

# Limnologische Transport- und Nährstoffmodelle

Von DIETER M. IMBODEN

Eidgenössische Technische Hochschule (EAWAG) Zürich

Manuskript eingegangen am 5. Februar 1973

## ABSTRACT

Physical as well as biochemical processes have a significant influence on the material balance of a lake. Mathematical concepts are developed to treat transport phenomena with which a comparison of different lakes under certain systematic aspects becomes possible. A two-box model consisting of the subsystems epilimnion and hypolimnion, for lakes with one specific limiting nutrient factor (e.g., phosphorus) is employed to evaluate eutrophication processes. In particular, a theoretical basis for VOLLENWEIDER's [3] empirical relation between specific phosphorus loading and the trophic state is presented. Finally, the inhomogenous  $O_2$ -consumption in the deep part of the lake during summer stagnation is calculated with diffusion theory.

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. Einleitung</b>	30
<b>2. Mathematische Beschreibung eines Sees</b>	31
2.1 Modellarten	31
2.2 Modellfunktionen und Modellparameter	32
2.3 Physikalische Prozesse	33
2.4 Biologische und chemische Prozesse	38
2.5 Resonanztheorie und Stabilität eines Ökosystems	41
<b>3. Zweiboxmodell für einen See mit Phosphor als limitierendem Nährstoff</b>	41
3.1 Das Phosphormodell	41
3.2 Bestimmung der Modellparameter	45
3.21 Austauschkoefizient $\xi$	45
3.22 Sedimentation	47
3.23 Produktion und Respiration	47
3.24 Lösung und Adsorption an den Sedimenten	48
3.3 Diskussion des Phosphormodells	48
3.4 Spezifische Phosphorzufuhr und Trophiegrad	51
3.5 Anwendung des Modells und Vergleich mit Messungen	54
<b>4. Diffusionsmodell für das Hypolimnion</b>	58
<b>5. Zusammenfassung, Summary, Résumé</b>	61
Literaturverzeichnis	63
<b>Anhang</b>	65
I. Die orographische Beschreibung des Sees	65
II. Sauerstoffzehrung am Seegrund	67

## 1. Einleitung

Die Mathematik ist die Sprache der exakten Wissenschaften. Die Erfolge der Physik hängen eng zusammen mit den entsprechenden Fortschritten in der Mathematik, ja diese haben sich gegenseitig in vielen Fällen herausgefordert. Physikalische Vorgänge sind (wenigstens theoretisch) isolierbar, reproduzierbar und quantitativ zu erfassen. Diese Voraussetzungen fehlen oft bei Fragestellungen anderer Naturwissenschaften wie beispielsweise der Biologie. Es sind selten die elementaren Gesetze, welche die Eigenschaften eines biologischen Systems bestimmen, sondern das Zusammenwirken vieler, in ihrem Einfluss fast gleichwichtiger Faktoren, welches die verwirrende Fülle und Variation biologischer Vorgänge charakterisiert.

Dieser Umstand mag wesentlich dafür verantwortlich sein, dass die Abneigung gegen mathematische Vorstellungen bei Biologen recht verbreitet ist. Mathematische Modelle muten manchen als untauglichen, wenn nicht gegenüber dem Reichtum der Natur sündigen Versuch an zum Studium biologischer Vorgänge. Diese Kritik ist, soweit sie einzelne Phänomene betrifft, oft berechtigt. Hingegen können mathematische Methoden dort von grossem Nutzen sein, wo es nach gemeinsamen Prinzipien in verschiedenen Systemen zu suchen gilt oder wo das Verhalten einer grossen Zahl von Organismen interessiert. Für den zweiten Fall haben LOTKA [1] und VOLTERRA [2] schon früh mathematische Methoden in der Biologie eingeführt, während für die erste Art von Problemen vor allem im Zusammenhang mit dem Studium des anthropogenen Einflusses auf die Umwelt immer mehr mathematische Mittel zu Hilfe genommen werden.

Die vorliegende Arbeit hat erstens zum Ziel, mögliche mathematische Konzepte für die Limnologie aufzuzeigen. Die entwickelten Modelle sollen die Suche nach gemeinsamen Erscheinungsformen in Seen unterschiedlicher Art erleichtern. Sie bilden gleichsam das theoretische Gegenstück zu empirischen Ansätzen wie etwa dem Versuch von VOLLENWEIDER [3], eine allgemeingültige Beziehung zwischen Trophiegrad des Sees und dessen Phosphorbelastung pro Seefläche und Jahr aufzustellen.

Zweitens möchte diese Arbeit die Wichtigkeit physikalischer Vorgänge (Transportphänomene durch Strömungen, Diffusion, Sedimentation) in der Limnologie hervorheben. Die Behandlung des Sees als System nichthomogen verteilter Stoffe mit ganz bestimmten Transportmechanismen wird sich als hilfreich bei der Interpretation von im homogenen Modell nicht beschreibbaren Phänomenen erweisen.

Drittens sollen gewisse, vorläufig nur theoretisch formulierte Vorstellungen den experimentell tätigen Limnologen auf Fragestellungen aufmerksam machen, welche die Wahl des Messprogramms erleichtern und die Bedürfnisse zur Lösung zukünftiger Probleme berücksichtigen. Dazu gehören beispielsweise Fragen nach dem Einfluss von künstlichen Strömungen (künstliche Belüftung, Pumpspeicherwerke für die elektrische Energieerzeugung usw.) auf den biologischen Zustand des Sees.

Hingegen kann es nicht der Sinn solch allgemeiner Methoden sein, einzelne Phänomene (wie z. B. temporäre Algenblüten usw.) zu beschreiben. Auch galt es nicht in erster Linie, vorhandene Messungen an Seen zu verifizieren, obschon gerade solche Daten Schätzungswerte für die wichtigsten biologischen und hydrologischen Daten liefern.

Die mathematischen Gleichungen werden hier in rein algebraischer Form dargestellt und die einzelnen Modellparameter erst für die explizite Berechnung von Beispielen durch konkrete Werte ersetzt. Dieses Vorgehen erleichtert die mathematische Diskussion der Gleichungen und erübrigt das Einführen von numerischen Umrechnungsfaktoren infolge der Wahl verschiedener Einheiten. In dieser Arbeit ist, im Gegensatz zu den üblichen einheitsbezogenen Ingenieurformeln, die Wahl der Einheiten völlig frei; es muss einzig darauf geachtet werden, dass beim Übergang zu numerischen Berechnungen ein konsistenter Satz von Einheiten gewählt wird.

## 2. Mathematische Beschreibung eines Sees

### 2.1 Modellarten

Ein See stellt ein offenes System dar, das mit seiner Umgebung in verschiedenartiger Wechselwirkung steht. Die einfachste mathematische Beschreibung des Sees ergibt sich durch das Stoffbilanzmodell: Als Input wirken die natürlichen und künstlichen Zuflüsse, die Atmosphäre und eventuell die Sedimente, als Output der Abfluss und ebenfalls Atmosphäre und Sedimente (Abb. 1):

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum_{\alpha} q_i^{\alpha} - q_i^{\text{out}} - S_i + A_i \tag{1}$$

Das Vorzeichen des Sedimenttermes  $S_i$  ist so gewählt, dass ein Fluss aus dem See in die Sedimente einem positiven  $S_i$  entspricht; der Atmosphärenterm  $A_i$  hingegen ist positiv für einen Fluss von der Atmosphäre in den See. Diese Vorzeichenwahl ergibt für die meisten Substanzen positive  $S_i$  und  $A_i$ .

Im Falle des Wassers ( $i = w$ ) darf  $S_w = 0$  gesetzt werden.  $A_w$  stellt die Differenz von Niederschlag und Verdunstung an der Seeoberfläche dar und kann (ausser unter extremen klimatischen Bedingungen oder bei Seen mit kleinem Wasserdurchfluss) gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden. Ferner müssen sich über längere Zeitperioden Pegelschwankungen ausgleichen ( $dM_w/dt = 0$ ), so dass sich die folgende Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$q_w^{\text{out}} = \sum_{\alpha} q_w^{\alpha} \tag{2}$$

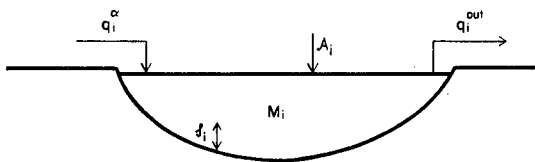


Abb. 1. Bilanzmodell eines Sees für die Substanz  $i$ .  
 $q_i^{\alpha}$  = Stoffmenge, welche pro Zeit im Zufluss  $\alpha$  in den See gelangt;  
 $q_i^{\text{out}}$  = Stoffmenge im Abfluss pro Zeit;  
 $S_i$  = Stoffaustausch mit den Sedimenten pro Zeit;  
 $A_i$  = Stoffaustausch mit der Atmosphäre pro Zeit;  
 $M_i$  = Totale Stoffmenge im See.

Das Wasser bringt in gelöster und suspendierter Form chemische Substanzen in den See, die zum Teil in den Sedimenten abgelagert werden. Für einige Elemente, so z.B. für Sauerstoff und Kohlenstoff, dann aber auch für gewisse Schwermetalle [4], spielt der direkte Austausch mit der Atmosphäre eine wichtige Rolle.

Der Retentionskoeffizient  $\mathcal{R}_i$  gibt an, welcher Anteil des Stoff-Input in den Sedimenten zurückbehalten wird:

$$\mathcal{R}_i = \frac{S_i}{\sum_{\alpha} q_i^{\alpha} + A_i} \quad (3)$$

Da experimentell  $\mathcal{R}_i$  aus dem Vergleich von Stofffrachten in Zu- und Abfluss bestimmt wird und zudem meistens der Atmosphärenterm zu vernachlässigen ist, findet sich in der Literatur meistens die Definition

$$\mathcal{R}_i = \frac{S_i}{\sum_{\alpha} q_i^{\alpha}} \quad (3')$$

VOLLENWEIDER (5, 6] hat die elementaren Stoffbilanzmodelle eingehend untersucht; in seiner Arbeit finden sich auch Hinweise auf frühere Publikationen über dieses Gebiet.

Es ist im allgemeinen nicht zu erwarten, dass das oben beschriebene Bilanzmodell die komplizierten physikalischen, chemischen und biologischen Vorgänge im See zu charakterisieren vermag. Modellverfeinerungen gehen dahin, die «black box» (See) in zunehmendem Masse durch Einführen gewisser mathematisch beschriebener Prozesse (Mischung, chemische Reaktionen, biologische Produktion und Respiration) zu erhellen. Der «Modellbauer» stösst dann sofort auf ein grundsätzliches Dilemma: Je komplizierter (und damit je realistischer) das Modell gewählt wird, desto mehr Modellparameter sind zu bestimmen und desto weniger sind die Parameter allgemeingültig. In Anbetracht des beschränkten Datenmaterials (bedingt nicht zuletzt durch den grossen experimentellen Aufwand, der für eine detaillierte Datensammlung nötig ist) wird der Komplexität des Modells meistens von dieser Seite, und weniger vom mathematischen Aufwand her, eine rigorose Grenze gesetzt. Auf der anderen Seite zeigt diese Überlegung den grossen Wert modellhafter Vorstellungen beim Planen optimaler Messprogramme.

Erweiterungen des einfachen Bilanzmodells sind grundsätzlich auf zwei Arten möglich: In den «Boxmodellen» wird der See in eine gewisse Anzahl von miteinander in Wechselwirkung stehenden offenen Untersystemen unterteilt, die ihrerseits im Sinne des elementaren Bilanzmodells behandelt werden. In den «kontinuierlichen Modellen» sind die Systemsvariablen (Temperatur, Konzentrationen usw.) stetige Funktionen von Ort und Zeit; deren Variation wird mit Hilfe von gewissen (meistens partiellen) Differentialgleichungen, beispielsweise mit einer Diffusionsgleichung, beschrieben. Natürlich können auch Zwischenformen auftreten. Wir werden in dieser Arbeit von einem Boxmodell ausgehen und später noch gewisse kontinuierliche Elemente einführen.

