

LES GROUPES D'HOLONOMIE DES ESPACES GÉNÉRALISÉS.

PAR

E. CARTAN

à PARIS.

Introduction.

1. J'ai développé, dans ces dernières années, une théorie générale des espaces englobant la théorie classique des espaces de RIEMANN et celle plus récente des espaces de WEYL¹. Je me suis rencontré sur certains points avec différents auteurs, particulièrement M. J. A. SCHOUTEN, qui poursuivaient des généralisations analogues, mais mon idée directrice était cependant nettement différente des leurs. Au lieu de généraliser d'une manière plus ou moins naturelle les lois du transport par parallélisme des vecteurs, j'ai cherché à étendre le principe si fécond de KLEIN, d'après lequel toute Géométrie est l'étude des propriétés d'un groupe de transformations G : le *continuum* dans lequel sont localisées les figures dont s'occupe cette Géométrie, et dont les seules propriétés jugées essentielles sont celles qui se conservent par une transformation arbitraire de G , s'appelle un *espace*² à *groupe fondamental* G .

Cela posé, soit un continuum à n dimensions et un groupe G à n variables³. Imaginons par la pensée attaché à chaque point du continuum un espace à groupe fondamental G auquel appartiendra ce point A ; imaginons aussi une loi permet-

¹ *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 174, 1922, p. 437, 593, 734, 857, 1104; *Ann. Ec. Norm. sup.*, 3^e série, t. 40, 1923, p. 325—412; t. 41, 1924, p. 1—25; t. 42, 1925, p. 17 sqq.; *Ann. Soc. pol. de Math.*, t. 2, 1923, p. 171—221; *Bull. Soc. Math. de France*, t. 52, 1924, p. 205—241; *Bull. Sc. Math.*, t. 48, 1924, p. 294—320; *Enseign. math.*, 1924—5, p. 5—18.

² Le mot *espace* s'oppose ici au mot *continuum*; le premier éveille l'idée d'une organisation géométrique qui n'existe pas (ou qui n'existe qu'à un degré rudimentaire) dans le second.

³ On pourrait plus généralement supposer que le nombre des variables de G est différent du nombre des dimensions du continuum.

tant de raccorder entre eux les espaces attachés à deux points infiniment voisins du continuum. Grâce à cette loi, la portion du continuum infiniment voisine de A pourra être regardée comme une portion d'un espace à groupe fondamental G (et cela aux infiniment petits près du second ordre), et l'espace attaché à A pourra être appelé l'espace *tangent* au continuum en A . Si maintenant l'on considère dans le continuum un chemin continu allant d'un point A à un point B , le raccord de l'espace tangent en B avec l'espace tangent en A pourra se faire de proche en proche le long du chemin considéré, et on pourra dire que ce raccord constitue le *développement* du chemin AB et des espaces tangents, ou si l'on veut, de la portion du continuum qui avoisine immédiatement le chemin AB , sur l'espace tangent en A . Seulement si l'on va de A en B par un autre chemin, le second développement ainsi obtenu ne coïncidera pas en général avec le premier. On peut exprimer toutes ces propriétés en disant que le continuum donné, avec la loi de raccord de proche en proche des espaces tangents, constitue un *espace non holonome à groupe fondamental G* . La non holonomie se traduit par le fait qu'en décrivant dans le continuum un contour fermé (ou cycle) partant d'un point A et y revenant, le point A et son voisinage se sont trouvés subir à l'arrivée, par rapport à leurs positions initiales, un certain déplacement (ou transformation du groupe G), qui sera dit le *déplacement associé au cycle*.

J'ai montré que les déplacements associés aux différents cycles d'origine donnée A forment un groupe continu g (sous-groupe du groupe fondamental) et que ce groupe est essentiellement le même quel que soit le point A considéré dans l'espace non holonome (théorème d'homogénéité)¹. Le groupe g , que j'ai proposé d'appeler *groupe d'holonomie* de l'espace, me semble devoir jouer un rôle important dans la théorie des espaces non holonomes. J'ai indiqué à ce sujet, dans une conférence sur: *la théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle*, faite au congrès de Toronto², un certain nombre de résultats que je me propose dans cet article de développer. Après avoir indiqué quelques théorèmes généraux qui nous seront utiles, je montre comment on peut déterminer tous les groupes d'holonomie des espaces métriques et des espaces conformes normaux à trois dimensions, ainsi que des espaces projectifs normaux à deux dimensions. J'indique enfin comment des considérations d'Analysis situs s'introduisent naturellement dans cette théorie.

¹ *Ann. Ec. Norm. sup.*, t. 42, 1925, p. 19. V. spécialement le chapitre VI, p. 18—29.

² Cette conférence a paru dans *l'Enseignement mathématique*, loc. cit.

I.

Théorèmes généraux.

2. Nous appellerons d'une manière générale E_A l'espace holonome tangent en A et \mathfrak{E} l'espace non holonome donné. Le groupe fondamental G est supposé donné sous une forme analytique déterminée, correspondant géométriquement à un certain système de référence ou *repère*. Nous appellerons *repère normal*, dans un espace E à groupe fondamental G , un repère qui se déduit du précédent par une transformation arbitraire du groupe G (le changement de coordonnées se réduisant alors à une transformation de G). Étant donnés deux repères normaux (R) et (R') , les formules qui permettent de passer des coordonnées d'un point rapporté à (R') aux coordonnées de ce point rapporté à (R) définissent donc analytiquement une transformation S du groupe; on peut dire aussi que S est le *déplacement* qui amène (R) en (R') .

Imaginons choisi un repère normal dans l'espace E_A tangent en A . Après description d'un cycle d'origine (et d'extrémité) A , le repère (R_A) prend dans l'espace E_A une nouvelle position (R'_A) ; soit T le déplacement (transformation de G) qui amène (R_A) en (R'_A) . L'ensemble des transformations T engendre le groupe d'holonomie g associé au point A . Si l'on avait choisi dans l'espace E_A un autre repère normal (\bar{R}_A) , ce repère aurait pris, après description du même cycle que tout à l'heure, une position (\bar{R}'_A) . Soit S le déplacement qui amène (R_A) en (\bar{R}_A) , c'est à dire *analytiquement* la transformation qui réalise le changement de coordonnées quand on passe de (R_A) à (\bar{R}_A) ; le déplacement qui amène (R'_A) en (\bar{R}'_A) est défini *analytiquement* par la même transformation S , et le déplacement qui amène (\bar{R}_A) en (\bar{R}'_A) est par suite défini analytiquement par $S^{-1}TS$. En choisissant donc (\bar{R}_A) comme repère de l'espace E_A au lieu de (R_A) , le groupe g est remplacé analytiquement par le groupe $S^{-1}gS$, *homologue* de g .

Prenons maintenant un second point B dans l'espace \mathfrak{E} , et soit (R_B) le repère normal choisi dans l'espace E_B . Raccordons l'espace E_B avec l'espace E_A par un chemin arbitraire, mais déterminé, ACB , allant de A en B ; le repère (R_B) viendra alors se placer dans l'espace (E_A) ; soit S le déplacement amenant (R_A) en (R_B) . Soit BDB un cycle d'origine B et T la transformation de G qui lui est associée, amenant (R_B) en (R'_B) . Par le cycle $ACBDBCA$, dans lequel le chemin choisi pour aller de A en B est parcouru deux fois en sens inverse, le repère (R_A) est d'abord amené en (R_B) , puis en (R'_B) , enfin en une position

(R'_A) placée par rapport à (R'_B) comme (R_A) l'était par rapport à (R_B) , c'est-à-dire se déduisant de (R'_B) par la transformation S^{-1} . Autrement dit à toute transformation T du groupe associé au point B correspond une transformation $S^{-1}TS$ du groupe associé au point A ; la réciproque se démontrerait de même. *Les groupes associés à A et à B sont donc homologues.*

Enfin on peut choisir dans les différents espaces E_A les repères normaux (R_A) de manière que les groupes associés aux différents points A soient identiques. Choisissons en effet, en un point fixe A_0 , un repère normal (R_{A_0}) ; prenons dans l'espace E_A comme repère normal (R_A) un repère qui vienne coïncider avec (R_{A_0}) , lorsqu'on raccorde E_A avec E_{A_0} suivant un chemin arbitraire, mais déterminé pour chaque point A . Il résulte immédiatement des considérations précédentes qu'on aura, en tous les points A , le même groupe g .

Cela montre encore un résultat très important. Joignons deux points A et B par un chemin quelconque (C) , soit (C_A) le chemin par lequel on a joint A_0 à A pour définir le repère (R_A) et soit (C_B) le chemin analogue relatif au point B . Considérons enfin le cycle d'origine A , obtenu en décrivant successivement les chemins (C) , $(-C_B)$ et (C_A) . En décrivant d'abord (C) on raccorde l'espace E_B avec l'espace E_A , de sorte que, par ce raccord, on passe de (R_A) à (R_B) par une certaine transformation S de G ; en décrivant ensuite les chemins $(-C_B)$ et (C_A) , on raccorde l'espace E_{A_0} avec E_B , puis E_A avec E_{A_0} , de manière à amener en coïncidence (R_B) avec (R_{A_0}) , puis (R_A) avec (R_{A_0}) ; le résultat final est donc d'effectuer dans E_A sur R_A le déplacement S . Il en résulte que S appartient au groupe g . Cette conclusion subsistant pour un point B infiniment voisin de A , on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant:

Si l'espace non holonome \mathcal{E} à groupe fondamental G admet le groupe d'holonomie g , on peut choisir en chacun de ses points un repère normal tel que la connexion de l'espace soit analytiquement la même que celle d'un espace à groupe fondamental g . La connexion est la loi de raccord de proche en proche des espaces holonomes tangents, loi qui se traduit analytiquement par la connaissance de la transformation infinitésimale du groupe fondamental qui amène en coïncidence les repères attachés à deux points infiniment voisins.

A un cycle infiniment petit d'origine A est associée une transformation infinitésimale du groupe G . Elle appartient, suivant le choix du repère (R_A) , au groupe g ou à un de ses homologues. Si le groupe g est *invariant* dans G , tous ses homologues sont confondus avec lui et la transformation infinitésimale appartient à g .

