

Les polarisations de Vergne dans une algèbre de Lie exponentielle

Carine Molitor-Braun*

1. Rappels (voir [1], Chapitre IV)

1.1. Soit B une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel réel V de dimension finie.

a) On appelle *noyau* de B et on note $N(B)$ l'ensemble

$$N(B) = \{x \in V \mid B(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}.$$

b) Un sous-espace W de V est dit *totalement isotrope* si

$$B(x, y) = 0 \quad \text{quels que soient } x, y \in W.$$

c) La dimension d'un sous-espace *totalement isotrope maximal* W est donnée par

$$\dim W = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B)).$$

1.2. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension finie et soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ non nul.

*Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN|CUL|90|009

a) L'application

$$(x, y) \mapsto \{\ell, [x, y]\}$$

définit une forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} . Le noyau de cette forme est noté $\mathfrak{g}(\ell)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\ell) &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell, [x, y] \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}^* x(\ell) \equiv 0\}. \end{aligned}$$

b) On appelle *polarisation* au point ℓ de \mathfrak{g}^* toute sous-algèbre \mathfrak{h} de \mathfrak{g} qui est en même temps un sous-espace totalement isotrope maximal, c'est-à-dire toute sous-algèbre \mathfrak{h} telle que

$$\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle \equiv 0$$

$$\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(\ell)).$$

c) Pour un sous-espace \mathfrak{k} de \mathfrak{g} on définit \mathfrak{k}^\perp par

$$\mathfrak{k}^\perp = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \langle p, \mathfrak{k} \rangle \equiv 0\}.$$

On montre alors facilement par des considérations sur les dimensions que

$$(\text{ad}^* \mathfrak{g})(\ell) = \mathfrak{g}(\ell)^\perp.$$

d) Soit \mathfrak{d} une algèbre de Lie de dérivations agissant sur \mathfrak{g} . On appelle *annihilateur* de ℓ et on note $\mathfrak{d}(\ell)$ le sous-espace

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(\ell) &= \{d \in \mathfrak{d} \mid d^*(\ell) \equiv 0\} \\ &= \{d \in \mathfrak{d} \mid \langle \ell, d(\mathfrak{g}) \rangle \equiv 0\}. \end{aligned}$$

1.3. a) Dans une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de dimension finie on appelle *bonne suite de sous-algèbres* toute suite décroissante de sous-algèbres

$$\{0\} = \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i \subset \dots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$$

telle que

(i) $\dim \mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1} = 1$ pour tout i

(ii) Si \mathfrak{g}_i n'est pas un idéal de \mathfrak{g} alors \mathfrak{g}_{i-1} et \mathfrak{g}_{i+1} sont des idéaux de \mathfrak{g} et la représentation adjointe de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{g}_{i-1} / \mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible.

b) Toute algèbre de Lie résoluble réelle, en particulier toute algèbre exponentielle réelle admet de bonnes suites de sous-algèbres.

c) Pour une bonne suite de sous-algèbres d'une algèbre résoluble \mathfrak{g} on montre facilement que

(i) \mathfrak{g}_1 est un idéal de \mathfrak{g}

(ii) Si \mathfrak{g}_i n'est pas un idéal,

$$[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_{i-1}] \subset \mathfrak{g}_{i+1}.$$

En particulier, $[\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i$ et \mathfrak{g}_i est un idéal dans \mathfrak{g}_{i-1} .

2. But du travail

2.1. Dans la suite \mathfrak{g} désignera une algèbre de Lie exponentielle réelle et \mathfrak{d} désignera une algèbre de Lie exponentielle de dérivations de \mathfrak{g} , contenant $\text{ad } \mathfrak{g}$ et faisant de \mathfrak{g} un \mathfrak{d} -module de type exponentiel. Ceci signifie que si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est l'algèbre complexifiée correspondante et si

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \triangleright \mathfrak{g}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

est une suite de Jordan-Hölder pour l'action de \mathfrak{d} , alors \mathfrak{d} agit sur les quotients $\mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k+1} = \mathbb{C} \bar{x}_k$ (qui sont tous de dimension 1) par

$$d(\bar{x}_k) = \varphi_k(d)(1 + iw_k)\bar{x}_k$$

φ_k étant une forme réelle sur \mathfrak{d} . ([1], Chapitre I).

2.2. Dans ([1], Chapitre IV), Vergne démontre le résultat suivant : Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie exponentielle réelle, si $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et si

$$\{0\} = \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \dots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$$

est une bonne suite de sous-algèbres, alors

$$\mathfrak{h} = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i)$$

est une polarisation au point ℓ de \mathfrak{g}^* ([1], IV.4.3.5. et IV.4.3.7.)

2.3. Le but du présent travail consiste à raffiner les méthodes de Vergne afin de construire une polarisation $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariante, en partant d'une suite de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} pour l'action de \mathfrak{d} .

3. Sous-espace isotrope maximal dans un espace vectoriel

3.1. Dans ce paragraphe V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, B une forme bilinéaire alternée sur V et

$$\{0\} = V_n \subset V_{n-1} \subset \dots \subset V_{i+1} \subset V_i \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

une suite de sous-espaces de V telle que

$$\dim V_i/V_{i+1} = 1 \quad \text{ou} \quad \dim V_i/V_{i+1} = 2.$$

Notons par B_i la restriction de B à V_i et par $N_i(B_i)$ le noyau de B_i dans V_i .

3.2. **Théorème** : Si le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 2$ et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ est exclu pour tout i , alors

$$H = \sum_{i=0}^n N_i(B_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de V .

Démonstration : Les $N_i(B_i)$ étant des sous-espaces vectoriels, il en est de même de H . De plus, soit $x \in N_i(B_i)$ et soit $y \in N_j(B_j)$ avec $i \leq j$. Comme $V_j \subset V_i$, $y \in V_i$ et $B(x, y) = 0$ vu que $x \in N_i(B_i)$. On en déduit que $B(H, H) \equiv 0$, c'est-à-dire que H est isotrope. Démontrons par récurrence que

$$\dim H = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B)).$$

Notons par H_i le sous-espace $\sum_{j=i}^n N_j(B_j)$. Evidemment

$$B(H_i, H_i) \equiv 0 \text{ pour tout } i.$$

Pour $i = n$ on a $V_n = N_n(B_n) = H_n = \{0\}$ et on a bien

$$\dim H_n = \frac{1}{2}(\dim V_n + \dim N_n(B_n)).$$

Pour $i = n-1$, il faut distinguer deux cas :

Si $\dim V_{n-1} = 1$, alors $V_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$ et $B(x_{n-1}, x_{n-1}) = 0$, la forme B étant alternée.

Donc $H_{n-1} = N_{n-1}(B_{n-1}) + \{0\} = \mathbb{R}x_{n-1} = V_{n-1}$ et

$$\dim H_{n-1} = 1 = \frac{1}{2}(\dim V_{n-1} + \dim N_{n-1}(B_{n-1})).$$

Si $\dim V_{n-1} = 2$, alors $V_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1} \oplus \mathbb{R}x'_{n-1}$. Supposons d'abord $B(x_{n-1}, x'_{n-1}) = 0$.

Alors $H_{n-1} = N_{n-1}(B_{n-1}) + \{0\} = V_{n-1}$ et

$$\dim H_{n-1} = 2 = \frac{1}{2}(\dim V_{n-1} + \dim N_{n-1}(B_{n-1})).$$

Si $B(x_{n-1}, x'_{n-1}) \neq 0$, alors $N_{n-1}(B_{n-1}) = \{0\} = N_n(B_n)$ et $\dim V_{n-1}/V_n = 2$. Or ce cas est à exclure par hypothèse. Supposons à présent

$$\dim H_{i+1} = \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1}))$$

et démontrons la même formule pour l'indice i .

a) Supposons d'abord que $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$, donc que $N_i(B_i) \subset N_{i+1}(B_{i+1})$. Alors

$$H_i = \sum_{j=i}^n N_j(B_j) = \sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) = H_{i+1}$$

et $\dim H_i = \dim H_{i+1}$. Distinguons deux cas.

a1) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, c'est-à-dire si $V_i = \mathbf{R}x_i \oplus V_{i+1}$, on a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (I),$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations linéaires, si on remplace V_{i+1} par une base de V_{i+1} . $N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ (comme $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$) tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \end{cases} \quad (II).$$

Les rangs des systèmes linéaires (I) et (II) vérifient donc

$$\text{rg}(I) \leq \text{rg}(II) \leq \text{rg}(I) + 1.$$

Deux cas sont alors possibles.

Soit $\text{rg}(I) = \text{rg}(II)$. Les systèmes (I) et (II) sont équivalents et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 1 + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dim H_{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, puisque $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ est un nombre entier. Donc ce cas est à exclure.

Soit $\text{rg}(II) = \text{rg}(I) + 1$.

Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 1$ et

$$\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) = \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 1 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 1)$$

$$\begin{aligned} &= \dim H_{i+1} \text{ par hypothèse de} \\ &\text{récurrence} \\ &= \dim H_i \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule est vraie pour l'indice i .

a2) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 2$, c'est-à-dire si $V_i = \mathbf{R}x_i \oplus \mathbf{R}x'_i \oplus V_{i+1}$, on a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (I),$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations linéaires. $N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ (comme $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$) tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \\ B(x, x'_i) = 0 \end{cases} \quad (II).$$

Les rangs des systèmes linéaires (I) et (II) vérifient donc

$$\text{rg}(I) \leq \text{rg}(II) \leq \text{rg}(I) + 2.$$

Trois cas sont possibles.

Soit $\text{rg}(I) = \text{rg}(II)$. Les systèmes (I) et (II) sont équivalents et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ avec $\dim V_i/V_{i+1} = 2$. Ce cas a été exclu d'avance par hypothèse.

Soit $\text{rg}(II) = \text{rg}(I) + 1$.

Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 1) \\ &= \frac{1}{2} + \dim H_{i+1} \text{ par hypothèse} \\ &\text{de récurrence.} \end{aligned}$$

Ceci est impossible, comme $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ doit être entier.

Soit $\text{rg}(\Pi) = \text{rg}(I) + 2$.

Alors $\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim N_i(B_i) + 2$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) - 2) \\ &= \dim H_{i+1} \text{ par hypothèse} \\ &= \dim H_i \text{ de récurrence} \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule est vraie pour l'indice i .

b) Supposons ensuite $N_i(B_i) \not\subset V_{i+1}$, c'est-à-dire $N_i(B_i) \not\subset N_{i+1}(B_{i+1})$. Montrons d'abord que

$$\begin{aligned} N_i(B_i) \cap H_{i+1} &= N_i(B_i) \cap \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right) \\ &= N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}). \end{aligned}$$

En effet, d'une part

$$N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i) \cap \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right).$$

D'autre part, soit

$$\sum_{j=i+1}^n x_j \in \sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \subset \sum_{j=i+1}^n V_j \subset V_{i+1} \subset V_i.$$

Supposons en plus que $\sum_{j=i+1}^n x_j \in N_i(B_i)$. En particulier

$$B \left(\sum_{j=i+1}^n x_j, V_i \right) \equiv 0$$

et forcément

$$B \left(\sum_{j=i+1}^n x_j, V_{i+1} \right) \equiv 0.$$

Donc $\sum_{j=i+1}^n x_j \in N_{i+1}(B_{i+1})$ et

$$N_i(B_i) \cap \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right) \subset N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1}),$$

c'est-à-dire les deux expressions sont en fait égales. On en déduit que

$$\begin{aligned} \dim H_i &= \dim \left(\sum_{j=i}^n N_j(B_j) \right) \\ &= \dim(N_i(B_i)) + \sum_{j=i+1}^n \dim(N_j(B_j)) \\ &= \dim N_i(B_i) + \dim \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right) \\ &\quad - \dim [N_i(B_i) \cap \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right)] \\ &= \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim [N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})]. \end{aligned}$$

Distinguons maintenant deux cas.

b1) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, il existe $x_i \in N_i(B_i)$ tel que $x_i \notin V_{i+1}$ et donc tel que $V_i = \mathbf{R}x_i \oplus V_{i+1}$, puisque $N_i(B_i) \not\subset V_{i+1}$. On a : $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (I),$$

condition qui se réduit à un nombre fini d'équations. $N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_i$ tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (II)$$

puisque $x_i \in N_i(B_i)$, donc que $B(x, x_i) = 0$ pour tout $x \in V_i$. On en déduit immédiatement que

$$N_i(B_i) \cap V_{i+1} = N_{i+1}(B_{i+1}) = N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})$$

c'est-à-dire que $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$.