## 2.2 Modellfunktionen und Modellparameter

Modellfunktionen heissen jene Grössen, deren zeitlicher und örtlicher Verlauf mit Hilfe des Modells berechnet werden soll. Die Modellparameter charakterisieren die

Prozesse innerhalb des Systems wie etwa Sedimentationsgeschwindigkeit, Respirationsrate usw. Man unterscheidet zwischen äusseren und inneren Parametern: Erstere hängen direkt von Inputdaten ab (z.B. mittlere Phosphorzufuhr pro Zeit, mittlere Aufenthaltszeit des Wassers im See usw.) und sind dementsprechend leichter zu messen; letztere beschreiben interne Prozesse (Bioproduktion, Mischungsgeschwindigkeiten usw.).

Als Modellfunktionen betrachten wir in dieser Arbeit die Konzentrationen gewisser Substanzen  $c_i$ . Zweckmässig teilt man  $c_i$  auf in eine gelöste Komponente  $\lambda_i$  und in jenen Anteil  $\pi_i$ , der in Partikeln inkorporiert (bzw. mit ihnen assoziiert oder an ihnen adsorbiert) ist:

$$c_i = \lambda_i + \pi_i. \quad (4)$$

Wenn wir uns nicht für chemische Verbindungen, sondern nur für Konzentrationen chemischer Elemente interessieren, erfüllt jeder chemische oder biologische Prozess die Erhaltungsgleichung

$$\left(\frac{dc_i}{dt}\right)_{\text{Prozess}} = 0 \quad (5)$$

bzw.

$$\left(\frac{d\lambda_i}{dt}\right)_{\text{Prozess}} = -\left(\frac{d\pi_i}{dt}\right)_{\text{Prozess}}. \quad (5')$$

Allerdings ist für den Ablauf eines Prozesses nicht das Element, sondern die chemische Verbindung, in der das Element vorliegt, ausschlaggebend, so dass sich unter Umständen anstelle von (4) eine Aufteilung von  $c_i$  in die vorkommenden Komponenten aufdrängt. Die Verfeinerung des Modells wird – wie bereits erwähnt – mit einer erhöhten Zahl von Variablen und Modellparametern erkauft.

Weitere mögliche Modellfunktionen sind die Konzentrationen gewisser stabiler oder instabiler Isotopen (z.B.  $^{18}\text{O}$ , Tritium usw.) und schliesslich die Temperatur. Wie wir anhand der Temperatur zeigen werden, stellt der Vergleich zwischen Modellrechnung und Messung solcher zusätzlicher Funktionen eine wichtige Methode dar, die Modellparameter zu bestimmen. SIEGENTHALER [7] hat Isotopenprofile zur Untersuchung von Mischungsvorgängen am Thuner- und Brienersee benützt.

### 2.3 Physikalische Prozesse

Unter physikalischen Prozessen verstehen wir allgemeine Transportvorgänge innerhalb des Sees, nämlich Strömungen, Diffusion und Sedimentation. Wichtigste physikalische Grösse ist die Temperatur; ihr Verlauf ist zu einem grossen Teil verantwortlich für die Durchmischungsgeschwindigkeit verschiedener Wasserschichten.

Da Transportphänomene in einem See zu einem überwiegenden Teil durch turbulente Bewegungen bedingt sind, wäre es ein hoffnungsloser und untauglicher Versuch, das Strömungsbild durch ein entsprechendes Geschwindigkeitsfeld darstellen zu wollen. Anstelle der Vorstellung eines laminaren Strömungsbildes benützt man besser eine Korrelationsfunktion  $R(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')$ . Sie gibt an, welcher Anteil einer bestimmten Wassermenge, welche sich zur Zeit  $t'$  am Ort  $\mathbf{r}'$  befindet, zur späteren Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  zu finden ist.  $R$  ist eine dimensionslose Zahl zwischen 0 und 1.

Das Konzept der Korrelationsfunktion stammt aus der statistischen Mechanik und der Festkörperphysik, wo es sich als sehr fruchtbares theoretisches Instrument erwiesen hat. Für das komplexe, kein konstantes Strömungsbild besitzende System des Sees wäre es höchstens möglich, zeitliche Mittelwerte dieser Funktion zu bestimmen. In erster Linie interessiert uns eigentlich, wie sich eine Substanzmenge im Zufluss innerhalb des Sees verteilt. Dazu kann man eine Transportfunktion  $T_\alpha(\mathbf{r}t, t')$  definieren. Sie beschreibt, welcher Anteil der Wassermenge, welche zur Zeit  $t'$  am Zufluss  $\alpha$  in den See fließt, zur späteren Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{r}$  zu finden ist. Die Funktion  $A_\alpha(t, t')$  gibt an, welcher Anteil des zur Zeit  $t'$  im Zufluss  $\alpha$  zugeflossenen Wassers den See zur Zeit  $t$  schon wieder verlassen hat. Die Kontinuitätsgleichung für das Wasser lautet ( $V$ : Seevolumen)

$$\int_V T_\alpha(\mathbf{r}t, t') d^3\mathbf{r} + A_\alpha(t, t') = 1 \quad (6)$$

für alle  $t'$  und  $t > t'$ . Für jeden Ort  $\mathbf{r}$  im See gilt

$$\sum_\alpha \int_{-\infty}^t T_\alpha(\mathbf{r}t, t') dt' = 1. \quad (6')$$

Für einen See mit konstantem Strömungsmuster (wobei nur die Stromwege, nicht die Geschwindigkeiten und die Zu- und Abflussmengen konstant sein müssen) oder für Mittelwerte über einige Jahre sind  $T$  und  $A$  nur Funktionen der Zeitdifferenz  $t^* = t - t'$  (zeitliche Homogenität):

$$\begin{aligned} T_\alpha(\mathbf{r}t, t') &= T_\alpha(\mathbf{r}, t^*), \\ A_\alpha(t, t') &= A_\alpha(t^*). \end{aligned} \quad (7)$$

In der Limnologie wird oft der Begriff der Aufenthaltszeit bzw. der mittleren Aufenthaltszeit verwendet. Die oben eingeführten Funktionen geben uns die Mittel, diese Begriffe streng zu definieren. Der Einfachheit halber betrachten wir direkt den Fall zeitlicher Homogenität [vgl. (7)]; eine Verallgemeinerung ist aber leicht möglich.

Es sei  $q_w^\alpha(t)$  die (zeitlich variable) Wasserführung des Zuflusses  $\alpha$ . Zur Zeit  $t'$  gelangt durch diesen Zufluss im kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  die Wassermenge  $\Delta M_w^\alpha(t') = \Delta t \cdot q_w^\alpha(t')$  in den See. Die Funktion

$$M_w^\alpha(t, t') = \Delta M_w^\alpha(t') [1 - A_\alpha(t - t')], \quad t > t' \quad (8)$$

gibt an, welche Menge davon sich zur späteren Zeit  $t$  noch im See befindet. Die mittlere Aufenthaltszeit  $\tau_w^\alpha(t')$  des zur Zeit  $t'$  im Zufluss  $\alpha$  in den See gelangten Wassers ist dann

$$\tau_w^\alpha(t') = \frac{1}{\Delta M_w^\alpha(t')} \int_{t'}^{\infty} M_w^\alpha(t, t') dt = \int_{t'}^{\infty} [1 - A_\alpha(t - t')] dt. \quad (9)$$

Entsprechend kann man die *totale* mittlere Aufenthaltszeit  $\tau_w(t')$  des zur Zeit  $t'$  in allen Zuflüssen in den See gelangten Wassers berechnen. Man erhält erwartungsgemäss einen mit den Wasserführungen gewichteten Mittelwert:

$$\tau_w(t') = \frac{\sum_{\alpha} q_w^{\alpha}(t') \cdot \tau_w^{\alpha}(t')}{\sum_{\alpha} q_w^{\alpha}(t')} \quad (10)$$

Für den Fall konstanter Wasserführungen fällt in (9) und (10) die Abhängigkeit von der Zeit  $t'$  weg. Für  $\tau_w$  erhält man einen mit der üblichen Definition

$$\tau_w = \frac{V}{Q_{in}} \left( Q_{in} = \sum_{\alpha} q_w^{\alpha} \right)$$

identischen Wert.

Hingegen hat  $\tau_w^{\alpha}$  nichts zu tun mit dem Ausdruck  $V/q_w^{\alpha}$ . Letzterer gibt die (hypothetische) mittlere Aufenthaltszeit an, wenn nur der Zufluss  $\alpha$  bestünde,  $\tau_w$  hingegen die wirkliche Aufenthaltszeit des aus diesem Zufluss stammenden Wassers, wenn die anderen Flüsse ebenfalls Wasser führen.

In der Literatur werden für die Diskussion der Aufenthaltsfunktionen oft zwei ideale Systeme verwendet: Das vollständig durchmischte System (completely mixed reactor) und der sog. «plug flow reactor». Im ersten Fall nimmt (8) die Form<sup>1)</sup>

$$M_w(t, t') = \Delta M_w(t') \cdot e^{-\gamma(t-t')} \quad (11)$$

an, wobei aus (9)  $\tau_w = 1/\gamma$  folgt. Die Aufenthaltsfunktion ist dann  $A(t, t') = 1 - e^{-(t-t')/\tau_w}$ .

Im Fall des «plug flow reactors» fließt das Wasser als Pfropfen durch den See; die Aufenthaltszeit aller Wassermoleküle ist gleich der mittleren Aufenthaltszeit. Die Funktion  $A$  wird unstetig und hat die Form

$$A(t, t') = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau_w > t - t' \\ 1 & \text{für } t - t' > \tau_w \end{cases} \quad (12)$$

In analoger Art lassen sich Aufenthaltszeiten einer chemischen Substanz  $i$  definieren. Im allgemeinen Fall besteht keine direkte Beziehung zwischen  $\tau_w^{\alpha}$  und  $\tau_i^{\alpha}$ , da infolge von biologischen und chemischen Vorgängen die Mischvorgänge für Wasser und Substanz  $i$  sehr verschieden sein können. Falls die Substanz im See homogen verteilt ist, gilt die in einfachen Bilanzmodellen oft abgeleitete Beziehung [6]

$$\tau_i < \tau_w, \quad (13)$$

falls die Sedimente als Falle für die Substanz  $i$  wirken. Für einen wirklichen See darf hingegen von einem Vergleich gemessener  $\tau_i$  und  $\tau_w$  nicht ohne weiteres auf die Rolle der Sedimente im Stoffhaushalt des Sees geschlossen werden.

Die Transportfunktion  $T_{\alpha}$  kann im Prinzip mittels künstlicher und natürlicher Tracermethoden ermittelt werden. Im Falle weniger Zuflüsse kann beispielsweise die Herkunft einer gewissen Wassermenge im See durch Messung stabiler Isotopenverhältnisse (wie  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ ) oder nichtstabiler Isotopen bestimmt werden, falls sich die Zuflüsse in den Isotopenverhältnissen signifikant unterscheiden. Auch chemische Methoden könnten benützt werden; diese haben allerdings den Nachteil, dass sich die

<sup>1)</sup> Wir betrachten hier einen See mit nur einem Zufluss und lassen für den Moment den Index  $\alpha$  weg.

chemische Zusammensetzung des Wassers innerhalb des Sees verändern kann, wobei die Information über die Herkunft des Wassers verlorengeht.

Die Korrelationsfunktion  $R$  und die Transportfunktion  $T$  gehören, so wie wir sie definiert haben, in das im Abschnitt 2.1 diskutierte Konzept der kontinuierlichen Modelle. Da aber die messtechnischen Möglichkeiten zu deren vollständigen Bestimmung fehlen und zudem die natürlichen Strömungsfrequenzen viel zu gross sind, kann mathematisch gesehen eine solche Punkt-Punkt-Korrelation gar keine wohldefinierte Grösse darstellen. Es ist daher üblich, den See im Sinne eines Boxmodells in Untersysteme einzuteilen, innerhalb deren die chemische und physikalische Zusammensetzung des Wassers als konstant angesehen werden kann. Aus den kontinuierlichen Funktionen entsteht dann sinngemäss ein System von diskreten Transportfunktionen. Natürlich ist die Wahl und die Anzahl der Untersysteme von entscheidender Bedeutung für die Treue des so entstehenden Modells. Wählt man viele Untersysteme, wird die Zahl der Koeffizienten und damit der Messaufwand gross, wählt man wenige, so ergeben sich Zweifel an der obenerwähnten Voraussetzung homogener Verhältnisse innerhalb des Untersystems. Meistens benützt man vertikal getrennte Untersysteme (z. B. Epilimnion, Hypolimnion) und zudem gewisse vertikale Grenzen (verschiedene Buchten und Seitenarme des Sees, je nach dessen Form). Wir werden im folgenden ein solches Modell für einen einfach zusammenhängenden See untersuchen.