Réciproquement si toutes les transformations infinitésimales associées aux différents cycles infiniment petits tracés dans \mathfrak{E} appartiennent à un sous-groupe invariant g de G , le groupe d'holonomie de l'espace est g ou un de ses sous-groupes. Nous verrons plus loin une démonstration analytique rigoureuse de ce théorème. Donnons ici un aperçu intuitif de cette démonstration. Elle repose au fond sur le fait que si on considère un cycle $ABCD A$, et qu'on joigne deux points B et D du cycle par un chemin continu, de manière à former deux nouveaux cycles $ABDA$ et $BCDB$, si la transformation associée à chacun de ces deux cycles partiels appartient au sous-groupe invariant g , il en est de même de la transformation associée au cycle total.

En effet soient (R_A) et (R_D) les repères attachés aux points A et D , soit T la transformation de g , définie analytiquement par rapport à (R_A) , associée au cycle $ABDA$; soit T' la transformation de g , définie analytiquement par rapport à (R_D) , associée au cycle $DBCD$; soit enfin S la transformation du groupe G qui amène (R_A) sur (R_D) quand on a fait le raccord de E_D avec E_A par le chemin AD . On voit facilement que la transformation associée au cycle total $ABCD A$, ou encore $ABDA B C D A$, est, rapportée à (R_A) , égale à

$$S^{-1} T' S T;$$

par suite, le sous-groupe g étant invariant, elle appartient à g . En décomposant le cycle donné en cycles de plus en plus petits, on montrera que si les transformations infinitésimales associées à tous les cycles infiniment petits appartiennent à g , les transformations finies associées aux cycles finis appartiennent aussi à g .

3. *Reconnaitre si le groupe d'holonomie d'un espace \mathfrak{E} est un sous-groupe donné g du groupe fondamental G .* — Supposons d'abord que le groupe donné g soit un sous-groupe invariant de G . Pour que le groupe d'holonomie de \mathfrak{E} soit g (ou un des sous-groupes), il faut et il suffit que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartienne à g .

Si g n'est pas invariant dans G , soit g' le plus grand sous-groupe de G qui contienne g comme sous-groupe invariant. Soit r l'ordre de G , soient q et $q' \geq q$ ceux de g et de g' . Il existe $\infty^{r-q'}$ groupes distincts homologues de g dans G . Une première condition pour que l'espace \mathfrak{E} admette g pour groupe d'holonomie est que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartienne à g ou à l'un de ses homologues. Cette condi-

tion nécessaire n'est pas suffisante quand g n'est pas un sous-groupe invariant de G .

Supposons d'abord que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit n'appartienne qu'à un seul sous-groupe homologue de g . On pourra alors changer au besoin les repères attachés aux différents points de l'espace \mathcal{E} de manière que cette transformation infinitésimale appartienne au groupe g lui-même; on pourrait encore effectuer sur chacun de ces repères une transformation arbitraire de g' . Cela posé, pour que le groupe d'holonomie soit g , il faut qu'on puisse choisir les repères de manière que la connexion de l'espace soit analytiquement celle d'un espace à groupe fondamental g . Soit alors S la transformation infinitésimale de G qui amène le repère (R_A) attaché à A en coïncidence avec le repère $(R_{A'})$ attaché au point infiniment voisin A' . Quand on remplacera respectivement (R_A) et $(R_{A'})$ par deux repères (\bar{R}_A) et $(\bar{R}_{A'})$ se déduisant des premiers par deux transformations Σ_A et $\Sigma_{A'}$ de g' , le passage de (\bar{R}_A) à $(\bar{R}_{A'})$ se fera par la transformation $\Sigma_{A'}^{-1} S \Sigma_A$, et cette transformation devra appartenir à g . Il faut donc que les transformations S elles-mêmes appartiennent à g' : ce sont les nouvelles conditions nécessaires cherchées. Ces conditions sont du reste suffisantes, car si elles sont remplies, l'espace aura la connexion analytique d'un espace à groupe fondamental g' , et comme la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartient au sous-groupe g invariant dans g' , le groupe d'holonomie de \mathcal{E} est g ou un de ses sous-groupes.

Supposons maintenant que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit appartienne à une infinité de sous-groupes homologues de g . On peut toujours supposer, en changeant au besoin les repères, qu'elle appartienne en particulier au sous-groupe g lui-même. Mais il vaut mieux utiliser un repère dépendant d'autant de paramètres arbitraires a_1, a_2, \dots, a_h que la famille de sous-groupes homologues de g à laquelle appartient la transformation infinitésimale considérée, de manière que chacun de ces sous-groupes homologues soit ramené à g pour un de ces repères et *un seul*. Dans ces conditions, on aura à exprimer, comme dans le premier cas, que la transformation de G qui amène en coïncidence deux repères infiniment voisins (R_A) et $(R_{A'})$ appartient à g' ; cela donnera un système d'équations finies et d'équations différentielles par rapport aux inconnues a_1, a_2, \dots, a_h . Il faudra que ces équations soient compatibles, et cela suffira.

4. Analytiquement le problème se présente de la manière suivante. Soient

$$X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$$

les transformations infinitésimales qui engendrent le groupe G , avec les relations classiques

$$(X_i X_j) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{ij s} X_s f.$$

Chaque repère E_A tangent à \mathfrak{E} étant rapporté à un repère (R_A) , quand on fait le raccord de l'espace $E_{A'}$ infiniment voisin avec l'espace E_A , le point de coordonnées (x_1, \dots, x_n) de E_A vient coïncider avec le point de coordonnées $(x_i + dx_i)$ de $E_{A'}$. On a alors des formules

$$dx_i + \sum_{k=1}^{k=r} \omega_k X_k(x_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

les ω_k étant des expressions de Pfaff linéaires par rapport aux différentielles des n quantités u_1, \dots, u_n qui localisent le point A dans le continuum \mathfrak{E} . Si l'espace \mathfrak{E} était holonome, on aurait les relations

$$\omega'_i = \sum_{(j, k)} c_{j k i} [\omega_j \omega_k];$$

l'espace \mathfrak{E} n'étant pas holonome, on a

$$\omega'_i = \sum_{(j, k)} c_{j k i} [\omega_j \omega_k] + \Omega_i,$$

les Ω_i étant des formes quadratiques extérieures en du_1, du_2, \dots, du_n ¹.

Cela posé, supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que le groupe g soit engendré par les q premières transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_q f$. Pour que g soit le groupe d'holonomie de \mathfrak{E} , il faut et il suffit qu'on puisse choisir les repères (R_A) de manière à avoir identiquement

$$\omega_{q+1} = \omega_{q+2} = \dots = \omega_r = 0.$$

Pour cela attachons à chaque point de \mathfrak{E} le repère le plus général possible, dépendant par suite de r paramètres v_1, v_2, \dots, v_r (paramètres secondaires).

¹ Cf. E. CARTAN, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 40, 1923, p. 383—390.

Nous aurons à déterminer ces paramètres en fonction de u_1, \dots, u_n de manière à avoir

$$(1) \quad \omega_{\rho+1} = \omega_{\rho+2} = \dots = \omega_r = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité donnent immédiatement

$$(2) \quad \Omega_{\rho+1} = \Omega_{\rho+2} = \dots = \Omega_r = 0.$$

Ce sont celles qui sont relatives aux transformations infinitésimales associées aux cycles infiniment petits. Si le groupe g est invariant dans G , ces conditions sont évidemment indépendantes du choix des repères, c'est-à-dire indépendantes des paramètres v_1, v_2, \dots, v_r ; donc, ou bien elles sont *incompatibles*, ou bien elles sont *identiques*. Si elles sont identiques, le système (1) est complètement intégrable, le groupe d'holonomie est g ou un de ses sous-groupes. Pour attribuer effectivement à l'espace \mathcal{E} la connexion d'un espace à groupe fondamental g , il faut intégrer le système (1) ou, ce qui revient au même, un système de Lie associé au groupe G/g , isomorphe méridrique de G . Si g est à $r-1$ paramètres, il suffit d'une quadrature; si le groupe G/g est un groupe simple à trois paramètres, il faut intégrer une équation de Riccati, etc.

Si le groupe g n'est pas invariant, les conditions d'intégrabilité (2), si elles sont compatibles, *ne sont pas identiques*, sinon, en effet, la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartiendrait à g et à *tous les sous-groupes homologues de g* , par suite au groupe γ formé de leurs transformations communes, qui est un sous-groupe invariant de G . Par suite le groupe d'holonomie serait non pas g , mais γ ou un de ses sous-groupes. Les conditions d'intégrabilité (2) n'étant pas vérifiées identiquement, elles permettent d'exprimer un certain nombre des paramètres secondaires v_1, \dots, v_r en fonction des autres et des u_i . En portant dans les équations (1), nous aurons un système de r équations à moins de r inconnues, ce qui donnera des conditions de compatibilité nouvelles, et ainsi de suite.

5. *Espaces sans torsion.* — Les espaces les plus importants dans les applications sont les espaces sans torsion, caractérisés par la propriété que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire d'origine A laisse invariant le point A . On voit que le groupe d'holonomie g d'un tel espace doit admettre au moins une transformation infinitésimale non identiquement nulle, laissant invariant un point arbitraire de l'espace. On peut même

ajouter que ces transformations infinitésimales ne peuvent pas toutes appartenir à un même sous-groupe invariant γ de g , sinon, en effet, le groupe d'holonomie serait γ ou un de ses sous-groupes.

Certains espaces jouissent de la propriété que la transformation infinitésimale associée à un cycle arbitraire d'origine A non seulement laisse invariant le point A , mais encore est du *second ordre* en ce point; cela signifie que les coefficients de cette transformation infinitésimale s'annulent tous au point A , *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre*. Cette propriété entraîne pour le groupe d'holonomie des restrictions analogues aux précédentes et dont l'énoncé est évident.

II.

Les groupes d'holonomie des espaces métriques sans torsion à deux dimensions.