Remarquons encore que (I) et (II) ont même rang dans V_{i+1} , resp. V_i . En effet, soit e_1, \dots, e_p une base de V_{i+1} . Les systèmes (I) et (II) définissent les noyaux des applications linéaires de V_{i+1} , resp. V_i dans \mathbf{R}^p données par

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} B(x, e_1) \\ B(x, e_2) \\ \vdots \\ B(x, e_p) \end{pmatrix} := V(x)$$

Le rang du système (I) est donc égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \dots, V(e_p)$. Le rang du système (II) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \dots, V(e_p)$, $V(x_i)$. Or

$$V(x_i) = \begin{pmatrix} B(x_i, e_1) \\ B(x_i, e_2) \\ \vdots \\ B(x_i, e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque $x_i \in N_i(B_i)$ et les systèmes (I) et (II) ont même rang ρ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \dim N_{i+1}(B_{i+1}) &= \dim V_{i+1} - \rho \\ \dim N_i(B_i) &= \dim V_i - \rho \end{aligned}$$

et

$$\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1.$$

Finalement

$$\dim H_i = \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim N_{i+1}(B_{i+1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\dim N_{i+1}(B_{i+1}) + \dim V_{i+1}) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i .

b2) Si $\dim V_i/V_{i+1} = 2$, on a

$\dim N_i(B_i) \leq \dim[N_i(B_i) \cap V_{i+1}] + 2$. Supposons d'abord $\dim N_i(B_i) = \dim[N_i(B_i) \cap V_{i+1}] + 2$. Alors il existe $x_i, x'_i \in N_i(B_i)$, n'appartenant pas à V_{i+1} tels que

$$V_i = \mathbf{R}x_i \oplus \mathbf{R}x'_i \oplus V_{i+1}.$$

Le raisonnement est alors analogue au cas $\dim V_i/V_{i+1} = 1$. $N_{i+1}(B_{i+1})$ est l'ensemble des $x \in V_{i+1}$ tels que

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (\text{I}).$$

$N_i(B_i)$ est l'ensemble des $x \in V_i$ tels que

$$\begin{cases} B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \\ B(x, x_i) = 0 \\ B(x, x'_i) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$B(x, V_{i+1}) \equiv 0 \quad (\text{II})$$

comme $x_i, x'_i \in N_i(B_i)$, donc que $B(x, x_i) = B(x, x'_i) = 0$ pour tout $x \in V_i$. On en déduit immédiatement que

$$N_i(B_i) \cap V_{i+1} = N_{i+1}(B_{i+1}) = N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})$$

c'est-à-dire que $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$. Avec les mêmes définitions que dans le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 1$, le rang du système (I) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \dots, V(e_p)$. Le rang du système (II) est égal au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants parmi $V(e_1), \dots, V(e_p), V(x_i), V(x'_i)$.

Or

$$V(x_i) = \begin{pmatrix} B(x_i, e_1) \\ B(x_i, e_2) \\ \vdots \\ B(x_i, e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } V(x'_i) = \begin{pmatrix} B(x'_i, e_1) \\ B(x'_i, e_2) \\ \vdots \\ B(x'_i, e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque $x_i, x'_i \in N_i(B_i)$. Donc les systèmes (I) et (II) ont même rang ρ . Par conséquent

$$\dim N_{i+1}(B_{i+1}) = \dim V_{i+1} - \rho$$

$$\dim N_i(B_i) = \dim V_i - \rho$$

et

$$\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 2.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \dim H_i &= \dim H_{i+1} + \dim N_i(B_i) - \dim N_{i+1}(B_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) + 2 \\ &= \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i . Supposons ensuite que

$\dim N_i(B_i) = \dim(N_i(B_i) \cap V_{i+1}) + 1 = \dim(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) + 1$.
Donc il existe $x_i \in N_i(B_i)$, $x_i \notin V_{i+1}$, $x_i \notin N_{i+1}(B_{i+1})$ tel que

$$N_i(B_i) = \mathbf{R}x_i \oplus (N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})).$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

Soit $N_{i+1}(B_{i+1}) \subset N_i(B_i)$. Alors $N_i(B_i) = \mathbf{R}x_i \oplus N_{i+1}(B_{i+1})$,
 $\dim N_i(B_i) = \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &= \frac{1}{2}(\dim V_{i+1} + 2 + \dim N_{i+1}(B_{i+1}) + 1) \\ &= \frac{3}{2} + \dim H_{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est à exclure comme $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$ est un entier. Soit $N_{i+1}(B_{i+1}) \not\subset N_i(B_i)$. Il existe alors $x_{i+1} \in N_{i+1}(B_{i+1})$ tel que $x_{i+1} \notin N_i(B_i)$. Par conséquent

$$(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) \oplus \mathbf{R}x_{i+1} \subset N_{i+1}(B_{i+1})$$

et

$$\begin{aligned} \dim N_{i+1}(B_{i+1}) &\geq \dim(N_i(B_i) \cap N_{i+1}(B_{i+1})) + 1 \\ &= \dim N_i(B_i). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) &\leq \frac{1}{2}(2 + \dim V_{i+1} + \dim N_{i+1}(B_{i+1})) \\ &= 1 + \dim H_{i+1}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} H_i &= \sum_{j=i}^n N_j(B_j) = N_i(B_i) + \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right) \\ &= \mathbf{R}x_i \oplus \left(\sum_{j=i+1}^n N_j(B_j) \right) \\ &\quad \text{car } x_i \notin V_{i+1} \\ &\quad \text{donc } x_i \notin N_j(B_j), j \geq i+1 \\ &= \mathbf{R}x_i \oplus H_{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\dim H_i = \dim H_{i+1} + 1$ et

$$\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i)) \leq \dim H_i.$$

Comme H_i est un sous-espace isotrope, sa dimension ne peut dépasser $\frac{1}{2}(\dim V_i + \dim N_i(B_i))$. Il faut donc avoir l'égalité et la formule sur les dimensions est vérifiée pour l'indice i . Supposons finalement que $\dim N_i(B_i) = \dim(N_i(B_i) \cap V_{i+1})$. Donc $N_i(B_i) \subset V_{i+1}$ contrairement à notre hypothèse.

La discussion de cas est maintenant achevée et le théorème est démontré.

3.3. Le fait d'exclure dès le départ le cas $\dim V_i/V_{i+1} = 2$ et $N_i(B_i) = N_{i+1}(B_{i+1})$ est bien une restriction nécessaire comme nous allons le voir dans la section suivante.

4. Sous-espace isotrope maximal dans une algèbre exponentielle \mathfrak{g} soumise à une action exponentielle d

4.1. Dans la suite \mathfrak{g} désignera une algèbre exponentielle, \mathfrak{n} un idéal nilpotent de \mathfrak{g} (par exemple le radical nilpotent), \mathfrak{d} une algèbre exponentielle de dérivations de \mathfrak{g} , contenant $\text{ad } \mathfrak{g}$, faisant de \mathfrak{g} un \mathfrak{d} -module de type exponentiel et tel que $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, \mathfrak{n} est un idéal \mathfrak{d} -invariant. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$.

4.2. Exemples : a) Soit \mathfrak{g} une algèbre exponentielle et $\mathfrak{d} = \text{ad } \mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotent, donc $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, radical nilpotent de \mathfrak{g} .

b) Soit \mathfrak{k} une algèbre exponentielle. Posons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(\ell) + [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Alors \mathfrak{g} est un idéal dans \mathfrak{k} et $\mathfrak{d} = \text{ad } \mathfrak{k}|_{\mathfrak{g}}$ convient car $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{k}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ qui est nilpotent, donc inclus dans le radical nilpotent de \mathfrak{g} .

4.3. Comme \mathfrak{g} est un \mathfrak{d} -module de type exponentiel, il existe une suite d'idéaux \mathfrak{g}_i de \mathfrak{g} , \mathfrak{d} -invariants, tels que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_i \supset \mathfrak{g}_{i+1} \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{n}$ pour un certain $p < n$

$\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ ou $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$.

Le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de \mathfrak{d} . Ceci signifie :

Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$, il existe $\varphi_i \in \mathfrak{d}^*$, $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$d(x_i) = \varphi_i(d)x_i \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}, \text{ pour tout } d \in \mathfrak{d}.$$

Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$, il existe $\varphi_i \in \mathfrak{d}^*$, $w_i \in \mathfrak{R}^*$, $x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_i, x'_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1},$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$.

4.4. Comme $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{n}$, il faut avoir $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ pour $i < p$.

En effet, supposons $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$. Puisque $d(x_i) \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ et que $d(x'_i) \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, $\varphi_i \equiv 0$. Or alors le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ n'est plus irréductible, contrairement à l'hypothèse. Donc $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$, $d(x_i) \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_{i+1}$.

4.5. Remarque : Dans tous les cas, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. En effet, comme \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal, $[\mathfrak{g}_{i+1}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. De plus $\varphi_i(\text{ad } x_i) = \varphi_i(\text{ad } x'_i) = 0$, donc $[x_i, x'_i] \in \mathfrak{g}_{i+1}$.

4.6. Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ non nul. La forme bilinéaire utilisée sera

$$(x, y) \mapsto \langle \ell, [x, y] \rangle.$$

On notera $\ell_i = \ell|_{\mathfrak{g}_i}$ et les noyaux correspondants seront notés $\mathfrak{g}_i(\ell_i)$.