Gegeben sei ein See, den wir in  $n$  epilimnische und die entsprechenden  $n$  hypolimnischen Untersysteme aufteilen (Abb. 2). Wir vernachlässigen das Metalimnion und lassen für den Augenblick die Frage offen, wo die Grenze zwischen Epilimnion und Hypolimnion zu wählen ist. Wir setzen eine einfache Seeform voraus. Im Prinzip könnten die Becken auch komplizierter zusammenhängen (Beispiel: Vierwaldstättersee). Die Zuflüsse  $q^\alpha$  können Summen mehrerer Zuflüsse in das Untersystem  $\alpha$  enthalten.

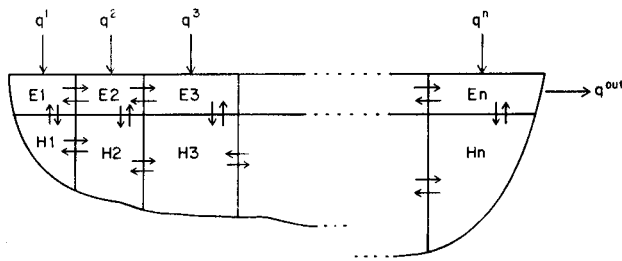


Abb. 2. Boxmodell für einen See mit je  $n$  epilimnischen bzw. hypolimnischen Untersystemen. Das Modell wird beschrieben durch  $4n-3$  interne Austauschraten.

Das Modell enthält  $6n-4$  unbekannte innere Flüsse. Für jedes der  $n$  epilimnischen Untersysteme gilt eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$q^\alpha = \sum_j F_{\text{aus}}^{E, \alpha, j} - \sum_j F_{\text{in}}^{E, \alpha, j}, \quad \alpha = 1 \dots n, \quad (14a)$$

wobei  $\sum_j F_{\text{aus}}^{E, \alpha, j}$  die Summe aller internen Flüsse aus  $E\alpha$  heraus, entsprechend  $\sum_j F_{\text{in}}^{E, \alpha, j}$



die Summe aller internen Flüsse in  $E\alpha$  hinein bezeichnet. Jedes der  $n$  hypolimnischen Untersysteme erfüllt analog eine Gleichung der Form

$$\sum_j F_{\text{aus}}^{H\alpha,j} - \sum_j F_{\text{in}}^{H\alpha,j} = 0, \alpha = 1 \dots n. \quad (14b)$$

Die Summe aller Gleichungen (14a) ergibt die Kontinuitätsgleichung (2) des Sees als Ganzes, diejenige aller Gleichungen (14b) ist null. Insgesamt stehen den  $6n-4$  unbekannt inneren Flüssen also  $2n-1$  linear unabhängige Kontinuitätsgleichungen gegenüber, falls die externen Zuflüsse bekannt sind. Die Anzahl der unbestimmten Grössen  $U$  ist

$$U = (6n - 4) - (2n - 1) = 4n - 3. \quad (15)$$

Für  $n = 1$  ist  $U = 1$ ; unbekannt ist in diesem Fall der Austausch zwischen Epilimnion und Hypolimnion des einzigen Seebeckens. Für eine grosse Anzahl von Becken steigt  $U$  sehr rasch. Im Prinzip hat man für jeden unbekannt Fluss eine Tracermessung vorzunehmen.

In der Ozeanographie werden diese Art von Boxaustauschmodellen häufig verwendet. So beschreiben beispielsweise BROECKER und LI [8] das System von Atlantischem und Pazifischem Ozean mit einem 3-Box-Modell; sie benützen dabei Messungen von  $^{14}\text{C}$ ,  $\Sigma\text{CO}_2$  und eine  $^{18}\text{O}$ -Salinitätsrelation.

Analog zum Gleichungssystem (14) für Wasser können Gleichungen für eine chemische Substanz  $i$  aufgestellt werden, wobei zusätzlich der Materieaustausch mit den Sedimenten und der Atmosphäre zu berücksichtigen ist. Allerdings ist es – wie schon bei den kontinuierlichen Austauschfunktionen – meistens nicht direkt möglich, aus den bekannten Wasserflüssen diejenigen für Materie zu berechnen. Materie in partikulärer Form steht zusätzlich unter dem Einfluss der Gravitation (Sedimentation) und der Eigenbewegung des Zooplanktons. Wie wir im Abschnitt 2.2 gesehen haben, bedeutet die Aufteilung der totalen Konzentration in eine gelöste und partikuläre Komponente (oder sinngemäss in die Anteile verschiedener chemischer Verbindungen) den Verlust der Kontinuitätsgleichungen für die Einzelkomponenten  $\lambda_i$  und  $\pi_i$ . Man hat das hydrologische Modell durch entsprechende biochemische Gleichungen zu ergänzen. Diese werden wir im Abschnitt 2.4 behandeln und hier vorerst nur eine allgemeine Form aufstellen.

Die Differentialgleichung der gelösten Konzentrationskomponente der Substanz  $i$  im (ideal durchmischten) epilimnischen Untersystem  $\alpha$  lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i^{E\alpha}}{dt} = \frac{1}{V_{E\alpha}} \left[ q_{i,\lambda}^\alpha + \sum_j (F_{\text{in}}^{E\alpha,j} \cdot \lambda_j^i) - \lambda_i^{E\alpha} \sum_j F_{\text{aus}}^{E\alpha,j} \right] \\ + \Phi_i (\lambda_i^{E\alpha}, \pi_i^{E\alpha}, \dots) - \Psi_i (\lambda_i^{E\alpha}, \pi_i^{E\alpha}, \dots). \end{aligned} \quad (16a)$$

Entsprechend für die partikuläre Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i^{E\alpha}}{dt} = \frac{1}{V_{E\alpha}} \left[ q_{i,\pi}^\alpha + \sum_j (F_{\text{in}}^{E\alpha,j} \cdot \pi_j^i) - \pi_i^{E\alpha} \sum_j F_{\text{aus}}^{E\alpha,j} \right] \\ - \frac{g_i}{h_{E\alpha}} \pi_i^{E\alpha} - \Phi_i (\lambda_i^{E\alpha}, \pi_i^{E\alpha}, \dots) + \Psi_i (\lambda_i^{E\alpha}, \pi_i^{E\alpha}, \dots). \end{aligned} \quad (16b)$$

$g_i$  ist die Sinkgeschwindigkeit der partikulären Komponente infolge Sedimentation,  $q_i^\alpha$ ,  $\lambda$  bzw.  $q_i^\alpha$ ,  $n$  der Input pro Zeit durch Zuflüsse und Atmosphäre für die gelöste bzw. partikuläre Komponente,  $\Phi_i$  bzw.  $\Psi_i$  die Umwandlungsrate von partikulärer in gelöste bzw. von gelöster in partikuläre Phase.  $\Phi$  und  $\Psi$  sind meist nichtlineare Funktionen der Konzentrationen dieser und anderer Substanzen und können zudem von der Temperatur, vom pH, Redoxpotential usw. abhängen. Die Konzentrationen benachbarter Untersysteme sind über den Term  $\sum_j (F_{in}^{\alpha,j} \cdot \lambda_j^i)$  miteinander gekoppelt.

Ähnliche Gleichungen ergeben sich für das Hypolimnion, wobei ein Term für den Materieaustausch mit den Sedimenten hinzukommt.

Die mathematischen Grenzen dieser Art von Modellen werden offensichtlich, wenn man sich die wachsende Zahl von gekoppelten Modellfunktionen vergegenwärtigt: Die Wahl von  $n$  je aus einem epilimnischen bzw. hypolimnischen Untersystem bestehenden Seebecken ergibt pro chemisches Element  $4n$  gekoppelte (im allgemeinen nichtlineare) Differentialgleichungen. Biochemisch gesehen sollten über die Funktionen  $\Phi_i$  und  $\Psi_i$  zumindest die für die Bioproduktion wichtigsten Elemente (O, C, N, P) zusammenhängen, so dass sich  $16n$  Gleichungen ergäben. Schliesslich sind die Modellparameter (Durchmischungsraten, Bioproduktion, Respiration usw.) von der Jahreszeit abhängig, so dass wir es, um völlig exakt zu sein, mit einem grossen System nichtlinearer gekoppelter Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten zu tun hätten.

In Wirklichkeit lassen sich nun aber (natürlich immer restriktiv wirkende) Annahmen treffen, welche die mathematische Struktur des Modells entscheidend vereinfachen und dem Modell doch noch (so hofft man wenigstens) eine gewisse Aussagekraft verleihen. In erster Linie kann man die zeitlich variierenden Modellparameter durch stückweise konstante Werte ersetzen, beispielsweise also die Sommerperiode (Stagnation) und die Winterperiode (Zirkulation) je durch einen verschiedenen Set von konstanten Parametern beschreiben («Methode der stückweise konstanten Parameter»). Zweitens sind für die Umwandlungsfunktionen  $\Phi_i$  und  $\Psi_i$  möglichst einfache Ansätze zu machen. Wir werden in den folgenden Kapiteln ein solches vereinfachtes Modell entwickeln und diskutieren.

#### 2.4 Biologische und chemische Prozesse

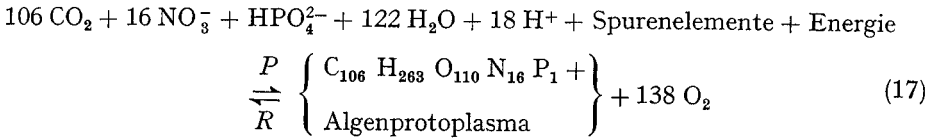
Wir nützen im folgenden Modell die Tatsache aus, dass während der Sommerstagnation die trophogene Schicht weitgehend mit dem Epilimnion (evtl. zuzüglich des Metalimnions), die tropholytische Schicht mit dem Hypolimnion zusammenfällt ([9], S. 47). Der Einfachheit halber werden wir nur von Epilimnion und Hypolimnion sprechen, auch wenn diese Begriffe im Winter eigentlich keine Bedeutung haben.

Im Epilimnion (eigentlich trophogene Schicht) werden gelöste Nährstoffe von Organismen aufgenommen, was einem Übergang von der gelösten in die partikuläre Phase entspricht. Gleichzeitig scheiden die Organismen auch gelöste Verbindungen aus. Da ein Teil der partikulären Substanz (in Form von toten Organismen) infolge von Sedimentation das Epilimnion verlässt, stellt das Epilimnion für biologisch wichtige gelöste Substanzen eine Falle, für partikuläre eine Quelle dar.

Im Hypolimnion werden die absinkenden partikulären Anteile teilweise mineralisiert; ein gewisser Anteil davon sedimentiert auf den Seegrund. Dieses Material ist

allerdings für den See noch nicht endgültig verloren, kann doch später eine Rücklösung gewisser Substanzen aus den obersten Sedimentschichten stattfinden.

Die Umwandlungsgleichungen der biologisch wichtigen Elemente können näherungsweise in einer stöchiometrischen Formel gekoppelt werden [10, 11]:



( $R$  = Respiration;  $P$  = Photosynthese).

Diese Formel erlaubt es beispielsweise, einen Zusammenhang zwischen der Freisetzung von gelöstem Phosphor infolge Mineralisation (bzw. Respiration) und dem entsprechenden Sauerstoffverbrauch aufzustellen:

$$\left( \frac{d\lambda_P}{dt} \right)_R = - \left( \frac{d\pi_P}{dt} \right)_R = - 7.0 \times 10^{-3} \times \left( \frac{d[\text{O}_2]}{dt} \right)_R. \quad (18)$$

Für viele Seen wird dem Phosphor die Rolle des limitierenden Nährstoffs zugeschrieben. Basierend auf dieser Hypothese werden wir im Kapitel 3 ein Seemodell entwickeln. Dieses Modell wird folglich gewissen Einschränkungen in seinem Anwendungsbereich unterworfen sein, welche aus der mathematischen Struktur selber nicht ersichtlich sind, sondern durch andere Überlegungen eruiert werden müssen. So wird insbesondere das Modell nicht direkt in der Lage sein, die Rolle des Stickstoffs als allfällig wachstumsbegrenzenden Faktor zu behandeln. Hingegen könnte der Vergleich dieses Modells mit einem analog gebauten Stickstoffmodell einen Entscheid in dieser Frage ermöglichen.