Un espace métrique est un espace non holonome dont le groupe fondamental est celui des déplacements et des similitudes. Dans le cas de deux dimensions, nous choisirons des axes de coordonnées cartésiennes isotropes, de sorte que le groupe G sera engendré par les transformations infinitésimales

$$X.f = xp + yq, \quad X_{12}.f = xp - yq, \quad X_1.f = p, \quad X_2.f = q.$$

On a comme d'habitude écrit p et q à la place de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Les composantes de la connexion métrique sont cinq expressions de Pfaff

$$\omega, \omega_{12}, \omega_1, \omega_2.$$

La première indique que, par le raccord des deux plans euclidiens tangents en deux points infiniment voisins A et A' , le rapport des unités de longueur choisies en A' et en A est égal à $1 + \omega$. Quant à ω_{12} , c'est l'angle dont il faut faire tourner (R_A) pour l'amener en $(R_{A'})$;

$$\omega_1 \text{ et } \omega_2$$

sont les composantes sur (R_A) du vecteur infiniment petit $\overset{\rightarrow}{AA'}$. Enfin le carré de la longueur de ce vecteur, mesurée par rapport à (R_A) , est $ds^2 = \omega_1 \omega_2$.

Supposons d'abord que le groupe d'holonomie de l'espace \mathfrak{G} supposé sans

torsion transforme les vecteurs (de composantes x, y) suivant le groupe à deux paramètres

$$xp, yq;$$

le groupe g est certainement à 3 paramètres au moins, sinon il ne contiendrait aucune transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire. D'autre part s'il était exactement à trois paramètres, il serait de l'une des formes

$$xp, yq, p, \text{ ou } xp, yq, q,$$

et la même conclusion subsisterait. Dans le cas envisagé, on obtient donc le groupe général

$$(I) \quad \boxed{xp, yq, p, q}.$$

Supposons maintenant que le groupe d'holonomie g transforme les vecteurs suivant un groupe à un paramètre, qu'on peut toujours supposer de la forme

$$xp + m yq.$$

Le groupe g admettra une seule transformation infinitésimale laissant invariant le point arbitraire (x_0, y_0) , à savoir

$$(x - x_0)p + m(y - y_0)q.$$

Si m est différent de zéro, le groupe g sera nécessairement engendré par les transformations

$$(II) \quad \boxed{xp + m yq, p, q}.$$

Si au contraire $m=0$, la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit appartient toujours au sous-groupe

$$xp, p,$$

invariant dans le groupe

$$xp, p, q,$$

qui peut être par hypothèse regardé comme le groupe fondamental de l'espace. Par suite le groupe d'holonomie est

$$(III) \quad \boxed{xp, p}.$$

Enfin, il est impossible que le groupe d'holonomie laisse tous les vecteurs invariants, car il serait le groupe des translations ou un de ses sous-groupes, et il n'admettrait aucune transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire.

Il est à remarquer que le groupe d'holonomie est toujours soit G , soit un sous-groupe invariant de G .

7. Il est très facile de reconnaître dans quel cas le groupe d'holonomie est le groupe (II) ou le groupe (III). Prenons en chaque point A de \mathfrak{C} des axes ayant pour origine le point A ; nous aurons alors, par hypothèse (absence de torsion),

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0.$$

Dans le cas (II) on doit avoir

$$\Omega - \Omega_{12} = m(\Omega + \Omega_{12}), \quad \text{ou} \quad (1-m)\Omega = (1+m)\Omega_{12};$$

le rapport des deux formes Ω et Ω_{12} doit donc être *une constante* différente de 1 (mais pouvant être nulle ou infinie). Dans le cas (III) ce rapport doit être égal à 1. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes (à condition que les formes Ω et Ω_{12} ne soient pas toutes les deux identiquement nulles).

La détermination de tous les espaces \mathfrak{C} dont le groupe d'holonomie est le groupe (II) n'offre aucune difficulté; on doit avoir

$$\omega'_1 = [\omega_1 \varpi], \quad \omega'_2 = m[\omega_2 \varpi], \quad \varpi' \neq 0.$$

Supposons d'abord $m = -1$ (le groupe d'holonomie est alors *le groupe des déplacements*): on aura *un espace de Riemann* à deux dimensions défini par un ds^2 arbitraire à deux variables.

Si $m \neq -1$, on peut prendre

$$\omega_1 = H du, \quad \omega_2 = \frac{1}{H} dv, \quad \varpi = \frac{1}{m} \frac{\partial \log H}{\partial u} du - \frac{\partial \log H}{\partial v} dv.$$

L'espace de Weyl est donc défini par les deux formes

$$(II) \quad \boxed{ds^2 = du dv, \quad \omega = \frac{1+m}{2} \varpi = \frac{m+1}{2m} \frac{\partial \log H}{\partial u} du - \frac{m+1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial v} dv};$$

il dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Si le groupe d'holonomie est le groupe (III), on aura

$$\omega'_1 = [\omega_1 \omega], \quad \omega'_2 = 0, \quad \omega' \neq 0.$$

On pourra prendre

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega = H du;$$

l'espace de Weyl est défini par les deux formes

$$(III) \quad \boxed{ds^2 = du dv, \quad \omega = H du};$$

il dépend encore d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Signalons le cas particulier du groupe d'holonomie

$$xp + yq, \quad p, \quad q,$$

qui est le groupe des homothéties; dans les espaces correspondants on peut définir d'une manière absolue le parallélisme de deux directions.

III.

Les espaces métriques sans torsion à trois dimensions.

8. Le groupe fondamental G est le groupe à 7 paramètres des déplacements et des similitudes de l'espace euclidien. En supposant réduite l'équation du cône isotrope ayant pour sommet l'origine à la forme

$$z^2 + 2xy = 0,$$

le groupe G est engendré par les transformations

$$\begin{aligned} Uf &= xp + yq + zr, \\ X_{23}f &= yr - zp, \quad X_{31}f = zq - xr, \quad X_{12}f = xp - yq, \\ X_1f &= p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = r. \end{aligned}$$

Nous allons là encore faire une classification des groupes d'holonomie possibles suivant la manière dont les vecteurs de l'espace sont transformés.

9. *Supposons les vecteurs transformés par le groupe à 4 paramètres*

$$xp + yq + zr, \quad yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq.$$

Si le groupe g contient une translation, il les contient toutes et on obtient le groupe général G

$$(I) \quad \boxed{xp + yq + zr, \quad yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r}.$$

Si le groupe g ne contient aucune translation, il est à 4 paramètres, mais alors la seule transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire appartient à un sous-groupe *invariant* à trois paramètres, ce qui est impossible.

10. *Supposons les vecteurs transformés par un groupe à 3 paramètres.*

Il y a deux cas possibles, ce groupe étant engendré soit par

$$X_{23}f, \quad X_{31}f, \quad X_{12}f,$$

soit par

$$Uf, \quad X_{31}f, \quad X_{12}f.$$

Dans le premier cas, le groupe d'holonomie est, soit le groupe des déplacements

$$(II) \quad \boxed{yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r},$$

soit un de ses sous-groupes. Or l'existence dans g d'une translation entraîne celle de toutes les autres. Le seul sous-groupe possible est celui des rotations autour d'un point fixe

$$(III) \quad \boxed{yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq}.$$

Dans le second cas le groupe d'holonomie est, soit le groupe

$$(IV) \quad \boxed{xp + yq + zr, \quad zq - xr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r},$$

soit un de ses sous-groupes. Dans tous les cas l'espace \mathcal{E} peut être regardé comme un espace dont le groupe fondamental est (IV). Si le groupe d'holonomie contient la translation $ap + bq + cr$, il contiendra, par composition, les translations $ar - cq$ et aq . Il est impossible qu'il ne contienne pas une translation pour laquelle $a \neq 0$, sinon, en effet, g serait, comme il est facile de le voir, un sous-groupe du groupe •

$$xp + yq + zr, \quad zq - xr, \quad xp - yq, \quad q, \quad r;$$

toute transformation infinitésimale laissant invariant le point arbitraire (x_0, y_0, z_0) appartiendrait alors au sous-groupe *invariant*

$$2yq + zr, \quad zq - xr, \quad q, \quad r,$$

et le groupe d'holonomie, qui serait ce groupe ou un de ses sous-groupes, ne transformerait pas les vecteurs suivant un groupe à trois paramètres. Par suite, dans le second cas étudié, le seul groupe d'holonomie possible est le groupe (IV): c'est le plus grand groupe laissant invariante la direction isotrope $x=z=0$.

11. *Supposons les vecteurs transformés par un groupe à deux paramètres.* Ce groupe est de l'une des deux formes

$$zq - xr, \quad (m+n)xp + (m-n)yq + m zr$$

ou

$$xp + yq + zr, \quad xp - yq.$$

Dans le premier cas le groupe d'holonomie est le groupe

$$(V) \quad \boxed{zq - xr, \quad (m+n)xp + (m-n)yq + m zr, \quad p, \quad q, \quad r} \quad (m+n \neq 0),$$

ou l'un de ses sous-groupes. Du reste, le groupe d'holonomie ne peut être le groupe (V) que si le coefficient $m+n$ n'est pas nul, sinon, en effet, les transformations infinitésimales qui laisseraient invariant un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) appartiendraient toutes au sous-groupe invariant

$$zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q, \quad r,$$

ce qui est impossible.

Tout sous-groupe du groupe (V) ne peut contenir que deux translations indépendantes; or la présence d'une translation $p + aq + br$ entraîne celle de $r - bq$ et de q . Il n'y a donc que deux cas possibles: ou bien il existe les translations q et r , ou bien il existe la seule translation q .

Supposons d'abord qu'on n'ait pas $m+n=0$, et que le groupe g soit à 4 paramètres; il sera réductible à la forme

$$zq - xr + \alpha p, \quad (m+n)xp + (m-n)yq + m zr + \beta p, \quad q, \quad r,$$

avec la condition

$$(m+2n)\alpha = 0.$$

Le coefficient α ne peut être nul, sans quoi les seules transformations infinitésimales laissant invariant un point arbitraire appartiendraient au sous-groupe invariant

$$zq - xr, \quad q, \quad r.$$

On doit donc avoir $m + 2n = 0$, et on a alors le groupe

$$(VI) \quad \boxed{zq - xr + p, \quad xp + 3yq + 2zr, \quad q, \quad r}.$$

Si ensuite le groupe g était à trois paramètres, il ne contiendrait que la translation q , mais alors aucune transformation infinitésimale ne laisserait invariant un point *arbitraire*.