4.7. Condition suffisante pour exclure le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$

a) Dans cette section nous montrerons le résultat suivant : Si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, alors il existe $x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_i, x'_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_i &= \mathfrak{R}x_i \oplus \mathfrak{R}x'_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1} \\ \langle \ell, [x_i, x'_i] \rangle &\neq 0 \\ \langle \ell, [x_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle &\equiv \langle \ell, [x'_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0 \\ d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} &= \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle \ell, d([x_i, x'_i]) \rangle = 2\varphi_i(d)\langle \ell, [x_i, x'_i] \rangle.$$

Donc s'il existe $d \in \mathfrak{d}$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$ et tel que $\langle \ell, d([x_i, x'_i]) \rangle = 0$ (par exemple si $\langle \ell, d(\mathfrak{n}) \rangle = 0$), on a une contradiction et le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ est exclu. Démontrons les résultats précédents.

b) Supposons $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Comme $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, on a $\mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i} \subset \mathfrak{g}_i(\ell_i)^\perp|_{\mathfrak{g}_i} = (\text{ad}^* \mathfrak{g}_i)(\ell_i)$. Soit $0 \neq p \in \mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i}$. Il existe donc $x_i \in \mathfrak{g}_i$ tel que $p = (\text{ad}^* x_i)(\ell_i)$. Supposons $x_i \in \mathfrak{g}_{i+1}$. Comme $(\text{ad}^* x_i)(\ell_i) \in \mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i}$, ceci signifie que $x_i \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ et $p = (\text{ad}^* x_i)(\ell_i) \equiv 0$, contrairement à notre hypothèse. Donc $x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$, c'est-à-dire

$$x_i \in \mathfrak{g}_i, x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$$

$$p = (\text{ad}^* x_i)(\ell_i) \in \mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i} \iff \langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0.$$

c) Supposons en plus $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$. Alors

$$\dim(\mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i}) = \dim \mathfrak{g}_i - \dim \mathfrak{g}_{i+1} = 2.$$

Donc il existe $p' \in \mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i}$ tel que p et p' forment une base de $\mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i}$. Comme en b) il existe x'_i tel que

$$x'_i \in \mathfrak{g}_i, x'_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$$

$$p' = (\text{ad}^* x'_i)(\ell_i) \in \mathfrak{g}_{i+1}^\perp|_{\mathfrak{g}_i} \iff \langle \ell_i, [x'_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0.$$

Montrons que x_i et x'_i sont indépendants modulo \mathfrak{g}_{i+1} . En effet, supposons $x_i - \lambda x'_i = g_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$. De plus $\langle \ell_i, [x_i - \lambda x'_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0$. Donc $x_i - \lambda x'_i \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \mathfrak{g}_i(\ell_i)$, c'est-à-dire $\text{ad}^*(x_i - \lambda x'_i)(\ell_i) \equiv 0$ et $p = (\text{ad}^* x_i)(\ell_i) \equiv \lambda (\text{ad}^* x'_i)(\ell_i) = \lambda p'$, contrairement à notre hypothèse. Donc x_i et x'_i sont indépendants modulo \mathfrak{g}_{i+1} et

$$\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}.$$

D'ailleurs x_i, x'_i peuvent être choisis tels que

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$, $0 \neq \varphi_i \in \mathfrak{d}^*$. En effet, si $\langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0$ et $\langle \ell_i, [x'_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0$, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires \tilde{x}_i et \tilde{x}'_i de x_i et x'_i et, pour des combinaisons linéaires appropriées, on a la formule précédente. De

plus, $\langle \ell_i, [\tilde{x}_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \neq 0$ ou $\langle \ell_i, [\tilde{x}'_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \neq 0$. En effet, $\langle \ell_i, [\tilde{x}_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$ et $\langle \ell_i, [\tilde{x}'_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$ entraîne $\langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$ et $p \neq 0$ et $p' \neq 0$.

Supposons à présent $\langle \ell_i, [x_i, x'_i] \rangle = 0$, resp. $\langle \ell_i, [\tilde{x}_i, \tilde{x}'_i] \rangle = 0$ si on a dû remplacer x_i et x'_i par des combinaisons linéaires \tilde{x}_i et \tilde{x}'_i . Alors

$$\langle \ell_i, [x_i, \lambda x_i + \mu x'_i + \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0 \text{ quels que soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$$

et $p = \text{ad}^* x_i(\ell_i) \equiv 0$, contrairement à l'hypothèse. On montre de même que $\langle \ell_i, [\tilde{x}_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$ et $\langle \ell_i, [\tilde{x}'_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$ dans le second cas, contrairement à notre hypothèse. Donc $\langle \ell_i, [x_i, x'_i] \rangle \neq 0$, resp. $\langle \ell_i, [\tilde{x}_i, \tilde{x}'_i] \rangle \neq 0$. Notons x_i et x'_i à la place de \tilde{x}_i et \tilde{x}'_i dans la suite.

d) Soit $d \in \mathfrak{d}$. Il existe $g_{i+1}, g'_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$ tels que

$$\begin{aligned} d(x_i) &= \varphi_i(d)x_i - \varphi_i(d)w_i x'_i + g_{i+1} \\ d(x'_i) &= \varphi_i(d)w_i x_i + \varphi_i(d)x'_i + g'_{i+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \ell_i, d([x_i, x'_i]) \rangle &= \langle \ell_i, [d(x_i), x'_i] \rangle + \langle \ell_i, [x_i, d(x'_i)] \rangle \\ &= \langle \ell_i, [\varphi_i(d)x_i - \varphi_i(d)w_i x'_i + g_{i+1}, x'_i] \rangle \\ &\quad + \langle \ell_i, [x_i, \varphi_i(d)w_i x_i + \varphi_i(d)x'_i + g'_{i+1}] \rangle \\ &= 2\varphi_i(d)\langle \ell_i, [x_i, x'_i] \rangle. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration des résultats de a).

4.8. **Contre-exemple :** L'exemple suivant montre que $\sum_{i=0}^r \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ n'est pas nécessairement un sous-espace isotrope maximal, donc n'est pas nécessairement une polarisation.

Soit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}t + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y$ avec

$$\begin{aligned} [t, y] &= y & [u, y] &= 0 \\ [t, u] &= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv & [u, v] &= y \\ [t, v] &= \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v & [v, y] &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\ell = y^* \in \mathfrak{g}^*$ et soit $d = \text{ad } \mathfrak{g}$.

a) Vérifions d'abord que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie, c'est-à-dire que l'identité de Jacobi est vérifiée. En effet :

$$\begin{aligned} [u, [v, y]] &= [u, 0] = 0 \\ -[v, [y, u]] - [y, [u, v]] &= -[v, 0] - [y, y] = 0 \\ [u, [v, y]] &= -[v, [y, u]] - [y, [u, v]] \\ [t, [v, y]] &= [t, 0] = 0 \\ -[v, [y, t]] - [y, [t, v]] &= [v, y] - [y, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v] = 0 \\ [t, [v, y]] &= -[v, [y, t]] - [y, [t, v]] \\ [t, [u, y]] &= [t, 0] = 0 \\ -[u, [y, t]] - [y, [t, u]] &= [u, y] - [y, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv] = 0 \\ [t, [u, y]] &= -[u, [y, t]] - [y, [t, u]] \\ [t, [u, v]] &= [t, y] = y \\ -[u, [v, t]] - [v, [t, u]] &= [u, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v] - [v, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv] \\ &= [u, v] = y \\ \text{et } [t, [u, v]] &= -[u, [v, t]] - [v, [t, u]]. \end{aligned}$$

Comme l'inégalité de Jacobi reste vérifiée si on modifie l'ordre des éléments et si deux éléments sont égaux, \mathfrak{g} est bien une algèbre de Lie.

b) L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est exponentielle comme nous le verrons en déterminant ses racines. En effet, soit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}t + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y \\ \mathfrak{g}_1 &= \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}y \\ \mathfrak{g}_2 &= \mathbb{R}y \\ \mathfrak{g}_3 &= \{0\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \triangleright \mathfrak{g}_1 \triangleright \mathfrak{g}_2 \triangleright \mathfrak{g}_3 = \{0\}.$$

Les racines sont données par :

$$\begin{aligned} \text{(i) pour } \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_1 : (\text{ad } x)(t) &= 0 \text{ mod } \mathfrak{g}_1 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{g} \\ \text{(ii) pour } \mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2 : (\text{ad } x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \psi(x) \begin{pmatrix} 1 & -w \\ w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \text{mod } \mathfrak{g}_2 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{g} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2} \\ \psi(u) &= 0 \\ \psi(v) &= 0 \\ \psi(y) &= 0 \end{aligned}$$

(iii) pour $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{g}_3 : (\text{ad } x)(y) = \varphi(x)y$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ avec

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 & \varphi(v) &= 0 \\ \varphi(u) &= 0 & \varphi(y) &= 0. \end{aligned}$$

La forme des racines montre donc que \mathfrak{g} est une algèbre exponentielle.

c) Déterminons à présent $\sum_{i=0}^2 \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ et montrons que ce n'est pas un sous-espace isotrope maximal.

(i) Soit $w = \alpha t + \beta u + \gamma v + \delta y \in \mathfrak{g}_0(\ell_0)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, t] \rangle = \beta \langle \ell, [u, t] \rangle + \gamma \langle \ell, [v, t] \rangle + \delta \langle \ell, [y, t] \rangle \\ &= -\beta \langle \ell, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv \rangle - \gamma \langle \ell, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v \rangle - \delta \langle \ell, y \rangle = -\delta. \end{aligned}$$

Donc $\delta = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, u] \rangle = \alpha \langle \ell, [t, u] \rangle + \gamma \langle \ell, [v, u] \rangle + \delta \langle \ell, [y, u] \rangle \\ &= \alpha \langle \ell, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}wv \rangle - \gamma \langle \ell, y \rangle = -\gamma. \end{aligned}$$

Donc $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, v] \rangle = \alpha \langle \ell, [t, v] \rangle + \beta \langle \ell, [u, v] \rangle + \delta \langle \ell, [y, v] \rangle \\ &= \alpha \langle \ell, \frac{1}{2}wu + \frac{1}{2}v \rangle + \beta \langle \ell, y \rangle = \beta. \end{aligned}$$

Donc $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, y] \rangle = \alpha \langle \ell, [t, y] \rangle + \beta \langle \ell, [u, y] \rangle + \gamma \langle \ell, [v, y] \rangle \\ &= \alpha \langle \ell, y \rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = 0$.

Par conséquent $\mathfrak{g}_0(\ell_0) = \{0\}$.

(ii) Soit $w = \beta u + \gamma v + \delta y \in \mathfrak{g}_1(\ell_1)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, u] \rangle = \gamma \langle \ell, [v, u] \rangle + \delta \langle \ell, [y, u] \rangle \\ &= -\gamma \langle \ell, y \rangle = -\gamma. \end{aligned}$$

Donc $\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [w, v] \rangle = \beta \langle \ell, [u, v] \rangle + \delta \langle \ell, [y, v] \rangle \\ &= \beta \langle \ell, y \rangle = \beta. \end{aligned}$$

Donc $\beta = 0$.

$$P = \langle \ell, [w, y] \rangle = \beta \langle \ell, [u, y] \rangle + \gamma \langle \ell, [v, y] \rangle = 0.$$

Par conséquent $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{R}y$.

(iii) Comme \mathfrak{g}_2 est abélien, on a $\mathfrak{g}_2(\ell_2) = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{R}y$.

(iv) Nous remarquons en particulier que $\dim \mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2 = 2$ et $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{g}_2(\ell_2)$, cas que nous avons dû exclure dans la théorie générale.

(v) On a

$$\sum_{i=0}^2 \mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{R}y.$$

d) Remarquons finalement que $\sum_{i=0}^2 \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ n'est pas un sous-espace isotrope maximal, donc n'est pas une polarisation. En effet, la dimension de tout sous-espace isotrope maximal, et donc de toute polarisation, est donnée par

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(\ell)) = \frac{1}{2}(4 + 0) = 2.$$

159
Une polarisation de \mathfrak{g} est par exemple donnée par $\mathfrak{h} = \mathfrak{R}v + \mathfrak{R}y$. En effet, $\dim \mathfrak{h} = 2$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ et donc $\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$.

4.9. Si le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ se présente, il faut donc intercaler un sous-espace de manière à se ramener à des quotients de dimension 1, tout en tenant compte le mieux possible de l'action de d .

4.10. **Construction d'un sous-espace isotrope maximal :**

Soit la situation présentée en 4.3. et 4.4. Considérons la sous-algèbre \mathfrak{n} soumise à l'action de $d_1 = d(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$. Remarquons d'abord que d_1 est une sous-algèbre de dérivations de \mathfrak{n} . En effet, $[d(\ell|_{\mathfrak{n}}), d(\ell|_{\mathfrak{n}})] \subset d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ puisque $d(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$, $[\text{ad } \mathfrak{n}, \text{ad } \mathfrak{n}] \subset \text{ad } \mathfrak{n}$ et quels que soient $d \in d(\ell|_{\mathfrak{n}})$, $n, n' \in \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned} [d, \text{ad } \mathfrak{n}](n') &= (d \circ \text{ad } \mathfrak{n} - \text{ad } \mathfrak{n} \circ d)(n') \\ &= d([n, n']) - [n, d(n')] \\ &= [d(n), n'] \\ &= \text{ad } d(n)(n') \end{aligned}$$

avec $\text{ad } d(n) \in \text{ad } \mathfrak{n}$, puisque $d(n) \in \mathfrak{n}$. Donc $[d, \text{ad } \mathfrak{n}] \in \text{ad } \mathfrak{n}$. Remarquons que la suite

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_p \triangleright \mathfrak{g}_{p+1} \triangleright \dots \triangleright \mathfrak{g}_n = \{0\}$$

est évidemment $(d(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n})$ -invariante, puisque $(d(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}) \subset d|_{\mathfrak{n}}$. Rappelons que si $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ il existe x_i, x'_i tels que $x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i$, $x_i, x'_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ et

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}.$$

Rappelons encore que si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, on peut choisir x_i, x'_i tels que $\langle \ell, [x_i, x'_i] \rangle \neq 0$. Remarquons finalement que $\varphi_i(\text{ad } \mathfrak{n}) = 0$ puisque $\text{ad } \mathfrak{n}$ est nilpotent.

