Sp}(n, C) \times \overline{\mathbf{Sp}(n, C)}$$

parce que la représentation complexifiée est $\mathbf{SO}(n, C) \times \mathbf{SO}(n, C)$ [resp. $\mathbf{Sp}(n, C) \times \mathbf{Sp}(n, C)$] et que toutes les représentations $\alpha(\mathbf{SO}(n, C))$ sont semblables, quel que soit l'automorphisme α de $\mathbf{SO}(n, C)$, par exemple pour des raisons de dimension : ces représentations sont de dimension n, et ce sont les seules (regarder la liste de [8], p. 33-36 et 38-40). S'il s'agit de $\mathbf{Sp}(n, C)$, puisque tous les automorphismes de $\mathbf{Sp}(n)$ sont intérieurs, ce qui a été dit au n° 9 suffit.

E. L. S. $\mathbf{Sp}(n, C)/\mathbf{SL}(n, C) + \mathbf{C}^\star$ (et tous les E. L. S. réductibles, semi-kählériens, des algèbres pseudo-complexes simples). — Dans ce cas, $\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{C}^\star$ est ce qui a été appelé dans [3], p. 286 un « groupe de 1^re^ catégorie ». Le fait que cet E. L. S. soit semi-kählérien, c'est-à-dire que la représentation de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{C}^\star$ laisse invariante une forme d'Hermite, ne contredit pas [3], p. 290-291, parce qu'ici cette représentation est *réductible*. Une telle forme d'Hermite sera du type $\sum_i (z_i \bar{z}_{i'} + \bar{z}_i z_{i'})$, où l'on a désigné par $\{z_1, \ldots, z_p\}$ (resp. $\{z_{1'}, \ldots, z_{n'}\}$) une base de l'espace vectoriel sur lequel cette représentation est irréductible.

48. Le cas des représentations réelles $\mathrm{Spin}^\star(4n)$. — La proposition 45.1 et les résultats du chapitre III impliquent une conséquence importante pour les *formes réelles* des représentations complexes irréductibles des groupes de Lie. D'après E. Cartan [10], la recherche de la classe d'une telle représentation se ramène au cas des formes réelles des représentations *fondamentales*. Reprenant les notations du n° 47, considérons la représentation fondamentale $g_k(\tilde{\mathfrak{p}})$ de l'algèbre de Lie complexe simple $\mathfrak{p}$ et la forme réelle $g_k(\mathfrak{p})$ de cette représentation (dans le même espace vectoriel complexe) associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, forme réelle de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Le Mémoire [10] laisse supposer que la *classe* (définie au n° 44) de cette représentation est bien déterminée, pour une représentation fondamentale complexe g_k et une forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$; en fait, il n'en est rien. En effet, nous avons trouvé dans les n^os^ 38 et 39 les deux E.L.S.

$$\mathbf{E}_7^1/\mathbf{SO}^\star(12) + \mathbf{SU}(2) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_7^2/\mathbf{SO}^\star(12) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R}).$$

La représentation complexifiée associée est ici (*voir* [11], p. 131 ou le tableau II) $g_1(\mathbf{SO}(12, \mathrm{C}))$. Avec les conventions du n° 47, notons $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$ cette représentation [dans [3], p. 304, cette représentation était notée $\mathbf{Spin}^\star(12)$]. D'après la proposition 45.1, les deux représentations $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), (\mathfrak{m})$ correspondant aux E. L. S. ci-dessus doivent être de 1^re^ classe; ce sont $g_1(\mathbf{SO}^\star(12)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$ et $g_1(\mathbf{SO}^\star(12)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$. Or $g_1(\mathbf{SU}(2))$ [resp. $g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$] est de 2^e^ classe (resp. 1^re^ classe); les règles pour le calcul de la classe d'une représentation produit ([3]), théorème 5, p. 298) entraînent que $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$ doit être de 2^e^ classe pour le premier E. L. S. et de 1^re^ classe pour le second.

On voit donc que la classe de $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$ n'est pas univoquement définie. Dans [10], p. 173, il est dit que cette représentation est toujours de 1^re^ classe; dans [3], p. 306, il est dit que $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$ est de 2^e^ classe et $g_2(\mathbf{SO}^\star(12))$ de 1^re^ classe; ces résultats sont donc incomplets. Précisons-les pour les représentations g_1 ou $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n))$.

Dans [3], p. 285 (les notations employées sont celles de [3], p. 285 et [8], p. 38), la forme réelle $\mathbf{SO}^\star(4n)$ est définie, à partir de sa complexifiée $\mathbf{SO}(4n, \mathrm{C})$, par les transformations

$$(X_{ij} - X_{i'j'}); \quad (X_{ij'} + X_{i'j}); \quad \sqrt{-1}\,(X_{ij} + X_{i'j'}); \quad \sqrt{-1}\,(X_{ij'} - X_{i'j}).$$

La représentation linéaire $g_1(\mathbf{SO}(4n, C))$ est définie dans [8], p. 38; elle porte sur les 2^{2n-1} variables $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n})$, où les $\varepsilon_i (i = 1, \ldots, n)$ valent ± 1, le produit de tous valant $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n} = -1$ (dans la formule donnée dans [8], p. 38, il faut ajouter, après $\varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{j-1}$, le terme manquant ε_j). La théorie des poids montre qu'une antiinvolution invariante par $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n))$ est nécessairement de la forme $Z_\varepsilon = \lambda(\varepsilon)\bar{z}_{\varepsilon'}$, où les $\lambda(\varepsilon)$ sont des coefficients convenables à déterminer et où ε' désigne $(-\varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_{2n})$. Pour les matrices S_ε^η de la représentation $g_1(\mathbf{SO}^\star(2n))$, on doit donc avoir $\lambda(\varepsilon) S_\varepsilon^\eta = \lambda(\eta) \bar{S}_{\varepsilon'}^{\eta'}$. En employant les notations introduites dans [3], p. 303, on trouve les conditions

$$(48.1) \qquad \begin{cases} \lambda(\varepsilon(i, \quad j)) = (-1)^{j-i+1} \lambda(\varepsilon(-i, -j)), \\ \lambda(\varepsilon(i, -j)) = (-1)^{j-i} \quad \lambda(\varepsilon(-i, \quad j)). \end{cases}$$

Partant de $\lambda(-1111\ldots11) = 1$, on trouve $\lambda(1-111\ldots11) = -1$, $\lambda(1-1-1-1\ldots11) = -1$, ... jusqu'à $\lambda(1-1-1-1\ldots-1-1) = -1$; l'antiinvolution est donc d'indice -1, la représentation $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n))$ de 2^e classe. Pour la représentation $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n))$, dont les variables sont les $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n}$, mais cette fois de produit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n} = 1$, et les mêmes formules, on obtient donc : partant de $\lambda(1111\ldots11) = 1$, $\lambda(-1-111\ldots11) = 1$, $\lambda(-1-1-1-1\ldots11) = 1$, ... jusqu'à $\lambda(-1-1-1-1\ldots-1-1) = 1$; l'antiinvolution est de 1^{re} classe d'indice 1 et la représentation $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n))$ de 1^{re} classe.

Pour compléter ces résultats et obtenir deux classes différentes pour la représentation $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$, définissons la forme réelle $\mathbf{SO}^\star(4n)$, à partir de $\mathbf{SO}(4n, C)$, par les transformations

$$(X_{ij} - \varepsilon_i\varepsilon_j X_{i'j'}); \quad (X_{ij'} + \varepsilon_i\varepsilon_j X_{i'j}); \quad \sqrt{-1}(X_{ij} + \varepsilon_i\varepsilon_j X_{i'j'}); \quad \sqrt{-1}(X_{ij'} - \varepsilon_i\varepsilon_j X_{i'j}).$$

Désignons alors par $\mathbf{SO}^\star(4n)^+$ [resp. $\mathbf{SO}^\star(4n)^-$] une telle forme réelle, correspondant à des indices $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i'}$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ pour lesquels un nombre pair (resp. impair) de ε_i valent 1. Le cas considéré initialement était celui où tous les ε_i valaient 1. Les calculs faits ci-dessus pour la recherche de l'antiinvolution invariante par la représentation correspondante restent valables, le seul changement consistant dans les formules (48.1) à ajouter le produit $\varepsilon_i\varepsilon_j$. On trouve donc que :

La représentation $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n)^+)$ et la représentation $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n)^-)$ sont de 2^e classe; la représentation $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n)^-)$ et la représentation $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n)^+)$ sont de 1^{re} classe.

On peut vérifier sur les automorphismes involutifs commutant exhibés dans les n^{os} 38 et 39 pour définir les deux E. L. S. considérés ci-dessus et fournissant les représentations (non précisées) de $g_1(\mathbf{SO}^\star(12))$, que, dans chacun des cas, la forme réelle $\mathbf{SO}^\star(12)$ est bien celle correspondante : à $\mathbf{SO}^\star(12)^+$ pour l'E.L.S.

de $\mathbf{E}_7^1$ et à $\mathbf{SO}^\star(12)^-$ pour l'E. L. S. de $\mathbf{E}_7^2$. Même remarque pour les représentations $g_1(\mathbf{SO}^\star(16)^-)$ des deux E. L. S. $\mathbf{E}_8^1/\mathbf{SO}^\star(16)$ et $\mathbf{E}_8^2/\mathbf{SO}^\star(16)$.

La classe d'une forme réelle d'une représentation complexe fondamentale n'est donc pas déterminée univoquement; mais nous allons relier ceci au théorème 23.2 : non a vu, en effet, dans la démonstration de ce théorème dont on gardera le otations, que la forme réelle $\mathbf{SO}^\star(4n)$ définie ci-dessus peut être considérées comme obtenue à partir du G-automorphisme de $\mathbf{SO}(4n, \mathrm{C})$ dont les G-nombres sont $\frac{1}{2}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$. La forme réelle $\mathbf{SO}^\star(4n)^+$ s'obtient avec les G-nombres $\frac{1}{2}(1, \ldots, 1)$ et $\mathbf{SO}^\star(4n)^-$ avec $\frac{1}{2}(-1, 1, \ldots, 1)$ et les deux formes réelles $\mathbf{SO}^\star(4n)^+$ et $\mathbf{SO}^\star(4n)^+$ ne sont donc pas isomorphes dans $\mathbf{SO}(4n, \mathrm{C})$ par un automorphisme *intérieur* de $\mathbf{SO}(4n, \mathrm{C})$. Ceci permet d'expliquer que les représentations correspondantes $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n)^+)$ et $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n)^-)$ n'ont pas la même classe. En effet, on a le résultat général suivant, qui concerne les formes réelles d'une représentation complexe $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), \mathrm{V})$ d'une algèbre de Lie complexe $\tilde{\mathfrak{p}}$:

Proposition 48.1. — *Soit* $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), \mathrm{V})$ *une représentation linéaire complexe d'une algèbre de Lie complexe* $\tilde{\mathfrak{p}}$, *et* $(\rho(\mathfrak{p}), \mathrm{V})$ [*resp.* $(\rho(\mathfrak{p}'), \mathrm{V})$] *la représentation, dans le même espace vectoriel complexe, restreinte à la forme réelle* $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{p}'$) *de* $\tilde{\mathfrak{p}}$. *Si les formes réelles* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p}'$ *de* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *sont définies par des antiinvolutions* σ *et* σ' *de* $\tilde{\mathfrak{p}}$, *telles qu'il existe un automorphisme intérieur* φ *de* $\mathfrak{p}$ *pour lequel* $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$, *alors les représentations* $(\rho(\mathfrak{p}), \mathrm{V})$ *et* $(\rho(\mathfrak{p}'), \mathrm{V})$ *ont même classe.*

La démonstration se fait en montrant que, dans les conditions de l'énoncé, si $(\rho(\mathfrak{p}), \mathrm{V})$ est de 1^re^ classe, alors $(\rho(\mathfrak{p}'), \mathrm{V})$ est aussi de 1^re^ classe. A toute représentation $(\rho(\tilde{\mathfrak{p}}), \mathrm{V})$ d'une algèbre de Lie complexe [resp. représentation réelle d'une algèbre de Lie réelle $(\rho(\mathfrak{p}), \mathrm{V}_\mathrm{R})$], on associe une algèbre de Lie complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. réelle $\mathfrak{g}$), définie par l'espace vectoriel réel complexe $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{p}} + \tilde{\mathfrak{v}}$ (resp. réel $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{v}$) où $\tilde{\mathfrak{v}}$ (resp. $\mathfrak{v}$) est un espace vectoriel complexe (resp. réel) de même dimension que V (resp. V_R) et les crochets suivants :

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \tilde{\mathfrak{v}}, \qquad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \rho(\mathrm{X}).\mathrm{Y} \quad \text{si} \quad \mathrm{X} \in \tilde{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} \in \tilde{\mathfrak{v}}$$

et le crochet de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{p}}$ si X et Y appartiennent à $\tilde{\mathfrak{p}}$ (*voir* [3], p. 281-282; cette notion est celle de *somme semi-directe* associée à une représentation : [25], exposé 22, p. 3). Rappelons enfin qu'une antiinvolution d'une algèbre de Lie complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$\sigma(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = \sigma(\mathrm{X}) + \sigma(\mathrm{Y}), \qquad \sigma([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) = [\sigma(\mathrm{X}), \sigma(\mathrm{Y})] \qquad \text{et} \qquad \sigma(\lambda\mathrm{X}) = \bar{\lambda}(\mathrm{X})$$

(où $\bar{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de λ).