Supposons maintenant qu'on ait $m + n = 0$; on aurait les deux groupes possibles

$$(VII) \quad \boxed{zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q, \quad r},$$

$$(VIII) \quad \boxed{zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q}.$$

Supposons maintenant que le groupe d'holonomie transforme les vecteurs suivant le groupe à deux paramètres

$$xp + yq + zr, \quad xp - yq.$$

S'il ne contenait pas toutes les translations, il contiendrait seulement une ou deux des translations p, q, r . S'il ne contenait pas la translation q , les transformations infinitésimales qui laisseraient invariant un point arbitraire appartiendraient toujours au sous-groupe invariant

$$2yq + zr, \quad q, \quad r,$$

ce qui est impossible. Le même raisonnement se répéterait si l'une des translations q, r manquait. On a donc le groupe

$$(IX) \quad \boxed{xp + yq + zr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r}.$$

12. *Supposons les vecteurs transformés par un groupe à un paramètre.* Ce groupe est soit de la forme

$$m(xp + yq + zr) + n(zq - xr),$$

soit de la forme

$$m(xp + yq + zr) + n(xp - yq).$$

Nous pouvons ici éliminer certaines hypothèses en remarquant que, le repère attaché en un point A étant choisi de manière à avoir son origine en A , on a des relations de la forme

$$\omega'_1 = [(a_1 \omega_1 + b_1 \omega_2 + c_1 \omega_3) \varpi],$$

$$\omega'_2 = [(a_2 \omega_1 + b_2 \omega_2 + c_2 \omega_3) \varpi],$$

$$\omega'_3 = [(a_3 \omega_1 + b_3 \omega_2 + c_3 \omega_3) \varpi].$$

On en déduit que la forme ϖ' s'annule en même temps que chacune des trois formes linéaires $a_i \omega_1 + b_i \omega_2 + c_i \omega_3$. Comme cette forme ϖ' ne peut être identiquement nulle, sans quoi le groupe d'holonomie se réduirait à la transformation identique, il faut que le déterminant $|a_i b_j c_k|$ soit nul. Or, ses coefficients sont ceux des coefficients de p, q, r dans la transformation infinitésimale qui transforme les vecteurs. On a donc

dans le premier cas $m=0$;

dans le second cas $m(m^2 - n^2) = 0$.

Si l'on est dans le cas du groupe

$$zq - xr,$$

le groupe g est un sous-groupe du groupe

$$zq - xr, p, q, r;$$

la transformation infinitésimale de ce groupe qui laisse invariant le point (x_0, y_0, z_0) est $(z - z_0)q - (x - x_0)r$; le groupe g est donc engendré par les transformations

$$(X) \quad \boxed{zq - xr, q, r},$$

qui forment un sous-groupe invariant du précédent.

Si les vecteurs sont transformés par le groupe

$$xp - yq,$$

on verrait de même que le groupe d'holonomie est

$$(XI) \quad \boxed{xp-yq, p, q}.$$

Si enfin les vecteurs sont transformés par le groupe

$$2yq+ zr,$$

le groupe d'holonomie est

$$(XII) \quad \boxed{2yq+ zr, q, r}.$$

En résumé, nous avons trouvé, en dehors de la transformation identique (espace euclidien), douze groupes d'holonomie possibles.

Les espaces de Riemann sont ceux pour lesquels le groupe d'holonomie est le groupe des déplacements ou un de ses sous-groupes. Les groupes d'holonomie possibles sont les groupes

$$(II), (III), (V) \text{ avec } m=0, (X), (XI),$$

qui ont respectivement

$$6, 3, 5, \qquad 3, 3$$

paramètres.

IV.

Classification des espaces de Riemann à trois dimensions suivant leur groupe d'holonomie.

13. Cas du groupe d'holonomie (V):

$$zq-xr, xp-yq, p, q, r.$$

C'est le groupe des déplacements les plus généraux laissant invariante une direction isotrope fixe (direction isotrope *stable*). Le plus grand sous-groupe g de G contenant g comme sous-groupe invariant est le sous-groupe g lui-même. (Nous supposons l'espace donné a priori comme un espace de Riemann, le groupe G étant le groupe des déplacements).

Pour reconnaître si un espace de Riemann donné admet g pour groupe d'holonomie, il faut chercher s'il admet une direction isotrope stable. Soient

$$(3) \quad \begin{cases} \omega'_1 = [\omega_1 \omega_{12}] - [\omega_3 \omega_{23}], \\ \omega'_2 = -[\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_3 = -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_2 \omega_{23}], \end{cases}$$

les équations de structure de l'espace, le repère attaché à chaque point A ayant ce point comme origine, les quantités $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ désignant les composantes de la transformation infinitésimale

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \omega_3 X_3 f + \omega_{12} X_{12} f + \omega_{23} X_{23} f + \omega_{31} X_{31} f$$

qui amène en coïncidence le repère (R_A) avec le repère infiniment voisin $(R_{A'})$. Soient

$$\frac{y}{-\frac{1}{2}t^2} = \frac{z}{t} = \frac{x}{1}$$

les équations qui définissent une direction isotrope (les paramètres directeurs étant $-\frac{1}{2}t^2, 1, t$). Cette direction reste fixe par le raccord des deux espaces tangents en deux points infiniment voisins si on a

$$(4) \quad dt + \omega_{23} + t\omega_{12} + \frac{1}{2}t^2\omega_{13} = 0.$$

La condition d'intégrabilité est

$$(5) \quad \Omega_{23} + t\Omega_{12} + \frac{1}{2}t^2\Omega_{13} = 0.$$

On a donc, pour déterminer t , trois équations du second degré. Si elles ont une racine commune, cela signifie que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartient au groupe g , ou à l'un de ses homologues. On fera un changement de repère de manière à ramener cette racine à avoir la valeur 0, de sorte que la forme Ω_{23} deviendra identiquement nulle. Il faudra alors que l'équation (4) devienne vérifiée pour $t=0$, c'est-à-dire que l'on ait $\omega_{23}=0$. L'espace aura alors la connexion d'un espace à groupe fondamental g .

Il pourrait arriver que l'équation (5) fût vérifiée pour deux valeurs distinctes de t , qu'on pourrait toujours supposer ramenées à 0 et ∞ . Si l'une des formes

ω_{23} , ω_{13} , et une seule, est nulle, le groupe d'holonomie est homologue du groupe donné. Si les deux formes ω_{23} et ω_{13} étaient nulles, le groupe d'holonomie serait nécessairement le groupe

$$xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r$$

ou un de ses sous-groupes.

Si l'on a ramené la connexion de l'espace \mathfrak{E} à celle d'un espace à groupe fondamental g , les formules générales (3) deviennent

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= [\omega_1 \omega_{12}], \\ \omega'_2 &= -[\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_3 &= -[\omega_1 \omega_{31}], \end{aligned}$$

avec

$$\omega'_{12} = \Omega_{12}, \quad \omega'_{31} = [\omega_{12} \omega_{31}] + \Omega_{31}.$$

Les formes Ω_{12} et Ω_{31} satisfont aux identités

$$[\omega_1 \Omega_{12}] = 0, \quad [\omega_2 \Omega_{12}] - [\omega_3 \Omega_{31}] = 0, \quad [\omega_1 \Omega_{31}] = 0,$$

d'où les expressions générales

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= a[\omega_1 \omega_2] + b[\omega_3 \omega_1], \\ \Omega_{31} &= b[\omega_1 \omega_2] + c[\omega_3 \omega_1]. \end{aligned}$$

Pour avoir l'expression générale du ds^2 de l'espace, on peut profiter de l'indétermination du repère pour prendre

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du, \quad \omega_3 = dw; \quad \omega_{12} = \alpha du, \quad \omega_{31} = \beta dw, \\ \omega_2 &= dv + \frac{1}{2} H du, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w}.$$

On a donc l'expression générale

$$(V) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2 du dv + H(u, v, w) du^2},$$

avec une fonction arbitraire H de trois arguments. La direction isotrope stable est définie par $du = dw = 0$.

Les espaces de Riemann ainsi obtenus peuvent être réalisés par une variété V_3 d'un espace euclidien à cinq dimensions.

Contentons-nous d'indiquer le résultat. Soit

$$dx_3^2 + 2 dx_1 dx_4 + 2 dx_2 dx_5$$

le ds^2 de l'espace euclidien à 5 dimensions. Les coordonnées d'un point (x_1, x_2, \dots, x_5) de la variété V_3 sont définies par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= U_1, & x_2 &= U_2, & x_3 &= w + U_3, \\ x_3 U'_3 + x_4 U'_1 + x_5 U'_2 + U_4 &= v, \\ x_3 U''_3 + x_4 U''_1 + x_5 U''_2 + U'_4 &= \frac{1}{2} H(u, v, w) - \frac{1}{2} U'^2_s, \end{aligned}$$

en désignant par U_1, U_2, U_3, U_4 quatre fonctions arbitraires de la variable u assujetties à la seule condition que le déterminant $U'_1 U''_2 - U'_2 U''_1$ ne soit pas identiquement nul. Les lignes de la variété V_3 tangentes en chacun de leurs points à la direction isotrope stable sont des droites isotropes parallèles à un plan isotrope fixe.

