Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

LIMIT LAWS FOR THE MAXIMUM VALUES OF A CLASS OF STRONG MIXING DISCRETE RANDOM VARIABLES

Maria Ivette Gomes

Centro de Estatística e Aplicações
Universidade de Lisboa

Abstract: Let X_n, $n\geq 1$ be a stationary strong mixing sequence of random variables satisfying an additional weak dependence condition. Let $F(x)$ be the marginal distribution function of the X's and let M_n, $n\geq 1$ be the associated sequence of maximum values. When the support of $F(x)$ consists of all sufficiently large positive integers some of the asymptotic results of extreme value theory fail to apply but weaker limit laws for M_n, as $n\to\infty$, are obtained.

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão estacionária de variáveis aleatórias(v.a.'s). Admitamos ainda que a sucessão $\{X_n\}_{n\geq 1}$ é "strong mixing", isto é, existe uma função $g(k)$ definida nos inteiros positivos, tal que $g(k)\to 0$ quando $k\to\infty$, e para acontecimentos $A\in\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_m)$ e $B\in\mathcal{B}(X_{m+k},\ldots)$

$$|P(A\cap B)-P(A)\cdot P(B)|\leq g(k) \qquad (1)$$

Se a sucessão estacionária $\{X_n\}_{n\geq 1}$ for tal que (1) é válido com $g(k)$ substituida por $\phi(k)\cdot P(A)$, onde $\phi(k)\to 0$ quando $k\to\infty$, diremos que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ é uma sucessão estacionária, "ϕ-mixing".
Seja $F(.)$ a função de distribuição(f.d.) marginal da sucessão $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e seja $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão constituida por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas(i.i.d.) com f.d. $F(.)$, coincidente pois com a f.d. de cada um dos X_n, $n\geq 1$.
Para o caso i.i.d. é trivial a validade da lei dos grandes números para máximos desde que exista x_0 tal que $F(x_0)=1$ e $F(x_0-\delta)<1$, para todo o $\delta>0$.

Research partially supported by Calouste Gulbenkian Foundation.

Gnedenko(1943) demonstrou que se $F(x)<1$ para todo o $x<\infty$, a lei dos grandes números é válida para a sucessão $M_n^*=\max(Y_1,\dots,Y_n)$, $n\geq 1$, isto é, existe uma sucessão $\{A_n\}_{n\geq 1}$ tal que $P(|M_n-A_n|<\delta)\to 1$ quando $n\to\infty$, para todo o $\delta>0$, se e só se, $\lim_{x\to\infty}(1-F(x+\delta))/(1-F(x))=0$ para todo o $\delta>0$.

Consideremos agora uma classe especial de sucessões reais. Uma sucessão $\{c_n\}_{n>1}$ de números reais satisfaz a condição C se $c_n\leq\sup\{x:F(x)<1\}$, $n\geq 1$, e se existirem sucessões de inteiros positivos $\{n_i\}_{i\geq 1}$, $\{m_i\}_{i\geq 1}$ e $\{k_i\}_{i\geq 1}$ tais que $k_i\to\infty$, $m_i/n_i\to 0$, $(n_ik_i)/(n_{i-1}k_{i-1})\to 1$, $k_ig(m_i)\to 0$, quando $i\to\infty$, $g(.)$ a função de mistura em (1) e

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{n_i-1}(n_i-j)\,P(X_{j+1}>c_{r_i}\,|\,X_1>c_{r_i})/n_i=0,\ \text{com } r_i=k_{n_i}+m_i.$$

Definamos $u_n(\xi)=\inf_{x\in R}\{x:1-F(x-)\geq\xi/n\geq 1-F(x)\}$ e punhamos $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$, $n\geq 1$.

Tem-se então o seguinte resultado (demonstrado em O'Brien,3.).

<u>Lema 1</u>. Se $\limsup_{n\to\infty}P(M_n\leq u_n(\xi))=\exp(-\gamma\xi)$ com $\gamma>0$ e se $\{u_n(\xi)\}_{n\geq 1}$ satisfizer a condição C para todo o $\xi>0$, então para qualquer sucessão de números reais $\{d_n\}_{n\geq 1}$,

$$\begin{aligned}&P(M_n\leq d_n)\to 1 \text{ quando } n\to\infty \text{ se e só se } F^n(d_n)\to 1 \text{ quando } n\to\infty,\\ &P(M_n\leq d_n)\to 0 \text{ quando } n\to\infty \text{ se e só se } F^n(d_n)\to 0 \text{ quando } n\to\infty.\end{aligned}\tag{2}$$

Este lema imediatamente implica a validade da lei dos grandes números para a sucessão de máximos de um processo ϕ-mixing se e só se tal lei for válida para a sucessão de máximos do processo i.i.d. associado.