Par définition ([10], p. 158-159) la représentation $(\rho(\mathfrak{p}), \mathrm{V})$ est de 1^re^ classe si cette représentation laisse invariante une antiinvolution χ de V; on doit avoir :

$$\rho(X).(\chi Y) = \chi(\rho(X).Y), \qquad \text{quels que soient X dans } \mathfrak{p} \text{ et Y dans V.}$$

C'est-à-dire, pour l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{p}} + \tilde{\mathfrak{v}}$ associée à cette représentation : $[X, \chi Y] = \chi[X, Y]$, quels que soient $Y \in \mathfrak{v}$ et X dans la forme réelle $\mathfrak{p}$ considérée de $\tilde{\mathfrak{p}}$; la forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$ étant définie par l'antiinvolution σ de $\mathfrak{p}$, l'ensemble de σ et de χ permet de définir une antiinvolution ξ de toute l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$, en posant

$$\xi(X) = \sigma(X) \quad \text{si} \quad X \in \tilde{\mathfrak{p}} \qquad \text{et} \qquad \xi(X) = \chi(Y) \quad \text{si} \quad Y \in \tilde{\mathfrak{v}}.$$

L'automorphisme intérieur φ de $\mathfrak{p}$ se prolonge en un automorphisme, noté encore φ, de toute l'algèbre $\mathfrak{g}$; et l'application de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ définie par le produit $\varphi\xi\varphi^{-1}$ est encore une antiinvolution ξ' de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Cette antiinvolution induit sur $\tilde{\mathfrak{v}}$ une antiinvolution χ', et l'on a, pour X dans $\tilde{\mathfrak{p}}$ et Y dans $\tilde{\mathfrak{v}}$:

$$\chi'[X, Y] = \xi'[X, Y] = [\sigma' X, \chi' Y]$$

et comme la forme réelle $\mathfrak{p}'$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$ est l'ensemble des points fixes de l'antiinvolution $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$, on a $\chi'[X, Y] = [X, \chi' Y]$ quels que soient X dans $\mathfrak{p}'$ et Y dans $\tilde{\mathfrak{v}}$; ou encore, l'antiinvolution χ' de V est invariante par la représentation $(\rho(\mathfrak{p}'), V)$, c'est-à-dire que cette représentation est de 1re classe.

Appliquons le théorème 23.2 et la proposition 48.1 à une forme réelle $g_k(\mathfrak{p})$ d'une représentation fondamentale $g_k(\tilde{\mathfrak{p}})$ de l'algèbre simple complexe $\tilde{\mathfrak{p}}$: on obtient la conclusion que *la classe de $g_k(\mathfrak{p})$ est bien définie par la forme réelle $\mathfrak{p}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$, pour toutes les formes réelles de toutes les algèbres complexes simples et toutes leurs représentations fondamentales,* à l'exception des représentations fondamentales $g_k(\mathbf{SO}(4n, C))$ et les formes réelles de $\mathbf{SO}(4n, C)$ qui sont isomorphes à $\mathbf{SO}^\star(4n)$. Nous avons complètement étudié, dans ce qui précède, le cas des deux représentations fondamentales g_1 et g_2; ajoutons seulement que l'on pouvait prévoir *a priori* que $g_1(\mathbf{SO}^\star(4n)^+)$ et $g_2(\mathbf{SO}^\star(4n)^-)$ avaient la même classe, car $\mathbf{SO}^\star(4n)^+$ est isomorphe de $\mathbf{SO}^\star(4n)^-$ pour un automorphisme *extérieur* de $\mathbf{SO}(4n, C)$ et on lit facilement sur les poids dominants des représentations g_1 et g_2 qu'un tel automorphisme extérieur échange les poids dominants de g_1 et g_2, donc que les représentations irréductibles correspondantes sont isomorphes par cet isomorphisme.

Il ne reste plus qu'à déterminer la classe des représentations $g_k(\mathbf{SO}^\star(4n))$, pour $k = 3, \ldots, 2n$. La représentation g_k, pour $k > 3$, et le produit extérieur $\overset{p-2}{\bigwedge} g_3$ (définition dans [3], p. 296-297) et la classe d'un produit extérieur se déduit canoniquement de la représentation initiale. Quant à la représentation $g_3(\mathbf{SO}^\star(4n))$, elle laisse toujours invariante une antiinvolution de 2e espèce, quels que soient les G-nombres $\frac{1}{2}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$ qui servent à la définir : cette antiinvolution est toujours $\chi(X_i) = \overline{X}_{i'}$ et $\chi(X_{i'}) = -\overline{X}_i$, la représentation correspondante étant celle du *groupe* linéaire laissant invariante simultanément :

$$\text{la forme quadratique : } \sum_{p=1}^{2n} \varepsilon_p z_p z_{p'}$$

$$\text{et la forme d'Hermite : } \sum_{p=1}^{2n} \varepsilon_p (z_p \bar{z}_p - z_{p'} \bar{z}_{p'}).$$

Dans le cas des structures réelles $\mathbf{SO}^1(8)$, $\mathbf{SO}^2(8)$, $\mathbf{SO}^3(8)$, $\mathbf{SO}^4(8)$, $\mathbf{SO}^\star(8)$, les résultats ci-dessus restent valables (aucune restriction n'a été faite sur n); les différents types possibles pour ces formes réelles ne donnent donc lieu à aucune particularité nouvelle pour les classes des représentations fondamentales.

49. Espaces locaux symétriques, C-symétriques et semi-kählériens. — La proposition 44.1 ramène la recherche des E. L. S. C-symétriques à l'étude de la classe de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$. Les n$^{\text{os}}$ 8 et 9 résolvent le problème pour les cas I et II, et le n° 17 pour les algèbres simples pseudo-complexes. Le cas des E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, avec $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_u$ simples, est un cas particulier de la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, qui est déterminée dans le tableau II; les E. L. S. de ce type, qui sont C-symétriques, seront indiqués dans le tableau II.

La détermination des E. L. S. semi-kählériens est résolue par la :

Proposition 49.1. — *Pour que l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, à $\mathfrak{g}$, semi-simple, soit semi-kählérien, il faut que l'algèbre d'isotopie $\mathfrak{h}$, écrite avec la convention du n° 22, contienne* **T**. *Cette condition est suffisante si $\mathfrak{g}$ est simple.*

Nécessité. — La démonstration est calquée sur celle du théorème 3 de [5]. L'opérateur J définissant la structure complexe de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ commute avec l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$, par définition d'un espace C-symétrique; cet opérateur J vérifie les relations nécessaires pour appartenir à la plus grande algèbre locale d'isotropie (*voir* [5]) : ceci parce que les propriétés du tenseur de courbure des variétés kählériennes sont encore valables dans le cas semi-kählérien. D'autre part, le théorème 16.2 de [24], p. 58 assure que $\mathfrak{g}$ est le plus grand « groupe » d'isométries locales de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; donc J appartient à $\mathfrak{h}$. Enfin, J définit, dans le groupe linéaire engendré par la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, un sous-groupe à un paramètre $\exp(t\mathrm{J})$ (où t parcourt les réels), et ce sous-groupe est compact, puisque $\exp(2\pi \mathrm{J}) = 1$, comme on le voit par exemple en écrivant J sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\text{où I est la matrice unité d'ordre } \frac{1}{2}\dim \mathfrak{m}\right)$.

Le groupe linéaire H_0 ainsi défini contient donc un tore à une dimension dans les sous-groupes compacts maximaux, donc, *a fortiori* d'après la convention du n° 22, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H_0 contient $\mathbf{T}$ dans sa sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_{11}$.

Suffisance. — L'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, à $\mathfrak{g}$ simple, est tel que $\mathfrak{h}$ contient $\mathbf{T}$; la forme compacte $\mathfrak{h}_u$ de $\mathfrak{h}$ contient donc nécessairement $\mathbf{T}$. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est pseudo-complexe, l'E. L. S. ne peut pas être du type $\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_i$, puisque l'algèbre simple $\mathfrak{g}_i$ n'a pas de centre; il est donc du type $\hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i$, donc, $\hat{\mathfrak{k}}_i$ contenant $\mathbf{T}$, c'est que $\mathfrak{k}_i$ contient $\mathbf{T}$; l'E.L.S. compact correspondant est $(\mathfrak{g}_u\oplus\mathfrak{g}_u)/(\mathfrak{k}_i\oplus\mathfrak{k}_i)=(\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i)\oplus(\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i)$; comme $\mathfrak{k}_i$ contient $\mathbf{T}$, l'E. L. S. $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$, qui est compact, est *kählérien* parce que $\mathfrak{g}_u$ est *simple* et la somme directe $(\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i)\oplus(\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i)$ est encore un E. L. S. *kählérien.* Dans le cas où $\mathfrak{g}_u$ est simple, l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ est *kählérien* parce que $\mathfrak{h}_u$ contient $\mathbf{T}$ et que $\mathfrak{g}_u$ est simple.

Dans les deux cas, appelons $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ l'E. L. S. compact $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et dont vient de voir qu'il est kählérien; il existe donc dans $\mathfrak{h}_u$ un élément J, pour lequel l'automorphisme, d'espace vectoriel, de $\mathfrak{m}_u$ défini par $X\to[J, X]$ est de carré -1 et compatible avec la métrique canonique de $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ (compatible exprimant que cette métrique définit, pour la structure complexe définie par J, une forme d'Hermite). Introduisons la décomposition $\mathfrak{m}_u=\mathfrak{g}_{1-1}+\mathfrak{g}_{-1-1}$. Ces deux espaces vectoriels sont orthogonaux pour la métrique; d'autre part, puisque l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$ s'écrit avec $\mathbf{T}$, c'est que $J\in\mathfrak{g}_{11}$; des relations du crochet (43.1) on déduit donc que

$$[J, \mathfrak{g}_{1-1}]\subset\mathfrak{g}_{1-1} \qquad \text{et} \qquad [J, \mathfrak{g}_{-1-1}]\subset\mathfrak{g}_{-1-1}$$

donc l'opérateur J conserve les sous-espaces $\mathfrak{g}_{1-1}$ et $\mathfrak{g}_{-1-1}$. C'est donc que la forme d'Hermite, définie positive, définissant la structure d'E.L.S. semi-kählérien de $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ peut s'écrire $\chi_u=\chi_1+\chi_2$, où χ_1 (resp. χ_2) est une forme d'Hermite, définie positive, sur le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_{1-1}$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1-1}$). Cette forme d'Hermite χ_u étant invariante, définie sur $\mathfrak{g}_{1-1}+\mathfrak{g}_{-1-1}$, étant invariante par la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{11}+\mathfrak{g}_{-11}))$, on en déduit que la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{11}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-11}))$ laisse invariante la forme d'Hermite $\chi=\chi_1-\chi_2$, définie sur $\mathfrak{g}_{1-1}+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1}$; cette forme d'Hermite est de signature $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}_{1-1}-\dim\mathfrak{g}_{-1-1})$ et définie sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ la structure semi-kählérienne cherchée.

En précisant la proposition 49.1, on obtient un critère pour reconnaître, étant donné l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — tel que $\mathfrak{g}$ soit simple et non pseudo-complexe — lorsque la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ est de 2ᵉ classe, si la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est de 1ʳᵉ classe ou de 2ᵉ classe :

PROPOSITION 49.2. — *Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ un E. L. S. tel que : l'algèbre $\mathfrak{g}$ et sa forme compacte $\mathfrak{g}_u$ sont simples, et l' E. L. S. $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{h}_u$ est kählérien* [*c'est-à-dire* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ *est de* 2ᵉ *classe*]. *Alors, si l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$, écrite avec la convention du n° 20, contient :*

— $\mathbf{T}$, *la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ *est de* 2ᵉ *classe;*

— $\mathbf{R}$, *la représentation* $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ *est de* 1ʳᵉ *classe.*

Le cas où $\mathfrak{h}$ contient **T** vient d'être traité dans la démonstration de la proposition 49.1. Avec les mêmes notations, si maintenant $\mathfrak{h}$ contient **R**, c'est que l'élément J appartient à $\mathfrak{g}_{-11}$. Les relations (43.1) montrent, cette fois-ci, que

$$[J, \mathfrak{g}_{1-1}] \subset \mathfrak{g}_{-1-1} \quad \text{et} \quad [J, \mathfrak{g}_{-1-1}] \subset \mathfrak{g}_{1-1},$$

c'est-à-dire que l'automorphisme (de carré -1) de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_u = \mathfrak{g}_{1-1} + \mathfrak{g}_{-1-1}$, *échange* $\mathfrak{g}_{1-1}$ et $\mathfrak{g}_{-1-1}$. Les sous-espaces $\mathfrak{g}_{1-1}$ et $\mathfrak{g}_{-1-1}$ sont donc ceux qui interviennent dans la décomposition des matrices de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_u), \mathfrak{m}_u)$ donnée dans la formule (44.1), et en même temps dans la formule (43.2). Ces matrices sont de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

La représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ est donc définie [passage, dans le n° 43, de la formule (43.2) à la formule (43.3)] par des matrices du type

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

et une telle représentation est *réductible;* donc (proposition 45.1), elle est de 1^re^ classe. Enfin, cet E. L. S. n'est certainement pas C-symétrique; sinon la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})_C, \mathfrak{m}_C)$ devrait être réductible en quatre morceaux, ce qui est impossible parce que $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_v), \mathfrak{m}_v)$ est irréductible.

La nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, donnée dans le tableau II, permet de vérifier cette proposition *a posteriori.*

50. Tableau II. — Dans le tableau II, on trouvera toutes les structures locales symétriques, non isomorphes, du cas III du n° 8; c'est-à-dire que tout E. L. S. sera : soit un E. L. S. du tableau II, soit un E. L. S. du cas II [de la forme $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})/\mathfrak{g}$, et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$], soit une somme directe

$$\Big(\bigoplus_i \mathfrak{g}_i\Big)/\Big(\bigoplus_i \mathfrak{h}_i\Big) = \bigoplus_i (\mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i),$$

où tous les $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{h}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ sont des E. L. S. du tableau II ou du cas II.

Les E. L. S. du tableau II sont donnés dans l'ordre suivant : pour chaque structure simple complexe $\tilde{\mathfrak{g}}$, si l'on note $\hat{\mathfrak{g}}$ la forme réelle pseudo-complexe, $\mathfrak{g}_u$ la forme compacte et $\mathfrak{g}_i (i = 1, \ldots, p)$ les autres formes réelles de $\tilde{\mathfrak{g}}$, on trouve d'abord les ensembles des quatre E. L. S. : $\{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{k}_i,\ \mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i,\ \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{k}}_i,\ \hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_i\}$, pour $i = 1, \ldots, p$. Ensuite, on trouve les E. L. S. des formes réelles $\mathfrak{g}_i$, pour i allant de 1 à p. On a redonné les E. L. S. riemanniens définis positifs $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{k}_i$ et $\mathfrak{g}_u/\mathfrak{k}_i$, déterminés dans [11], d'une part pour que le tableau II soit complet, d'autre part pour mentionner la nature de la représentation correspondante $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_i), \mathfrak{m}_i)$, déterminée aussi dans [11], mais qui est essentielle pour déterminer la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$ des autres E. L. S.

Sur chaque ligne, correspondant à un même E. L. S., on trouvera dans l'ordre : dans la première colonne, l'algèbre $\mathfrak{g}$ de l'E. L. S. Dans la deuxième colonne, l'algèbre $\mathfrak{h}$ d'isotropie; dans la troisième colonne, la nature de la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, ou, si cette dernière est *réductible*, de la représentation irréductible qu'elle définit dans un espace vectoriel de dimension moitié; les notations employées pour cette représentation ont été précisées au n° 47. Dans la quatrième colonne, on ne met *rien* si l'E. L. S. est *irréductible*, et l'abréviation « réd. » s'il est *réductible*. Enfin, dans la cinquième colonne, on ne met *rien* si l'E. L. S. n'est pas C-symétrique, on met l'abréviation « C-sym. » s'il est C-symétrique mais n'est pas semi-kählérien, et l'on met l'abréviation « $\frac{1}{2}$ kähl. » s'il est semi-kählérien.

D'après l'ensemble du chapitre III, *on voit que les E. L. S.* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *à* $\mathfrak{g}$ *simple sont bien déterminés — à un isomorphisme près, intérieur ou non, mais qui se prolonge toujours pour des espaces symétriques* G/H *dont le groupe* G *est quelconque d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *— par la structure de* $\mathfrak{g}$ *et la structure de l'algèbre d'isotropie* $\mathfrak{h}$. *Ce qui justifie le tableau* II.

Dans la liste d'espaces locaux symétriques donnée dans [2], il manque les deux espaces $\mathbf{SU}^n(2n)/\mathbf{SO}^\star(2n)$ et $\mathbf{SU}^n(2n)/\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$. Et l'E. L. S. $\mathbf{E}_6^2/\mathbf{SL}(6, \mathrm{R}) + \mathbf{SU}(2)$ y figure par erreur.

TABLEAU II.

Algèbre $\mathfrak{g}$.	Sous-algèbre $\mathfrak{h}$.	Représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$.	Réductibilité.	
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$ ou $\mathbf{SU}(n)$	$\mathbf{SO}(n)$	$g_p(\mathbf{SO}(n)) \veebar g_p(\mathbf{SO}(n))$ ($p=2$ si n impair, $p=3$ si n pair)		
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$g_p(\mathbf{SO}(n)) \veebar g_p(\mathbf{SO}(n, \mathrm{C}))$ ($p=2$ si n impair, $p=3$ si n pair)		C-sym.
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$	rep. adjointe de $\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$		
$\mathbf{SU}^\star(2n)$ ou $\mathbf{SU}(2n)$	$\mathbf{Sp}(n)$	$g_2(\mathbf{Sp}(n))$		
$\mathbf{SL}(2n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$g_2(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{SL}(2n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SU}^\star(2n)$	rep. adjointe de $\mathbf{SU}^\star(2n)$		
$\mathbf{SU}^i(n)$ ou $\mathbf{SU}(n)$	$\mathbf{SU}(i) + \mathbf{SU}(n-i) + \mathbf{T}$	$\mathbf{SU}(i)) \times \mathbf{SU}(n-i))$		kähl.
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SL}(i, \mathrm{C}) + \mathbf{SL}(n-i, \mathrm{C}) + \mathrm{C}^\star$	$(\mathbf{SL}(i, \mathrm{C})) \times (\mathbf{SL}(n-i, \mathrm{C})) \times \mathrm{C}^\star$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SU}^i(n)$	rep. adjointe de $\mathbf{SU}^i(n)$		
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SL}(i, \mathrm{R}) + \mathbf{SL}(n-i, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$	$(\mathbf{SL}(i, \mathrm{R})) \times (\mathbf{SL}(n-i, \mathrm{R})) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SO}^i(n)$	$g_p(\mathbf{SO}^i(n)) \veebar g_p(\mathbf{SO}^i(n))$ ($p=2$ si n impair, $p=3$ si n pair)		
$\mathbf{SL}(2n, \mathrm{R})$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$g^2(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{SL}(2n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \overline{g_{n-1}(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}))}$		$\frac{1}{2}$ kähl.

Algèbre $\mathfrak{g}$.	Sous-algèbre $\mathfrak{h}$.	Représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h})), \mathfrak{m})$.	Réductibilité.	
$\mathbf{SU}^*(2n)$	$\mathbf{SU}^*(2i) + \mathbf{SU}^*(2n-2i) + \mathbf{R}$	$(\mathbf{SU}^*(2i)) \times \mathbf{SU}^*(2n-2i)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{SU}^*(2n)$	$\mathbf{Sp}^i(n)$	$g_2(\mathbf{Sp}^i(n))$		
$\mathbf{SU}^*(2n)$	$\mathbf{SO}^*(2n)$	$g_3(\mathbf{SO}^*(2n)) \underline{\times} g_3(\mathbf{SO}^*(2n))$		
$\mathbf{SU}^*(2n)$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \overline{g_{n-1}(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}))}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SU}^i(n)$	$\mathbf{SU}^k(k+h) + \mathbf{SU}^{i-k}(n-k-h) + \mathbf{T}$	$\mathbf{SU}^k(k+h)) \times \mathbf{SU}^{i-k}(n-k-h)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SU}^i(n)$	$\mathbf{SO}^i(n)$	$g_p(\mathbf{SO}^i(n)) \times g_p(\mathbf{SO}^i(n))$ ($p=2$ si n impair, $p=3$ si n pair)		
$\mathbf{SU}^{2i}(2n)$	$\mathbf{Sp}^i(n)$	$g_2(\mathbf{Sp}^i(n))$		
$\mathbf{SU}^n(2n)$	$\mathbf{SO}^*(2n)$	$g_3(\mathbf{SO}^*(2n)) \underline{\times} g_3(\mathbf{SO}^*(2n))$		
$\mathbf{SU}^n(2n)$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$g_2(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{SU}^n(2n)$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \overline{g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}))}$	réd.	
$\mathbf{SO}^*(2n)$ ou $\mathbf{SO}(2n)$	$\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$	$g_2(\mathbf{SU}(n)) \times \mathbf{T}$		kähl.
$\mathbf{SO}(2n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{C}^*$	$g_2(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \mathbf{C}^*$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SO}(2n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}^*(2n)$	rep. adjointe de $\mathbf{SO}^*(2n)$		
$\mathbf{SO}^i(n)$ ou $\mathbf{SO}(n)$	$\mathbf{SO}(i) + \mathbf{SO}(n-i)$ (avec $i=1$ ou $i>2$ et $n-i>2$)	$(\mathbf{SO}(i)) \times \mathbf{SO}(n-i))$		
$\mathbf{SO}^2(n)$ ou $\mathbf{SO}(n)$	$\mathbf{SO}(n-2) + \mathbf{T}$	$(\mathbf{SO}(n-2)) \times \mathbf{T}$		kähl.
$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}(i, \mathrm{C}) + \mathbf{SO}(n-i, \mathrm{C})$ (avec $i=1$ ou $i>2$ et $n-1>2$)	$(\mathbf{SO}(i, \mathrm{C})) \times \mathbf{SO}(n-i, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}(n-2, \mathrm{C}) + \mathbf{C}^*$	$(\mathbf{SO}(n-2, \mathrm{C})) \times \mathbf{C}^*$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SO}^i(n)$	rep. adjointe de $\mathbf{SO}^i(n)$		
$\mathbf{SO}^*(2n)$	$\mathbf{SO}^*(2i) + \mathbf{SO}^*(2n-2i)$ (avec $i>1$ et $n-i>1$)	$(\mathbf{SO}^*(2i)) \times (\mathbf{SO}^*(2n-2i))$		
$\mathbf{SO}^*(2n)$	$\mathbf{SO}^*(2n-2) + \mathbf{T}$	$(\mathbf{SO}^*(2n-2)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SO}^*(2n)$	$\mathbf{SO}(n, \mathbf{C})$	$(\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})) \times \overline{\mathbf{SO}(n, \mathrm{C}))}$		
$\mathbf{SO}^*(2n)$	$\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}$	$g_2 \mathbf{SU}^i(n)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SO}^*(4n)$	$\mathbf{SU}^*(2n) + \mathbf{R}$	$g_2(\mathbf{SU}^* 2n)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{SO}^i(n)$	$\mathbf{SO}^k(k+h) + \mathbf{SO}^{i-k}(n-k-h)$ (avec $k+h>2$ et $n-k-h>2$)	$(\mathbf{SO}^k k+h)) \times (\mathbf{SO}^{i-k}(n-k-h))$		
$\mathbf{SO}^i(n)$	$\mathbf{SO}^{i-2}(n-2) + \mathbf{T}$	$(\mathbf{SO}^{i-2}(n-2)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{SO}^i(n)$	$\mathbf{SO}^{i-1}(n-2) + \mathbf{R}$	$(\mathbf{SO}^{i-1}(n-2)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{SO}^{2i}(2n)$	$\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}$	$g_2(\mathbf{SU}^i(n)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl
$\mathbf{SO}^n(2n)$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$	$g_2(\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{SO}^n(2n)$	$\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})$	$(\mathbf{SO}(n, \mathrm{C})) \times \overline{\mathbf{SO}(n, \mathrm{C}))}$		

Algèbre $\mathfrak{g}$.	Sous-algèbre $\mathfrak{h}$.	Représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$.	Réductibilité.	
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$ ou $\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{SU}(n) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SU}(n)) \underline{\times} g_1(\mathbf{SU}(n)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{C}) + \mathbf{C}^*$	$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \underline{\times} g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{C})) \times \mathbf{C}^*$	réd.	$\frac{1}{2}$ hähl.
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	rep. adjointe de $\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$		
$\mathbf{Sp}^i(n)$ ou $\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{Sp}(i) + \mathbf{Sp}(n-i)$	$\mathbf{Sp}(i)) \times (\mathbf{Sp}(n-i))$		
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}(i, \mathrm{C}) + \mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{C})$	$(\mathbf{Sp}(i, \mathrm{C})) \times (\mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{C})$		C-sym.
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}^i(n)$	rep. adjointe de $\mathbf{Sp}^i(n)$		
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{Sp}(i, \mathrm{R}) + \mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{R})$	$(\mathbf{Sp}(i, \mathrm{R})) \times \mathbf{Sp}(n-i, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SU}^i(n)) \underline{\times} g_1(\mathbf{SU}^i(n)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{R})$	$\mathbf{SL}(n, \mathrm{R}) + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})) \underline{\times} g_1(\mathbf{SL}(n, \mathrm{R})) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{Sp}(2n, \mathrm{R})$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$(\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})) \times \overline{\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C}))}$		
$\mathbf{Sp}^i(n)$	$\mathbf{Sp}^k(k+h) + \mathbf{Sp}^{i-k}(n-k-h)$	$(\mathbf{Sp}^k(k+h)) \times (\mathbf{Sp}^{i-k}(n-l-h))$		
$\mathbf{Sp}^i(n)$	$\mathbf{SU}^i(n) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SU}^i(h)) \underline{\times} g_1(\mathbf{SU}^i(n)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{Sp}^n(2n)$	$\mathbf{SU}^*(2n) + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{SU}^*(2))n \underline{\times} (g_1(\mathbf{SU}^*(2, n)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{Sp}^n(2n)$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})$	$\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C})) \times (\mathbf{Sp}(n, \mathrm{C}))$		
$\mathbf{G}_2^*$ ou $\mathbf{G}_2$	$\mathbf{SU}(2) + \mathbf{SU}(2)$	$\overset{3}{\underline{\times}} g_1(\mathbf{SU}(2)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{G}_2^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{SL}(2, \mathrm{C}) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{C})$	$\overset{3}{\underline{\times}}(g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{C})) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{G}_2^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{G}_2^*$	rep. adjointe de $\mathbf{G}_2^*$		
$\mathbf{G}_2^*$	$\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$\overset{3}{\underline{\times}}(g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R})) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{F}_4^1$ ou $\mathbf{F}_4$	$\mathbf{Sp}(3) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{Sp}(3)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{F}_4^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{Sp}(3, \mathrm{C}) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{C})$	$g_3(\mathbf{Sp}(3, \mathrm{C})) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{F}_4^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{F}_4^1$	repr. adjointe de $\mathbf{F}_4^1$		
$\mathbf{F}_4^2$ ou $\mathbf{F}_4$	$\mathbf{SO}(9)$	$g_1\,\mathbf{SO}(9))$		
$\mathbf{F}_4^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{SO}(9, \mathrm{C})$	$g_1(\mathbf{SO}(9, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{F}_4^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{F}_4^2$	repr. adjointe de $\mathbf{F}_4^2$		
$\mathbf{F}_4^1$	$\mathbf{SO}^4(9)$	$g_1(\mathbf{SO}^4(9))$		
$\mathbf{F}_4^1$	$\mathbf{Sp}^1(3) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{Sp}^1(3)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{F}_4^1$	$\mathbf{Sp}(3, \mathrm{R}) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_3(\mathbf{Sp}(3, \mathrm{R})) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$		
$\mathbf{F}_4^2$	$\mathbf{SO}^1(9)$	$g_1(\mathbf{SO}^1(9))$		
$\mathbf{F}_4^2$	$\mathbf{Sp}^1(3) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{Sp}^1(3)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_6^1$ ou $\mathbf{E}_6$	$\mathbf{Sp}(4)$	$g_4(\mathbf{Sp}(4))$		
$\mathbf{E}_6^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{Sp}(4, \mathrm{C})$	$g_4(\mathbf{Sp}(4, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{E}_6^{\mathrm{C}}$	$\mathbf{E}_6^1$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_6^1$		
$\mathbf{E}_6^{\mathrm{C}}$ ou $\mathbf{E}_6$	$\mathbf{SU}(6) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{SU}(6)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		