14. *Cas du groupe d'holonomie (III).* C'est le groupe des rotations autour d'un point fixe. Si, pour plus de symétrie, nous adoptons un repère trirectangle ordinaire, le groupe est engendré par les transformations

$$X_{23}f = yr - zq, \quad X_{31}f = zp - xr, \quad X_{12}f = xq - yp.$$

Pour reconnaître si un espace de Riemann donné, à chaque point duquel on a attaché un trièdre trirectangle ayant ce point pour origine, admet le groupe précédent comme groupe d'holonomie, il suffit de chercher si l'on peut trouver, dans chacun des espaces euclidiens tangents, un point P , tel que le point P correspondant à un point A vienne coïncider avec le point P' correspondant à un point infiniment voisin A' quand on fait le raccord des deux espaces euclidiens tangents en A et A' . Partons des formules

$$(6) \quad \begin{cases} \omega'_1 = [\omega_2 \omega_{21}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_2 = [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{32}], \\ \omega'_3 = [\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}], \end{cases} \quad (\omega_{ij} = -\omega_{ji})$$

et soient x, y, z les coordonnées du point P rapportées au repère R_A . On devra avoir

$$(7) \quad \begin{cases} dx + \omega_1 + y \omega_{21} + z \omega_{31} = 0, \\ dy + \omega_2 + x \omega_{12} + z \omega_{32} = 0, \\ dz + \omega_3 + x \omega_{13} + y \omega_{23} = 0. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\begin{aligned} y \Omega_{21} + z \Omega_{31} &= 0, \\ x \Omega_{12} + z \Omega_{32} &= 0, \\ x \Omega_{13} + y \Omega_{23} &= 0, \end{aligned}$$

ou encore

$$(8) \quad \frac{\Omega_{23}}{x} = \frac{\Omega_{31}}{y} = \frac{\Omega_{12}}{z}.$$

Il faut donc que les 3 formes Ω_{23} , Ω_{31} , Ω_{12} ne diffèrent entre elles que par des facteurs finis. Géométriquement cela exprime que la transformation infinitésimale associée à un contour infiniment petit arbitraire laisse fixe le point x, y, z , ainsi que l'origine des coordonnées, c'est-à-dire appartient à une infinité de sous-groupes homologues de g .

Supposons ces conditions remplies. Nous pouvons supposer le repère choisi de manière à avoir $x=y=0$. Les équations (7) deviennent alors

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_1 + z \omega_{31} = 0, \\ \omega_2 + z \omega_{32} = 0, \\ dz + \omega_3 = 0. \end{cases}$$

Il faut que les deux premières soient compatibles, et que la valeur fournie pour z satisfasse à la dernière. Ces conditions sont suffisantes. Les deux premières équations (9) en z ne pourraient du reste pas être indéterminées, car alors les formes ω_1 et ω_2 seraient identiquement nulles, ce qui est absurde.

Géométriquement on a, pour chaque point A de \mathfrak{E} , choisi l'axe des z du repère d'origine A dirigé vers le point stable P de l'espace tangent en A .

Ecrivons $-w$ à la place de z . On a, d'après les équations (9),

$$\begin{aligned} \omega_3 &= dw, \\ \omega_1 &= w \omega_{31}, \\ \omega_2 &= w \omega_{32}, \end{aligned}$$

puis, en tenant compte des formules générales (6),

$$\begin{aligned}\omega'_{31} &= [\omega_{32} \omega_{21}], \\ \omega'_{32} &= [\omega_{31} \omega_{12}].\end{aligned}$$

La forme $\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2$ est donc une forme différentielle quadratique $d\sigma^2$ à deux variables u, v , et on a par suite

$$(III) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + w^2 d\sigma^2}.$$

Les espaces de Riemann obtenus dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Ils peuvent être réalisés par des variétés à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions. Il suffit de trouver dans un espace à trois dimensions à courbure constante égale à 1 une surface dont l'élément linéaire soit égal à $d\sigma^2$. Les variétés V_3 ainsi obtenues sont des *hypercones* dont le sommet représente le point stable du groupe d'holonomie.

Les lignes géodésiques des espaces de Riemann considérés se déduisent facilement de celles de la forme $d\sigma^2$. En effet, si nous n'imposons au trièdre de référence aucune autre condition que celle d'avoir l'axe des z passant par le point stable, les cosinus directeurs d'une direction arbitraire pourront toujours être ramenés à être $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$. Si nous exprimons que cette direction reste parallèle à elle-même quand on se déplace de manière à avoir

$$\frac{\omega_1}{\cos \alpha} = \frac{\omega_2}{0} = \frac{\omega_3}{\sin \alpha},$$

on obtient

$$d\alpha + \omega_{13} = 0, \quad \omega_{12} = 0.$$

Or les équations

$$\omega_{32} = \omega_{12} = 0$$

définissent les géodésiques de la forme $d\sigma^2$. Une de ces géodésiques étant trouvée, on aura α par une quadrature

$$\alpha = \int \omega_{31} = \sigma - \sigma_0,$$

puis on aura w par

$$\frac{dw}{w} = \operatorname{tg} \alpha \omega_{31} = \operatorname{tg}(\sigma - \sigma_0) d\sigma,$$

d'où

$$\frac{1}{w} = C \cos(\sigma - \sigma_0),$$

et enfin

$$ds = \frac{\omega_1}{\cos \alpha} = \frac{w d\sigma}{\cos(\sigma - \sigma_0)} = \frac{1}{C} \frac{d\sigma}{\cos^2(\sigma - \sigma_0)},$$

$$s = \frac{1}{C} \operatorname{tg}(\sigma - \sigma_0) + s_0.$$

Ces résultats sont classiques dans le cas particulier où l'on a

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2;$$

dans ce cas l'espace est euclidien et son groupe d'holonomie se réduit naturellement à la transformation identique.

15. *Cas du groupe d'holonomie (X).* Le groupe d'holonomie

$$zq - xr, \quad q, \quad r$$

est formé des déplacements qui laissent invariant le plan isotrope $x=0$ ainsi que tous les plans parallèles.

Pour reconnaître si un espace de Riemann donné admet ce groupe comme groupe d'holonomie, il faut chercher s'il existe une famille de plan isotropes parallèles stables. En conservant les notations générales du n° 13, on peut mettre l'équation d'un de ces plans sous la forme

$$(10) \quad x + tz - \frac{1}{2} t^2 y + \theta = 0.$$

Or si, par le raccord des espaces tangents infiniment voisins E_A et $E_{A'}$, le point (x, y, z) de E_A vient en coïncidence avec le point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de $E_{A'}$, on a

$$dx + \omega_1 + x\omega_{12} - z\omega_{23} = 0,$$

$$dy + \omega_2 - y\omega_{12} + z\omega_{31} = 0,$$

$$dz + \omega_3 - x\omega_{31} + y\omega_{23} = 0;$$

par suite le plan isotrope (10) sera stable si l'on a

$$dt + \omega_{23} + t\omega_{12} - \frac{1}{2} t^2 \omega_{31} = 0,$$

$$d\theta - \omega_1 - t\omega_3 + \frac{1}{2} t^2 \omega_2 + \theta(\omega_{12} - t\omega_{31}) = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\Omega_{23} + t\Omega_{12} - \frac{1}{2}t^2\Omega_{31} = 0,$$

$$\Omega_{12} - t\Omega_{31} = 0.$$

Si ces relations sont compatibles, elles définissent t sans ambiguïté. Nous pouvons supposer le repère choisi de manière que la valeur de t soit 0. On devra alors avoir

$$\omega_{23} = 0,$$

$$d\theta - \omega_1 + \theta\omega_{12} = 0.$$

La première équation doit se trouver vérifiée; c'est la condition supplémentaire cherchée. Si elle l'est, la deuxième équation, qui est complètement intégrable, donnera par une quadrature la valeur de θ , qui dépendra naturellement d'une constante arbitraire; on aura ainsi les différents plans isotropes stables.

D'après la forme du groupe d'holonomie, on peut toujours choisir le repère de manière à avoir $\omega_{12} = 0$. L'espace de Riemann sera donc défini par les équations

$$\omega'_1 = 0,$$

$$\omega'_2 = [\omega_3 \omega_{31}],$$

$$\omega'_3 = -[\omega_1 \omega_{31}].$$

On pourra prendre

$$\omega_1 = du, \quad \omega_3 = dw, \quad \omega_2 = dv + \frac{1}{2}Hdu, \quad \omega_{31} = \alpha du,$$

avec

$$[dHdu] = 2\alpha[dwdu];$$

la fonction H ne dépend donc que de u et w , et $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w}$:

$$(X) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2dwdu + H(u, w)du^2}.$$

La recherche des lignes géodésiques des espaces de Riemann ainsi déterminés revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2w}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} = 0,$$

suivie de la quadrature

$$v = -\frac{1}{2} \int \left[H + \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \right] du + Cu + C'.$$

Enfin, ces espaces sont réalisables par des hypercylindres isotropes de l'espace euclidien à quatre dimensions.

16. *Cas du groupe d'holonomie (XI).* Ce groupe est celui qui laisse invariant un plan non isotrope fixe. Si nous prenons les hypothèses et les notations du N° 14, le plan

$$ux + vy + wz + h = 0$$

sera stable si l'on a

$$(11) \quad \frac{du - v\omega_{12} - w\omega_{13}}{u} = \frac{dv - u\omega_{21} - w\omega_{23}}{v} = \frac{dw - u\omega_{31} - v\omega_{32}}{w} = \frac{dh - u\omega_1 - v\omega_2 - w\omega_3}{h}.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\frac{v\Omega_{12} + w\Omega_{13}}{u} = \frac{u\Omega_{21} + w\Omega_{23}}{v} = \frac{u\Omega_{31} + v\Omega_{32}}{w}$$

ou

$$\frac{\Omega_{23}}{u} = \frac{\Omega_{31}}{v} = \frac{\Omega_{12}}{w}.$$

Si elles sont compatibles, elles déterminent des quantités proportionnelles à u, v, w , et on peut toujours supposer le repère choisi de manière à avoir $u=v=0$, et rien n'empêche alors de prendre $w=1$. Les équations (11) deviennent alors

$$\omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0, \quad dh - \omega_3 = 0.$$

Il faut que les deux premières de ces équations soient vérifiées. S'il en est ainsi, la troisième est complètement intégrable.

Il résulte de là que l'on peut supposer

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= [\omega_2 \omega_{21}], \\ \omega'_2 &= [\omega_1 \omega_{12}], \\ \omega_3 &= dw, \end{aligned}$$

et, par suite, on a

$$(XI) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + d\sigma^2},$$

$d\sigma^2$ étant une forme à deux variables (à courbure non nulle).

Ces espaces sont bien connus.

V.

Classification des espaces de Weyl à trois dimensions suivant leur groupe d'holonomie.

17. Nous nous bornerons ici à des indications plus sommaires, nous contentant d'indiquer les formules de structure, ainsi que les deux formes ds^2 et ω qui définissent l'espace.

