Level structure over E^n and stable splitting by Steinberg idempotent(Abstract_要旨)

Torii, Takeshi

【66】

氏　　　名	鳥居　猛（とりい　たけし）
学位(専攻分野)	博　士　(理　学)
学位記番号	理　博　第 2124 号
学位授与の日付	平成 11 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Level structure over E(n)^ and stable splitting by Steinberg idempotent (E(n)^ 上のレベル構造とスタインバーグ巾等元による安定分解)
論文調査委員	(主査) 教授 西田吾郎　教授 河野　明　教授 深谷賢治

論文内容の要旨

鳥居猛氏の主論文の内容は次の通りである。

代数的トポロジーとホモトピー論において複素コボルディズム理論とその局所化理論であるBP−理論は主要な研究課題であり，D. Quillen によりこれらの理論と形式群論の間の深い関連が発見されて以来，形式群論の立場からBP−理論の精緻な研究がなされている。特に Morava K−理論 $K(n)^*$，Johnson-Wilson コホモロジー論 $E(n)^*$，あるいは楕円コホモロジー論等の重要な理論が構成され，それらが球面のホモトピー論に応用されている。Morava K−理論 $K(n)^*$ の形式群は，標数 p の有限体上の高さ n の Lubin-Tate 群（これは位相的 K−理論の形式群が乗法群 G_m であることの拡張）であり，また，この形式群の完備局所環上での Universal deformation の群が Johnson-Wilson コホモロジー論 $E(n)^*$ の形式群になっている。形式群論の研究では，これらの形式群に level structure を与えることにより，より精密な議論が展開され，Lubin-Tate 群の場合，これは局所類体論の構成であり，高さ2の $E(2)^*$ の場合は保型形式の level structure に対応する。

level structure の与えられた形式群は Drinfeld により，形式群を表現する環のある種のガロア拡大であることが知られている。鳥居氏の目標は，このような構成をホモトピー論的に行うことである。鳥居氏は，まず，基本可換 p−群 A の分類空間 BA と，上のようなコホモロジー論 $E^*(\ )$ に対し，コホモロジー環

$$E^*(BA) \cong E_*[[x_1, \ldots, x_n]]/([p]x_1, \ldots, [p]x_n)$$

を考察した。この環は零因子を持ち，係数環 E^* のガロア拡大の構成としては不適当である。環 $E^*(BA)$ は行列環 $M_n(F_p)$ の作用を持つが，零因子の存在は $M_n(F_p)$ の特異部分の作用に起因する。鳥居氏は基本可換 p−群 A の真部分群達のなす半順序集合の定める Titz 複体を巧妙に用いることにより，スペクトラム BA から線型群 $GL(n, \mathrm{F}_p)$ に関し縮退する部分を除いたスペクトラム F_n を構成することに成功し，次の定理を得た。

定理　$E(n)^*$を高さ n の完備な Johnson-Wilson コホモロジー論とする。このとき，環 $E(n)^*(F_n)\otimes\mathrm{Q}$ は係数環 $E(n)_*$ のガロア拡大であり，そのガロア群は $GL(n, \mathrm{F}_p)$ である。

鳥居氏はさらに，群 $GL(n, \mathrm{F}_p)$ がスペクトラム F_n にホモトピー的に作用することから，群 $GL(n, \mathrm{F}_p)$ の Steinberg 表現に対応するベキ等元 e_n によるスペクトラム F_n の安定直和成分 e_nF_n が，Kuhn, Mitchel および Priddy によって知られていた球面の p^n 次対称積とホモトピー同値であることを示し，それにより，スペクトラム e_nF_n の通常コホモロジー群を決定している。このコホモロジー群は Steenrod 代数において，長さが n 以下の作用素達のなす加群と同型であり，従って，スペクトラム e_nF_n は Steenrod 代数と $E(n)$−理論の level structure を関連づけるものとして注目すべきものとおもわれる。

論文審査の結果の要旨

鳥居猛氏の主論文における研究の動機および背景は次の通りである。

階数 m の基本アーベル p 群 $(\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^m$ の分類空間 $B(\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^m$ の安定ホモトピー型の研究は特に球面の安定ホモトピー群の

研究に関連する重要な課題である。$m=1$ の場合は，Kahn-Priddy の定理等の深い結果が知られているが，$m\geq 2$ の場合は計算の困難さからあまり多くのことは知られていない。$B(Z/pZ)^m$ の安定ホモトピー型の一般論としては，行列環 $M_m(F_p)$ の各既約モジュラー表現に対応する群環 $F_p[Mm(F_p)]$ のべき等元 e_i に関するテレスコープ X_i 達による安定分解 $B(Z/pZ)^m \simeq \vee X_i$ が存在することが知られている。従って，$B(Z/pZ)^m$ の安定ホモトピー型の研究は，各既約成分 X_i の安定ホモトピー型の研究に帰着される。$M_m(F_p)$ の既約モジュラー表現達の中で，Steinberg 表現は唯1つの射影的表現であり，その性質が良く知られている。このため，対応する $B(Z/pZ)^m$ の成分は Kuhn, Mitchell, Priddy 等により通常コホモロジー論に関する多くの研究がなされている。一方，Hopkins, Miller, Morava 等によって，分類空間 $B(Z/pZ)^m$ の BP-理論的研究の重要性が認識されてきた。

鳥居氏は参考論文において，巡回 p 群 Z/p^rZ の分類空間 BZ/p^rZ から，球面スペクトラムへの転入写像（transfer map）のファイバー F_r を考察し，次の結果を得た。$K(n)^*$ を p-進 Morava K 理論とするとき，環 $K(n)^0(F_r)$ は Witt 環 $K(n)_0=W_{F_{p^n}}$ の分岐拡大を与える。この結果は局所類体論のホモトピー論的構成を与えるものであり，大変意義がある。また，MoravaK 理論を係数環の分岐拡大した上で考察することにより，より深い理解が得られ，いくつかの応用も得られている。

鳥居氏は主論文において，この手法を Johnson-Wilson コホモロジー論 $E(n)^*$ に適用した。Johnson-Wilson コホモロジー論では，その係数環 $E(n)_*$ の Krull 次元は正であり，いわば，高次元の局所類体論に対応する問題である。また，$n=2$ のときは大域的な保型形式のレベル構造に対応する問題であり，数論の問題としても困難な問題であ。代数的には $E(n)_*$ のレベル構造は対応する形式群への基本アーベル p 群 $(Z/pZ)^n$ の埋め込みで与えられる。従って，そのホモトピー論的構成は分類空間 $B(Z/pZ)^n$ の $E(n)$ 理論が出発点であることは想像されていた。しかしながら，分類空間 $B(Z/pZ)^n$ の構成を巧に修正し，レベル構造の完全なホモトピー論的構成を行ったことは鳥居氏の独創的なアイデアによるものである。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認め，合格と判定した。