Algèbre $\mathfrak{g}$	Sous-algèbre $\mathfrak{h}$.	Représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$.	Réductibilité.	
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{SL}(6, C) + \mathbf{SL}(2, C)$	$g_3(\mathbf{SL}(6, C)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, C))$		C-sym.
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{E}_6^2$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_6^2$		
$\mathbf{E}_6^3$ ou $\mathbf{E}_6$	$\mathbf{SO}(10) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SO}(10)) \times \mathbf{T}$		kähl.
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{SO}(10, C) + \mathbf{C}^*$	$g_1(\mathbf{SO}(10, C)) \times \mathbf{C}^*$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{E}_6^3$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_6^3$		
$\mathbf{E}_6^4$ ou $\mathbf{E}_6$	$\mathbf{F}_4$	$g_1(\mathbf{F}_4)$		
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{F}_4^C$	$g_1(\mathbf{F}_4^C)$		C-sym.
$\mathbf{E}_6^C$	$\mathbf{F}_6^4$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_6^4$		
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{F}_4^1$	$g_1(\mathbf{F}_4^1)$		
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{SU}^*(6) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{SU}^*(6)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{SO}^5(10) + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{SO}^5(10)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{Sp}^2(4)$	$g_4(\mathbf{Sp}^2(4))$		
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{Sp}(4, R)$	$g_4(\mathbf{Sp}(4, R))$		
$\mathbf{E}_6^1$	$\mathbf{SL}(6, R) + \mathbf{SL}(2, R)$	$g_3(\mathbf{SL}(6, R)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, R)$		
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{SO}^*(10) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SO}^*(10)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{SO}^4(10) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SO}^4(10)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{SU}^2(6) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{SU}^3(6)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{SU}^3(6) + \mathbf{SL}(2, R)$	$g_3(\mathbf{SU}^3(6)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, R)$		
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{Sp}^1(4)$	$g_4(\mathbf{Sp}^1(4))$		
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{F}_4^1$	$g_1(\mathbf{F}_4^1)$		
$\mathbf{E}_6^2$	$\mathbf{Sp}(4, R)$	$g_4(\mathbf{Sp}(4, R))$		
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{F}_4^2$	$g_1(\mathbf{F}_4^2)$		
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{SO}^2(10) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SO}^2(10)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{SU}^2(6) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{SU}^2(6)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{Sp}^2(4)$	$g_4(\mathbf{Sp}^2(4))$		
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{SU}^1(6) + \mathbf{SL}(2, R)$	$g_3(\mathbf{SU}^1(6)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, R))$		
$\mathbf{E}_6^3$	$\mathbf{SO}^*(10) + \mathbf{T}$	$g_3(\mathbf{SU}^*(10)) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_6^4$	$\mathbf{SU}^*(6) + \mathbf{SU}(2)$	$g_3(\mathbf{SU}^*(6)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_6^4$	$\mathbf{Sp}^1(4)$	$g_4(\mathbf{Sp}^1(4))$		
$\mathbf{E}_6^4$	$\mathbf{SO}^1(10) + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{SO}^1(10)) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{E}_6^4$	$\mathbf{F}_4^2$	$g_1(\mathbf{F}_4^1)$		
$\mathbf{E}_7^1$ ou $\mathbf{E}_7$	$\mathbf{SU}(8)$	$g_4(\mathbf{SU}(8)$		
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{SL}(8, C)$	$g_4(\mathbf{SL}(8, C))$		
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{E}_7^1$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_7^1$		
$\mathbf{E}_2^7$ ou $\mathbf{E}_7$	$\mathbf{SO}(12) + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{SO}(12)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{SO}(12, C) + \mathbf{SL}(2, C)$	$g_1(\mathbf{SO}(12, C)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, C))$		C-sym.
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{E}_7^2$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_7^2$		

Algèbre $\mathfrak{g}$.	Sous-algèbre $\mathfrak{h}$.	Représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$.	Réductibilité.	
$\mathbf{E}_7^3$ ou $\mathbf{E}_7$	$\mathbf{E}_6 + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{E}_6) \times \mathbf{T}$		kähl.
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{E}_6^C + \mathbf{C}^*$	$g_1(\mathbf{E}_6^C) \times \mathbf{C}^*$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_7^C$	$\mathbf{E}_7^3$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_7^3$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{SO}^*(12) + \mathbf{SU}(2)$	$g_1(\mathbf{SO}^*(12)^+) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{E}_6^2 + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{E}_6^2) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{SO}^6(12) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_1(\mathbf{SO}^6(12)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{SU}^4(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^4(8))$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{SL}(8, \mathrm{R})$	$g_4(\mathbf{SL}(8, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{SU}^*(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^*(8))$		
$\mathbf{E}_7^1$	$\mathbf{E}_6^1 + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{E}_6^1) \times \mathbf{R}$	réd.	
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{E}_6^3 + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{E}_6^3) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{SO}^4(12) + \mathbf{SU}(2)$	$g_1(\mathbf{SO}^4(12)) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{SU}^4(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^4(8))$		
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{SU}^2(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^2(8))$		
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{E}_6^2 + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{E}_6^2) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_7^2$	$\mathbf{SO}^*(12) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_1(\mathbf{SO}^*(12)^-) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{SU}^*(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^*(8))$		
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{SO}^2(12) + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_1(\mathbf{SO}^2(12)) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{E}_6^3 + \mathbf{T}$	$g_1(\mathbf{E}_6^3) \times \mathbf{T}$		$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{SU}^2(8)$	$g_4(\mathbf{SU}^2(8))$		
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{SO}^*(12) + \mathbf{SU}(2)$	$g_1(\mathbf{SO}^*(12)^+) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_7^3$	$\mathbf{E}_6^4 + \mathbf{R}$	$g_1(\mathbf{E}_6^4) \times \mathbf{R}$	réd.	$\frac{1}{2}$ kähl.
$\mathbf{E}_8^1$ ou $\mathbf{E}_8^C$	$\mathbf{SO}(16)$	$g_1(\mathbf{SO}(16))$		
$\mathbf{E}_8^C$	$\mathbf{SO}(16, \mathrm{C})$	$g_1(\mathbf{SO}(16, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{E}_8^C$	$\mathbf{E}_8^1$	repr. adjointe de $\mathbf{E}_8^1$		
$\mathbf{E}_8^2$ ou $\mathbf{E}_8$	$\mathbf{E}_7 + \mathbf{SU}(2)$	$g_2(\mathbf{E}_7) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_8^C$	$\mathbf{E}_7^C + \mathbf{SL}(2, \mathrm{C})$	$g_2(\mathbf{E}_7^C) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{C}))$		C-sym.
$\mathbf{E}_8^C$	$\mathbf{E}_8^2$	rep. adjointe de $\mathbf{E}_8^2$		
$\mathbf{E}_8^1$	$\mathbf{E}_7^2 + \mathbf{SU}(2)$	$g_2(\mathbf{E}_7^2) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_8^1$	$\mathbf{SO}^8(16)$	$g_1(\mathbf{SO}^8(16))$		
$\mathbf{E}_8^1$	$\mathbf{SO}^*(16)$	$g_1(\mathbf{SO}^*(16)^-)$		
$\mathbf{E}_8^1$	$\mathbf{E}_7^1 + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_2(\mathbf{E}_7^1) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		
$\mathbf{E}_8^2$	$\mathbf{SO}^*(16)$	$g_1(\mathbf{SO}^*(16)^-)$		
$\mathbf{E}_8^2$	$\mathbf{SO}^4(16)$	$g_1(\mathbf{SO}^4(16))$		
$\mathbf{E}_8^2$	$\mathbf{E}_7^2 + \mathbf{SU}(2)$	$g_2(\mathbf{E}_7^2) \times g_1(\mathbf{SU}(2))$		
$\mathbf{E}_8^2$	$\mathbf{E}_7^3 + \mathbf{SL}(2, \mathrm{R})$	$g_2(\mathbf{E}_7^3) \times g_1(\mathbf{SL}(2, \mathrm{R}))$		

CHAPITRE V.

Espaces symétriques a groupe semi-simple.

51. Rappels. — Nous rappelons ici quelques propriétés essentielles des groupes de Lie, dont nous aurons besoin dans ce chapitre et le suivant. On les trouvera dans [4], [25].

Théorème 51.1. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe. Il existe un sous-groupe compact connexe* K *de* G *et une sous-variété* N *de* G, *homéomorphe à un espace vectoriel réel, tels qu'on puisse écrire* $G = K.N$, *cette notation signifiant que la variété de* G *est homéomorphe au produit topologique* $K \times N$ *et que tout élément* g *de* G *peut s'écrire d'une manière et d'une seule, sous la forme* $g = kn$, *avec* $k \in K$ *et* $n \in N$. *Tout sous-groupe de* G *jouissant des propriétés ci-dessus est appelé un sous-groupe* compact maximal *de* G. *Si* H *est un sous-groupe compact quelconque de* G, *il existe un automorphisme intérieur* Φ *de* G *tel que* $\Phi(H) \subset K$.

Théorème 51.2. — *Soient* G *un groupe semi-simple,* $G = K.N$ *une décomposition et* K *un sous-groupe compact maximal de* G; *soient* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{k}$ *les algèbres de Lie de* G *et* K *respectivement. Il existe un* $\star$*-automorphisme* τ *de* $\mathfrak{g}$, *tel que, pour la décomposition correspondante* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \sqrt{-1}.\mathfrak{g}_{-1}$, *on ait* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_1$. *Si l'on appelle* G_1 *le sous-groupe connexe de* G *engendré par* $\mathfrak{g}_1$, *alors le centre de* G *est contenu dans* G_1.

Rappelons aussi qu'à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond un groupe de Lie (et un seul, à un isomorphisme près) simplement connexe, soit $G^\star$, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. Tous les groupes de Lie G, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$, peuvent s'obtenir comme quotient $G^\star/Z_G$ de $G^\star$ par un sous-groupe discret quelconque Z_G du centre Z de $G^\star$.

52. Passage d'un E. L. S. a un espace symétrique. — Dans les chapitres II, III et IV, nous avons déterminé tous les E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}$ semi-simple. Il s'agit maintenant de savoir, étant donné un groupe de Lie quelconque G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, s'il existe un espace symétrique G/H dont l'E. L. S. est $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La réponse est fournie par la :

Proposition 52.1. — *Soit* σ *un automorphisme involutif de* $\mathfrak{g}$; *soient* $G^\star$ *le groupe simplement connexe dont l'algèbre de Lie est* $\mathfrak{g}$, *et* $\Sigma^\star$ *l'automorphisme involutif de* $G^\star$, *défini par l'automorphisme* σ *de* $\mathfrak{g}$. *Soit* G *un groupe quelconque d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$, *défini comme le quotient* $G^\star/Z_G$ *de* $G^\star$ *par le sous-groupe discret* Z_G *du centre* Z *de* $G^\star$. *Pour que l'automorphisme* σ *de* $\mathfrak{g}$ *définisse un automorphisme* Σ_G *de* G, *il faut et il suffit que* $\Sigma^\star$ *laisse* Z_G *invariant* : $\Sigma^\star(Z_G) = Z_G$.