Dans le cas du groupe d'holonomie (IV), on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= [\omega_1(\omega + \omega_{12})], \\ \omega'_2 &= [\omega_2(\omega - \omega_{12})] + [\omega_3\omega_{31}], \\ \omega'_3 &= -[\omega_1\omega_{31}] + [\omega_3\omega]. \end{aligned}$$

On peut prendre

$$\omega_1 = du, \quad \omega_3 = dw, \quad \omega_2 = Hdv + \frac{1}{2}Kdu,$$

et on en déduit

$$(IV) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2H(u, v, w)dudv + K(u, v, w)du^2, \quad \omega = L(u, v, w)du - \frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw}.$$

L'espace de Weyl ainsi déterminé dépend de trois fonctions arbitraires de trois arguments.

Dans le cas du groupe d'holonomie (V), défini par

$$zq - xr, \quad xp + myq + \frac{m+1}{2}zr, \quad p, q, r \quad (m+1 \neq 0),$$

on a

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \frac{2}{1+m} [\omega_1 \omega], \\ \omega'_2 &= \frac{2m}{1+m} [\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_3 &= -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega].\end{aligned}$$

Il faut distinguer le cas $m=0$ et le cas $m \neq 0$.

Si $m=0$, on peut se ramener à la forme canonique

$$(V_1) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2dudv + H(u, w)du^2, \quad \omega = K(u, v, w)du};$$

si $m \neq 0$, on peut se ramener à la forme canonique

$$(V_2) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2dudv + H(u, v, w)du^2, \quad \omega = \frac{1+m}{4m} \frac{\partial H}{\partial v} du}.$$

Dans le cas du groupe d'holonomie (VI), défini par

$$zq - xr + p, \quad xp + 3yq + 2zr, \quad q, \quad r,$$

on arrive à une impossibilité. En effet le groupe étant transitif, on peut supposer que dans l'espace E_A les axes par rapport auxquels le groupe d'holonomie a la forme analytique donnée ont pour origine le point A . On aura alors

$$\omega_1 = \omega_{31}, \quad \omega_{23} = 0, \quad \omega_{12} = -\frac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$\Omega_{31} = 0, \quad \Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{12} = -\frac{1}{2}\Omega.$$

Les formules

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \frac{1}{2} [\omega_1 \omega], \\ \omega'_2 &= \frac{3}{2} [\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_1], \\ \omega'_3 &= [\omega_3 \omega]\end{aligned}$$

qui s'en déduisent montrent alors qu'on a

$$[\omega_1 \Omega] = [\omega_2 \Omega] = [\omega_3 \Omega] = 0,$$

ce qui exige que la forme Ω soit nulle, autrement dit que le déplacement infinitésimal associé à tout cycle infiniment petit soit nul, ce qui est impossible.

Dans le cas du groupe d'holonomie (VII), défini par

$$zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q, \quad r,$$

on peut supposer

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= 2[\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_3 &= -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega], \end{aligned}$$

avec

$$(VII) \quad ds^2 = dw^2 + 2H(u, v, w) du dv + K(u, v, w) du^2, \quad \omega = \frac{1}{4H} \left(\frac{\partial K}{\partial v} - 2 \frac{\partial H}{\partial u} \right) du - \frac{1}{2H} \frac{\partial H}{\partial w} dw.$$

L'espace de Weyl dépend de deux fonctions arbitraires de trois arguments.

Dans le cas du groupe d'holonomie (VIII), défini par

$$zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q,$$

l'espace de Weyl rentre dans la catégorie générale précédente. Mais il faut qu'on puisse trouver dans chaque espace tangent E_A un point $P(x, y, z)$ dont le déplacement covariant ait lieu parallèlement à l'axe des y , c'est à dire tel que

$$\begin{aligned} dx + \omega_1 &= 0, \\ dz + \omega_3 - x\omega_{31} + z\omega &= 0. \end{aligned}$$

On peut du reste supposer que le point P est sur l'axe des x , à cause de l'indétermination qui subsiste dans le choix du repère. On obtient donc la condition nouvelle

$$\omega_1 = du, \quad \omega_{31} = -\frac{\omega_3}{u},$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= 2[\omega_2 \omega], \\ \omega'_3 &= \left[\frac{du}{u} \omega_3 \right] + [\omega_3 \omega]. \end{aligned}$$

On peut alors se ramener à la forme canonique

$$(VIII) \quad ds^2 = u^2 dw^2 + 2H(v, w) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw.$$

Dans le cas du groupe d'holonomie (IX), défini par

$$xp + yq + zr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r,$$

on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= [\omega_1(\omega + \omega_{12})], \\ \omega'_2 &= [\omega_2(\omega - \omega_{12})], \\ \omega'_3 &= [\omega_3\omega]. \end{aligned}$$

On peut prendre

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = Hdv, \quad \omega_3 = dw,$$

d'où la forme canonique

$$(IX) \quad ds^2 = dw^2 + 2H(u, v, w) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw.$$

Dans le cas du groupe d'holonomie (XII), défini par

$$2yq + zr, \quad q, \quad r,$$

on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= 0, \\ \omega'_2 &= 2[\omega_2\omega], \\ \omega'_3 &= [\omega_3\omega]. \end{aligned}$$

On se ramène à la forme canonique

$$(XII) \quad ds^2 = dw^2 + 2H(v, w) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw.$$

18. Il y aurait lieu, pour être complet, de préciser dans chaque cas à quelles conditions doivent satisfaire les éléments arbitraires pour que le groupe d'holonomie soit bien le groupe considéré, et non pas un de ses sous-groupes. C'est ainsi que, dans les cas (VIII) et (XII), la fonction $H(v, w)$ ne doit pas

être le produit d'une fonction de v par une fonction de w , que dans le cas (IX) la fonction $H(u, v, w)$ ne doit être ni le produit d'une fonction de u par une fonction de v et w , ni le produit d'une fonction de v par une fonction de u et w .

On peut remarquer que le degré de généralité des espaces de Weyl de chaque catégorie est lié d'une manière simple à l'ordre du groupe d'holonomie correspondant. L'espace de Weyl dépend

Pour un groupe d'holonomie d'ordre 6, de 3 fonctions de 3 arguments,

»	»	»	»	5	»	1	»	»	3	»
»	»	»	»	4	»	2	»	»	3	»
»	»	»	»	3	»	1	»	»	2	»

On remarquera la curieuse interversion qui se produit, les espaces de Weyl dont le groupe d'holonomie est à 4 paramètres étant plus généraux que ceux dont le groupe est à 5 paramètres.

Rappelons que les espaces de Weyl les plus généraux dépendent de cinq fonctions arbitraires de trois arguments.

VI.

Les groupes d'holonomie des espaces conformes normaux à trois dimensions.

19. Les espaces conformes normaux¹ à trois dimensions sont des espaces dont le groupe fondamental est le groupe conforme et qui sont caractérisés par la propriété que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit d'origine A est *du second ordre* en ce point. Cette propriété permet de montrer assez facilement que si le groupe d'holonomie n'est pas le groupe conforme général (ni la transformation identique) il est à 6 paramètres et laisse invariante une droite isotrope fixe.

Rappelons d'abord que le groupe conforme est isomorphe au groupe d'un complexe linéaire. En effet, une sphère est définie par 5 coordonnées homogènes assujetties à satisfaire, quand cette sphère est de rayon nul, à une certaine relation quadratique homogène $F=0$. Le groupe conforme est formé des substitutions linéaires les plus générales qui laissent cette forme invariante.

¹ Voir, au sujet de ces espaces, le mémoire cité plus haut des *Ann. Soc. pol. de Math.*, t. 2, 1923, p. 171—221.

D'autre part, soit un complexe linéaire fixe défini par exemple en coordonnées plückériennes par l'équation

$$p_{34} = p_{12}.$$

Le groupe de ce complexe linéaire peut être regardé comme défini par les substitutions linéaires les plus générales qui, effectuées sur les 5 coordonnées restantes $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}$, laissent invariante la forme quadratique

$$\Phi = p_{12}^2 - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}.$$

De là résulte l'identité, au point de vue analytique, des deux groupes considérés.

La correspondance entre les éléments de l'espace conforme et de l'espace projectif qui réalise cette identité est la suivante :

<i>Espace conforme</i>	<i>Espace projectif</i>
Point,	Droite du complexe,
Sphère,	Droite n'appartenant pas au complexe (et sa conjuguée),
Droite isotrope,	Point (et son plan focal),
Cercle	Demi-quadrique.

Cela posé, il est bien connu que tout groupe projectif de l'espace laisse invariant un point, ou une droite, ou un plan, ou une quadrique, ou une cubique gauche.

Dans le dernier cas, les tangentes de la cubique gauche appartiendraient au complexe. Une droite arbitraire du complexe rencontre quatre de ces tangentes; les transformations du groupe qui laisseraient cette droite invariante laisseraient invariants les quatre points de contact des tangentes avec la cubique, par suite se réduiraient à la transformation identique. Le groupe conforme correspondant n'admettrait donc aucune transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire.

Si le groupe projectif laisse une quadrique invariante, deux cas sont à distinguer. Si toutes les génératrices rectilignes de l'un des systèmes appartiennent au complexe, il lui correspond dans l'espace conforme un cercle et par suite le groupe conforme correspondant laisse un cercle invariant. Dans le cas contraire, il y aurait dans chaque système deux génératrices appartenant au complexe et chacune d'elles serait invariante par le groupe.

Les autres cas correspondent à des groupes conformes laissant invariant une sphère, ou un point, ou une droite isotrope.

Il résulte de là que le groupe d'holonomie cherché laisse invariant ou un point, ou une sphère, ou un cercle, ou une droite isotrope.

Si le groupe laisse invariant un point, qu'on peut supposer rejeté à l'infini par une inversion, c'est le groupe des similitudes ou un de ses sous-groupes. C'est impossible, car il n'y a aucune transformation par similitude laissant un point invariant, et du second ordre en ce point.

Si le groupe laisse invariante une sphère, la conclusion est la même, car le groupe peut être regardé comme un groupe de déplacements non euclidiens.