A partir de agora suporemos que a f.d. F está na classe $\mathfrak{D}$ das f.'s d. tais que $F(x)<1$ para todo o $x<\infty$ e cujo suporte é constituido por todos os inteiros maiores ou iguais a um inteiro $n_0>0$. É óbvio que a lei dos grandes números não pode então ser válida para a sucessão M_n^*, $n\geq 1$, pois escolhendo $\theta\in(0,1)$, $(1-F(n+\theta))/(1-F(n))\to 1$ quando $n\to\infty$. O mesmo acontece para a sucessão M_n, $n\geq 1$, e também nesta situação podemos obter uma análoga da lei dos grandes números semelhante à lei obtida por Anderson(1970) para a sucessão $\{M_n^*\}_{n\geq 1}$.

Consideremos a função auxiliar $F_c(x)=1-\exp(-h_c(x))$, $x\geq 1$, onde $h_c(x)$ é obtida a partir da função de argumento inteiro $h(n)=-\log(1-F(n))$ por interpolação linear. Enunciaremos sem demonstração o seguinte resultado:

Teorema 1. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de v.a.'s. estacionária e " strong mixing", tal que $F(.)$, f.d. marginal de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, pertence a $\mathcal{D}$. Admita-se que as condições impostas no lema 1 são válidas para qualquer sucessão $\{u_n(\xi)\}_{n\geq 1}$, $\xi>0$. Então existe uma sucessão de inteiros $\{I_n\}_{n\geq 1}$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n=I_n \cup M_n=I_n+1)=1 \tag{3}$$

se e só se

$$\lim_{n\to\infty} (1-F(n+1))/(1-F(n))=0 \tag{4}$$

A sucessão $\{I_n\}_{n\geq 1}$ pode ser definida por $\left[F_c^{-1}(1-1/n)+1/2\right]$, onde $[x]$ designa o maior inteiro não excedendo x.

A mais importante f.d. $F\in\mathcal{D}$ e satisfazendo (4) é a f.d. de Poisson. Veremos agora se a f.d. limite de M_n, convenientemente normalizado, quando $F\in\mathcal{D}$ e $(1-F(n))/(1-F(n+1))$ $a\neq 1$, $a<\infty$. Precisamos então do seguinte resultado, parcialmente contido em O'Brien,4.

Lema 2. Se uma sucessão $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de números reais satisfizer a condição C, tem-se

$$\lim_{i\to\infty} \{P(M_{r_i}\leq c_{r_i})-F^{r_i}(c_{r_i})\}=0, \quad \text{e além disso, se}$$

$$0<a=\liminf_{i\to\infty} F^{r_i}(c_{r_i}),\ b=\limsup_{i\to\infty} F^{r_i}(c_{r_i}-)<1 \tag{5}$$

e

$$\text{para todo o}\delta>0,\text{ existe } m_0 \text{ tal que se } m>m_0 \text{ e } m<n(1-\delta), c_m<c_n \tag{6}$$

temos

$$\lim_{n\to\infty}\{P(M_n\leq c_n)-F^n(c_n)\}=0.$$

Como se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ forem sucessões reais limitadas tais que se $n\to\infty$, $(a_n-b_n)\to 0$, temos $\limsup_{n\to\infty} a_n=\limsup_{n\to\infty} b_n$ e $\liminf_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} b_n$, o lema 2. pode escrever-se na forma

Lema 2'. Seja $\{c_n\}_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais satisfazendo a condição C e tal que (5) e (6) são válidas.
Então

$$\limsup_{n\to\infty} P(M_n\leq c_n)=\limsup_{n\to\infty} F^n(c_n)$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} P(M_n\leq c_n)=\liminf_{n\to\infty} F^n(c_n)$$

É então possível provar o seguinte resultado.

Teorema 2. Se $F\varepsilon\mathfrak{D}$ e se, para todo o x, a sucessão $\{x+F_c^{-1}(1-1/n)\}$ satisfizer a condição C, temos para todo o x

$$\limsup_{n\to\infty} P(M_n\leq x+F_c^{-1}(1-1/n)) \leq \exp(-\exp(-\alpha x))$$

e $$\liminf_{n\to\infty} P(M_n\leq x+F_c^{-1}(1-1/n)) \geq \exp(-\exp(-\alpha(x-1))),$$ para algum

$\alpha>0$, se e só se

$$\lim_{n\to\infty} (1-F(n))/(1-F(n+1))=\exp(\alpha).$$

Referências.

1. Anderson,C.W.(1970) Extreme Value Theory for a class of discrete distributions with applications to some stochastic processes. J.Appl.Prob.7,99-113.
2. Gnedenko,B.V.(1943). Sur la distribution du terme maximum d'une série aléatoire.Ann.Math.44,423-453.
3. O'Brien,G.L.(1974). The maximum term of uniformly mixing stationary processes.Z.Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.Gebiete.30, 57-63.
4. O'Brien,G.L.(1974).Limit theorems for the maximum term of a stationary process.Ann.Prob.2,540-545.