Désignons par π_G l'application canonique $G^\star \to G = G^\star/Z_G$. La suffisance est évidente, puisque, si $\Sigma^\star(Z_G) = Z_G$, l'automorphisme $\Sigma^\star$ passe aux quotients, conservant Z_G. Soit maintenant Σ_G un automorphisme de G, induisant l'automorphisme σ de $\mathfrak{g}$ et considérons les deux applications Φ et Ψ de $G^\star$ dans G, définies par $\Phi = \pi_G \Sigma^\star$ et $\Psi = \Sigma_G \pi_G$. Les applications Φ et Ψ définissent deux applications φ et ψ de l'algèbre de Lie de $G^\star$ dans celle de G, et l'on a $\varphi = \Psi = \sigma$. Puisque φ et Ψ sont identiques, c'est donc ([14], théorème 2, p. 113) que Φ et Ψ sont identiques : $\pi_G \Sigma^\star = \Sigma_G \pi_G$. D'autre part, Z_G est le noyau de π_G, donc, en désignant par e l'élément neutre de G, on a bien

$$\pi_\sigma \Sigma^\star(Z_G) = \Sigma_G \pi_\sigma(Z_G) = e, \qquad \text{soit} \quad \Sigma^\star(Z_G) = Z_G.$$

Appliquant en particulier cette proposition à un E. L. S. quelconque, on voit que cet E. L. S. se remontera en un espace symétrique G/H du groupe de Lie G, si et seulement si le sous-groupe Z_G, définissant G par $G = G^\star/Z_G$, est invariant par $\Sigma^\star$. Dans le cas où G est semi-simple, les résultats des chapitres II, III, IV permettent de résoudre complètement le problème. L'étude faite au n° 8 permet, ici encore, de se ramener au cas III, c'est-à-dire de supposer que le groupe G est *simple*; il reste à connaître l'effet sur le centre Z de $G^\star$, de l'automorphisme $\Sigma^\star$ de $G^\star$, induit par l'automorphisme σ définissant l'E. L. S. considéré $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Le théorème 51.2 permet encore d'étudier seulement le problème pour le sous-groupe $G_1^\star$ de $G^\star$; c'est-à-dire le sous-groupe de $G^\star$ engendré par la sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{g}$; c'est donc le cas de l'E. L. S. $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_{11}$, *compact maximal* de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Le groupe simplement connexe $G_1^\star$ est : soit compact, lorsque $\mathfrak{g}_1$ n'a pas de centre, soit le produit d'un groupe compact par le groupe (non compact) $\mathbf{R}$, lorsque le centre de $\mathfrak{g}_1$ a une dimension; le groupe compact intervenant ci-dessus est semi-simple, et produit d'au plus deux groupes simples (*voir* n° 46). Le centre de $G_1^\star$ est le produit direct des centres des groupes dont il est le produit, et d'un sous-groupe discret dénombrable, noté W, de $\mathbf{R}$. L'automorphisme $\Sigma^\star$ conserve $\mathbf{R}$, donc W, et son effet sur W se regarde sur l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}$: avec la convention du n° 22, on voit que $\Sigma^\star$ induit sur W :

soit l'identité, si $\mathfrak{g}_{11}$ contient $\mathbf{T}$;
soit $\Sigma^\star(z) = z^{-1}$, si $\mathfrak{g}_{11}$ ne contient pas $\mathbf{T}$.

Dans le cas où σ échange les deux algèbres simples, isomorphes, intervenant dans $\mathfrak{g}_1$, il est clair que $\Sigma^\star$ échange les centres des groupes simplement connexes correspondants. Il ne reste plus qu'à connaître l'effet sur le centre Z de $S^\star$, d'un automorphisme involutif d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$. Lorsque σ est *intérieur*, ce centre est fixe par $\Sigma^\star$, élément par élément. Lorsque σ est extérieur, on montre que $\Sigma^\star$ induit sur Z l'automorphisme $\Sigma^\star(z) = z^{-1}$, sauf dans le cas où l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$ a pour structure $\mathbf{SO}(4m)$; alors, le centre de $S^\star$ est la somme directe de deux groupes à deux éléments et $\Sigma^\star$ *échange* ces deux groupes. On trouvera, par exemple, les centres des groupes simples compacts dans [25], exposé 23, p. 7-8; et la méthode de détermination de ces centres qui y est exposée permet aussi de déterminer l'effet d'un automorphisme extérieur sur ce centre.

Remarque. — Même lorsque $\mathfrak{g}$ est *simple*, un E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ne peut pas toujours se remonter en un espace symétrique G/H d'un groupe quelconque G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. *Exemple* : considérons la structure simple $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$ et l'E. L. S. $\mathbf{SO}^{4m}(8m)/\mathbf{SL}(4m, \mathrm{R})+\mathbf{R}$. L'automorphisme induit par σ sur la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{g}_1=\mathbf{SO}(4m)+\mathbf{SO}(4m)$ *échange* les deux algèbres de structure $\mathbf{SO}(4m)$ (*voir* n° 28). D'après [12], p. 378-379, on peut déterminer le centre de $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$; il est défini par les quadruples ordonnés (a, b, c, d), avec une notation additive et $a, b, c, d=0$ ou 1, et $2=0$; le quadruple (a, b, c, d) ne devant comporter qu'un nombre pair de zéros. L'automorphisme $\Sigma^\star$ est, sur ce centre : $\Sigma^\star(a, b, c, d)=(c, d, a, b)$. D'après la proposition 52.1, le quotient du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{SO}^{4m}(8m)$ par le sous-groupe engendré par $(1, 1, 0, 0)$ ne peut pas définir un espace symétrique dont l'E. L. S. est $\mathbf{SO}^{4m}(8m)/\mathbf{SL}(4m, \mathrm{R})+\mathbf{R}$.

L'affirmation de [2], p. 1696 est donc erronée.

Ce qui a été dit ci-dessus permet de donner de nombreux cas d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ qui se remontent pour tous les groupes de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par exemple, toutes les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, dont la structure $\mathfrak{g}_1$ des sous-algèbres compactes maximales est *simple* et n'est pas isomorphe à $\mathbf{SO}(4m)$. Enfin, tout E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, à $\mathfrak{g}$ semi-simple, se relève pour deux groupes d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: le groupe simplement connexe $G^\star$ et le groupe adjoint G_a, puisque G_a est le quotient de $G^\star$ par *tout* son centre Z, et que ce centre Z est toujours conservé par $\Sigma^\star$.

53. Structure des espaces symétriques a groupe semi-simple :

Proposition 53.1. — *Soit* G/H *un espace symétrique, défini par l'automorphisme involutif* Σ, *tel que* G *soit semi-simple. Il existe une décomposition* $G=K.N$ (*où* K *est un sous-groupe compact maximal de* G *et* N *une sous-variété de* G, *homéomorphe à un espace vectoriel réel*) *qui est invariante par* Σ : $\Sigma(K)=K$ *et* $\Sigma(N)=N$. *Il existe alors une décomposition subordonnée* $H=C.E$ *du groupe d'isotropie* H, *où* C *est le sous-groupe d'isotropie de l'espace symétrique* K/C, *induit par* Σ *sur* K *et* E *un sous-espace vectoriel de* N. *Si* H_0 (*resp.* C_0) *désigne la composante connexe de l'élément neutre de* H (*resp.* C), *alors* C_0 *est un sous-groupe compact maximal de* H_0. *Le sous-groupe d'isotropie* H *n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

a. Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l'E. L. S. de G/H, pour l'automorphisme induit σ, et $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1}$ une décomposition de $\mathfrak{g}$, relative à un $\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}$ commutant avec σ (l'existence de cette décomposition est assurée par le lemme 10.2); on a $\sigma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_1$ et $\sigma(\mathfrak{g}_{-1})=\mathfrak{g}_{-1}$. Dans le groupe G, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_1$ engendre un sous-groupe G_1, qui (*voir* par exemple [25], exposé 22, p. 9) est le produit direct $G_1 = K \times A$ d'un groupe compact K par un groupe abélien simplement connexe A ; le sous-groupe K est un sous-groupe compact maximal de G. L'automorphisme Σ conserve G_1 : $\Sigma(G_1) = G_1$, parce que $\sigma(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$ et que G_1 est le groupe connexe engendré par $\mathfrak{g}_1$. L'automorphisme Σ conserve aussi K, dans G_1, parce que, le produit $K \times A$ étant direct, et A homéomorphe à un espace vectoriel réel, on peut considérer K comme le plus grand sous-groupe compact de G_1. On a donc bien $\Sigma(K) = K$.

b. L'algèbre de Lie de K est la somme directe $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1'' \oplus \mathfrak{t}$ de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}_1''$ et de l'algèbre abélienne $\mathfrak{t}$; si l'on appelle $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A, on a $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1'' \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. On peut supposer que $\mathfrak{a}$ est invariante par σ : car considérons l'algèbre abélienne $\mathfrak{z} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, qui est telle que $\sigma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Puisque σ est un automorphisme involutif, on peut trouver une base de $\mathfrak{z}$: $\{Z_1, \ldots, Z_p\}$ telle que $\sigma(Z_i) = \pm Z_i$, quel que soit $i = 1, \ldots, p$ et que $Z_i \in \mathfrak{t}$ pour $i = 1, \ldots, k$. Les $p - k$ vecteurs restants : $\{Z_{k+1}, \ldots, Z_p\}$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{t}$ et définissent un supplémentaire de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{z}$, qui est invariant par σ et qu'on peut prendre pour algèbre $\mathfrak{a}$. Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} + \sqrt{-1} \,.\, \mathfrak{g}_{-1}$ de $\mathfrak{g}$ engendre alors dans G une variété homéomorphe à un espace vectoriel réel, soit N ; ceci, parce qu'il en est séparément ainsi de $\mathfrak{g}_{-1}$ dans $\mathfrak{g}$ ([12], p. 362-363) et de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_1$. On a $\Sigma(N) = N$, parce que N est connexe et que $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ et $\sigma(\mathfrak{g}_{-1}) = \mathfrak{g}_{-1}$; enfin, la décomposition $G = K.N$ est du type du théorème 51.1, d'après [12].

c. Le groupe d'isotropie H est l'ensemble des éléments g de G tels que $\Sigma(g) = g$. Utilisons la décomposition $G = K.N$ construire ci-dessus et invariante par Σ ; si $g = kn$, avec $k \in K$ et $n \in N$, puisque Σ est un automorphisme : $\Sigma(g) = \Sigma(k)\,\Sigma(n) = kn$, avec $\Sigma(k) \in K$ et $\Sigma(n) \in N$. La décomposition $g = kn$ étant unique (théorème 51.1), c'est donc que $\Sigma(k) = k$ et $\Sigma(n) = n$. Appelons C l'ensemble des points fixes de l'automorphisme de K induit par Σ ; et E les points fixes de Σ dans N. On a donc une décomposition $H = C.E$, tout élément de H se mettant d'une manière et d'une seule sous la forme $g = kn$, avec $k \in C$ et $n \in E$. Le sous-groupe C de K est le groupe d'isotropie de l'espace symétrique K/C ; et E est homéomorphe à un espace vectoriel réel, parce qu'il en est de même de N. En particulier, E est connexe ; donc la composante connexe de l'élément neutre de H, soit H_0, est définie par la composante connexe C_0 de l'élément neutre de C, et l'on a une décomposition $H_0 = C_0 . E$. Cette décomposition entraîne que C_0 est un sous-groupe compact maximal de H_0. Enfin, le sous-groupe *fermé* C du groupe *compact* K ne peut avoir qu'un nombre fini de composantes connexes et il en est de même de $H = C.E$.

Remarque. — La décomposition $G = K.N$ obtenue ci-dessus n'est pas une décomposition du type d'Iwasawa ; c'est une décomposition du type d'E. Cartan, dans [12].

Proposition 53.2. — *Soit* G/H *un espace symétrique à* G *semi-simple et* $G = K.N$, $H = C.E$ *une décomposition du type de la proposition* 53.1. *Alors la variété sous-*

jacente de l'espace homogène G/H *est un espace fibré, de fibre* F *homéomorphe à un espace vectoriel réel et de base l'espace symétrique compact* K/C; *le groupe* K *permute les fibres transitivement.*

Utilisons les notations du n° 12 et posons $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-11} + \mathfrak{g}_{-1-1}$; $\mathfrak{a}_{-1} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{1-1}$ et $\mathfrak{f} = \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1} + \mathfrak{a}_{-1}$. Dans le groupe G, les éléments de $\mathfrak{f}$ engendrent une sous-variété connexe F, homéomorphe à un espace vectoriel réel. Utilisant le lemme 4.1 de Mostow [21], p. 262, la proposition se ramène à montrer que $\mathrm{ad}(C).F \subset F$. Donc à montrer que $\mathrm{ad}(C).\mathfrak{f} \subset \mathfrak{f}$, ce qui découlera de ce que $\mathrm{ad}(C).\mathfrak{a}_{-1} \subset \mathfrak{a}_{-1}$ et $\mathrm{ad}(C).\mathfrak{g}_{-1-1} \subset \mathfrak{g}_{-1-1}$. Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_{-1-1}$ de $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des $X \in g$ tels que $\tau(X) = -X$ et $\sigma(X) = -X$. L'$\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}$ se remonte en un automorphisme Θ de G, dont les points fixes sont les éléments de K (*voir* par exemple [21], p. 249-250) et les éléments de C sont les $g \in G$ tels que $\Sigma(g) = g$ et $\Theta(g) = g$. De ce qui précède et de la formule $\Phi(\mathrm{ad})(g).X) = \mathrm{ad}(\Phi(g)).(\varphi X)$, valable quels que soient $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ et l'automorphisme Φ de G, induisant l'automorphisme φ de g, on déduit que $\mathrm{ad}(C).\mathfrak{g}_{-1-1} \subset \mathfrak{g}_{-1-1}$. La construction de $\mathfrak{a}$ donnée dans la proposition 53.1 et la même méthode montrent qu'on a aussi $\mathrm{ad}(C).\mathfrak{a}_{-1} \subset \mathfrak{a}_{-1}$.