Supposons d'abord le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ irréductible pour

l'action de $\mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$. Il existe donc $d \in \mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}})$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$. Alors

$$0 = -\langle d^* \ell, [x_i, x'_i] \rangle = \langle \ell, d([x_i, x'_i]) \rangle.$$

Or, dans le cas où $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$, on peut choisir x_i, x'_i tels que $\langle \ell, d([x_i, x'_i]) \rangle = 2\varphi_i(d)\langle \ell, [x_i, x'_i] \rangle$ et $\langle \ell, [x_i, x'_i] \rangle \neq 0$. Ceci est une contradiction. Donc si $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$, le cas $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ ne peut pas se présenter.

Supposons ensuite $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ réductible pour l'action de $\mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$. Donc il existe \mathfrak{g}'_i

(par exemple $\mathfrak{g}'_i = \mathbb{R}x'_i + \mathfrak{g}_{i+1}$) $\mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$ -invariant tel que $\mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}'_i \subset \mathfrak{g}_i$ et $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}'_i = \dim \mathfrak{g}'_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$. Comme \mathfrak{g}'_i est $\text{ad } \mathfrak{n}$ -invariant, \mathfrak{g}'_i est un idéal dans \mathfrak{n} . De cette manière on intercale à certains endroits des \mathfrak{g}'_i entre \mathfrak{g}_i et \mathfrak{g}_{i+1} de manière à exclure le cas $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ et $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Soit J l'ensemble des indices i pour lesquels on intercale un tel \mathfrak{g}'_i . Dans ce cas (3.2.) montre que

$$\sum_{i=p}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathfrak{g}'_i(\ell_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de \mathfrak{n} et

$$\sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathfrak{g}'_i(\ell_i)$$

est un sous-espace isotrope maximal de \mathfrak{g} .

4.11. Par construction dans 4.10., \mathfrak{g}'_i est un idéal dans \mathfrak{n} , donc dans \mathfrak{g}_i . De plus, \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal dans \mathfrak{g} , donc également dans \mathfrak{g}'_i .

5. Polarisation $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariante

5.1. Théorème : Le sous-espace isotrope maximal construit en 4.10. est en fait une polarisation $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariante.

Démonstration : Dans tous les cas où $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 2$ on peut en fait intercaler un sous-espace \mathfrak{g}'_i qui est une sous-algèbre (par exemple $\mathfrak{g}'_i = \mathbb{R}x'_i + \mathfrak{g}_{i+1}$), étant donné que $\varphi_i(\text{ad } \mathfrak{n}) = 0$. De cette manière on obtient une bonne suite de sous-algèbres. Soit K l'ensemble des indices parcouru par les indices des \mathfrak{g}'_i de cette bonne suite de sous-algèbres et J celui de 4.10. On a évidemment $J \subset K$ et

$$\sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathfrak{g}'_i(\ell_i) \subset \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in K} \mathfrak{g}'_i(\ell_i).$$

Par le théorème de Vergne (2.2.) on sait que

$$\sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in K} \mathfrak{g}'_i(\ell_i) \text{ est une polarisation. Or d'après 4.10., } \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathfrak{g}'_i(\ell_i) \text{ est un sous-espace isotrope maximal.}$$

Donc les deux coïncident et le sous-espace isotrope construit en 4.10. est en fait une polarisation. Les $\mathfrak{g}_i(\ell_i)$ sont $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariants. En effet, soient $g_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i), g'_i \in \mathfrak{g}_i$ et $d \in \mathfrak{d}(\ell)$. Alors

$$\langle \ell, [d(g_i), g'_i] \rangle = \langle \ell, d[g_i, g'_i] \rangle - \langle \ell, [g_i, d(g'_i)] \rangle = 0$$

puisque $d \in \mathfrak{d}(\ell), d(g'_i) \in \mathfrak{g}_i$ et $g_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Donc $d(g_i) \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Les $\mathfrak{g}'_i(\ell_i), i \in J$, sont également $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariants. En effet, le raisonnement précédent reste valable, étant donné que les $\mathfrak{g}'_i, i \in J$ sont $\mathfrak{d}(\ell)$ -invariants par hypothèse.

5.2. Remarques : a) En fait le raisonnement précédent montre que la polarisation est même $\mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariante, c'est-à-dire invariante sous l'action des $d \in \mathfrak{d}$ tels que $\langle \ell, d(\mathfrak{n}) \rangle \equiv 0$. En effet, la seule propriété utilisée est le fait que $\langle \ell, d([g_i, g'_i]) \rangle = 0$ et ceci est le cas pour $d \in \mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}})$ étant donné que $[g_i, g'_i] \in \mathfrak{n}$.

b) Notons $\mathfrak{g}(\ell') = \{u \in \mathfrak{g} | \langle \ell, [u, \mathfrak{n}] \rangle \equiv 0\}$. Donc $\text{ad}(\mathfrak{g}(\ell')) \subset \mathfrak{d}(\ell|_{\mathfrak{n}})$ et la remarque précédente montre que la polarisation de Vergne est $\text{ad}(\mathfrak{g}(\ell'))$ -invariante.

c) Pour tout k

$$h_k = \sum_{i \geq k} g_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} g'_i(\ell_i) = \sum_{i \geq k} g_i(\ell_i) + \sum_{i \geq k} g'_i(\ell_i)$$

est une polarisation $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariante, et donc $d(\ell)$ -invariante, au point $\ell_k = \ell|_{\mathfrak{g}_k}$ de \mathfrak{g}_k^* . De même, si $k \in J$,

$$h'_k = g'_k(\ell_k) + \sum_{i > k} g_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} g'_i(\ell_i) = g'_k(\ell_k) + \sum_{i > k} g_i(\ell_i) + \sum_{i \in K} g'_i(\ell_i)$$

est une polarisation $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariante, et donc $d(\ell)$ -invariante, au point $\ell_k = \ell|_{\mathfrak{g}_k}$ de \mathfrak{g}_k^* .

En effet, dans la construction par récurrence, on obtient une polarisation à chaque étape. D'ailleurs, si $k \in K, k \notin J$,

$$h'_k = g'_k(\ell_k) + \sum_{i > k} g_i(\ell_i) + \sum_{i \in K} g'_i(\ell_i)$$

est également une polarisation au point $\ell_k = \ell|_{\mathfrak{g}_k}$ de \mathfrak{g}_k^* , non $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariante, car g'_k n'est pas $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariant.

d) Les polarisations h_k et h'_k précédentes sont données par

$$h_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k, \text{ resp. } h'_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'_k.$$

En effet, dans le cas de \mathfrak{g}_k par exemple, il est évident que $h_k \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k$. D'autre part, soit

$$\left(\sum_{i=0}^n g_i + \sum_{i \in J} g'_i \right) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k$$

avec $g_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ et $g'_i \in \mathfrak{g}'_i(\ell_i)$. Pour $i \geq k, g_i, g'_i \in \mathfrak{g}_k$. Donc

$$g_1 = \sum_{i < k} g_i + \sum_{i \in J} g'_i \in \mathfrak{g}_k$$

et $\langle \ell, [g_1, \mathfrak{g}_k] \rangle \equiv 0$, étant donné que $\langle \ell, [g_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0, \langle \ell, [g'_i, \mathfrak{g}'_i] \rangle \equiv 0$ et que $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_i$, resp. $\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}'_i$. Ainsi $g_1 \in \mathfrak{g}_k(\ell_k)$ et

$$\left(\sum_{i=0}^n g_i + \sum_{i \in J} g'_i \right) \in h_k.$$

On fait une démonstration analogue dans le cas de \mathfrak{g}'_k .

e) En particulier, on en déduit que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation au point $\ell|_{\mathfrak{n}}$ de \mathfrak{n}^* qui est $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariante.

f) De même, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ est une bonne suite de sous-algèbres, si $\mathfrak{h} = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ est la polarisation de Vergne correspondante, alors, pour tout k ,

$$h_k = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k = \sum_{i \geq k} \mathfrak{g}_i(\ell_i)$$

est la polarisation de Vergne au point $\ell_k = \ell|_{\mathfrak{g}_k}$ de \mathfrak{g}_k^* .

5.3. Critère de Pukanszky : Soit G un groupe de Lie commexe simplement commexe exponentiel d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$ et soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g} telle que $\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$. Soit $H = \exp \mathfrak{h}$. Dans ce cas \mathfrak{h} est une polarisation au point ℓ de \mathfrak{g}^* telle que $\Pi = \text{ind}_H^G \ell$ soit une représentation unitaire irréductible de G ssi

$$\ell + \mathfrak{h}^\perp = \{ \text{Ad}^*(\exp h)\ell | h \in \mathfrak{h} \} = \text{Ad}^*H(\ell)$$

([3]). Nous allons montrer que les polarisations de Vergne satisfont au critère de Pukanszky et permettent donc de construire des représentations irréductibles.

5.4. Théorème : Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ une bonne suite de sous-algèbres. Alors la polarisation de Vergne $\mathfrak{h} = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ vérifie le critère de Pukanszky.

Démonstration : Faisons une démonstration par récurrence. Comme $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$ est abélien, $\mathfrak{h}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1}$, $\Pi_{n-1} = \chi \ell |_{\mathfrak{g}_{n-1}}$ est un caractère, donc irréductible, et $\ell_{n-1} + \mathfrak{h}_{n-1}^\perp = \ell_{n-1} = \text{Ad}^*(H_{n-1})(\ell_{n-1})$. Supposons à présent le critère démontré pour \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} et démontrons-le pour \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i . Rappelons d'abord que pour toute bonne suite de sous-algèbres, \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal dans \mathfrak{g}_i . Soit $p_i = \ell_i + \varphi_i \in \ell_i + \mathfrak{h}_i^\perp$. Alors $p_{i+1} = p_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}} = \ell_{i+1} + \varphi_{i+1}$ avec $\varphi_{i+1} = \varphi_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}} \in \mathfrak{h}_{i+1}^\perp$. Par hypothèse de récurrence, il existe $h_{i+1} \in \mathfrak{h}_{i+1}$ tel que $p_{i+1} = p_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}} = \text{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_{i+1})$. Supposons d'abord que $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathfrak{g}_{i+1}$. Donc il existe $b_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ tel que $b_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ et $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}b_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$. Alors

$$\langle p_i, b_i \rangle = \langle \ell_i, b_i \rangle + \langle \varphi_i, b_i \rangle = \langle \ell_i, b_i \rangle$$

puisque $b_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{h}_i$ et que $\varphi_i \in \mathfrak{h}_i^\perp$. D'autre part

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i), b_i \rangle &= \langle \ell_i, \text{Ad}(\exp h_{i+1})(b_i) \rangle \\ &= \langle \ell_i, b_i \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \ell_i, \text{ad}^k(-h_{i+1})(b_i) \rangle \\ &= \langle \ell_i, b_i \rangle \end{aligned}$$