Im Sinne eines mathematisch einfachen Modells wäre es wünschenswert, die Umwandlungsfunktionen für Phosphor  $\Phi_P$  und  $\Psi_P$  in Abhängigkeit von der Phosphorkonzentration allein auszudrücken; dadurch würden die Differentialgleichungen für die P-Konzentrationen unabhängig von denen anderer Elemente. Für die Respiration (bzw. Mineralisation) wählen wir den linearen Ansatz

$$\left( \frac{d\pi_P}{dt} \right)_R = - R \pi_P = - \left( \frac{d\lambda_P}{dt} \right)_R. \quad (19)$$

Der Respirationkoeffizient  $R$  ist nach der RGT-Regel eine Funktion der Temperatur, wird also im Sommer für Hypolimnion und Epilimnion verschieden sein. Ferner hängt  $R$  von diversen chemischen und biologischen Faktoren ab, so vor allem von der  $\text{O}_2$ -Konzentration. Wählt man für aerobe Bedingungen ein konstantes  $R$ , so kann aus dem im Modell berechneten zeitlichen Verlauf der Funktion  $(d\pi_P/dt)_R$  mit Hilfe von (19) ermittelt werden, wie lange diese Voraussetzung überhaupt gilt. Beim Übergang zu anaeroben Verhältnissen wären die Umwandlungsgleichungen entsprechend anzupassen. Die erwähnte «Methode der stückweise konstanten Parameter» liefert also zugleich die Grenzen der Gültigkeit der Parameter.

Etwas komplizierter ist das Problem der Photosynthese. Das Wachstum einer Mischbiozönose kann man bekanntlich beschreiben durch die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \mu \cdot x \cdot \frac{s}{K + s}, \quad (20)$$

wobei  $\mu$  und  $K$  positive Konstanten sind,  $x$  die Konzentration der Biomasse und  $s$  diejenige des limitierenden Nährstoffs bedeuten. Für unsere Annahme wäre also  $s = \lambda_P$ . Über die stöchiometrische Gleichung (17) sind  $dx/dt$  und  $d\lambda_P/dt$  verknüpft. Es ist zu erwarten, dass die Produktionsrate weit entfernt ist von Sättigungserscheinungen, falls Phosphor ein stark begrenzender Wachstumsfaktor darstellt oder – mit anderen Worten – dass  $K \gg \lambda_P$  ist. Tatsächlich sind die Phosphatkonzentrationen in der trophogenen Schicht während des Sommers extrem klein. Aus (20) folgt somit eine Beziehung der Form ( $\mu' =$  positive Konstante).

$$\left(\frac{d\lambda_P}{dt}\right)_P = -\mu' \cdot x \cdot \lambda_P. \quad (21)$$

Der Faktor  $\alpha = \mu'x$  hat die Dimension einer reziproken Zeit. Wie wir im Abschnitt 3.2 sehen werden, ist  $\alpha$  (je nach Jahreszeit und See) von der Grössenordnung 0,1 bis 1 Tag<sup>-1</sup>, also in den meisten Fällen grösser als andere Parameter wie Respirationsrate, reziproke Aufenthaltszeiten des Wassers usw. Man kann zeigen, dass in diesem Fall das im Kapitel 3 entwickelte Phosphormodell ziemlich unempfindlich auf den genauen Wert von  $\alpha$  wird. Man kann deshalb die Abhängigkeit von der Biomasse  $x$  vernachlässigen und die photosynthetische Umwandlungsgleichung in der Form

$$\left(\frac{d\lambda_P}{dt}\right)_P = -\alpha\lambda_P = -\left(\frac{d\pi_P}{dt}\right)_P \quad (22)$$

schreiben. Für  $\alpha$  wählt man einen (im Sommer und Winter verschiedenen) empirisch bestimmten konstanten Wert. Da (22) für das ganze Epilimnion gültig sein soll, entspricht  $\alpha$  einer über verschiedene Lichtintensitäten und Biomassenkonzentrationen gemittelten Produktionsrate.

Die mathematische Konsequenz der Photosyntheseformel (22) ist praktisch äquivalent zu einer von STUMM und LECKIE [12] gemachten Feststellung, wonach die Produktivität in erster Linie von der Zufuhr von Phosphaten (Zuflüsse, Respiration, Rücklösung aus den Sedimenten) und weniger von der Phosphatkonzentration selbst abhängt. Unabhängig vom genauen Wert von  $\alpha$  wird im Sommer durch Photosynthese ständig das Phosphat bis zu sehr niedrigen Restkonzentrationen aufgebraucht.

Die in (19) und (22) gemachten Ansätze entsprechen der Wahl der folgenden Umwandlungsfunktionen  $\Psi_P$  und  $\Phi_P$ :

Im Epilimnion:

$$\Phi_P^E = R_E \pi_P^E; \Psi_P^E = \alpha \lambda_P^E. \quad (23a)$$

Im Hypolimnion:

$$\Phi_P^H = R_H \pi_P^H; \Psi_P^H = 0. \quad (23b)$$

Die Wahl der Parameter  $R_E$ ,  $R_H$  und  $\alpha$  werden wir im Abschnitt 3.2 diskutieren. Mit der einfachen Form von (23) ist uns die Isolation der Differentialgleichungen für Phosphor von den Konzentrationen anderer Substanzen gelungen.

### 2.5 Response-theorie und Stabilität eines Ökosystems

Im Zusammenhang mit der Frage nach der Belastung eines Sees durch Einflüsse des Menschen interessieren uns hauptsächlich Problemstellungen der folgenden Art:

Wie ändert sich die Konzentration einer bestimmten Substanz an einem bestimmten Ort im See (z. B.  $O_2$ -Konzentration am Seegrund), wenn irgendwo der Input einer anderen Substanz (z. B. P-Konzentration in einem Zufluss) verändert wird? Diesen Sachverhalt kann man mathematisch in die Form

$$\delta c_i(\mathbf{r}'t') = \text{Funktion von } [\delta c_j(\mathbf{r}t)], t' > t \quad (24)$$

bringen: Die Konzentrationsänderung der Substanz  $i$   $\delta c_i$  am Ort  $\mathbf{r}'$  zur Zeit  $t'$  ist eine Funktion der Konzentrationsänderung der Substanz  $j$   $\delta c_j$  an einem anderen Ort  $\mathbf{r}$  zu einer früheren Zeit  $t$ . Für kleine «Störungen» kann man versuchen, einen linearen Ansatz zu machen («linear response»):

$$\delta c_i(\mathbf{r}'t') = \Gamma_{ij}(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') \cdot \delta c_j(\mathbf{r}t) . \quad (25)$$

Dies entspricht der Annahme, dass eine Verdoppelung der Störung auch eine Verdoppelung des Effekts zur Folge hat. Viele natürliche Systeme besitzen aber die typische Eigenschaft, von einer gewissen kritischen Grösse der Störung an nichtlineare Effekte zu zeigen. So kann beispielsweise die  $O_2$ -Konzentration am Seegrund am Ende der Sommerstagnation linear mit der Phosphorzufuhr in den See sinken, bis schliesslich ein anaerober Zustand erreicht wird. Spätestens dann zeigen sich nicht-lineare Effekte wie Rücklösung von Phosphat und anderen Substanzen aus den Sedimenten infolge der drastischen Änderung des Redoxpotentials.

In der Ökologie wird oft ohne klare Definition der Begriff der Stabilität eines Systems benützt. In der Physik wird Stabilität als das Vermögen eines Systems definiert, nach Anlegen und Wiederentfernen einer gewissen Störung in den ursprünglichen Zustand zurückzukehren. Sinngemäss sollte in der Ökologie nicht von Stabilität im allgemeinen, sondern von der *Stabilität in bezug auf eine bestimmte Störung* gesprochen werden. Ein mögliches Konzept der ökologischen Stabilität könnte dahin gehen, den Bereich linearer Effekte zur Charakterisierung der Stabilität zu verwenden.

Mit Modellgleichungssystemen, wie wir sie in der vorangegangenen Abschnitten entwickelt haben, können Responsefunktionale und die Grenzen des linearen Response berechnet werden. Solche Untersuchungen sollten überhaupt ein zentrales Ziel bei der Erarbeitung von Modellen sein. Als Störungen sind dabei nicht nur Änderungen des Input, sondern auch Änderungen der Modellparameter zu betrachten (Störungen der Bioproduktion durch «Vergiftungen» usw.).

## 3. Zweiboxmodell für einen See mit Phosphor als limitierendem Nährstoff

### 3.1 Das Phosphormodell

Die einfachste Erweiterung des elementaren Stoffbilanzmodells stellt das Zweiboxmodell dar, bestehend aus den Untersystemen Epilimnion ( $E$ ) und Hypolimnion ( $H$ ). Das strukturlose Einboxmodell wird der Trennung zwischen Seegebieten hoher Produktivität und solchen hauptsächlichlicher Mineralisation und damit dem entschei-

denden Unterschied zwischen stehendem Gewässer und Fluss nicht gerecht. Wie wir schon im Abschnitt 2.3 gesehen haben, ergeben sich aus dem Vergleich von mittleren Aufenthaltszeiten chemischer Elemente mit derjenigen des Wassers im vollständig durchmischten Einboxmodell unter Umständen irreführende Folgerungen für den Retentionsfaktor [vgl. (13)]. Hingegen vermag das Zweiboxmodell schon gewisse typische Eigenschaften des Sees wiederzugeben.

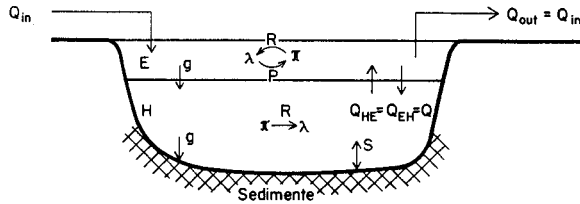


Abb. 3. 2-Box-Modell für einen See.

$E$  = Epilimnion;  $H$  = Hypolimnion;  $\lambda$ ,  $\pi$  = Konzentration des gelösten bzw. partikulären Phosphors;  $P$  = Photosynthese;  $R$  = Respiration (bzw. Mineralisation);  $g$  = Sedimentationsgeschwindigkeit von partikulärem Phosphor;  $S$  = Adsorption bzw. Rücklösung von Phosphat an den Sedimenten pro Fläche und Zeit.

Das Zweiboxmodell für Phosphor ist in Abb. 3 dargestellt. Es beruht auf der Voraussetzung, Phosphor sei der wachstumsbeschränkende Nährstoff. Nach (15) tritt nur eine einzige innere hydrologische Grösse auf ( $n = 1$ ), nämlich der Wasseraustausch zwischen  $E$  und  $H$ . Das Modell wird beschrieben durch 4 gekoppelte lineare Differentialgleichungen, je zwei für den gelösten bzw. partikulären Phosphor<sup>2)</sup>, wobei die Umwandlungsfunktionen (23) benützt werden:

$$\frac{d\lambda_E}{dt} = \frac{1}{V_E} [q_\lambda + Q \lambda_H - (Q_{in} + Q) \lambda_E] - \alpha \lambda_E + R_E \pi_E + S_E \frac{F_E - F_H}{V_E}, \quad (26a)$$

$$\frac{d\pi_E}{dt} = \frac{1}{V_E} [q_\pi + Q \pi_H - (Q_{in} + Q) \pi_E] - g_E \frac{F_E}{V_E} \pi_E + \alpha \lambda_E - R_E \pi_E, \quad (26b)$$

$$\frac{d\lambda_H}{dt} = \frac{1}{V_H} [Q \lambda_E - Q \lambda_H] + R_H \pi_H + S_H \frac{F_H}{V_H}, \quad (26c)$$

$$\frac{d\pi_H}{dt} = \frac{1}{V_H} [Q \pi_E - Q \pi_H] + g_E \frac{F_H}{V_H} \pi_E - g_H \frac{F_H}{V_H} \pi_H - R_H \pi_H. \quad (26d)$$

Das totale Seevolumen  $V = V_E + V_H$  und die Einzelvolumina von  $E$  und  $H$  werden als konstant angenommen. Letztere Voraussetzung entspricht nur ungenau der Wirklichkeit, wächst doch oft die Tiefe des Epilimnions während der Sommer-

<sup>2)</sup> Die totale P-Konzentration wird üblicherweise in die drei Komponenten Phosphat ( $PO_4$ -P), partikulärer P (PP) und gelöster organischer P (GOP) aufgeteilt [13]. Wir wählen  $\lambda = [PO_4\text{-P}]$  und  $\pi = [PP]$ , obschon dadurch strenggenommen die Kontinuitätsgleichung (5) verlorengeht und GOP offenbar für verschiedene Organismen als Nährstoff dienen kann. Die gemachte Näherung wird immerhin durch die unsystematische und nicht zu starke Variation von GOP im See gerechtfertigt.

stagnation. Das Modell dürfte daher für Seen mit extrem kleiner Hypolimniontiefe, bei denen das Wandern der Sprungschicht eine Variation von  $V_H$  um 100% und mehr ausmachen kann, nur beschränkt gültig sein. Für den Lake Erie haben BURNS und ROSS [14] unter Berücksichtigung der variablen Sprungschicht die Phosphorbilanz und die Rolle der Sedimente im P-Haushalt untersucht. Das hier entwickelte Modell vermag solche Feinheiten nicht zu beschreiben, dürfte dafür aber einer grösseren Klasse von Seen gerecht werden.