Corollaire. — *Tout espace symétrique* G/H *pour lequel* G *est semi-simple a même type d'homotopie qu'un espace symétrique compact, riemannien défini positif.*

La topologie des espaces symétriques G/H, à G semi-simple, se ramène donc, pour le calcul de l'homologie et de l'homotopie, par exemple, au cas d'un espace symétrique K/C, à K compact; pour la cohomologie de ces derniers, *voir* par exemple : Koszul [19].

54. La fibre et la base. — Des éléments K/C et F de la fibration de la proposition 53.2, on peut donner quelques propriétés. La base K/C est un espace symétrique compact, riemannien défini positif. Il s'identifie à la section de l'espace fibré G/H définie par le point origine de l'espace vectoriel F; ainsi plongée dans G/H, la métrique de K/C est induite par celle de G/H. Dans le cas où (avec les notations de la démonstration de la proposition 53.1) on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1$, cette métrique est celle qui a été notée μ_1 dans le n° 43. On peut aussi considérer K/C comme sous-variété totalement géodésique de G/H. En effet, la définition la de décomposition canonique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de l'espace symétrique K/C est

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_{-1}, \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{g}_{11}^0 + \mathfrak{t}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{k}_{-1} = \mathfrak{g}_{1-1}^0 + \mathfrak{t}_{-1},$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{g}_{11}^0 = \mathfrak{g}_{11} \cap \mathfrak{g}_1^0 \qquad (\text{resp. } \mathfrak{g}_{1-1}^0 = \mathfrak{g}_{1-1} \cap \mathfrak{g}_1^0;\ \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{11};\ \mathfrak{t}_{-1} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{1-1}).$$

La définition de $\mathfrak{g}_{1-1}$ comme sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des X tels que $\tau(X) = X$ et

$\sigma(X) = -X$ et le fait que $\mathfrak{t}$ appartient au *centre* $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}_1$, montrent que l'on a la relation

$$[\mathfrak{k}_{-1}, [\mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{k}_{-1}]] \subset \mathfrak{k}_{-1}.$$

Relation qui entraîne que, dans G/H, l'espace homogène K/C est une sous-variété totalement géodésique; en effet, l'espace tangent à K/C, dans G/H, s'identifie à $\mathfrak{k}_{-1}$ et *si* P *est une sous-variété d'un espace symétrique, définie par le sous-espace vectoriel* $\mathfrak{p}$ *de l'espace tangent à l'origine de* G/H : $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, *tel que* $[\mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]] \subset \mathfrak{p}$ (pour le crochet de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et la décomposition canonique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$), *alors* P *est totalement géodésique.*

Démonstration. — Pour la connexion affine canonique, le tenseur de courbure $R(X, Y).Z$ de G/H est donné par la formule (9.6) de [24], p. 47; il se réduit à $R(X, Y).Z = -[[X, Y], Z]$, d'où $R(X, Y).Z \in p$ si X, Y, Z appartiennent tous les trois à $\mathfrak{p}$: la sous-variété P définie par $\mathfrak{p}$ est donc totalement géodésique : *voir* par exemple [13], p. 40.

On a de même $[\mathfrak{f}, [\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]] \subset \mathfrak{f}$, ce qui permet de considérer toutes les fibres, homéomorphes à F, de la fibration de G/H, comme des sous-variétés totalement géodésiques de G/H. Dans le cas où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1$, on a $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}_{-1-1}$ et la métrique de ces fibres F, induite par celle de G/H, est celle qui a été notée μ_2 au n° 43. On peut interpréter cette métrique comme celle de l'espace symétrique, riemannien défini positif, non compact, dont l'E. L. S. est $(\mathfrak{g}_{11} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1})/\mathfrak{g}_{11}$; l'algèbre $\mathfrak{g}_{11} + \sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{g}_{-1-1}$ est l'algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}'$ de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ *associé* de l'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. La métrique de F est à courbure totale négative ou nulle, celle de K/C à courbure totale positive ou nulle, ce résultat restant valable même lorsque $\mathfrak{k}$ diffère de $\mathfrak{g}_1$; car les parties correspondant au centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}_1$ fournissent des métriques euclidiennes, à courbure nulle.

Enfin, on peut, suivant la méthode de [12], définir certains des espaces symétriques G/H d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, à $\mathfrak{g}$ semi-simple, comme des sous-variétés totalement géodésiques du *groupe* G.

55. Nature des géodésiques. — Ce qui précède permet de ramener l'étude des géodésiques de l'espace symétrique G/H, à G semi-simple, à celle des géodésiques d'un espace symétrique compact, riemannien défini positif. Soit Λ une géodésique de G/H (pour la connexion affine canonique), issue de l'origine; elle détermine un élément non nul λ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui appartient au sous-espace $\mathfrak{m}$ de la décomposition canonique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$; s'il existe un $\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}$, conservant la décomposition canonique $\mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ et tel que, pour la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ correspondante (définie dans la démonstration de la proposition 53.1), on ait $\lambda \in \mathfrak{k}$, alors la géodésique Λ est située dans l'espace symétrique compact K/C; la nature d'une telle géodésique a été déterminée par E. Cartan dans [12], p. 435-437. Si, au contraire, il n'existe aucune décomposition du type précédent, la géodésique Λ s'éloigne indéfiniment; puisque, sinon,

elle serait d'adhérence compacte, et il existerait donc une décomposition de $\mathfrak{g}$ telle que $\lambda \in \mathfrak{k}$; pour le voir, considérer G/H comme une sous-variété totalement géodésique du groupe G ; l'adhérence de Λ définit un tore (compact) de G et l'on applique alors le théorème 51.1.

56. Groupe d'holonomie. — Soit G/H un espace symétrique pour lequel G est semi-simple, d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, avec la décomposition canonique $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. Appelons H_0 la composante connexe de l'élément neutre du groupe d'isotropie H et (*voir* n° 4) Ψ (resp. Ψ_0) le groupe d'holonomie homogène (resp. holonomie homogène restreinte) de G/H pour la connexion affine canonique. On a vu, au n° 4, que, parce que G est semi-simple, le groupe linéaire Ψ_0 s'identifie à la représentation $(\mathrm{ad}(H_0), \mathfrak{m})$. On déduit de la proposition 53.1 que :

Proposition 56.1. — *Le groupe d'holonomie homogène* Ψ *de l'espace symétrique* G/H *à* G *semi-simple* (*pour la connexion affine canonique*) *est identique à la représentation* $(\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$.

Par définition, on obtiendra les éléments de Ψ, qui n'appartiennent pas à Ψ_0, par transport parallèle le long de lacets de G/H, non homotopes à zéro, d'origine e_0 (point origine de G/H). Notons π l'application canonique $G \to G/H$. L'ensemble des lacets non homotopes à zéro de G/H est engendré par des lacets de deux sortes : les premiers sont les images par π des lacets de G, d'origine l'élément neutre e de G et non homotopes à zéro *dans* G. Les seconds sont les projections de *chemins* de G joignant e aux éléments des composantes connexes de H, autres que H_0.

Soit λ_1 un lacet du premier type, projection du lacet Λ_1 de G : $\lambda_1=\pi(\Lambda_1)$. Le théorème 51.1 permet de supposer que Λ_1 appartient au sous-groupe compact maximal K de G et est non homotope à zéro dans G; mais dans le groupe *compact* K, et dans chaque classe d'homotopie non nulle, il existe un lacet d'origine e qui est une géodésique (il n'est pas nécessaire que cette géodésique soit *fermée* au sens de E. Cartan); en effet considérons le revêtement K^* de K qui annule la classe d'homotopie considérée et dans K^*, la géodésique Λ joignant e à l'image inverse e^* de e dans K^* (une telle géodésique existe parce que K^* est un espace muni d'une métrique définie positive et est complet); cette géodésique répond à la question. La projection de cette géodésique est un lacet de G/H, d'origine e_0 ; d'après [24], p. 47 (et parce que la connexion affine canonique d'un espace symétrique satisfait au théorème 15.1 de [24], p. 53), le transport parallèle le long de cette géodésique du lacet $\lambda=\pi(\Lambda)$ est défini par la translation le long du sous-groupe à un paramètre que définit la géodésique Λ de G ; l'extrémité de ce groupe étant l'origine e, le transport parallèle correspondant est nul ; tout lacet tel que λ_1 fournit donc l'identité Ψ.

Soit λ_2 un lacet du deuxième type ; la proposition 53.1 montre qu'on peut se contenter, pour obtenir toutes les composantes connexes de H, de prendre des représentants dans le sous-groupe compact $C = H \cap K$. Si h est un élément de C, n'appartenant pas à H_0, on pourra trouver une géodésique Λ joignant l'élément neutre e à h; ceci parce que C est situé dans le sous-groupe *compact* K, pour une métrique définie positive; le transport parallèle le long du lacet projection $\pi(\Lambda)$ est, on vient de le voir : $X \to \mathrm{ad}(h).X$, quel que soit $X \in \mathfrak{m}$. Le lacet $\pi(\Lambda)$ définit donc l'élément $(\mathrm{ad}(h), \mathfrak{m})$, pour un représentant h d'une composante connexe de H autre que H_0. Comme on a $\Psi_0 = (\mathrm{ad}(H_0), \mathfrak{m})$, ce qui précède montre que $\Psi = (\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$.

57. Espaces symétriques semi-kählériens. — Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ un E. L. S. semi-kählérien et G/H un espace symétrique d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; l'espace G/H est-il semi-kählérien? La proposition 53.1 permet de ramener ce problème au problème identique, mais pour un espace symétrique compact, dont l'E. L. S. est kählérien.

Proposition 57.1. — *Soit* G/H *un espace symétrique, à* G *semi-simple, et dont l'E. L. S. est semi-kählérien. Pour que* G/H *soit lui-même semi-kählérien, il faut et il suffit que l'espace symétrique compact correspondant* K/C (*introduit dans la proposition* 53.1) *soit kählérien.*

L'espace symétrique G/H, d'E. L. S. semi-kählérien $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, sera lui-même semi-kählérien si et seulement si la représentation $(\mathrm{ad}(H), \mathfrak{m})$ laisse invariante la structure complexe de $\mathfrak{m}$, déjà invariante par $(\mathrm{ad}(H_0), \mathfrak{m})$; cette structure complexe est définie (démonstration de la proposition 49.1) par un tore T_J, à une dimension, contenu dans H_0; le groupe H doit donc laisser ce tore invariant point par point. La proposition 53.1 montre qu'on peut se contenter de représenter les composantes connexes, autres que H_0, par celles de $C = K \cap H$. L'espace symétrique G/H sera donc semi-kählérien si et seulement si C laisse invariant T_J, c'est-à-dire, puisque T_J appartient à C_0 (démonstration de la propo-49.1) et définit donc une structure *kählérienne* sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, si et seulement si l'espace symétrique K/C est kählérien.

Remarque. — Même lorsque G est simple, compact, un espace symétrique G/H d'E. L. S. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ kählérien, n'est pas nécessairement lui-même kählérien si H n'est pas connexe. Par exemple, l'E. L. S. kählérien $\mathbf{SO}(n+2)/\mathbf{SO}(n)+\mathbf{T}$ est l'E. L. S. d'un espace symétrique G/H, où G est le *groupe* $\mathbf{SO}(n+2)$ et H formé de deux composantes connexes : la première H_0 est le produit direct des deux *groupes* $\mathbf{SO}(n)$ et $\mathbf{T}$, la deuxième H_1 constituée par $\mathbf{O}^-(n)$ et $\mathbf{O}^-(2)$ [on désigne par $\mathbf{O}^-(m)$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre m, telles que $A = {}^tA^{-1}$ et de déterminant égal à -1]. On vérifie facilement que H_1, opérant sur le tore T_j, égal ici au sous-groupe $\mathbf{T}$ de H_0, induit l'application $g \to g^{-1}$, pour $g \in T_j$, donc que G/H n'est pas un espace symétrique kählérien.

Ce phénomène est général : soit G/H_0 un espace symétrique semi-kählérien, avec H_0 *connexe*. Le normalisateur de $\mathrm{ad}(H_0)$ dans le groupe linéaire $\mathbf{GL}(\mathfrak{m}, R)$

contient toujours (*voir*, par exemple [12], p. 376-377) un élément c, de carré 1, induisant sur le tore T_j (définissant la structure semi-kählérienne de G/H_0) l'application $g \rightarrow g^{-1}$; si $c \in G$, ce qui est le cas de l'exemple précédent, alors c est invariant par l'automorphisme involutif de G définissant G/H_0, et le sous-groupe non connexe $H = H_0 \cup cH_0$ définit un espace symétrique G/H qui n'est pas semi-kahlérien.

58. Espaces symétriques compacts. — Il est facile maintenant de déterminer les espaces symétriques *compacts* (non nécessairement riemanniens définis positifs *a priori*). Si G/H est un espace symétrique *compact*, à G semi-simple, la proposition 53.2 montre qu'on doit avoir (notations de cette proposition) : $\mathfrak{k} = 0$, et, *a fortiori* $\mathfrak{g}_{-1-1} = 0$. On a donc $[\mathfrak{g}_{-11}, \mathfrak{g}_{1-1}] = [\mathfrak{g}_{-11}, \mathfrak{m}] = 0$, ce qui implique $\mathfrak{g}_{-11} = 0$ parce que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est effectif (définition 1.1 et remarque du n° 3). Ainsi l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ est compacte, d'où :

Proposition 58.1. — *Les seuls espaces symétriques* G/H *à* G *semi-simple qui sont compacts sont ceux pour lesquels le groupe* G *est compact. En particulier, ils sont toujours riemanniens définis positifs.*

Voir la remarque de la fin du n° 60.