Si le groupe laisse invariant un cercle, il laisse invariante les deux sphères de rayon nul qui contiennent ce cercle, et on est ramené au premier cas.

Reste donc le seul cas où le groupe laisse invariante une droite isotrope.

20. Supposons que la forme quadratique fondamentale soit

$$F = x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_0x_4,$$

les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace étant

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

Nous pouvons supposer la droite isotrope rejetée à l'infini de manière à être tangente à l'ombilicale; ses équations seront par exemple

$$x_0 = x_1 = x_3 = 0.$$

Le groupe qui laisse cette droite invariante est engendré par les transformations infinitésimales

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = x_0 p_1 - x_2 p_4, \\ X_2 f = x_0 p_2 - x_1 p_4, \\ X_3 f = x_0 p_3 - x_3 p_4, \\ X f = -x_0 p_0 + x_4 p_4, \\ X_{12} f = x_1 p_1 - x_2 p_2, \\ X_{13} f = x_1 p_3 - x_3 p_2, \\ X_{10} f = x_1 p_0 - x_4 p_2. \end{array} \right.$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes, elles s'écrivent

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = r, \\ X f = xp + yq + zr, \\ X_{12} f = xp - yq, \\ X_{31} f = zq - xr, \\ X_{10} f = \frac{1}{2} z^2 q - x^2 p - xzr. \end{array} \right.$$

21. Nous pouvons supposer d'ores et déjà que l'espace conforme normal considéré est un espace dont le *groupe fondamental* est le groupe à 7 paramètres précédent. Ce groupe fondamental admet une seule transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) et du second ordre en ce point; c'est la transformation

$$X_{10} f + x_0 (X f + X_{12} f) - z_0 X_{31} f - x_0^2 X_1 f + \frac{1}{2} z_0^2 X_2 f - x_0 z_0 X_3 f.$$

Elle appartient à un sous-groupe *invariant* à 6 paramètres, qu'elle engendre complètement quand x_0, y_0, z_0 varient, et qui est par suite nécessairement le groupe d'holonomie de l'espace, à savoir

$$\boxed{-x^2 p + \frac{1}{2} z^2 q - xzr, \quad 2xp + zr, \quad zq - xr, \quad p, \quad q, \quad r}.$$

Le groupe d'holonomie g étant transitif, on peut supposer que le pentasphère de référence attaché à un point A de l'espace est formé du point A (de coordonnées $x=y=z=0$), de trois sphères orthogonales passant par A (définies respectivement par $x=0, y=0, z=0$) et de leur second point d'intersection ($x_0=x_1=x_2=x_3=0$).

La connexion de l'espace sera définie par 6 expressions

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega, \omega_{31}, \omega_{10};$$

comme la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit issu de A est du second ordre en A , on aura

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega = \Omega_{31} = 0, \quad \Omega_{10} \neq 0.$$

D'après cela les équations de structure de l'espace seront de la forme¹

$$(14) \quad \begin{cases} \omega'_1 = 2[\omega_1 \omega], \\ \omega'_2 = [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega'_3 = -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega], \\ \omega'_4 = -[\omega_1 \omega_{10}], \\ \omega'_{31} = [\omega_3 \omega_{10}] + [\omega \omega_{31}], \\ \omega'_{10} = 2[\omega \omega_{10}] + \Omega_{10}. \end{cases}$$

On peut prendre, en tenant compte de l'indétermination qui subsiste encore pour le repère,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du, & \omega_3 &= dw, & \omega_2 &= dv + \frac{1}{2} H(u, w) du, \\ \omega &= 0, & \omega_{31} &= \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} du, & \omega_{10} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} du, \\ \Omega_{10} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 H}{\partial w^3} [du dw]. \end{aligned}$$

L'espace est défini analytiquement par l'équation $ds^2 = 0$, et on a ici

$$\boxed{ds^2 = dw^2 + 2 du dv + H(u, w) du^2},$$

la fonction H n'étant pas un polynôme du second degré en w .

On voit que la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit d'origine A est nulle toutes les fois que le cycle est dans un élément plan contenant la direction isotrope stable.

22. Les espaces conformes normaux \mathfrak{E} qui viennent d'être déterminés jouissent de propriétés géométriques intéressantes. D'abord, ils admettent ∞^2 sphères; on appelle ainsi une surface Σ située dans l'espace \mathfrak{E} , telle que, si l'on fait le développement de \mathfrak{E} sur l'espace conforme E_A , tangent en un point A de Σ , ce

¹ Les notations sont en concordance avec celles qui ont été employées pour désigner les transformations infinitésimales du groupe d'holonomie. Pour les mettre d'accord avec les notations covariantes du calcul différentiel absolu, il faudrait écrire

au lieu de

$$\begin{aligned} & \omega_{02}, \quad \omega_{01}, \quad \omega_{03}, \quad \omega_{40}, \quad \omega_{14} \\ & \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega, \quad \omega_{10}. \end{aligned}$$

développement soit holonome tant que le chemin considéré reste sur Σ , et que de plus la surface Σ , dans ce développement, devienne une sphère de E_A .

Pour démontrer cette propriété, considérons, dans l'espace tangent en un point quelconque A , une sphère passant par A et contenant la droite isotrope stable. Les coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_4) de cette sphère satisfont à

$$x_0 = x_1 = x_4 = 0;$$

on peut donc supposer (pour rendre la forme invariante F égale à 1)

$$x_2 = t, \quad x_3 = 1.$$

Exprimons qu'en se déplaçant de A en un point infiniment voisin A' , la sphère $(0, 0, t, 1, 0)$ attachée en A vient, par le raccord de E_A avec $E_{A'}$, coïncider avec la sphère $(0, 0, t + dt, 1, 0)$ attachée en A' . On a d'une manière générale, d'après les formules (12),

$$\begin{aligned} dx_0 - \omega x_0 + \omega_{10} x_1 &= 0, \\ dx_1 + \omega_1 x_0 + \omega x_1 &= 0, \\ dx_2 + \omega_2 x_0 - \omega x_2 - \omega_{13} x_3 - \omega_{10} x_4 &= 0, \\ dx_3 + \omega_3 x_0 + \omega_{13} x_1 &= 0, \\ dx_4 - \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 - \omega_3 x_3 + \omega x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ici ces formules se réduisent à

$$\begin{aligned} \omega_3 + t\omega_1 &= 0, \\ dt + \omega_{31} - t\omega &= 0, \end{aligned}$$

ou, avec les variables canoniques,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{du} + t &= 0, \\ \frac{dt}{du} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que toute surface $w = f(u)$ définie par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 w}{du^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w}$$

est une sphère de l'espace \mathfrak{E} , et cette sphère, développée sur l'espace E_A tangent en un des ses points (u_0, v_0, w_0) , devient la sphère de coordonnées

$$0, 0, -\left(\frac{dw}{du}\right)_0, 1, 0,$$

contenant la droite isotrope stable.

23. La détermination des cercles de l'espace \mathfrak{E} , c'est-à-dire des courbes qui donnent, par développement sur l'espace E_A tangent en un de leurs points, un cercle, admet aussi des simplifications. Signalons seulement ce qui se passe pour les cercles situés sur une des sphères qui viennent d'être déterminées. Un tel cercle est parfaitement déterminé si l'on connaît en chacun de ses points A , dans l'espace E_A , une autre sphère passant par A et le contenant. On peut supposer que les coordonnées de cette sphère sont

$$\lambda, 1, \mu + \frac{t^2}{2}, 0, 0;$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} d\lambda - \omega\lambda + \omega_{10} &= k\lambda, \\ \omega_1\lambda + \omega &= k, \\ d\mu + tdt + \omega_2\lambda - \omega\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right) &= ht + k\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right), \\ \omega_3\lambda + \omega_{13} &= h, \\ -\omega_1\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right) - \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{du} - \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} &= 0, \\ \frac{d\mu}{du} - 2\lambda\mu &= 0, \\ \frac{dv}{du} + \frac{1}{2}(H + t^2) + \mu &= 0. \end{aligned}$$

Elles s'intègrent par une équation de Riccati suivie de quadratures.

Enfin les lignes qui jouent dans l'espace \mathfrak{E} le rôle des droites isotropes se déterminent également d'une manière simple. On obtient en un point A une

direction isotrope en prenant

$$\frac{\omega_1}{1} = \frac{\omega_3}{t} = \frac{\omega_2}{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Exprimons que, par la connexion conforme de l'espace, la droite isotrope définie dans l'espace E_A par les équations

$$\begin{aligned}x_3 - tx_1 &= 0, \\x_2 + \frac{1}{2}t^2x_1 &= 0, \\x_4 &= 0\end{aligned}$$

reste fixe. On obtient

$$\omega_3 - t\omega_1 = 0, \quad \omega_2 + \frac{1}{2}t^2\omega_1 = 0, \quad dt + \omega_{13} - t\omega = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{du^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} & \left(t = \frac{dw}{du} \right), \\ \frac{dv}{du} + \frac{1}{2}H(u, w) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Les lignes cherchées sont donc obtenues par l'intégration de l'équation différentielle du second ordre en u, w , qui donne les sphères, suivie d'une quadrature.

VII.

Les groupes d'holonomie des plans à connexion projective normale.

24. Dans un plan à connexion projective normale¹, le déplacement projectif associé à un cycle infiniment petit partant d'un point A est du second ordre en ce point. Par suite si le groupe d'holonomie n'est pas le groupe projectif général, il jouit de la propriété d'admettre une transformation infinitésimale laissant invariant un point arbitraire et du second ordre en ce point.