Das Gleichungssystem (26) enthält mehrere hydraulische und orographische Parameter, welche im Anhang im Hinblick auf eine mögliche Vereinfachung untersucht werden. Es lässt sich in der folgenden übersichtlicheren Form schreiben (Koeffizienten in Tab. 1):

$$\frac{d\lambda_E}{dt} = -A \lambda_E + B \lambda_H + R_E \pi_E + k_1, \quad (27a)$$

$$\frac{d\lambda_H}{dt} = G \lambda_E - G \lambda_H + R_H \pi_H + k_2, \quad (27b)$$

$$\frac{d\pi_E}{dt} = \alpha \lambda_E - I \pi_E + B \pi_H + k_3, \quad (27c)$$

$$\frac{d\pi_H}{dt} = H \pi_E - L \pi_H. \quad (27d)$$

Die Koeffizienten in (27) sind effektiv zeitlich nicht konstant. So ist z.B. zu erwarten, dass der biologische Produktionskoeffizient  $\alpha$  während des Jahres schwankt, ebenso der Fluss  $Q$  zwischen  $E$  und  $H$ , schliesslich auch die spezifische P-Belastung sowie die Durchflussmenge  $Q_{in}$ . In einem See, der zwei markant voneinander verschiedene Stadien durchläuft (Winterzirkulation und Sommerstagnation), liegt es nahe, die Koeffizienten nicht stetig zu ändern, sondern das Gleichungssystem (27)

Tabelle 1. Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (27).

$\tau = V_E/Q_{in}$ [Tag]:	Mittlere Aufenthaltszeit des Wassers in $E$ ohne Durchmischung mit $H$ .
$\xi = Q/V_E$ [Tag <sup>-1</sup> ]:	Reziproke Mischzeit von $E$ durch Mischung mit $H$ .
$\sigma_E = g_E/h_E$ ; $\sigma_H = g_H/h_H$ [Tag <sup>-1</sup> ]:	Reziproke mittlere Fallzeit von sedimentierendem Material in $E$ bzw. $H$ ( $g_E \sim g_H$ ).
$\beta_\lambda = q_\lambda/F_E$ ; $\beta_\pi = q_\pi/F_E$ [mg m <sup>-2</sup> Tag <sup>-1</sup> ]:	Spezifische Belastung des Sees durch gelösten bzw. partikulären Phosphor; $\beta_i = \beta_\lambda + \beta_\pi$ .
$S$ [mg m <sup>-2</sup> Tag <sup>-1</sup> ]:	Phosphatlösung bzw. Adsorption an Sedimentsoberfläche pro Fläche und Zeit.
$\varepsilon = V_H/V_E$ ; $\gamma = \bar{h}_H/\bar{h}_E$ ; $\varepsilon \sim \gamma$ .	
Weiter werden die Parameter $R_E$ , $R_H$ , und $\alpha$ benützt.	
$A = 1/\tau + \xi + \alpha$	$k_1 = \beta_\lambda \bar{h}_E + S_E \bar{h}_E (1 - \varepsilon/\gamma)$
$B = \xi$	
$G = \xi/\varepsilon$	$k_2 = S_H \bar{h}_H$
$H = \xi/\varepsilon + \sigma_H$	
$I = 1/\tau + \xi + \sigma_E + R_E$	$k_3 = \beta_\pi \bar{h}_E$
$L = \xi/\varepsilon + \sigma_H + R_H$	

je für einen verschiedenen Satz von Sommer- bzw. Winterkoeffizienten zu untersuchen.

Das Modell impliziert die folgenden idealisierten Annahmen über den See:

1. Epilimnion und Hypolimnion sind jederzeit ideal durchmischt und bezüglich der Konzentrationen von Nährstoffen bzw. Sauerstoff homogen. Es ist offensichtlich, dass dies im Falle des Hypolimnions nicht der Fall ist, weswegen die dortigen Konzentrationen immer als Durchschnittswerte zu betrachten sind.
2. Phosphor ist überall und jederzeit der limitierende Nährstoff. Situationen, bei denen Stickstoff wenigstens temporär diese Rolle übernimmt, sind damit nicht erfasst.
3. Die Abhängigkeit der Mineralisation vom Redoxpotential wird offensichtlich mit den konstanten Koeffizienten  $R_E$  und  $R_H$  nicht erfasst. Immerhin werden wir den Sauerstoffhaushalt in die Begutachtung einbeziehen. So ist es möglich, beim Einsetzen anaerober Verhältnisse am Seegrund neue Werte für  $R_H$  und  $S_H$  einzuführen.
4. Es wird angenommen, dass sich alles Zuflusswasser in das Epilimnion einschichtet. Andernfalls könnte ein kleinerer  $\xi$ -Wert den zusätzlichen Wasserinput in  $H$  berücksichtigen.

Die Koeffizienten  $S_E$  und  $S_H$  beschreiben den Austausch von Phosphat mit den Sedimenten. Die Parameter  $g_E$  und  $g_H$  sollen so gewählt werden, dass während der Schwebezeit die wirkliche Mineralisation im Wasser und am Seegrund unter aeroben Bedingungen imitiert wird. Daher ist für diesen als «normal» bezeichneten Zustand  $S_E = S_H = 0$ . Die mögliche Adsorption von Phosphaten an den Sedimenten ( $S_E, S_H < 0$ ) wollen wir gegenüber der Sedimentation von partikulärem  $P$  vernachlässigen und nur jene «abnormalen» Situationen im Auge behalten, bei denen infolge anaerober Verhältnisse am Seegrund eine Phosphatrücklösung eintritt ( $S_H > 0$ ). Für das Epilimnion ist diese Situation wenig wahrscheinlich, zudem ist die Flächendifferenz  $F_E - F_H$  meistens klein, so dass der letzte Term in (26a) ganz weggelassen wird ( $S_E = 0$ ).

$g_E$  und  $g_H$  besitzen die Dimension einer Geschwindigkeit, müssen aber nicht mit experimentell bestimmten Sedimentationsgeschwindigkeiten übereinstimmen, da das Plankton auch eine Eigenbewegung besitzt.  $g_H$  bestimmt wesentlich die Sedimentationsrate

$$S(t) = [g_H \cdot \pi_H(t) - S_H(t)] \cdot F_H \quad (28)$$

und daher innerhalb der Modellannahmen den Retentionskoeffizienten (3). Im Kapitel 4 werden wir die Vorgänge im Hypolimnion mit einem Diffusionsmodell untersuchen und die Näherung des vollständig durchmischten Systems fallenlassen.

Der stationäre Zustand des Systems (27) lautet

$$\lambda_E^0 = \frac{1}{X} \left\{ k_1 GY + k_2 BY + k_3 (BHR_H + GLR_E) \right\}, \quad (29a)$$

$$\lambda_H^0 = \frac{1}{X} \left\{ k_1 (GY + \alpha HR_H) + k_2 (AY - \alpha LR_E) + k_3 (AHR_H + GLR_E) \right\}, \quad (29b)$$



$$\pi_E^0 = \frac{L}{X} \left\{ k_1 \alpha G + k_2 \alpha B + k_3 G (A - B) \right\}, \quad (29c)$$

$$\pi_H^0 = \frac{H}{L} \pi_E^0 \quad (29d)$$

mit den Hilfsgrößen

$$Y = IL - BH, \quad (30a)$$

$$X = G(A - B)Y - \alpha(GLR_E + BHR_H). \quad (30b)$$

Die Relaxationszeit  $\tau_R$  des Systems gibt an, wie lange es dauert, bis der See, ausgehend von einem beliebigen, aber nicht zu extremen Anfangszustand, den stationären Zustand (29) erreicht<sup>3)</sup>. Ist  $\tau_R$  kleiner als die Dauer der Sommer- bzw. Winterperiode, so heisst dies, dass der See im Laufe einer solchen Halbjahresperiode die «Vorgeschichte» (den Zustand während der vorangegangenen Periode) vollständig «vergisst». Andernfalls würde auch am Ende der Zirkulationsphase der vorangegangene Sommer bzw. umgekehrt am Ende der Stagnation die vorherige Zirkulation noch teilweise bestimmend für den Zustand des Sees sein. Dieses «See-gedächtnis» ist wichtig für die Beurteilung der Frage, wie rasch sich Änderungen bei den äusseren Parametern des Sees (z.B. P-Input) im Zustand des Sees auswirken. Neben dem dynamischen Gedächtnis besitzt der See überdies ein statisches Erinnerungsvermögen in den Sedimenten, das unter Umständen infolge der Austauschvorgänge am Seegrund über längere Zeiträume wirksam sein kann.

Eine Diskussion der Differentialgleichungen (29) und eine Abschätzung von  $\tau_R$  ist nur möglich, wenn wir die Grössenordnung der Modellparameter kennen.

### 3.2 Bestimmung der Modellparameter

#### 3.21 Austauschkoefizient $\xi$

Der Austauschkoefizient  $\xi = Q/V_E$  kann aus dem Temperaturverlauf in  $H$  ermittelt werden. Da der Wärmeaustausch mit dem Seeuntergrund zu vernachlässigen ist, wird die zeitliche Variation der mittleren Hypolimniontemperatur praktisch ganz durch die Zumischung von Wasser aus  $E$  bestimmt. Die mittleren Temperaturen  $\bar{T}_E$  und  $\bar{T}_H$  sind definiert:

$$\bar{T}_E = \frac{1}{V_E} \int_0^{h_E} F(h) \cdot T(h) dh, \quad (31a)$$

$$\bar{T}_H = \frac{1}{V_H} \int_{h_E}^{h_{\max}} F(h) \cdot T(h) dh. \quad (31b)$$

<sup>3)</sup> Mathematisch gesehen wird (29) erst für  $t \rightarrow \infty$  erreicht. Praktisch aber kann man z.B.  $\tau_R$  so definieren, dass die Konzentrationen innerhalb von 10% mit den stationären Werten (29) übereinstimmen sollen.

Es gilt

$$\frac{d\bar{T}_H(t)}{dt} = \frac{Q}{V_H} [\bar{T}_E(t) - \bar{T}_H(t)] \quad (32)$$

und daraus

$$\xi = \frac{Q}{V_E} = \frac{V_H}{V_E} \cdot \frac{d\bar{T}_H}{dt} \frac{1}{\bar{T}_E(t) - \bar{T}_H(t)}. \quad (33)$$

Die in den meisten Seen monatlich durchgeführten Temperaturmessungen reichen (dies vor allem während der Zirkulation) oft nicht aus,  $\xi$  aus (33) zu bestimmen. Kurzzeitige Temperaturschwankungen führen zu Verfälschungen, wenn man die Ableitung  $d\bar{T}_H/dt$  durch Monatsdifferenzen approximieren muss. Es können sich mit (33) sogar negative  $\xi$  ergeben. Eine Verbesserung erreicht man unter Umständen damit, dass man anstelle von (31b) Mittelwerte des oberen, dem Metalimnion am nächsten liegenden Hypolimnionanteils benützt und damit der Inhomogenität und der endlichen Durchmischungsgeschwindigkeit innerhalb  $H$  Rechnung trägt. Ein weiterer Schritt wäre der Übergang zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten als Funktion der Jahreszeit und Tiefe, wie sie LI [15] für den Zürichsee mit Hilfe von 10jährigen Temperaturmittelwerten kürzlich durchgeführt hat (vgl. Kap. 4).