CHAPITRE VI.

Espaces symétriques a groupe non semi-simple.

59. Lemmes. — Certaines des propriétés des espaces symétriques G/H à G semi-simple restent valables pour des espaces symétriques G/H dont le groupe G est un groupe de Lie connexe *quelconque*. Soit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l' E. L. S. d'un tel espace symétrique G/H, défini par l'automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$ une décomposion de Levi- Malcev de $\mathfrak{g}$ (pour tout ce qui concerne les décompositions de Levi-Malcev, *voir* Chevalley [15], p. 135-145). L'automorphisme σ conserve le radical $\mathfrak{r}$: $\sigma(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$, mais, en général, $\sigma(\mathfrak{s})$ diffère de $\mathfrak{s}$. Mais, pour un automorphisme involutif, on peut montrer le :

Lemme 59.1. — *Quel que soit l'automorphisme involutif* σ *de l'algèbre de Lie réelle* $\mathfrak{g}$, *il existe une décomposition de Levi-Malcev de* $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$, *qui est invariante par* σ : $\sigma(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$ *et* $\sigma(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$.

a. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}_0$ une décomposition quelconque de Levi-Malcev de $\mathfrak{g}$. On a $\sigma(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$, et pour $S \in \mathfrak{s}_0$, on peut écrire

$$\sigma(S) = \varphi(S) + \psi(S), \qquad \text{avec} \quad \varphi(S) \in \mathfrak{s}_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(S) \in \mathfrak{r}.$$

D'après [15], théorème 4, p. 136 et proposition 4, p. 109, il existe un élément N de $\mathfrak{r}$ tel que : d'une part ad(N) est nilpotent, d'autre part, si l'on pose

$$\nu = \exp(\operatorname{ad}(\mathrm{N})), \qquad \text{alors} \quad \nu(\mathfrak{s}_0) = \sigma(\mathfrak{s}_0).$$

De ce que σ est involutif, on déduit que φ est aussi involutif. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$, il existe donc $\mathrm{S}' \in \mathfrak{s}_0$ tel que $\sigma(\mathrm{S}) = \nu(\mathrm{S}')$. Puisque $\mathrm{N} \in \mathfrak{r}$ et que $[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}_0] \subset \mathfrak{r}$, on peut écrire $\nu(\mathrm{S}') = \mathrm{S}' + \mathrm{S}''$, où $\mathrm{S}'' \in \mathfrak{r}$: en effet, $\exp(\operatorname{ad}(\mathrm{N})).\mathrm{S}'$ comprend le terme S', puis des termes tels que $[\mathrm{N}, \mathrm{S}']$, $[\mathrm{N}, [\mathrm{N}, \mathrm{S}']]$, ... qui appartiennent tous à $\mathfrak{r}$. En comparant $\sigma(\mathrm{S})$ et $\nu(\mathrm{S}')$, on voit donc que $\mathrm{S}' = \varphi(\mathrm{S})$ et, en remplaçant, on a donc $\nu(\varphi(\mathrm{S})) = \sigma(\mathrm{S})$, quel que soit $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$. De ce que σ est involutif, on déduit finalement que $\sigma\nu\sigma\nu(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$, quel que soit $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$.

b. On va en déduire que $\nu^{-r}(\mathrm{S}) = \sigma\nu^r\sigma(\mathrm{S})$, quel que soit $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$ et le nombre réel r [où l'on a posé $\nu^r = \exp(\operatorname{ad}(r\mathrm{N}))$]. Posons, pour $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$: $\mathrm{N}^i.\mathrm{S} = \frac{1}{i!}\operatorname{ad}(\mathrm{N})^i.\mathrm{S}$. La proposition 4, p. 109 de [15] affirme que N appartient au plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$; donc, en particulier, les $\mathrm{N}^i.\mathrm{S}$ appartiennent aussi à $\mathfrak{n}$. Plus précisément, si l'on pose $\mathfrak{n}^k = [\mathfrak{n}^{k-1}, \mathfrak{n}]$, et si $\mathrm{N}^i.\mathrm{S}$ appartient à $\mathfrak{n}^k$ mais n'appartient pas à $\mathfrak{n}^{k+1}$, alors $\mathrm{N}^{i+1}.\mathrm{S}$ appartient à $\mathfrak{n}^{k+1}$. Appliquons ceci à $\nu^{-1}(\mathrm{S})$ et à $\sigma\nu\sigma(\mathrm{S})$. La formule

$$\sigma = \sigma\nu\sigma^{-1} = \sigma(\exp(\operatorname{ad}(\mathrm{N})))\sigma^{-1} = \exp(\operatorname{ad}(\sigma(\mathrm{N})))$$

montre que $\sigma(\mathrm{N})$ est aussi nilpotent, puisque, σ étant un automorphisme de $\mathfrak{g}$, conserve $\mathfrak{n}$ et donc $\sigma(\mathrm{N}) \in \mathfrak{n}$. Écrivons alors l'égalité $\sigma\nu\sigma(\mathrm{S}) = \nu^{-1}(\mathrm{S})$:

$$\nu^{-1}(\mathrm{S}) = \mathrm{S} + (-\mathrm{N}).\mathrm{S} + (-\mathrm{N})^2.\mathrm{S} + \ldots + (-\mathrm{N})^i.\mathrm{S} + \ldots,$$
$$\sigma\nu\sigma(\mathrm{S}) = \mathrm{S} + (\sigma(\mathrm{N})).\mathrm{S} + (\sigma(\mathrm{N}))^2.\mathrm{S} + \ldots + (\sigma(\mathrm{N}))^i.\mathrm{S} + \ldots.$$

Ce qui précède montre, par récurrence, que

$$(-\mathrm{N}).\mathrm{S} = (\sigma(\mathrm{N})).\mathrm{S}, \quad (-\mathrm{N})^2.\mathrm{S} = (\sigma(\mathrm{N}))^2.\mathrm{S}, \quad \ldots, \quad (-\mathrm{N})^i.\mathrm{S} = (\sigma(\mathrm{N}))^i.\mathrm{S} \quad \ldots$$

(quel que soit $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$). Comme $(r\mathrm{N})^i.\mathrm{S} = r^i(\mathrm{N})^i.\mathrm{S}$, c'est donc que $\nu^{-r}(\mathrm{S}) = \sigma\nu^r\sigma(\mathrm{S})$, quel que soit $\mathrm{S} \in \mathfrak{s}_0$.

c. Considérons alors la décomposition de Levi-Malcev suivante de g :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}, \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{s} = \nu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_0),$$

et montrons qu'elle est invariante par σ. Le cas *b* implique en particulier que $\sigma\nu^{\frac{1}{2}} = \nu^{-\frac{1}{2}}\sigma$, donc on a successivement

$$\sigma(\mathfrak{s}) = \sigma\left(\nu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_0)\right) = \nu^{-\frac{1}{2}}(\sigma(\mathfrak{s}_0)) = \nu^{-\frac{1}{2}}(\nu(\mathfrak{s}_0)) = \nu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{s}_0) = \mathfrak{s}.$$

Remarque. — Le lemme 59.1 est une conséquence directe du résultat très général de [33], p. 214, corollaire 5.2,

LEMME 59.2. — *Soit Σ un automorphisme involutif d'un groupe de Lie* *connexe* G. *Il existe un sous-groupe compact maximal* K *de* G *qui est invariant par* Σ : $\Sigma(K) = K$.

a. Soit G un groupe de Lie connexe quelconque et $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$ une décomposition de Levi-Malcev de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Soit $\mathfrak{k} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{z}$ une somme directe ($[\mathfrak{p}, \mathfrak{z}] = 0$) d'une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ et d'une sous-algèbre abélienne $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{r}$. Désignons par S (resp. R, P, Z, K) le sous-groupe connexe de G engendré par $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{k}$). *Si* P *est un sous-groupe compact maximal de* S, Z *un tore maximal de* R, *alors* K *est un sous-groupe compact maximal de* G. Soit, en effet, un sous-groupe compact maximal K′ de G contenant K (existence assurée par le théorème 51.1). Son algèbre de Lie $\mathfrak{k}'$ est la somme directe $\mathfrak{p}'_0 \oplus \mathfrak{z}''$ d'une algèbre semi-simple $\mathfrak{p}'_0$ et d'une algèbre abélienne $\mathfrak{z}'$. Puisque $\mathfrak{p}'$ est semi-simple, il existe une décomposition de Levi-Malcev $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{s}'$ de $\mathfrak{g}$, telle que $\mathfrak{p}'_0 \subset \mathfrak{s}'$ ([15], proposition 1, p. 140). La sous-algèbre compacte $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ est une somme directe $\mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{c}$ d'une sous-algèbre demi-simple $\mathfrak{p}_0$, et d'une algèbre abélienne $\mathfrak{c}$. L'algèbre $\mathfrak{p}_0$ est une sous-algèbre semi-simple compacte maximale de $\mathfrak{s}$, et comme $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ sont isomorphes, on a donc $\dim \mathfrak{p}'_0 \geqq \dim \mathfrak{p}_0$. Mais on a $K \subset K'$; de ce que $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{p}'_0$ sont semi-simples et de cette inclusion, on déduit que $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}'_0$. D'ou $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}'_0$. Les relations $[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{r}$ et $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ montrent que $\mathfrak{z}''$, qui appartient au centralisateur de $\mathfrak{p}_0$ dans $\mathfrak{g}$, se décompose en somme directe selon $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$; la composante selon $\mathfrak{s}$ est exactemement $\mathfrak{c}$, parce que le centralisateur de $\mathfrak{p}_0$ dans $\mathfrak{s}$ est le centre de la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{s}_1$ de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{p}_0$ et que, dans ce centre, les éléments n'appartenant pas à $\mathfrak{c}$ engendrent des sous-groupes non compacts. Finalement, on a $\mathfrak{k}' = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{z}'$, où $\mathfrak{z}'$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{r}$ contenant $\mathfrak{z}$ et engendrant dans R un tore maximal (appliquer le lemme 3.15 de [30], p. 533) contenant Z; c'est donc que $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}$ et que $K' = K$; le sous-groupe K est donc un sous-groupe compact maximal de G.

b. Construisons maintenant une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ du type $\mathfrak{k} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{z}$ ci-dessus et invariante par σ, automorphisme de $\mathfrak{g}$ induit par Σ : le cas *a* montre que $\mathfrak{k}$ engendrera dans G un sous-groupe compact maximal K invariant par Σ. Dans la démonstration de la proposition 53.1, on a déjà construit la partie $\mathfrak{p}$, si l'on choisit une décomposition de Levi-Malcev de $\mathfrak{g}$ qui est invariante par σ (lemme 59.1). Il reste donc, étant donné un automorphisme involutif d'un groupe résoluble connexe R, à construire un tore maximal de R invariant par Σ. En effet, $\mathfrak{z}$ appartient nécessairement au centralisateur de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$, et ce dernier se décompose (*voir a*) selon $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{r}$; donc $\mathfrak{z}$ appartient nécessairement au centralisateur de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{r}$, donc à un sous-groupe du groupe résoluble $\mathfrak{r}$ et c'est dans ce groupe, encore résoluble et invariant par σ, que l'on se placera. Montrons d'abord que *les tores maximaux de* R *sont les tores maximaux de ses sous-groupes de Cartan*. D'abord, tout tore maximal de R est contenu dans un sous-groupe de Cartan : on applique la proposition 18, p. 219 de [15] à l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$

d'un tel tore maximal de R; d'après le théorème 2.2 de [21], p. 248, la représentation ad(t) dans $\mathfrak{r}$ est, soit l'identité sur t, puisque $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0$, soit celle du groupe compact T sur le sous-espace u défini par la décomposition $R = T.U$ du théorème 2.2 de [21]; elle est donc semi-simple. Si maintenant T est un tore maximal d'un sous-groupe de Cartan A de R, il est contenu dans un tore maximal T′ de R et T′ est contenu dans une algèbre de Cartan A′ de R. Mais A et A′ sont isomorphes, d'après la proposition 19, p. 221 de [15]; donc leurs tores maximaux ont même dimension et l'on a $T = T'$, c'est-à-dire que T est un tore maximal de R.

c. Soit, d'après [27], théorème 7.1, p. 402, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{r}$ qui est invariante par σ; on va construire un tore maximal de A invariant par Σ; pour cela, on procède par récurrence en supposant avoir construit un tore maximal T de A, dont l'intersection $T' = D \cap A$ avec le groupe dérivé D de A est invariante par Σ (la récurrence comme avec un groupe abélien, pour lequel il n'y a qu'un seul tore maximal, donc invariant par tout automorphisme : c'est le plus grand sous-groupe compact de ce groupe abélien). On procède d'une manière analogue à celle du lemme 59.1 ; l'automorphisme σ transforme le tore maximal T en un tore maximal $\sigma(T)$, et il existe (théorème 51.1) un automorphisme intérieur ν de A tel que $\sigma(T) = \nu(T)$. Sur les algèbres de Lie, on est dans la situation du lemme 59.1, pour l'automorphisme intérieur ν qui est *nilpotent* parce que l'algèbre A est nilpotente et une décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ de T en une somme directe selon l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$ du groupe dérivé D et un supplémentaire quelconque de $\mathfrak{d}$ dans a, qui contient $\mathfrak{t} - (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{d})$. On montre alors, comme dans le *b* du lemme 59.1, que le tore maximal T″ engendré par la sous-algèbre $\nu^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{t})$ est invariant Σ.