étant donné que $\text{ad}^k(-h_{i+1})(b_i) \in [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i]$ et que $\langle \ell_i, [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \rangle \equiv 0$. Comme de plus $p_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}} = \text{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i) |_{\mathfrak{g}_{i+1}}$, on a évidemment $p_i = \text{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_i)$ dans \mathfrak{g}_i . Supposons à présent que $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$. Donc $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i + \mathfrak{g}_{i+1}$. Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_i(\ell_i)) &= \dim \mathfrak{h}_i = \dim \mathfrak{h}_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_{i+1} + \dim \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})), \end{aligned}$$

$\dim \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) = \dim \mathfrak{g}_i(\ell_i) + 1$ et il existe $u_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ tel que $u_{i+1} \notin \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Puisque $u_{i+1} \in \mathfrak{g}_i$ on a donc $\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i] \rangle \neq 0$ et on peut par exemple supposer que $\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i] \rangle = 1$. D'ailleurs $u_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$

et $\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1} \in H_{i+1} \subset H_i$. On a pour tout $g_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$

$$\begin{aligned} &\langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1} \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1} \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}), \text{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(g_{i+1}) \rangle \\ &= \langle \ell_{i+1}, \text{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(g_{i+1}) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1})(\ell_{i+1}), g_{i+1} \rangle \\ &= \langle p_{i+1}, g_{i+1} \rangle \text{ avec } p_{i+1} = p_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}} \end{aligned}$$

étant donné que $\text{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(g_{i+1}) \in \mathfrak{g}_{i+1}$ et que $u_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. D'autre part,

$$\begin{aligned} &\langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), \text{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(x_i) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i \rangle \\ &\quad + \langle \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), \text{Ad}(\exp(-h_{i+1}))(x_i) - x_i \rangle \\ &= \langle \ell_i, x_i \rangle - t \langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i] \rangle + \langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \\ &\quad \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i - \text{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i) \rangle \\ &= \langle \ell_i, x_i \rangle - t \langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i] \rangle + \langle p_i, x_i - \text{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i) \rangle. \end{aligned}$$

En effet, $[u_{i+1}, x_i] \in \mathfrak{g}_{i+1}$ et $u_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$. Donc $\langle \ell_i, \text{ad}^2(u_{i+1})(x_i) \rangle = 0$ de même que $\langle \ell_i, \text{ad}^k(u_{i+1})(x_i) \rangle$ pour $k \geq 2$. De plus,

$$x_i - \text{Ad}(\exp h_{i+1})(x_i) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{ad}^k(h_{i+1})(x_i) \in \mathfrak{g}_{i+1}$$

étant donné que $h_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}$ et que \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal dans \mathfrak{g}_i . Or sur \mathfrak{g}_{i+1} , $\text{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \text{Ad}^*(\exp t u_{i+1})(\ell_{i+1}) = p_{i+1} = p_i |_{\mathfrak{g}_{i+1}}$. Puisque $\langle \ell_i, [u_{i+1}, x_i] \rangle \neq 0$ on peut alors déterminer univoquement t tel que

$$\langle \text{Ad}^*(\exp h_{i+1} \cdot \exp t u_{i+1})(\ell_i), x_i \rangle = \langle p_i, x_i \rangle.$$

Par conséquent, $m_i = \text{Ad}^*(\exp h_{i+1}) \cdot \exp t u_{i+1}(\ell_i) \in \text{Ad}^* H_i(\ell_i)$.

Ceci prouve que $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset \text{Ad}^*(H)(\ell)$.

L'inclusion $\text{Ad}^*(H)(\ell) \subset \ell + \mathfrak{h}^\perp$ est également vérifiée étant donné que pour $h \in \mathfrak{h}$, $\text{Ad}^*(\exp h)(\ell) = \ell + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{ad}^{*k}(h)(\ell)$ et que pour $h_1 \in \mathfrak{h}$ quelconque,

$$\langle \text{ad}^{*k}(h)(\ell), h_1 \rangle = \langle \ell, \text{ad}^k(-h)(h_1) \rangle = 0 \quad \text{pour } k \geq 1$$

puisque $\text{ad}^k(-h)(h_1) \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ et que $\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$. Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{ad}^{*k}(h)(\ell) \in \mathfrak{h}^\perp$.

5.5. **Corollaire :** Les polarisations $d(\ell|_{\mathfrak{n}})$ -invariantes construites dans ce travail vérifient le critère de Pukanszky, étant donné que ces polarisations peuvent également être obtenues à partir d'une bonne suite de sous-algèbres (5.1).

6. Base coexponentielle

6.1. **Rappel ([4]) :** Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de l'algèbre exponentielle \mathfrak{g} et soit $G = \exp \mathfrak{g}$. Il existe $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{g}$ tels que

$$\mathfrak{g} = \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R} b_i \right) \oplus \mathfrak{h}$$

et tels que l'application

$$\mathbb{R}^r \times \mathfrak{h} \rightarrow G$$

$$(s_1, \dots, s_r, h) \mapsto \exp s_1 b_1 \cdot \exp s_2 b_2 \cdot \dots \cdot \exp s_r b_r \cdot \exp h$$

soit un difféomorphisme. Il est équivalent d'exiger que l'application

$$\mathfrak{h} \times \mathbb{R}^r \rightarrow G$$

$$(h, s_1, \dots, s_r) \mapsto \exp h \cdot \exp s_1 b_1 \cdot \dots \cdot \exp s_r b_r \cdot \exp s_1 b_1$$

soit un difféomorphisme.

Définition : On dit que (b_1, \dots, b_r) est une *base coexponentielle* à \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . [67

6.2. **Remarques :** a) Soient \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' deux sous-algèbres de \mathfrak{g} telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$. Soient (b_1, \dots, b_r) une base coexponentielle à \mathfrak{h}' dans \mathfrak{g} et (c_1, \dots, c_s) une base coexponentielle à \mathfrak{h} dans \mathfrak{h}' . Alors $(b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s)$ est une base coexponentielle à \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} .

b) Si \mathfrak{h} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g} et si $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{h}$, alors $\{x\}$ est une base coexponentielle à \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} .

6.3. **Construction d'une base coexponentielle à la polarisation obtenue en 4.10 :** Soient \mathfrak{g}_i et \mathfrak{g}'_i les sous-algèbres, resp. idéaux utilisés en 4.10. dans la construction de la polarisation $\mathfrak{h} = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \sum_{i \in J} \mathfrak{g}'_i(\ell_i)$. Construisons une base coexponentielle à \mathfrak{h} par récurrence.

Si $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1}$, $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{h}_{n-1}$ et la base coexponentielle à \mathfrak{h}_{n-1} dans \mathfrak{g}_{n-1} est vide. De même si $n-1 \in J$ et $\mathfrak{g}'_{n-1} = \mathbb{R}x'_{n-1}$.

Si $\mathfrak{g}_{n-1} = \mathbb{R}x_{n-1} \oplus \mathbb{R}x'_{n-1}$, on peut donc supposer que \mathfrak{g}_{n-1} est $(d(\ell|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n})$ -irréductible. En particulier, $\mathfrak{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) \neq \mathfrak{g}_{n-1}(\ell_n) = \{0\}$. Donc le cas $\langle \ell_i, [x_n, x'_{n-1}] \rangle \neq 0$ est à exclure, car alors $\mathfrak{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) = \{0\}$. Ainsi, $\langle \ell_i, [x_n, x'_n] \rangle = 0$ et $\mathfrak{h}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1}(\ell_{n-1}) = \mathfrak{g}_{n-1}$. La base coexponentielle à \mathfrak{h}_{n-1} dans \mathfrak{g}_{n-1} est vide.

Supposons à présent que (b_1, \dots, b_r) , resp. ϕ soit une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} et construisons une base coexponentielle à \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i .

a) Supposons $\dim \mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1} = 1$. La démonstration qui suit reste valable pour les quotients $\mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}'_i$ et $\mathfrak{g}'_i / \mathfrak{g}_{i+1}$ si $i \in J$.

a1) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$. Comme \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}_i , $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{i+1} dans \mathfrak{g}_i . Soit (b_1, \dots, b_r) une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} . Alors (x_i, b_1, \dots, b_r) est une base coexponentielle à

$\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$ dans \mathfrak{g}_i .

a2) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathfrak{g}_{i+1}$, il existe $x_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ tel que $x_i \notin \mathfrak{g}_{i+1}$. Alors $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$ et $\mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i(\ell_i) + \mathfrak{h}_{i+1} = \sum_{j=i}^n \mathfrak{g}_j(\ell_j) = \mathfrak{h}_i$. Pour montrer qu'on a en fait égalité,

il suffit de montrer que $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$. En effet, soit $u_i = \lambda x_i + g_{i+1} \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Donc

$$\langle \ell_i, [u_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0 \Rightarrow \lambda \langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_i] \rangle + \langle \ell_i, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0$$

$$\Rightarrow \langle \ell_i, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle = 0 \text{ car } x_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i) \text{ et}$$

$$\mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i$$

$$\Rightarrow g_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$$

$$\Rightarrow u_i \in \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}.$$

Donc $\mathfrak{h}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$. D'ailleurs \mathfrak{h}_{i+1} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{h}_i et $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{h}_i . En effet

$$[x_i, \mathfrak{h}_{i+1}] \subset \mathfrak{h}_i \cap [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i+1}] = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i+1} = \mathfrak{h}_{i+1}.$$

Par conséquent l'application

$$\mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R} \rightarrow H_i = \exp \mathfrak{h}_i$$

$$(h_{i+1}, t) \mapsto \exp h_{i+1} \cdot \exp t x_i$$

est un difféomorphisme, de même que l'application

$$\mathfrak{g}_{i+1} \times \mathbb{R} \rightarrow G_i = \exp \mathfrak{g}_i$$

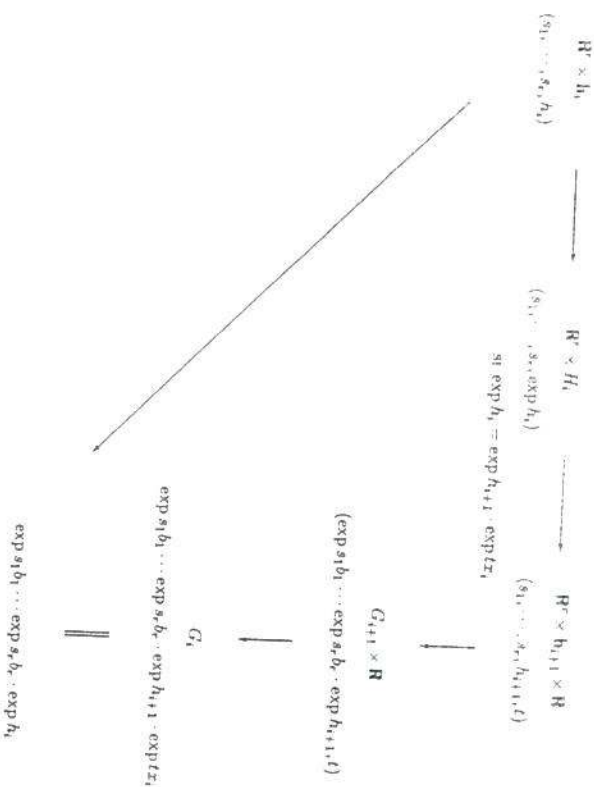
$$(g_{i+1}, t) \mapsto \exp g_{i+1} \cdot \exp t x_i$$

puisque $\{x_i\}$ est également une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{i+1} dans \mathfrak{g}_i . Soit (b_1, \dots, b_r) une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} . Montrons que c'est également une base coexponentielle à \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i . Par hypothèse l'application

$$\mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \rightarrow G_{i+1} = \exp \mathfrak{g}_{i+1}$$

$$(s_1, \dots, s_r, h_{i+1}) \mapsto \exp s_1 b_1 \dots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}$$

est un difféomorphisme. Donc l'application composée



est un difféomorphisme, puisqu'il en est ainsi de l'application exponentielle entre une algèbre de Lie exponentielle et le groupe de Lie connexe simplement connexe associé. Ceci prouve que (b_1, \dots, b_r) est une base coexponentielle à \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i .