Während der Zirkulation kann man auch die Variation der  $O_2$ -Konzentration in  $H$  benützen. Es ergeben sich die gleichen Formeln, nur dass man anstatt  $\bar{T}$  den Mittelwert  $[\overline{O_2}]$  einzusetzen hat. Allerdings ist (im Gegensatz zu  $\bar{T}$ )  $[\overline{O_2}]$  infolge der Mineralisation organischen Materials keine konservative Grösse, so dass  $d[\overline{O_2}]/dt$  noch entsprechend zu korrigieren wäre.

Da  $\xi$  auf  $V_E$  (und nicht auf  $V_H$ ) bezogen ist, dürften die Werte für Seen verschiedenster mittlerer Tiefe ähnlich sein. Einfluss auf  $\xi$  hat neben dem Temperaturverlauf

Tabelle 2. Variationsbereich der Modellparameter.

	Sommer, Stagnation	Winter, Zirkulation	Daten aus
Austauschkoeffizient $\xi$ [Tag <sup>-1</sup> ]	0,001–0,01	0,05–0,5	[15, 16]
Sedimentationsgeschwindigkeit $g_E, g_H$ [m/Tag]	0,10–0,15 0,22 0,25–0,4 0,2	0,10–0,15  0,15 0,2	[13] [17] Rotsee [18] Horwer Bucht [18]
Produktionskoeffizient $\alpha$ [Tag <sup>-1</sup> ]	1–1,5	0,06–0,3	[13]
Respirationskoeffizient [Tag <sup>-1</sup> ]			
$R_H$	0,003 0,02	0,003 0,02	Zürichsee [19] Horwer Bucht [13]
$R_E$	$3R_H$	$R_H$	
Sedimentationsrücklösung $S$ [mg P·m <sup>-2</sup> ·Tag <sup>-1</sup> ]	unter speziellen Bedingungen: bis 0,27 bis 500 35–100		[12] Mauensee [21] Inkwilersee [22]

durch das Metalimnion vor allem die Lage des Sees bezüglich der Hauptwindrichtung sowie Häufigkeit und Stärke dieser Winde. Der Variationsbereich von  $\xi$  im Sommer und Winter ist in Tabelle 2 aufgeführt.

### 3.22 Sedimentation

Es gibt verschiedene Methoden,  $g_E$  und  $g_H$  zu bestimmen; alle geben Werte in der Nähe von 0,2 m/Tag (vgl. Tab. 2). Erstens können die Resultate von BLOESCH [17] zur direkten Berechnung der Sedimentation benützt werden. Zweitens ergeben die abfallenden Kurven der totalen P-Konzentration in den Nährstofftestzellen von GÄCHTER [13] zusammen mit den gemessenen PP-Konzentrationen eine Bestimmungsmöglichkeit für  $g$ . Weiter sind in einer Arbeit von STADELMANN [18] Sedimentationsraten von Stickstoff zusammengestellt, die unter gewissen Voraussetzungen ebenfalls einen Anhaltspunkt für  $g$  ergeben. Schliesslich sei daran erinnert, dass  $g$  zusammen mit dem im Modell berechneten  $\pi_H$  die Ermittlung des Retentionsfaktors  $R_P$  ermöglicht;  $g$  könnte also durch Anpassen an das (oft bekannte)  $R_P$  bestimmt werden.

### 3.23 Produktion und Respiration

Die Bestimmung des Produktionskoeffizienten  $\alpha$  ist mit den Versuchen von GÄCHTER [13] an Nährstofftestzellen im Vierwaldstättersee möglich. Die Zellen aus Plastikfolien wurden in der oberen Seeschicht fixiert und das Verhalten der einzelnen Phosphorkomponenten nach Zugabe von  $\text{NaH}_2\text{PO}_4$  untersucht. Der gelöste organische Phosphor (GOP) blieb in allen Versuchen konstant, so dass wir wiederum nur  $\lambda$  und  $\pi$  berücksichtigen wollen.

Das Gleichungssystem lautet:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha \lambda + R \pi, \quad (34a)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\left(R + \frac{g}{h}\right) \pi + \alpha \lambda. \quad (34b)$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt die Sedimentationsgleichung.

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{g}{h} \pi, \quad (34c)$$

welche wir im Unterabschnitt 3.22 erwähnten. Da  $R \ll \alpha$  ist, folgt aus (34a) für kleine Zeiten

$$\lambda = \lambda^0 e^{-\alpha t} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{1}{t} \ln \frac{\lambda^0}{\lambda(t)}. \quad (35)$$

Die so ermittelten  $\alpha$ -Werte sind, wie erwartet, für Sommer und Winter signifikant verschieden (Tab. 2). Wie früher erwähnt, hat der absolute Wert von  $\alpha$  auf das Modell einen nur geringen Einfluss, solange nur  $\alpha$  grösser als die Parameter  $\xi$  und  $\tau^{-1}$  ist. Der schnelle Abfall von  $\lambda$  ergibt schon rasch  $\lambda \sim \pi R/\alpha$ . Setzt man dies in (34b) ein, so folgt  $d\pi/dt = -\pi g/h$ . Die Respirationsrate ist zu langsam, als dass sie in den Nährstoffzellen gegenüber Photosynthese und Sedimentation gemessen werden könnte.

Eine Bestimmung von  $R_H$  ist möglich aus der Abnahme des Sauerstoffs in den tiefen Seeschichten während der Sommerstagnation. Man benützt dabei die Redfield-Stöchiometrie (18). Es wird vorausgesetzt, dass die Veränderung der  $O_2$ -Konzentration durch Diffusion und Advektion gegenüber der  $O_2$ -Zehrung durch Respiration zu vernachlässigen sei. Diese Voraussetzung mag für die tiefen Schichten z. B. des Zürich-sees recht gut zutreffen. Mit den 10jährigen Sauerstoffmittelwerten (nach ZIMMERMANN [19]) in 40 m bzw. 100 m Tiefe und der zugehörigen Oxydierbarkeit (welche fast ausschliesslich durch das Plankton bestimmt ist) ergibt sich ein sehr kleines  $R_H$  (Tab. 2).

Besser ist es, wenn man die Sauerstoffzehrung direkt mit den PP-Konzentrationen vergleichen kann. Die Daten von GÄCHTER [13] in der Horwer Bucht wurden dazu benützt, obschon offenbar die komplizierten Mischungsvorgänge im Vierwaldstättersee (O'MELIA [20]) auch horizontalen  $O_2$ -Transport verursachen können, was das Resultat eventuell verfälscht.

$R_E$  und  $R_H$  hängen über die RGT-Regel zusammen, falls das Redoxpotential im See nicht zu stark variiert. Es ist

$$R(T) = R_0 e^{\beta(T - T_0)} \quad (36)$$

und  $\beta \sim 0,09 \text{ C}^{-1}$  <sup>4)</sup>. Im Winter ist die Temperatur ziemlich konstant, so dass  $R_E = R_H$  gilt. Im Sommer ergibt sich mit  $T_E = 18 \text{ C}$ ,  $T_H = 6 \text{ C}$ , das Verhältnis  $R_E/R_H = 3$ .

### 3.24 Lösung und Adsorption an den Sedimenten

Gemäss unseren Modellannahmen ist unter aeroben Bedingungen  $S_H = 0$ . Ein anaerober Seegrund kann eine Rücklösung von Phosphat zur Folge haben, wobei die Diffusion den limitierenden Faktor darstellen dürfte. Bei einem Diffusionskoeffizienten  $D < 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$  und einem sehr grossen Konzentrationsgradienten wäre nach STUMM und LECKIE [12] eine Rücklösungsrate bis  $0,27 \text{ mg P/m}^2 \cdot \text{Tag}$  zu erwarten. Demgegenüber ergeben Messungen am Mauensee maximale Rücklösungsraten von  $500 \text{ mg P/m}^2 \cdot \text{Tag}$  [21], am Inkwilsersee  $35\text{--}100 \text{ mg P/m}^2 \cdot \text{Tag}$  [22].

### 3.3 Diskussion des Phosphormodells

Wenn wir vorerst für die Stagnationsperiode die Durchmischung zwischen  $E$  und  $H$  vernachlässigen ( $\xi = 0$ , d. h.  $B = G = 0$ ), vereinfachen sich das Gleichungssystem (27) und die stationären Werte wesentlich ( $A \sim \alpha$ ):

$$\pi_E^0 = \frac{k_1 + k_3}{I - R_E} = \frac{\beta_t}{r + g_E} \quad (37a)$$

$$\pi_H^0 = \frac{\sigma_H}{\sigma_H + R_H} \pi_E^0 \sim \left[ 1 + \frac{R_H \cdot \bar{h}}{g_H} \right]^{-1} \pi_E^0 \quad (37b)$$

$$\lambda_E^0 = \frac{1}{\alpha} [R_E \pi_E^0 + k_1] \quad (37c)$$

<sup>4)</sup> Dies entspricht dem üblicherweise benützten  $\theta_{10}$ -Wert von 2,5;  $R_{T+10}/R_T = \theta_{10}$ .

Anstelle der Parameter  $\varepsilon$  und  $\tau$  haben wir die hydraulische Belastung  $r$  und die totale mittlere Tiefe  $\bar{h}$  eingeführt:

$$r = \frac{Q_{in}}{F_E} = \frac{\bar{h}_E}{\tau} = \frac{\bar{h}}{\tau_{tot}}$$

$$(\tau_{tot} = V/Q_{in}: \text{totale mittlere Aufenthaltszeit des Wassers}), \quad (38)$$

$$\bar{h} = \bar{h}_E (1 + \varepsilon)$$

und in (37b) die für nicht zu seichte Seen gültige Näherung

$$\bar{h}_H = \bar{h} \left( 1 - \frac{h_E}{h_{max}} \right) \sim \bar{h}$$

benützt.

Die Phosphatkonzentration  $\lambda_H$  besitzt in der Näherung  $\xi = 0$  keinen stationären Wert. Das durch Mineralisieren von sedimentiertem organischem Material ständig zunehmende Phosphat kann nicht ins Epilimnion zurück diffundieren. Es gilt

$$\frac{d\lambda_H}{dt} = R_H \pi_H + \frac{S_H}{h_H}, \quad (39)$$

wobei für grosse Zeiten  $\pi_H$  gegen den stationären Wert (37b) strebt.

Wir sind nun in der Lage, die im Abschnitt 3.1 eingeführte Relaxationszeit  $\tau_R$  abzuschätzen, vorerst für den Fall  $\xi = 0$ . Da im Sommer  $\alpha \sim 1 \text{ Tag}^{-1}$  ist, nimmt wegen (27a)  $\lambda_E$  rasch den Wert

$$\lambda_E = \frac{1}{\alpha} [R_E \pi_E + k_1] \quad (40)$$

an. Damit ergibt sich aus (27c)

$$\frac{d\pi_E}{dt} = (k_1 + k_3) - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma_E \right) \pi_E. \quad (41)$$

Die Lösung von (41) lautet mit  $\omega_1 = 1/\tau + \sigma_E = (r + g)/\bar{h}_E$

$$\pi_E(t) = \pi_E(t_0) e^{-\omega_1(t-t_0)} + \frac{k_1 + k_3}{\omega_1} [1 - e^{-\omega_1(t-t_0)}]. \quad (42)$$

$\pi_E$  strebt dem stationären Wert (37a) zu, wobei die Relaxationszeit  $\tau_R$  von der Grössenordnung  $1/\omega_1$  ist.

Für die meisten Seen ist  $r \ll g$ , so dass die Relaxationszeit  $\tau_R$  ungefähr 50 Tage beträgt.