Tout sous-groupe du groupe projectif laisse invariant un point, ou une droite, ou une conique. Le groupe projectif d'une conique ne peut convenir, parce que

¹ Voir le mémoire cité, *Bull. Sc. Math. de France*, t. 52, 1924, p. 205-241.

la transformation infinitésimale qui laisse invariant un point arbitraire est du premier ordre en ce point. Le groupe projectif d'une droite ne peut convenir pour la même raison. Reste le groupe projectif laissant invariant un point; le plus général peut être défini par les transformations

$$xp, yp, xq, yq, x(xp+yq), y(xp+yq).$$

La transformation du groupe qui laisse invariant un point arbitraire (x_0, y_0) et est du second ordre en ce point est

$$x_0^2 yp - x_0 y_0 (xp - yq) - y_0^2 xq - x_0 y (xp + yq) + y_0 x (xp + yq).$$

Elle fait partie du sous-groupe invariant

$$xp - yq, yp, xq, x(xp + yq), y(xp + yq),$$

et, quand x_0, y_0 varient, elle l'engendre complètement. Par suite le groupe d'holonomie est nécessairement le groupe à 5 paramètres

$$\boxed{xp - yq, yp, xq, x(xp + yq), y(xp + yq)}.$$

On peut toujours supposer que le triangle de référence attaché à un point A du plan \mathfrak{E} a un de ses sommets en A , le troisième sommet A_2 étant le point stable. Les transformations du groupe d'holonomie prennent alors, en coordonnées homogènes (x, x_1, x_2) , la forme

$$Xf = xp - x_1 p_1,$$

$$X_1 f = x p_1,$$

$$X_2 f = x p_2,$$

$$X_{12} f = x_1 p_2,$$

$$X_{10} f = x_1 p,$$

et les formules de structure du plan \mathfrak{E} prennent la forme

$$(15) \quad \begin{cases} \omega'_1 = 2[\omega \omega_1], \\ \omega'_2 = [\omega \omega_2] + [\omega_1 \omega_{12}], \\ \omega' = [\omega_1 \omega_{10}], \\ \omega'_{12} = [\omega_{10} \omega_2] + [\omega_{12} \omega], \\ \omega'_{10} = 2[\omega_{10} \omega] + \Omega_{10}. \end{cases}$$

La seule forme Ω différente de zéro est Ω_{10} , puisque la seule transformation infinitésimale du second ordre en A est $X_{10}f$.

On peut prendre, en profitant de l'indétermination du repère,

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega = 0, \quad \omega_{12} = -Hdu, \quad \omega_{10} = \frac{\partial H}{\partial v} du,$$

et on a

$$\Omega_{10} = -\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} [du dv] \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \neq 0 \right).$$

Les géodésiques qui, comme on sait, déterminent complètement la connexion normale du plan, sont données par l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 v}{du^2} = H(u, v)}.$$

Il y a en outre les géodésiques singulières $u = \text{const.}$ qui, développées sur le plan projectif tangent en un de leurs points, vont passer par le point stable.

25. Pour reconnaître si un plan à connexion projective normale donnée admet le groupe d'holonomie précédent, il suffit de reconnaître s'il existe un point stable. Partons des équations générales de structure

$$(16) \quad \begin{cases} \omega'_1 = [\omega_1 \omega_{11}] + [\omega_2 \omega_{21}], \\ \omega'_2 = [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_2 \omega_{22}], \\ \omega'_{11} = 2[\omega_{10} \omega_1] + [\omega_{20} \omega_2] + [\omega_{12} \omega_{21}], \\ \omega'_{22} = [\omega_{10} \omega_1] + 2[\omega_{20} \omega_2] + [\omega_{21} \omega_{12}], \\ \omega'_{12} = [\omega_{10} \omega_2] + [\omega_{12} (\omega_{22} - \omega_{11})], \\ \omega'_{21} = [\omega_{20} \omega_1] + [\omega_{21} (\omega_{11} - \omega_{22})], \\ \omega'_{10} = [\omega_{11} \omega_{10}] + [\omega_{12} \omega_{20}] + \Omega_{10}, \\ \omega'_{20} = [\omega_{21} \omega_{10}] + [\omega_{22} \omega_{20}] + \Omega_{20}. \end{cases}$$

Le point de coordonnées (x, x_1, x_2) sera stable si l'on a

$$\frac{dx + x_1 \omega_{10} + x_2 \omega_{20}}{x} = \frac{dx_1 + x \omega_1 + x_1 \omega_{11} + x_2 \omega_{21}}{x_1} = \frac{dx_2 + x \omega_2 + x_1 \omega_{12} + x_2 \omega_{22}}{x_2}.$$

Les conditions d'intégrabilité donnent

$$x_1 \Omega_{10} + x_2 \Omega_{20} = 0.$$

Cette relation donne sans ambiguïté le rapport $\frac{x_2}{x_1}$. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, qu'on ait $\Omega_{20} = 0$, d'où $x_1 = 0$. On peut supposer $x_2 = 1$, et on doit alors avoir

$$\begin{aligned} x \omega_1 + \omega_{21} &= 0, \\ dx + \omega_{20} - x \omega_{22} - x^2 \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Il faudra donc que la forme ω_{21} soit un multiple de ω_1 ; s'il en est ainsi, x est déterminé et la dernière équation devra être vérifiée. On pourra du reste supposer choisi le repère de manière à avoir $x = 0$ avec

$$(17) \quad \omega_{21} = \omega_{20} = 0.$$

On peut remarquer que la recherche des géodésiques admet une simplification, même sans l'introduction des variables canoniques. Le repère étant soumis aux seules restrictions que le point stable soit le 3^{ème} sommet A_2 , les équations différentielles des géodésiques sont

$$\omega_2 = \omega_{12} = 0.$$

Cherchons si elles admettent un invariant intégral de la forme $\lambda[\omega_2 \omega_{12}]$. Il faut et il suffit pour cela que la dérivée extérieure de cette forme soit nulle.¹ Il en sera ainsi si l'on a

$$d\lambda + \lambda(\omega_{11} - 2\omega_{22}) = 0.$$

Or, la forme $\omega_{11} - 2\omega_{22}$ a sa dérivée nulle en vertu des formules (16) et (17). On peut donc déterminer λ par une quadrature. Cette quadrature est du reste celle qui donne à la connexion du plan la forme analytique obtenue en prenant pour groupe fondamental le groupe d'holonomie.² Ce résultat est d'accord avec

¹ E. CARTAN, *Leçons sur les Invariants intégraux*. Paris, Hermann, 1922, N° 80, p. 76.

² On passe en effet des formules générales (16) aux formules (15) en posant $\omega_{20} = \omega_{21} = 0$, $\omega_{11} = 2\omega_{22} = -2\omega$. La nécessité d'une quadrature pour donner au plan la connexion correspondant au groupe d'holonomie g tient à ce que ce groupe est invariant dans un groupe g' à 1 paramètre de plus.

ce qui a été vu plus haut, l'équation

$$\frac{d^2 v}{du^2} = H(u, v)$$

admettant en effet le multiplicateur 1, c'est-à-dire l'invariant intégral $\iint dudv$.

VIII.

Les groupes d'holonomie et l'Analysis situs.

26. Nous avons supposé implicitement dans tout ce qui précède que le groupe d'holonomie d'un espace \mathcal{E} à groupe fondamental G est *continu*. Cela suppose que tout cycle tracé dans l'espace peut par déformation continue se réduire à un point, c'est-à-dire que l'espace est simplement connexe. S'il n'en est pas ainsi, le groupe d'holonomie peut ne pas être continu, il peut être *mixte* (au sens de S. LIE) ou être formé d'un nombre fini de transformations. Nous avons fait un fréquent usage du théorème d'après lequel si la transformation infinitésimale associée à un cycle infiniment petit arbitraire appartient à un sous-groupe invariant g de G , le groupe d'holonomie de l'espace est g ou un de ses sous-groupes. Ce théorème peut tomber en défaut si l'espace cesse d'être simplement connexe.

Un exemple classique est fourni par un cylindre de révolution supposé doué de la métrique que lui confère l'espace euclidien dans lequel il est plongé; il est sans courbure, de sorte que le déplacement euclidien associé à un cycle infiniment petit arbitraire est nul. Néanmoins son groupe d'holonomie ne se réduit pas à la transformation identique, mais aux différentes puissances d'une même translation dont la longueur est égale au périmètre de la section droite du cylindre. On peut de même conférer à la surface d'un tore une connexion euclidienne sans courbure, de manière que le groupe d'holonomie soit le groupe des translations qui laissent invariant, dans le plan euclidien tangent, un réseau de parallélogrammes.

Un exemple analogue, mais peut-être plus intéressant, s'obtient en donnant à un cylindre de révolution une connexion métrique sans torsion (qui en fait un plan de Weyl) dont la courbure soit partout nulle localement, de sorte que, si l'on reste dans une région limitée du cylindre, on a affaire à un véritable plan

euclidien. Le groupe d'holonomie est alors formé des différentes puissances à exposant entier (positif, nul ou négatif) d'une même transformation par similitude, à savoir celle qui est associée à une section droite du cylindre, considérée comme un cycle. On peut même s'arranger pour que la connexion métrique soit partout régulière et pour que la transformation génératrice du groupe d'holonomie soit une transformation donnée à l'avance, à savoir une translation (cas examiné ci-dessus) ou une rotation d'un angle donné (commensurable ou non avec π), ou une homothétie de rapport donné, ou une transformation résultant d'une rotation d'un angle donné suivie d'une homothétie de rapport donné. Si l'on désigne par u et v les coordonnées cylindriques ordinaires (abscisse curviligne de la section droite et ordonnée), la première étant définie à un multiple près du périmètre l de la section droite, on peut par exemple se donner les deux formes de Weyl

$$\boxed{ds^2 = (dv + m du)^2 + n^2 du^2, \quad \omega = dv + m du};$$

le groupe d'holonomie est formé des puissances de la transformation par similitude

$$x' + iy' = e^{(m-in)l}(x + iy).$$

Cet exemple montre très bien *qu'un espace métrique peut être partout de courbure nulle, sans même qu'il soit possible de le regarder globalement comme un espace de Riemann (partout régulier).*

On pourrait enfin imaginer un cylindre comme un espace de Weyl partout régulier à deux dimensions, dont la courbure d'homothétie soit partout nulle (de sorte que localement il pourrait être regardé comme un espace de Riemann), mais de telle façon que le groupe d'holonomie soit un groupe mixte formé d'une infinité de familles continues de similitudes, les différents rapports de similitude étant les différentes puissances entières de l'un d'entre eux; la famille de transformations du groupe d'holonomie correspondant au rapport de similitude 1 formerait seule un groupe continu (le groupe des déplacements).