b) Supposons ensuite $\dim \mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1} = 2$. Par a) on peut supposer que $\mathfrak{g}_i / \mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $d(\ell_i|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$ et donc que le cas $\mathfrak{g}_i(\ell_i) = \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ est exclu.

b1) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1})$ et $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$ tel que

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$ avec $\varphi_i(\text{ad } x_i) = \varphi_i(\text{ad } x'_i) = 0$ et $\varphi_i(\text{ad } \mathfrak{g}_{i+1}) \equiv 0$. Par conséquent, \mathfrak{g}_{i+1} est un idéal de

codimension 1 dans $\mathfrak{g}'_i = \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$ et $\{x'_i\}$ est une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{i+1} dans \mathfrak{g}'_i . De même \mathfrak{g}'_i est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}_i et $\{x_i\}$ est une base coexponentielle à \mathfrak{g}'_i dans \mathfrak{g}_i . Si (b_1, \dots, b_r) est une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} , on en déduit donc que $(x_i, x'_i, b_1, \dots, b_r)$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$ dans \mathfrak{g}_i .

b2) Si $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \not\subset \mathfrak{g}_{i+1}$, il faut, par 3.2, distinguer les deux cas $\dim \mathfrak{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathfrak{g}_i(\ell_i) \cap \mathfrak{g}_{i+1}] + 2$ et $\dim \mathfrak{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathfrak{g}_i(\ell_i) \cap \mathfrak{g}_{i+1}] + 1$. Si $\dim \mathfrak{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathfrak{g}_i(\ell_i) \cap \mathfrak{g}_{i+1}] + 2$, il existe $x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$ tels que $\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}$. Donc $x_i, x'_i \in \mathfrak{h}_i, x_i, x'_i \notin \mathfrak{h}_{i+1}$ et $\mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1} \subset \mathfrak{h}_i$. Montrons qu'on a égalité. Soit $u_i = \lambda x_i + \mu x'_i + g_{i+1} \in \mathfrak{g}_i(\ell_i)$. Donc

$$\begin{aligned} \langle \ell_i, [u_i, \mathfrak{g}_i] \rangle &\equiv 0 \Rightarrow \lambda \langle \ell_i, [x_i, \mathfrak{g}_i] \rangle + \mu \langle \ell_i, [x'_i, \mathfrak{g}_i] \rangle \\ &\quad + \langle \ell_i, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_i] \rangle \equiv 0 \\ &\Rightarrow \langle \ell_i, [g_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}] \rangle \equiv 0 \text{ car } x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i(\ell_i) \\ &\quad \text{et } \mathfrak{g}_{i+1} \subset \mathfrak{g}_i \\ &\Rightarrow g_{i+1} \in \mathfrak{g}_{i+1}(\ell_{i+1}) \subset \mathfrak{h}_{i+1} \\ &\Rightarrow u_i \in \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathfrak{g}_i(\ell_i) \subset \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$ et, par conséquent, $\mathfrak{h}_i = \mathbb{R}x_i \oplus \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$. D'ailleurs,

$$[x_i, \mathfrak{h}_{i+1}] \subset \mathfrak{h}_i \cap [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i+1}] \subset \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i+1} = \mathfrak{h}_{i+1}.$$

De même pour x'_i . On en déduit que \mathfrak{h}_{i+1} est un idéal dans \mathfrak{h}_i et dans $\mathfrak{h}'_i = \mathbb{R}x'_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$ et que \mathfrak{h}'_i est un idéal dans \mathfrak{h}_i , puisque $[x_i, x'_i] \in \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i+1} = \mathfrak{h}_{i+1}$ (4.5.). Par conséquent (x_i, x'_i) est une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{h}_i et l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow H_i = \exp \mathfrak{h}_i \\ (h_{i+1}, s, t) &\mapsto \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, de même que l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow G_i = \exp \mathfrak{g}_i \\ (g_{i+1}, s, t) &\mapsto \exp g_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \end{aligned}$$

puisque (x_i, x'_i) est également une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{i+1} dans \mathfrak{g}_i , \mathfrak{g}_{i+1} étant un idéal dans \mathfrak{g}_i (4.5.). Soit (b_1, \dots, b_r) une base coexponentielle à \mathfrak{h}_{i+1} dans \mathfrak{g}_{i+1} et montrons que c'est également une base coexponentielle à \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i . Par hypothèse l'application

$$\mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \rightarrow G_{i+1} = \exp \mathfrak{g}_{i+1} \\ (s_1, \dots, s_r, h_{i+1}) \mapsto \exp s_1 b_1 \dots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1}$$

est un difféomorphisme. Donc l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_i & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^r \times H_i & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \\ (s_1, \dots, s_r, h_i) & & (s_1, \dots, s_r, \exp h_i) & & (s_1, \dots, s_r, h_{i+1}, s, t) \\ & \searrow & \text{si } \exp h_i = \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i & & \\ & & & & \mathbb{R}^r \times \mathfrak{h}_{i+1} \times \mathbb{R}^2 \\ & & & & \exp s_1 b_1 \dots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \\ & & & & \parallel \\ & & & & G_i \\ & & & & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2 \\ & & & & \exp s_1 b_1 \dots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \\ & & & & \parallel \\ & & & & G_i \\ & & & & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^2 \\ & & & & \exp s_1 b_1 \dots \exp s_r b_r \cdot \exp h_{i+1} \cdot \exp s x'_i \cdot \exp t x_i \end{array}$$

est un difféomorphisme, puisqu'il en est ainsi de l'application exponentielle dans notre cas. Ceci prouve que (b_1, \dots, b_r) est une base coexponentielle à \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{g}_i . Remarquons qu'en fait le cas

$\dim \mathfrak{g}_i(\ell_i) = \dim[\mathfrak{g}_i(\ell_i) \cap \mathfrak{g}_{i+1}] + 1$ ne peut pas se présenter. En effet, soient $x_i, x'_i \in \mathfrak{g}_i$ tels que

$$d \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} = \varphi_i(d) \begin{pmatrix} 1 & -w_i \\ w_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}$$

pour tout $d \in \mathfrak{d}$

et montrons que pour tout $x \in \mathfrak{g}_i$, $x \notin \mathfrak{g}_{i+1}$, x et $d(x)$ sont indépendants modulo \mathfrak{g}_{i+1} si $\varphi_i(d) \neq 0$. Soit $x = \lambda x_i + \mu x'_i \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}$. Alors

$$\begin{aligned} d(x) &= \lambda d(x_i) + \mu d(x'_i) \\ &= \lambda \varphi_i(d)(x_i - w_i x'_i) + \mu \varphi_i(d)(w_i x_i + x'_i) \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1} \\ &= \varphi_i(d)(\lambda + \mu w_i)x_i + \varphi_i(d)(-\lambda w_i + \mu)x'_i \text{ mod } \mathfrak{g}_{i+1}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda + \mu w_i & -\lambda w_i + \mu \end{vmatrix} = -\lambda^2 w_i + \lambda \mu - \lambda \mu - \mu^2 w_i \\ = -(\lambda^2 + \mu^2) w_i \neq 0$$

x et $d(x)$ sont indépendants modulo \mathfrak{g}_{i+1} si $\varphi_i(d) \neq 0$. Par hypothèse le quotient $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est irréductible pour l'action de $\mathfrak{d}(\mathfrak{l}|_{\mathfrak{n}}) + \text{ad } \mathfrak{n}$. Il existe donc $d \in \mathfrak{d}(\mathfrak{l}|_{\mathfrak{n}})$ tel que $\varphi_i(d) \neq 0$. Prenons un tel d , soit $x \in \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$ tel que $x \notin \mathfrak{g}_{i+1}$ et montrons que $d(x) \in \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{l}, [d(x), g_i] \rangle &= \langle \mathfrak{l}, d([x, g_i]) \rangle - \langle \mathfrak{l}, [x, d(g_i)] \rangle \\ &= 0 \quad \text{pour tout } g_i \in \mathfrak{g}_i \end{aligned}$$

puisque $[x, g_i] \in \mathfrak{n}$ et que $d \in \mathfrak{d}(\mathfrak{l}|_{\mathfrak{n}})$, que $d(g_i) \in \mathfrak{g}_i$ et que $x \in \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$. Ainsi $x, d(x)$ sont deux éléments de $\mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$ indépendants modulo \mathfrak{g}_{i+1} , donc $\dim \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i) \geq \dim[\mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i) \cap \mathfrak{g}_{i+1}] + 2$.

7. Autre construction de la polarisation de Vergne pour une algèbre nilpotente

7.1. Dans toute cette section \mathfrak{g} désignera une algèbre de Lie nilpotente.

a) Soit $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de \mathfrak{g} . Pour $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ notons $\mathfrak{g}_i = \sum_{k>i} \mathbb{R}b_k = \text{Vec}(b_{i+1}, \dots, b_n)$ et posons $\mathfrak{g}_n = \{0\}$. En particulier, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$. On dit que la base B est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} si $[b_i, b_j] \in \mathfrak{g}_r = \text{Vec}(b_{r+1}, \dots, b_n)$ avec $r = \max(i, j)$ si $i, j < n$ et $[b_i, b_j] = 0$ si $i = n$ ou $j = n$. Il est équivalent de dire que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \text{Vec}(b_{j+1}, \dots, b_n)$.

b) Toute sous-algèbre de codimension 1 dans une algèbre nilpotente est un idéal.

c) Toute algèbre de Lie nilpotente possède une base de Jordan-Hölder.

7.2. Soit $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} et posons $\mathfrak{g}_i = \sum_{k>i} \mathbb{R}b_k$. Alors, pour tout i , \mathfrak{g}_i est un idéal de \mathfrak{g} et la suite $(\mathfrak{g}_i)_i$ est une bonne suite de sous-algèbres telle que $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ pour tout i .

Soit $\mathfrak{l} \in \mathfrak{g}^*$. On en déduit que le sous-espace isotrope maximal $V^B(\mathfrak{g}) = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$ est une polarisation de Vergne au point \mathfrak{l} de $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^*$ et que $V^B(\mathfrak{g}_k) = \sum_{i \geq k} \mathfrak{g}_i(\mathfrak{l}_i)$ est une

polarisation de Vergne au point $\mathfrak{l}_k = \mathfrak{l}|_{\mathfrak{g}_k}$ de \mathfrak{g}_k^* .