Die Anpassung von  $\pi_H$  an den stationären Wert (37c) hängt in analoger Art von  $1/\omega_2$  ab, wobei  $\omega_2 = \sigma_H + R_H \sim \sigma_E/\varepsilon + R_H$ . Für sehr tiefe Seen ( $\varepsilon$  gross) ergibt sich die maximale Relaxationszeit

$$1/\omega_2 \sim 1/R_H \sim 50 \text{ bis } 300 \text{ Tage (vgl. Tab. 2)}.$$

Wie man zeigen kann, hängen die stationären Konzentrationen  $\lambda_E^0$ ,  $\pi_E^0$  und  $\pi_H^0$  [(29b, c, d)] im Sommer nur schwach von  $\xi$  ab, während  $\lambda_H^0$  mit fallendem  $\xi$  stark

steigt und für  $\xi = 0$  gegen  $\infty$  strebt. Die oben gemachten Überlegungen bleiben deshalb auch für  $\xi \neq 0$  gültig. Während der Stagnationsperiode gelten für die P-Konzentrationen als Funktion von  $r$  und  $\varepsilon$  die folgenden Aussagen:

1. Die stationären Werte  $\pi_E^0$  und  $\lambda_E^0$  werden um so rascher erreicht, je grösser  $r$  ist. Typische Relaxationszeiten liegen zwischen 25 und 50 Tagen.
2.  $\pi_E^0$  und  $\lambda_E^0$  steigen schwach mit der mittleren Seetiefe  $\bar{h}$ , fallen mit steigender hydraulischer Belastung  $r$  und steigen linear mit der spezifischen Phosphorbelastung  $\beta_t$ .  $r$  ist ungefähr proportional zum Verhältnis zwischen Einzugsgebiet und Oberfläche des Sees.
3.  $\pi_H^0$  ist zu  $\pi_E^0$  und somit zu  $\beta_t$  proportional. Die Relaxationszeit von  $\pi_H^0$  ist um so grösser, je tiefer der See ist. Für sehr tiefe Seen liegt sie, je nach dem Wert von  $R_H$ , zwischen 50 und 300 Tagen.
4. Auch wenn die Stagnationsperiode zu kurz sein sollte für das Erreichen von  $\pi_H^0$ , so ist doch  $\pi_H$  zur P-Belastung  $\beta_t$  proportional. Deshalb steigt auch die  $O_2$ -Zehrung in  $H$  linear mit  $\beta_t$ .
5. Für einen stabil geschichteten See ( $\xi$  klein) nimmt  $\lambda_H^0$  praktisch mit konstanter Geschwindigkeit zu, ohne einen stationären Wert zu erreichen. Die Zunahme von  $\lambda_H^0$  ist um so grösser, je grösser  $\beta_t$  ist. Falls die  $O_2$ -Konzentration am Seegrund gegen Null geht, wächst  $\lambda_H^0$  zusätzlich infolge P-Rücklösung aus den Sedimenten.

Der Konzentrationsverlauf während der Zirkulation wird hauptsächlich bestimmt durch die Durchmischungsgeschwindigkeit  $\xi$  und die hydraulische Belastung  $r$ . Falls

$$\tau + \frac{\varepsilon}{\xi} = \frac{\bar{h}_E}{r} + \left( \frac{\bar{h}}{\bar{h}_E} - 1 \right) \frac{1}{\xi} < (\text{Dauer der Zirkulation}) \quad (43)$$

ist, wird das während des Sommers in  $H$  akkumulierte Phosphat zum grössten Teil ausgewaschen; zudem werden auch die  $O_2$ -Reserven in  $H$  regeneriert. Die Ungleichung (43) wird um so schlechter erfüllt, je tiefer der See ist.

Im Abschnitt 3.4 werden wir die  $O_2$ -Zehrung in  $H$  näher untersuchen. Es stellt sich heraus, dass sie vor allem von  $\pi_E^0$  abhängt, weswegen es angezeigt ist, den Verlauf von  $\pi_E^0$  als Funktion der übrigen Modellparameter zu diskutieren. In Abb. 4 ist für  $\beta_t = 2 \text{ mg/m}^2\text{-Tag} = 720 \text{ mg/m}^2\text{-Jahr}$  und  $r = 0,05 \text{ m/Tag}$   $\pi_E^0$  als Funktion von  $\bar{h}$  für verschiedene  $R_H$  und  $\xi$  aufgetragen.  $\pi_E^0$  nimmt ab mit wachsendem  $\xi$  und fallendem  $R_E$ , hängt aber von  $R_E$  stärker ab als von  $\xi$ . Schliesslich kann man auch zeigen, dass die Aufteilung von  $\beta_t$  in die Komponenten  $\beta_\lambda$  und  $\beta_n$  von kleinem Einfluss ist auf die stationären Konzentrationen.

Wie bereits erwähnt, ist der Phosphorretentionsfaktor  $\mathcal{R}_P$  durch die Modellparameter bestimmt. Die totale Massenbilanz des Sees für den stationären Zustand lautet ( $g_E \sim g_H = g$ )

$$(q_\lambda + q_n) - Q_{in} (\lambda_E^0 + \pi_E^0) - g F_E \cdot \pi_H^0 = 0, \quad (44)$$

woraus

$$\pi_H^0 = \frac{1}{g} \left[ \frac{q_\lambda + q_n}{F_E} - r (\lambda_E^0 + \pi_E^0) \right] \quad (45)$$

folgt. Der Retentionsfaktor  $\mathcal{R}_P = g F_E \pi_H^0 / (q_\lambda + q_n)$  ergibt sich mit (45) für den stationären Zustand zu

$$\mathcal{R}_P = 1 - \frac{\gamma}{\beta_t} (\lambda_E^0 + \pi_E^0). \quad (46)$$

$\mathcal{R}_P$  ist somit unabhängig von  $\beta_t$ , da  $\lambda_E^0$  und  $\pi_E^0$  ihrerseits proportional zu  $\beta_t$  sind.  $\mathcal{R}_P$  nimmt ab mit zunehmender hydraulischer Belastung  $\gamma$  und (über die Variation von  $\lambda_E^0$  und  $\pi_E^0$ ) mit zunehmendem  $\bar{h}$ . Dies gilt natürlich nur, solange  $S_H = 0$  ist; bei zunehmendem  $\beta_t$  kann die P-Rücklösung einen plötzlichen Zusammenbruch des Retentionsvermögens des Sees zur Folge haben, wobei  $\mathcal{R}_P < 0$  werden kann.

Ein Vergleich mit gemessenen Retentionsfaktoren wird im Abschnitt 3.5 vorgenommen.

### 3.4 Spezifische Phosphorzufuhr und Trophiegrad

VOLLENWEIDER [3] hat eine empirische Beziehung aufgestellt zwischen mittlerer Seetiefe  $\bar{h}$  und spezifischer P-Belastung  $\beta_t$ , oberhalb derjenigen ein See eutroph ist.

Nach THIENEMANN [23] gibt es einen Zusammenhang zwischen Trophiegrad des Sees und dessen Sauerstoffhaushalt. Da das hier besprochene Modell über (18) und (19) auch die Berechnung der  $O_2$ -Konzentrationen gestattet, liegt es nahe, eine theo-

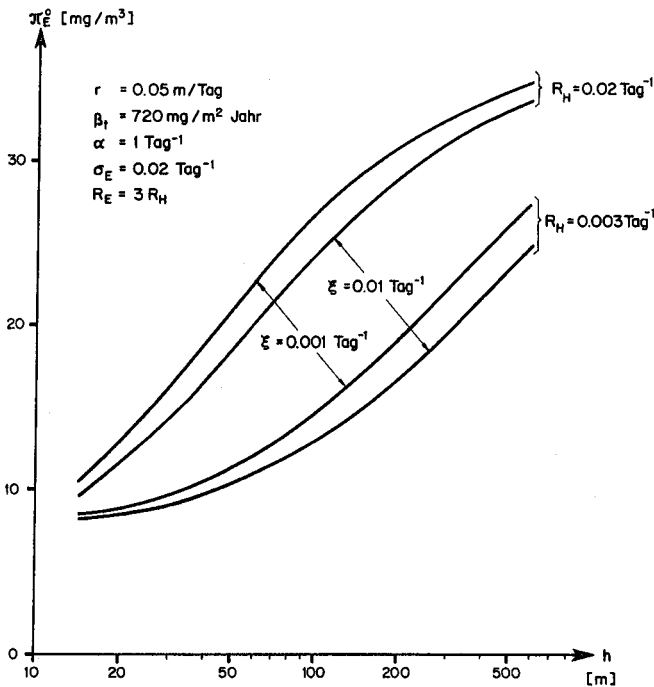


Abb. 4. Partikuläre Phosphorkonzentration  $\pi_E$  im stationären Zustand während der Sommerstagnation in Abhängigkeit der mittleren Seetiefe  $\bar{h}$  für verschiedene Modellparameter.

$R_E$ ,  $R_H$  = Respirationsgeschwindigkeit im Epilimnion bzw. Hypolimnion;  $\gamma$  = hydraulische Belastung des Sees;  $\alpha$  = Geschwindigkeit der Photosynthese. Übrige Parameter vgl. Tabelle 1.

retische Begründung für die Beziehung von VOLLENWEIDER zu suchen. Gemäss unseren bisherigen Überlegungen ist zu erwarten, dass neben  $\bar{h}$  auch  $r$  einen Einfluss auf das maximale  $\beta_t$  haben muss.

Wir suchen eine Beziehung zwischen der Abnahme der  $O_2$ -Konzentration in  $H$  während des Sommers ( $s = [O_2]$ )

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_2) \quad (47)$$

( $t_1, t_2$ : Anfang und Ende der Stagnationsperiode)

und der P-Zufuhr  $\beta_t$ . Die Zufuhr von partikulärem P aus  $E$  in  $H$  pro Volumen und Zeit ist gegeben durch den Ausdruck [vgl. (26b) und (26d)]

$$\pi_E \cdot \frac{\sigma_E}{\varepsilon} + (\pi_E - \pi_H) \frac{\xi}{\varepsilon}, \quad (48)$$

wobei wir näherungsweise die Konzentrationen durch ihre stationären Werte ersetzen. Mit (29d) lässt sich  $\pi_H$  ersetzen; man erhält

$$\pi_E^0 \left[ \frac{\sigma_E}{\varepsilon} + \frac{\xi R_H}{\xi + \sigma_E + \varepsilon R_H} \right]. \quad (48')$$

Im stationären Fall wird die Zufuhr von partikulärem P in  $H$  kompensiert durch Sedimentation und Mineralisation. Wir setzen voraus, dass auch das sedimentierte organische Material nachträglich vollständig oxydiert wird. Die *durchschnittliche* Sauerstoffzehrung in  $H$  am Ende der Stagnationsperiode beträgt [vgl. (18)]

$$\Delta s = \frac{1}{7 \times 10^{-3}} T_{St} \cdot \pi_E^0 \left[ \frac{\sigma_E}{\varepsilon} + \frac{\xi R_H}{\xi + \sigma_E + \varepsilon R_H} \right] \quad (49)$$

( $T_{St}$ : Dauer der Stagnationsperiode).

Wie wir gesehen haben, ist  $\pi_E$  proportional zu  $\beta_t$ :

$$\pi_E^0 = f(r, \bar{h}, \xi, \sigma_E, R_E) \cdot \beta_t. \quad (50)$$

Die Proportionalitätsfunktion  $f$  hat die Dimension Zeit pro Länge; sie kann für  $r = 0,05$  m/Tag,  $\sigma_E = 0,02$  Tag $^{-1}$  und verschiedene  $\xi$  bzw.  $R_E$  aus Abb. 4 entnommen werden, wenn man die dortigen  $\pi_E^0$ -Werte durch  $\beta_t = 2$  mg/m $^2$ ·Tag bzw. 720 mg/m $^2$ ·Jahr dividiert. Natürlich kann  $f$  für beliebige Parameter aus (29) berechnet werden. Man erhält schliesslich die gesuchte Beziehung zwischen  $\Delta s$  und  $\beta_t$

$$\Delta s = \chi \cdot \beta_t, \quad (51a)$$

$$\chi = 140 \cdot T_{St} \cdot f \cdot \left[ \frac{\sigma_E}{\varepsilon} + \frac{\xi R_H}{\xi + \sigma_E + \varepsilon R_H} \right], \quad (51b)$$

wobei  $\chi$  von den diversen Modellparametern abhängt.