Remarque. — On peut donner du lemme 59.2 et d'une partie de la proposition 53.1 une démonstration géométrique utilisant les théorèmes de Smith ([32], p. 223); pour cela, on démontre que *l'ensemble des compacts maximaux d'un groupe de Lie connexe* G, *qui contiennent un sous-groupe compact de* G, *forment un espace homéomorphe à un espace euclidien.*

60. Structure des espaces symétriques quelconques. — Les propositions 53.1, 53.2 et 58.1 restent valables pour des espaces symétriques G/H dont le groupe G n'est plus nécessairement semi-simple. Plus précisément :

Proposition 60.1. — *Soit* G/H *un espace symétrique, défini par l'automorphisme involutif* Σ, *et* K *un sous-groupe compact maximal de* G, *invariant par* Σ. *Il existe une décomposition topologique* $G = K.F.E$ *telle que* E *et* F *soient homéomorphes à des espaces vectoriels réels et que* H *soit homéomorphe au produit topologique* $H = C.E$ *de* E *par le sous-groupe* $C = H \cap K$ *des points fixes, dans* K, *de l'automorphisme induit par* Σ. *Topologiquement, l'espace homogène* G/H *est un* *espace fibré, de base l'espace symétrique compact* K/C, *de fibre* F. *L'espace* G/H *ne peut être compact que si* G *lui-même est compact.*

a. Désignons par H_0 la composante connexe de l'élément neutre de H. Remarquons d'abord qu'on peut toujours supposer que le sous-groupe compact maximal K de G, invariant par Σ et construit dans le lemme 59.2, contient un sous-groupe compact maximal C_0 de H_0. C'est vrai, en effet, lorsque G est semi-simple (proposition 53.1); quant à la partie de C_0 située dans le radical R de G, c'est un tore et dans la démonstration du lemme 59.2, on a choisi un tore maximal quelconque de R; on peut donc le prendre contenant le tore $C_0 \cap R$, d'après le théorème 51.1.

b. Le sous-groupe H_0 *de* G *est* « *self-adjoint modulo le radical* » *au sens de* [21], p. 249. Les groupes considérés étant connexes, il suffit de le démontrer pour leurs algèbres de Lie. Appelons $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}$) l'algèbre de Lie de G (resp. H_0, R) et $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par l'ensemble des deux sous-algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{r}$. Il faut montrer, pour satisfaire à la définition de [21], p. 249, que dans l'algèbre quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, l'algèbre $\mathfrak{p}/\mathfrak{r}$ est « self-adjoint », c'est-à-dire qu'il existe un $\star$-automorphisme τ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, tel que $\tau(\mathfrak{p}/\mathfrak{r}) = \mathfrak{p}/\mathfrak{r}$. Utilisons une décomposition de Levi-Malcev de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$, qui soit invariante par σ (lemme 59.1). L'algèbre quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ s'identifie à $\mathfrak{s}$; et la relation de crochet $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$ montre que $\mathfrak{p}/\mathfrak{r}$ s'identifie à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$, c'est-à-dire à la sous-algèbre d'isotropie $\mathfrak{h}_s$ de l'espace local symétrique $\mathfrak{s}/\mathfrak{h}_s$ que σ induit sur $\mathfrak{s}$. Le lemme 10.2 affirme exactement que $\mathfrak{h}_s$ est « self-adjoint », donc que $\mathfrak{h}$ est « self-adjoint modulo le radical » dans $\mathfrak{g}$.

c. D'après Mostow [21], p. 254, théorème 2.1, il existe donc une décomposition de G en $G = K.F.E$ où K est le sous-groupe compact maximal de G, invariant par Σ et contenant le sous-groupe compact maximal C_0 de H_0, les sous-ensembles F et E de G étant homéomorphes à des espaces vectoriels réels et tels que tout élément g de G s'écrive d'une manière et d'une seule : $g = kfe$, avec $k \in K$, $f \in F$, $e \in E$; le sous-groupe H_0 admettant la décomposition sous-jacente $H_0 = C_0.E$.

d. Soit maintenant g un élément de H; mettons-le sous la forme $g = kfe$; on doit avoir

$$\Sigma(g) = g = \Sigma(k)\,\Sigma(f)\,\Sigma(e) = \Sigma(k)\,\Sigma(f)\,e = kfe, \qquad \text{donc} \quad \Sigma(k)\,\Sigma(f) = kf.$$

L'élément (k) appartient à K, mais, en général, $\sigma(f)$ n'appartient plus à F. On peut écrire, quel que soit $f \in F$:

$$\sigma(f) = \Psi(f)\,\Phi(f)\,\Theta(f), \qquad \text{avec} \quad \Psi(f) \in K, \quad \Phi(f) \in F, \quad \Theta(f) \in E.$$

L'élément $g = kfe$ appartiendra à H si et seulement si l'on a $\Sigma(k)\,\Psi(f) = k$, $\Phi(f) = f$, $\Theta(f) = 1$ (où l'on désigne par 1 l'élément neutre de G). Nous allons montrer qu'on ne peut avoir $\Phi(f) = f$ que si $f = 1$. Le fait que Σ est involutif se traduit, pour Φ, par $\Phi(\Phi(f)) = f$, quel que soit $f \in F$. L'application Φ de F dans lui-même est donc involutive, et c'est un homéomorphisme différentiable. Si donc Φ laisse invariant un point f de F, autre que 1, comme il laisse invariant le point 1, il laissera invariant point par point tout un chemin différentiable Λ joignant 1 à f (je dois à G. W. Whitehead la démonstration suivante : compléter F en une sphère par le point à l'∞ et appliquer alors le théorème de Smith [32], p. 223). Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, les sous-ensembles K, F, E de G déterminent des sous-espaces $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}$ respectivement. L'automorphisme involutif Σ de G détermine un automorphisme involutif σ de $\mathfrak{g}$, dont les points fixes constituent l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H_0. Sur $\mathfrak{f}$, l'automorphisme σ se décompose, comme Σ sur G, pour la somme directe d'espaces vectoriels $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{f} + \mathfrak{e}$, en $\sigma(X) = \psi(X) + \varphi(X) + \theta(X)$, avec $\psi(X) \in \mathfrak{k}$, $\varphi(X) \in \mathfrak{f}$, $\theta(X) \in \mathfrak{e}$. On peut calculer φ : en effet, l'élément $X + \sigma(X)$ est invariant par σ, donc $X + \sigma(X) \in \mathfrak{h}$; or on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{e}$, donc c'est que $\sigma(X) = P - X + Q$, avec $P \in \mathfrak{k}$ et $Q \in \mathfrak{e}$. D'où $\varphi(X) = -X$; mais le chemin Λ invariant point par point par Φ détermine un élément X de $\mathfrak{f}$ tel que $\varphi(X) = X$; donc $X = 0$, et le chemin Λ est réduit au point 1, donc $f = 1$.

e. Les éléments de H sont donc exactement les $g = ke$, quels que soient $e \in E$ et k tel que $\Sigma(k) = k$. Le sous-groupe H est donc le produit C.E de E par le sous-groupe $C = K \cap H$ des points fixes de Σ dans K. Pour montrer que G/H est fibré de base K/C et de fibre F', il suffit de trouver un sous-espace F' de F.E invariant par ad(C) et d'appliquer le lemme 4.1 de [21], p. 262; puisque ad(C) laisse invariant E, on prendra pour F' un orthogonal de E dans F.E pour une métrique invariante par ad(C).

f. Supposons maintenant l'espace homogène G/H *compact*; la fibration précédente montre que le sous-espace F doit être réduit à l'élément neutre 1. Pour les algèbres de Lie, on doit donc avoir : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{e}$. Décomposons $\mathfrak{k}$ en la somme $\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_{-1}$ relative aux sous-espaces propres $\mathfrak{k}_1$ (resp. $\mathfrak{k}_{-1}$) pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'automorphisme involutif que σ induit sur $\mathfrak{k}$. D'après le théorème 2.2 de [21], p. 259, on a $[\mathfrak{k}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{e}$ et en particulier $[\mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{e}$. Or $\sigma(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}$, donc $[\mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{e}] \subset \mathfrak{k}_{-1}$. Ce qui implique, soit que $[\mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{e}] = 0$, soit que $\mathfrak{k}_{-1} = 0$. Dans le second cas, l'espace symétrique G/H est trivial et se réduit à G/G; dans le premier cas, la représentation $(\mathrm{ad}(\mathfrak{h}), \mathfrak{m})$, qui est ici $(\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{e}), \mathfrak{k}_{-1})$, n'est pas fidèle, puisque $[\mathfrak{k}_{-1}, \mathfrak{e}] = 0$. D'après la remarque du n° 3, l'espace G/H n'est donc pas un espace symétrique.

Remarque. — Le fait que l'espace symétrique G/H ne puisse être compact que si G est compact, et qu'il est donc alors un espace symétrique riemannien (défini positif) généralise un résultat de Kobayashi [28].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. C. Allamigeon, *Espaces homogènes symétriques harmoniques à groupe semi-simple* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **243**, 1956, p. 121-123).

[2] M. Berger, *C. R. Acad. Sc.*, t. **240**, 1955, p. 2370-2372, t. **241**, 1955, p. 1696-1698).

[3] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes* (*Bull. Soc. Math.. Fr.*, t. **83**, 1955, p. 279-330).

[4] A. Borel, *Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie* (exposé au Séminaire Bourbaki, 1949).

[5] A. Borel et A. Lichnerowicz, *Espaces riemanniens et hermitiens symétriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **234**, 1952, p. 2332-2334).

[6] A. Borel et A. Lichnerowicz, *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **234**, 1952, p. 1835-1837).

[7] E. Cartan, *Thèse* (2e éd., Vuibert 1953, ou *Œuvres complètes*, t. I vol. **1**, p. 137-288).

[8] E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante...* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **41**, 1913, p. 53-96, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. **1**, p. 355-398).

[9] E. Cartan, *Les groupes réels simples finis et continus* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. **31**, 1914, p. 263-355, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. **1**, p. 399-492).

[10] E. Cartan, *Les groupes projectifs continus réels qui...* (*J. Math. pures et appl.*, t. **10**, 1914, p. 149-186, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. **1**, p. 493-530).

[11] E. Cartan, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **54**, 1926, p. 214-264 et t. **55**, 1927, p. 114-134, ou *Œuvres complètes*, t. I, vol. **2**, p. 587-660).

[12] E. Cartan, *Sur certaines formes riemanniennes...* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. **44**, 1927, p. 345-467, ou *Œuvres complétes*, t. I, vol. **2**, p. 867-990).

[13] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann* (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. IX).

[14] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, I (Princeton 1946).

[15] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, III (Paris, Hermann, 1955).

[16] C. Ehresmann, *Sur certains espaces homogènes de groupes de Lie* (*Enseignement math.*, t. **35**, 1936, p. 317-333).

[17] F. Gantmacher, *Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group* (*Math. Sbornik*, nouv. série, vol. **5**, 1939, p. 101-144).

[18] F. Gantmacher, *On the classification of real simple Lie groups* (*Math. Sbornik*, nouv. série, vol. **5**, 1939, p. 217-249).

[19] J. L. Koszul, *Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression* [*Colloque de Topologie algébrique* (*espaces fibrés*), Bruxelles, 1950, p. 73-81].

[20] J. L. Koszul, *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes* (*Canadian J. of Math.*, vol. **7** 1955, p. 562-576).

[21] G. D. Mostow, *On covariant fiberings of Klein spaces* (*Amer. J. Math.*, vol. **77**, 1955, p. 247-278).

[22] S. Murakami, *On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. **4**, no **2**, 1952, p. 103-133).

[23] S. Murakami, *Supplements and corrections to...* (*J. Soc. Math. Japan*, vol. **5**, no **1**, 1953, p. 105-112).

[24] K. Nomizu, *Invariant afine connections on homogeneous spaces* (*Amer. J. Math.*, vol. **76**, 1954, p. 33-65).

[25] Séminaire « Sophus Lie », *Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie* (Paris, 1955).

[26] J. TITS, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. **29**, fasc. 3).

[27] A. BOREL et G. D. MOSTOW, *On semi-simple automorphisms of Lie algebras* (*Ann. Math.*, vol. **61**, 1955, p. 389-405).

[28] S. KOBAYASHI, *Une remarque sur la connexion affine symétrique* (*Proc. Japan Acad.*, vol. **31**, 1955, p. 14-15).

[29] A. S. FEDENKO, *Espaces symétriques à groupe fondamental simple non compact* (*Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. **108**, 1956, p. 1026-1028).

[30] K. IWASAWA, *On some types of topological groups* (*Ann. Math.*, vol. **50**, 1949, p. 507-558).

[31] F. I. KARPELEVIC, *Les sous-algèbres des algèbres de Lie simples réelles* (*Trudy Mosc. Math.*, t. **4** 1955, p. 3-112).

[32] D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN, *Topological lransformations groups* (New-York, 1955).

[33] G. D. MOSTOW, *Fully reducible subgroups of algebraic group* (*Amer. J. Math.*, vol. **78**, 1956, p. 200-221).

[34] B. A. ROZENFELD, *Interprétation géométrique des espaces symétriques à groupe fondamental simple* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. **110**, 1956, p. 23-26).