7.3. Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} . Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une sous-algèbre de codimension 1 (donc un idéal) de \mathfrak{g} et soit i tel que $b_i \notin \tilde{\mathfrak{g}}$. Par conséquent, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}b_i \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$.

a) Pour tout $k \neq i$, il existe α_k unique dans \mathbb{R} tel que $b_k - \alpha_k b_i \in \tilde{\mathfrak{g}}$. En effet, $b_k \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}b_i \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$. Donc b_k admet une décomposition unique de la forme $b_k = \alpha_k b_i + g_k$ avec $g_k \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

b) Si $b_k \in \tilde{\mathfrak{g}}$, l'unicité de la décomposition entraîne $\alpha_k = 0$.

c) Soit i le plus grand indice tel que $b_i \notin \tilde{\mathfrak{g}}$. Posons

$$\begin{aligned} \bar{b}_k &= b_k - \alpha_k b_i & \text{si } k < i \\ \bar{b}_k &= b_{k+1} - \alpha_{k+1} b_i & \text{si } k \geq i. \end{aligned}$$

Or si $k \geq i$, $b_{k+1} \in \tilde{\mathfrak{g}}$, par maximalité de i , $\alpha_{k+1} = 0$ et $\bar{b}_k = b_{k+1}$. Alors $B = (b_1, \dots, \bar{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\tilde{\mathfrak{g}}$. En effet, montrons d'abord l'indépendance linéaire. Soit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \bar{b}_k &= 0 \\ \sum_{k < i} \lambda_k b_k + \sum_{k \geq i} \lambda_k b_{k+1} - \left(\sum_{k < i} \lambda_k \alpha_k \right) b_i &= 0. \end{aligned}$$

Par indépendance linéaire des b_k , $\lambda_k = 0$ pour tout k . Puisque $\dim \tilde{\mathfrak{g}} = n-1$, on en déduit que \tilde{B} est une base de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Il reste à montrer que $[\bar{b}_k, \bar{b}_m] \in \text{Vec}(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_{n-1})$ où $r = \sup(k, m)$. Distinguons plusieurs cas :

$$\begin{aligned} [\bar{b}_k, \bar{b}_m] &= [b_{k+1}, b_{m+1}] \in \text{Vec}(b_{r+2}, \dots, b_n) \\ &= \text{Vec}(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

Si $m < i \leq k$,

$$\begin{aligned} [\bar{b}_k, \bar{b}_m] &= [b_{k+1}, b_m - \alpha_m b_i] \\ &= [b_{k+1}, b_m] - \alpha_m [b_{k+1}, b_i] \\ &\in \text{Vec}(b_{k+2}, \dots, b_n) = \text{Vec}(\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_{n-1}) \\ &= \text{Vec}(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

De même si $k < i \leq m$.

Si $k, m < i$,

$$\begin{aligned} [\bar{b}_k, \bar{b}_m] &= [b_k, b_m] - \alpha_k [b_i, b_m] - \alpha_m [b_k, b_i] \\ &\in \text{Vec}(b_{r+1}, \dots, b_n) \end{aligned}$$

car $[b_i, b_m] \in \text{Vec}(b_{i+1}, \dots, b_n) \subset \text{Vec}(b_{r+1}, \dots, b_n)$ et, de même, $[b_k, b_i] \in \text{Vec}(b_{r+1}, \dots, b_n)$. D'autre part, puisque \tilde{B}

est une base de $\tilde{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned} [\bar{b}_k, \bar{b}_m] &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \bar{b}_j \\ &= \sum_{j < i} \mu_j (b_j - \alpha_j b_i) + \sum_{j \geq i} \mu_j b_{j+1}. \end{aligned}$$

Comme $[\bar{b}_k, \bar{b}_m] \in \text{Vec}(b_{r+1}, \dots, b_n)$, on en déduit que $\mu_j = 0$ si $j < r+1$ et que $[\bar{b}_k, \bar{b}_m] \in \text{Vec}(\bar{b}_{r+1}, \dots, \bar{b}_{n-1})$.

d) $\tilde{B} = (b_i, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} . En effet, si $k \geq i$

$$[b_i, \bar{b}_k] = [b_i, b_{k+1}] \in \text{Vec}(b_{k+2}, \dots, b_n) = \text{Vec}(\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_n).$$

Si $k < i$,

$$\begin{aligned} [b_i, \bar{b}_k] &= [b_i, b_k] \in \text{Vec}(b_{i+1}, \dots, b_n) = \text{Vec}(\bar{b}_i, \dots, \bar{b}_{n-1}) \\ &\subset \text{Vec}(\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_{n-1}). \end{aligned}$$

En tenant compte de c), on voit donc que \tilde{B} est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} .

7.4.

Soient \mathfrak{g} une algèbre nilpotente, $\ell \in \mathfrak{g}^*$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} .

a) Si $\langle \ell, [B, \mathfrak{g}] \rangle = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell)$ est une polarisation qui coïncide forcément avec la polarisation de Vergne et $\chi(\exp x) = e^{-\langle \ell, x \rangle}$ définit un caractère sur $G = \exp \mathfrak{g}$.

b) Supposons $\langle \ell, [B, \mathfrak{g}] \rangle \neq 0$. Donc $\langle \ell, [B, \mathfrak{g}] \rangle \neq 0$. Soit j le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_j, \mathfrak{g}] \rangle \neq 0$. Donc $\langle \ell, [B, b_j] \rangle \neq 0$. Soit $i = i(j)$ le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle \neq 0$ et soit $\tilde{\mathfrak{g}} = \{u \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell, [u, b_j] \rangle = 0\}$. Donc i est le plus grand indice tel que $b_i \notin \tilde{\mathfrak{g}}$. De plus $b_j \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Montrons que $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal, forcément de codimension 1. En effet, soit $u \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et soit $g \in \mathfrak{g}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \ell, [u, g], b_j \rangle &= -\langle \ell, [[g, b_j], u] \rangle - \langle \ell, [b_j, u], g \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $[g, b_j], [b_j, u] \in \text{Vec}(b_{j+1}, \dots, b_n) \subset \mathfrak{g}(\ell)$, par maximalité de l'indice j . Donc $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal de codimension 1 admettant (b_i) comme base coexponentielle.

c) Construisons la base de Jordan-Hölder \tilde{B} de $\tilde{\mathfrak{g}}$ comme en 7.3. Ici

$$b_k - \alpha_k b_i \in \tilde{\mathfrak{g}} \iff \langle \ell, [b_k - \alpha_k b_i, b_j] \rangle = 0$$

$$\iff \alpha_k = \frac{\langle \ell, [b_k, b_j] \rangle}{\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle}.$$

On sait qu'alors $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et que $\tilde{B} = (b_i, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$ est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} .

d) Montrons que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \tilde{\mathfrak{g}}(\tilde{\ell})$ où $\tilde{\ell} = \ell|_{\tilde{\mathfrak{g}}}$. En effet, soit $\lambda b_i + g \in \mathfrak{R}b_i \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$ avec $g \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et supposons que $\lambda b_i + g \in \mathfrak{g}(\ell)$. En particulier, $0 = \langle \ell, [\lambda b_i + g, b_j] \rangle = \lambda \langle \ell, [b_i, b_j] \rangle$ puisque $g \in \tilde{\mathfrak{g}}$, donc que $\langle \ell, [g, b_j] \rangle = 0$. Ceci implique que $\lambda = 0$ et que $\mathfrak{g}(\ell) \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g}(\ell) \subset \tilde{\mathfrak{g}}(\tilde{\ell})$.

e) Notons par $V^B(\mathfrak{g}), V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ et $V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ les polarisations dans \mathfrak{g} , resp. $\tilde{\mathfrak{g}}$, construites à partir des bases de Jordan-Hölder B, \tilde{B} et \tilde{B} . Comme $\mathfrak{g}(\ell) \subset \tilde{\mathfrak{g}}(\tilde{\ell})$ et que $\tilde{B} = (b_i, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$ avec $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$, on a évidemment $V^{\tilde{B}}(\mathfrak{g}) = V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Montrons que $V^B(\mathfrak{g}) = V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Soient $B = (b_1, \dots, b_n)$ et $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1}) = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ avec $\tilde{b}_1 = b_i$ et $\tilde{b}_k = \tilde{b}_{k-1}$ pour $k > 1$. On a $\mathfrak{R}k = \sum_{m>k} \mathfrak{R}b_m, \tilde{\mathfrak{R}}k = \sum_{m>k} \mathfrak{R}\tilde{b}_m,$

$$V^B(\mathfrak{g}) = \sum_{k=0}^n \mathfrak{R}k(\ell_k) \text{ et } V^{\tilde{B}}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \sum_{k=0}^n \tilde{\mathfrak{R}}k(\tilde{\ell}_k) \text{ avec } \tilde{\ell}_k = \ell|_{\tilde{\mathfrak{g}}}.$$

Remarquons que pour $m > i, \tilde{b}_m = \tilde{b}_{m-1} = b_m$ et pour $1 < m \leq i, \tilde{b}_m = \tilde{b}_{m-1} = b_{m-1} - \alpha_{m-1} b_i$. Pour $k = 0$ on a $\mathfrak{R}0 = \tilde{\mathfrak{R}}0 = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{R}0(\ell_0) = \tilde{\mathfrak{R}}0(\tilde{\ell}_0) = \mathfrak{g}(\ell)$. De même, pour

$k \geq i, \mathfrak{R}k = \tilde{\mathfrak{R}}k$ et $\mathfrak{R}k(\ell_k) = \tilde{\mathfrak{R}}k(\tilde{\ell}_k)$. Pour $0 < k < i$, soit

$$x = \sum_{k < a \leq i} \lambda_a \tilde{b}_a + \sum_{a > i} \lambda_a \tilde{b}_a$$

$$= \sum_{k < a \leq i} \lambda_a (b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i) + \sum_{a > i} \lambda_a b_a$$

$$\in \tilde{\mathfrak{R}}k(\tilde{\ell}_k).$$

Donc

$$\langle \ell, [x, \tilde{b}_a] \rangle = \langle \ell, [x, b_a] \rangle = 0 \text{ pour } a > i$$

$$\langle \ell, [x, \tilde{b}_a] \rangle = \langle \ell, [x, b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i] \rangle = 0 \text{ pour } k < a \leq i.$$

Si en plus $\langle \ell, [x, b_i] \rangle = 0$, alors

$$x \in \mathfrak{R}k-1 = \sum_{k < a \leq i} \mathfrak{R}(b_{a-1} - \alpha_{a-1} b_i) + \mathfrak{R}b_i + \sum_{a > i} \mathfrak{R}b_a$$

tel que $x \in \mathfrak{R}k-1(\ell_{k-1})$.

Si $\langle \ell, [x, b_i] \rangle \neq 0$, il existe $\mu \in \mathbf{R}^*$ unique tel que

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_i] \rangle = 0$$

à savoir

$$\mu = \frac{\langle \ell, [x, b_i] \rangle}{\langle \ell, [b_i, b_j] \rangle}.$$

De plus, par maximalité de $i, \langle \ell, [b_j, b_m] \rangle = 0$ pour tout $m > i$. Par conséquent

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_a] \rangle = 0 \text{ pour tout } a \geq i.$$

Pour $m < i, b_m - \alpha_m b_i \in \tilde{\mathfrak{g}}$ par construction et donc $\langle \ell, [b_j, b_m - \alpha_m b_i] \rangle = 0$ par définition de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Ainsi

$$\langle \ell, [x + \mu b_j, b_a - \alpha_a b_i] \rangle = 0 \text{ pour } k \leq a < i$$

c'est-à-dire $x + \mu b_j$ annule $\mathfrak{R}k-1$. D'autre part, $x + \mu b_j \in \mathfrak{R}k-1$ puisque $j > i$ et $x + \mu b_j \in \mathfrak{R}k-1(\ell_{k-1})$. De plus

$b_j \in \mathfrak{g}_i(\ell_k)$ comme $\langle \ell, [b_j, b_{n_i}] \rangle = 0$ pour tout $m > i$. On en déduit que $x \in \mathfrak{g}_{k-1}(\ell_{k-1}) + \mathfrak{g}_i(\ell_k)$. Par conséquent $V^{\tilde{B}}(\mathfrak{g}) \subset V^B(\mathfrak{g})$. Puisque $V^{\tilde{B}}(\mathfrak{g})$ et $V^B(\mathfrak{g})$ sont des polarisations, il faut que $V^{\tilde{B}}(\mathfrak{g}) = V^B(\mathfrak{g})$.

7.5. a) Faisons une construction par récurrence pour obtenir la polarisation de Vergne. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente et $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g} . Si $\langle \ell, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rangle \neq 0$, reprenons la construction faite en 7.4. et posons

$$\mathfrak{g}_1 = \bar{\mathfrak{g}} = \{u \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell, [u, b_j] \rangle = 0\}$$

$$y_1 = b_j \in \mathfrak{g}_1$$

$$b_1 = k b_i \text{ avec } k \in \mathbf{R}^* \text{ tel que } \langle \ell, [b_1, y_1] \rangle = 1$$

$$b_1^1 = \tilde{b}_1, b_2^1 = \tilde{b}_2, \dots, b_{n-1}^1 = \tilde{b}_{n-1}$$

(nouvelle signification de \mathfrak{g}_1 !). Alors (b_1^1) est une base coexponentielle à \mathfrak{g}_1 dans \mathfrak{g} et $B_1 = (b_1^1, \dots, b_{n-1}^1)$ est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g}_1 . Par 7.4.e), $V^B(\mathfrak{g}) = V^{B_1}(\mathfrak{g}_1)$.

b) Si $\langle \ell, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \rangle \neq 0$, on refait un raisonnement analogue pour \mathfrak{g}_1 .

c) Pour faire le raisonnement par récurrence, supposons

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_r$$

$$y_1, \dots, y_r \in \mathfrak{g}_r$$

(b_1^1, \dots, b_r^1) une base coexponentielle à \mathfrak{g}_r dans \mathfrak{g} telle que

$$\mathfrak{g}_k = \mathbf{R}b_{k+1}^1 \oplus \mathfrak{g}_{k+1} \text{ pour tout } k$$

$$\mathfrak{g}_k = \{u \in \mathfrak{g}_{k-1} \mid \langle \ell, [u, y_k] \rangle = 0\} \text{ pour } 1 \leq k \leq r$$

$B_k = (b_1^k, \dots, b_{n-k}^k)$ une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g}_k pour $1 \leq k \leq r$ telle que

$$V^B(\mathfrak{g}) = V^{B_1}(\mathfrak{g}_1) = \dots = V^{B_k}(\mathfrak{g}_k) = \dots = V^{B_r}(\mathfrak{g}_r).$$

Supposons de plus que

$$\begin{aligned} \langle \ell, [b_k^1, y_k] \rangle &= 1 & \text{pour } 1 \leq k \leq r \text{ par construction} \\ \langle \ell, [y_j, y_k] \rangle &= 0 & \text{pour } 1 \leq j, k \leq r \end{aligned}$$

car si par exemple $j < k$, $y_k \in \mathfrak{g}_j = \{u \in \mathfrak{g}_{j-1} \mid \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$ et

$$\langle \ell, [b_k^1, y_j] \rangle = 0 \text{ pour } 1 \leq j < k \leq r$$

car alors $b_k^1 \in \mathfrak{g}_{k-1} \subset \mathfrak{g}_j = \{u \in \mathfrak{g}_{j-1} \mid \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$. Par construction, chaque \mathfrak{g}_k est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}_{k-1} .

d) Si $\langle \ell, [\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_r] \rangle = 0$, $V^{B_r}(\mathfrak{g}_r) = \mathfrak{g}_r$ est la polarisation de Vergne de \mathfrak{g}_r par 7.4.a) et $V^B(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_r$ est également la polarisation de Vergne de \mathfrak{g} par 7.5.c). De plus (b_1^1, \dots, b_r^1) est une base coexponentielle à $V^B(\mathfrak{g})$ dans \mathfrak{g} .

e) Si $\langle \ell, [\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_r] \rangle \neq 0$, soit j le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_j^1, \mathfrak{g}_r] \rangle \neq 0$ et soit $i = i(j)$ le plus grand indice tel que $\langle \ell, [b_i^1, b_j^1] \rangle \neq 0$. Posons

$$y_{r+1} = b_j^1$$

$$\mathfrak{g}_{r+1} = \{u \in \mathfrak{g}_r \mid \langle \ell, [u, y_{r+1}] \rangle = 0\}$$

$$b_{r+1}^1 = k b_i^1 \text{ avec } k \in \mathbf{R}^* \text{ tel que } \langle \ell, [b_{r+1}^1, y_{r+1}] \rangle = 1$$

$$b_k^{r+1} = b_k^r - \frac{\langle \ell, [b_k^r, b_j^1] \rangle}{\langle \ell, [b_i^1, b_j^1] \rangle} b_i^1 \text{ si } k < i$$

$$b_k^{r+1} = b_k^r \text{ si } k \geq i.$$

Par 7.4., $B_{r+1} = (b_1^{r+1}, \dots, b_{r+1}^{r+1})$ est une base de Jordan-Hölder de \mathfrak{g}_{r+1} telle que $V^{B_r}(\mathfrak{g}_r) = V^{B_{r+1}}(\mathfrak{g}_{r+1})$. Par construction,

$$\mathfrak{g}_r = \mathbf{R}b_{r+1}^1 \oplus \mathfrak{g}_{r+1}$$

$$b_{r+1}^1 \in \mathfrak{g}_r \subset \mathfrak{g}_{r-1} \subset \dots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}.$$

Donc $\langle \ell, [b_{r+1}^1, y_k] \rangle = 0$ pour $k < r+1$, c'est-à-dire $k \leq r$. De plus,

$$y_{r+1} \in \mathfrak{g}_{r+1} \subset \mathfrak{g}_r \subset \dots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$$

et $\mathfrak{g}_j = \{u \in \mathfrak{g}_{j-1} \mid \langle \ell, [u, y_j] \rangle = 0\}$. Donc $\langle \ell, [y_{r+1}, y_j] \rangle = 0$ pour tout j , $j \leq r+1$ et $y_1, \dots, y_r, y_{r+1} \in \mathfrak{g}_{r+1}$, puisqu'on sait déjà que $y_1, \dots, y_r \in \mathfrak{g}_r$. Par construction, \mathfrak{g}_{r+1} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}_r et (b_{r+1}^1) est une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{r+1} dans \mathfrak{g}_r .

f) **Conclusion :** On construit donc $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_p$ jusqu'à ce que $\langle \ell, [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p] \rangle = 0$. Alors $V^B(\mathfrak{g}) = V^{B_1}(\mathfrak{g}_1) = \dots = V^{B_p}(\mathfrak{g}_p) = \mathfrak{g}_p$ est la polarisation de Vergerne associée à la base de Jordan-Hölder de départ B . Par construction chaque \mathfrak{g}_r est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}^{r-1} . La construction donne une base coexponentielle (b'_1, \dots, b'_p) à \mathfrak{g}_p dans \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g}^{r-1} = \mathbf{R}b'_r \oplus \mathfrak{g}^r$ pour tout r et des éléments y_1, \dots, y_p de \mathfrak{g}_p tels que

$$\begin{aligned} \langle \ell, [b'_r, y_r] \rangle &= 1 & \text{pour } 1 \leq r \leq p \\ \langle \ell, [y_r, y_s] \rangle &= 0 & \text{pour } 1 \leq r, s \leq p \\ \langle \ell, [b'_s, y_r] \rangle &= 0 & \text{pour } 1 \leq r < s \leq p \end{aligned}$$

7.6. a) Dans cette section on montre qu'on peut modifier les b'_j, y_j obtenus en 7.5. de manière à vérifier

$$\begin{aligned} \langle \ell, [b'_i, b'_j] \rangle &= 0 \\ \langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle &= \delta_{ij} & \text{quels que soient } i, j \\ \langle \ell, [y_i, y_j] \rangle &= 0. \end{aligned}$$

b) Remplaçons chaque y_j par un $y'_j = y_j + \sum_{s < j} \lambda_s y_s$ en choisissant les λ_s de manière à avoir $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = \delta_{ij}$. Ceci est possible. En effet, remarquons d'abord que pour $i > j > s$ on a $\langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle = 0$ et $\langle \ell, [b'_i, y_s] \rangle = 0$. Donc, pour $i > j$ on a également $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = 0$ et $\langle \ell, [b'_i, y'_i] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y_i] \rangle = 1$. Pour $i < j$ on obtient

$$\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y_j] \rangle + \sum_{i < s < j} \lambda_s \langle \ell, [b'_i, y_s] \rangle + \lambda_i.$$

Pour j fixé on obtient le système suivant en annulant les $\langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle, i < j$,

$$\begin{aligned} i = 1 : & \quad \lambda_1 + \lambda_2 \langle \ell, [b'_1, y_2] \rangle + \dots + \lambda_{j-1} \langle \ell, [b'_1, y_{j-1}] \rangle \\ & = -\langle \ell, [b'_1, y_j] \rangle \\ i = 2 : & \quad \lambda_2 + \lambda_3 \langle \ell, [b'_2, y_3] \rangle + \dots + \lambda_{j-1} \langle \ell, [b'_2, y_{j-1}] \rangle \\ & = -\langle \ell, [b'_2, y_j] \rangle \\ & \quad \vdots \\ i = j-1 : & \quad \lambda_{j-1} = -\langle \ell, [b'_{j-1}, y_j] \rangle. \end{aligned}$$

Ce système admet donc une solution unique pour les λ_s . Remarquons que les y'_j construits appartiennent toujours à \mathfrak{g}_p et vérifient également $\langle \ell, [y'_i, y'_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j .

c) Remplaçons chaque b'_i par un $b''_i = b'_i + \sum_{s < i} \mu_s y'_s$ en choisissant les μ_s de manière à avoir $\langle \ell, [b''_i, b''_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j . Faisons cette construction par récurrence. En effet, remarquons d'abord que $\langle \ell, [b''_i, y'_i] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y'_i] \rangle + 0 = 1$ pour tout i et $\langle \ell, [b''_i, y'_j] \rangle = \langle \ell, [b'_i, y'_j] \rangle = 0$ pour i, j distincts.

Pour $i = 1$, prenons $b''_1 = b'_1$.
Pour $i = 2$, posons

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [b''_2, b''_1] \rangle \\ &= \langle \ell, [b''_2, b'_1] \rangle \\ &= \langle \ell, [b'_2, b'_1] \rangle - \mu_1. \end{aligned}$$

Donc $\mu_1 = \langle \ell, [b'_2, b'_1] \rangle$ et b''_2 est déterminé.

Supposons b''_1, \dots, b''_{i-1} construits tels que $\langle \ell, [b''_r, b''_s] \rangle = 0$ pour $r, s \leq i-1$ et déterminons b''_i . Pour $k < i$ on exige

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \ell, [b''_i, b''_k] \rangle \\ &= \langle \ell, [b'_i, b''_k] \rangle - \mu_k. \end{aligned}$$

Donc $\mu_k = \langle \ell, [b'_i, b''_k] \rangle$ et b''_i est déterminé.

On construit ainsi de proche en proche les b''_i tels que $\langle \ell, [b''_i, b''_j] \rangle = 0$ quels que soient i, j .

Remarquons finalement que (b_1'', \dots, b_p'') est toujours une base coexponentielle à \mathfrak{g}_p dans \mathfrak{g} . En effet, comme $y'_s \in \mathfrak{g}_p$ pour tout s , on a encore $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}_{k+1}'' \oplus \mathfrak{g}_{k+1}$, et puisque \mathfrak{g}_{k+1} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{g}_{k+1} , (b_{k+1}'') est une base coexponentielle à \mathfrak{g}_{k+1} dans \mathfrak{g}_k . On obtient alors de proche en proche une base coexponentielle à \mathfrak{g}_p dans \mathfrak{g} .

d) Les constructions précédentes auraient pu être intégrées dans le raisonnement par récurrence donnant la polarisation et la première base coexponentielle.

Bibliographie

- [1] Bernat, P., Conze, N., Duflot, M., Lévy-Nahas, M., Rais, M., Renouard, P., Vergne, M., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod (1972), Paris.
- [2] Jasper, G., *Eine Fouriertransformation auf nilpotenten Liegruppen*, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 1985.
- [3] Pukanszky, L., On the theory of exponential groups, *Trans. Am. Math. Soc.* 126 (1967), 487-507.
- [4] Pukanszky, L., On the Unitary Representations of Exponential Groups, *J. of Functional Anal.* 2 (1968), 73-113.

Séminaire de mathématique
 Centre Universitaire de Luxembourg
 162A, avenue de la Païencerie
 L-1511 Luxembourg