In Wirklichkeit ist die  $O_2$ -Zehrung in  $H$  nicht homogen, so dass der Durchschnittswert  $\Delta s$  nichts über minimale  $O_2$ -Konzentrationen aussagen kann. Dieser Frage werden wir im Kapitel 4 nachgehen. Für den Augenblick wollen wir  $\Delta s$  als Mass des Trophiegrades benützen. Nach THIENEMANN [23] sollte für einen oligotrophen See das Ver-



hältnis zwischen der Sauerstoffmenge in  $H(M_{O_2}^H)$  bzw. in  $E(M_{O_2}^E)$  im Hochsommer ein Minimum nicht unterschreiten:

$$\frac{M_{O_2}^H}{M_{O_2}^E} > 1,5 \quad (52a)$$

und das mittlere  $O_2$ -Defizit in  $H$  klein sein, nämlich

$$\Delta s = (s_H^O - s_H) < 2,1 \text{ bis } 3,8 \text{ mg/l} . \quad (52b)$$

Aus (52a) folgt durch Umformen mit  $M_{O_2}^H = s_H \cdot V_H$  bzw.  $M_{O_2}^E = s_E \cdot V_E$ :

$$\Delta s < s_E - 1,5 \times \frac{s_H^O}{\varepsilon} \quad (52c)$$

( $s_E \sim 9,5$  mg/l bei  $18^\circ\text{C}$ ;  $s_H^O = 10\text{--}12$  mg/l, je nach Temperatur: Sättigungskonzentration bei herrschender Temperatur in  $H$ ).

Für  $\varepsilon > 2,5$  ( $\bar{h} > 35$  m) ist die Ungleichung (52b) restriktiver, für  $1,5 > \varepsilon > 2,5$  ( $25 \text{ m} > \bar{h} > 35 \text{ m}$ ) die Beziehung (52c). Für Seen mit  $\varepsilon < 1,5$  besteht überhaupt keine Möglichkeit, die Forderung (52a) zu erfüllen: Das Volumen  $V_H$  ist zu klein gegenüber  $V_E$ .

Thienemanns Kriterien lassen keine oligotrophen Seen mit  $\bar{h} < 25$  m zu. Um die Diskussion nicht weiter zu komplizieren, wählen wir

$$\Delta s_{\max} = 1 \text{ mg/l} = 1000 \text{ mg/m}^3. \quad (53)$$

In Abb. 5 sind die zugehörigen  $(\beta_t)_{\max} = 1/\chi \Delta s_{\max}$  für verschiedene  $r$  eingezeichnet und mit der Kurve von VOLLENWEIDER [3] verglichen. Dabei ist  $\xi = 0,001$  Tag $^{-1}$  und  $R_H = 0,02$  Tag $^{-1}$  gewählt worden. Um den Einfluss dieser beiden Parameter auf  $(\beta_t)_{\max}$  zu illustrieren, sind für die Kurve  $r = 0,2$  m/Tag auch die beiden extremen Kurven [kleines  $(\beta_t)_{\max}$  für  $\xi = 0,01$  Tag $^{-1}$ ,  $R_H = 0,02$  Tag $^{-1}$ ; grosses  $(\beta_t)_{\max}$  für  $\xi = 0,001$  Tag $^{-1}$ ,  $R_H = 0,003$  Tag $^{-1}$ ] eingezeichnet. Die erstaunlich gute theoretische Bestätigung der empirischen Beziehung von Vollenweider wird durch die Variation von  $R_H$  und  $\xi$  nicht wesentlich verändert. In Tabelle 3 sind die theoretischen  $(\beta_t)_{\max}$ -Werte für einige Schweizer Seen berechnet und den effektiven  $\beta_t$  gegenübergestellt.

(53) bedeutet gegenüber Thienemann scheinbar eine restriktivere Bedingung für tiefe Seen und eine grössere Toleranz für seichte Seen. In Wirklichkeit wird der Ansatz gerechtfertigt, wenn man nicht ein einzelnes Jahr betrachtet, sondern den Zustand des Sees über eine grössere Zeitperiode verfolgt. Wie gezeigt, ist die Versorgung des Hypolimnions im Winter um so schlechter, je tiefer der See ist [vgl. (43)]. Die einzelnen  $\Delta s$ -Werte können sich bei unvollständiger  $O_2$ -Anreicherung während der Zirkulation im Laufe der Jahre summieren. (53) versucht, den «Gedächtniseffekt» tiefer Seen zu berücksichtigen.

Zusammenfassend kann man sagen:

1. Ein See mit kleinem  $\bar{h}$  wird für grosses  $\beta_t$  rasch, eventuell innerhalb eines Jahres, anaerob am Seegrund. Sein Zustand kann durch die einsetzende Phosphatrücklösung noch schneller verschlechtert werden.
2. Ein tiefer See besitzt kurzfristig eine grössere Stabilität gegenüber erhöhten P-Einträgen. Auf längere Zeit summiert sich die  $O_2$ -Zehrung.

3. Ein seichter See reagiert rasch auf Änderungen in den Inputdaten. Der tiefe See benötigt bis zu seiner Erholung als Folge von Sanierungsmassnahmen viel Zeit. In extremen Fällen kann die Rücklösung von Phosphaten am Seegrund die Verbesserung des Zustandes über mehrere Jahre verhindern.

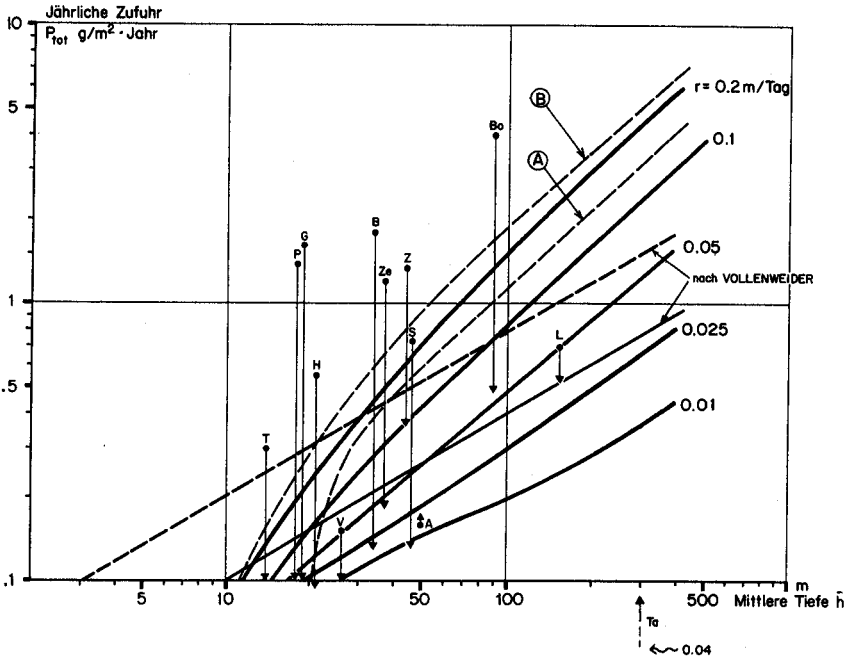


Abb. 5. Jährliche Phosphorzufuhr pro Seefläche  $\beta_t$  als Funktion der Tiefe. Vergleich der theoretisch berechneten  $\beta_t$ -Toleranz für oligotrophe Bedingungen im See mit VOLLENWEIDERS [3] Werten für verschiedene hydraulische Belastung  $r$ . Wahl der Modellparameter:  $R_H = 0,02 \text{ Tag}^{-1}$ ,  $\xi = 0,001 \text{ Tag}^{-1}$ , die übrigen Parameter wie in Abb. 4. Zur Illustration ist ferner die Toleranzkurve  $r = 0,2 \text{ m/Tag}$  für  $R_H = 0,02 \text{ Tag}^{-1}$ ,  $\xi = 0,01 \text{ Tag}^{-1}$  (Kurve A) und für  $R_H = 0,003 \text{ Tag}^{-1}$ ,  $\xi = 0,001 \text{ Tag}^{-1}$  (Kurve B) aufgetragen. Die Punkte zeigen die momentanen Verhältnisse der einzelnen Seen an, die Endpunkte der Pfeile den Toleranzwert  $\beta_t$ . Bezeichnung der Seen wie in Tabelle 3.

### 3.5 Anwendung des Modells und Vergleich mit Messungen

In Tabelle 3 sind die Resultate der Modellrechnung für einige Seen zusammengestellt. Die stationären P-Konzentrationen während des Sommers sind, unabhängig von den individuellen Eigenschaften der einzelnen Seen, mit einer festen Wahl von Parametern  $\alpha$ ,  $R_E$ ,  $R_H$ ,  $\xi$  und  $g$  berechnet worden. Sie können nur bedingt mit Messungen verglichen werden, da unter Umständen die Relaxationszeiten zum Erreichen des stationären Zustands für gewisse Seen länger sind als die Dauer der Stagnationsperiode. Aus diesem Grund haben wir auch auf die Angabe von  $\lambda_H^0$  verzichtet.

Berechnete und gemessene Retentionsfaktoren  $R_P$  stimmen in einigen Fällen sehr gut überein, obschon die theoretischen Werte nur für den stationären Sommerzustand gültig sind, die Messungen hingegen meistens Mittelwerte für das ganze

Tabelle 3. P-Konzentrationen nach Modell im stationären Zustand während des Sommers. Vergleich von gemessenem und berechnetem Retentionsfaktor sowie spezifischer P-Belastung. Daten nach VOLLENWEIDER [3] und ROBERTS [24].

See	$r$ [m/Tag]	$\bar{h}$ [m]	Stationäre P-Konzentration im Sommer [mg/m <sup>3</sup> ]			Retentionsfaktor $R_P$ [%]			P-Input $\beta_t$ [mg m <sup>-2</sup> ·Jahr <sup>-1</sup> ]			Zustand des Sees
			$\lambda_E^0$	$\pi_E^0$	$\pi_H^0$	Theorie	ge- messen	(a) effek- tiv	(b) max.	(a)/(b)		
Ägerisee	0,019	50	0,56	7,1	1,5	67	68	160	170	0,94	oligotroph	
Baldeggersee	0,015	34	5,0	63,7	19,5	79	61	1800	130	13,8	eutroph	
Bodensee	0,058	90	10,5	127	14,5	27	65	4000	480	8,3	eutroph	
Greifensee	0,037	19	2,4	30,8	15,8	72	62	1600	100	16,0	eutroph	
Hallwilersee	0,019	21	0,98	12,8	6,2	83	36	550	92	6,0	eutroph	
Lac Léman	0,036	154	3,0	36,4	2,5	26	20	700	520	1,3	oligotroph wachsend eutroph	
Pfäffikersee	0,033	18	2,1	27,0	13,8	74	77	1360	100	13,6	eutroph	
Türlersee	0,018	14	0,45	6,0	3,5	86	80	300	70	4,3	mesotroph -eutroph	
Zürichsee	0,098	44	1,9	23,7	5,5	31	25	1320	370	3,6	eutroph	
Lake Tahoe <sup>1)</sup>	0,001	300	1,0	12,5	0,5	86	93	40	~90	~0,45	oligotroph	
Zellersee	0,038	37	2,7	33,9	9,5	65		1200	180	6,7	eutroph	
Vänern <sup>1)</sup>	0,001	26	0,39	5,1	2,0	98,7		150	~70	~2,1	oligotroph -eutroph	

1) Die Anwendung des Modells auf diese Seen mit extrem kleinem  $r$  ist nur approximativ möglich.

Jahr darstellen. Unstimmigkeiten ergeben sich beim Hallwilersee<sup>5)</sup>, Bodensee und Lake Tahoe. Die letzten beiden Seen scheinen auch sonst die Modellvoraussetzungen schlecht zu erfüllen (vollständige Durchmischung), so dass die stationären Konzentrationen, auf denen die Berechnung von  $R_P$  basiert, kaum relevant sein dürften.

Der Vergleich von effektiver und maximal tolerierbarer spezifischer P-Belastung  $\beta_t$  scheint gut mit dem wirklichen Zustand des Sees korreliert zu sein. Insbesondere erweist sich der zusätzlich eingeführte Parameter  $r$  als nützlich. Beispielsweise sollte nach Vollenweider der Lake Tahoe im Vergleich zum Zürichsee wegen seiner viel grösseren mittleren Tiefe ein viel höheres  $(\beta_t)_{\max}$  besitzen. In der vorliegenden Theorie erweist sich die P-Toleranz des Lake Tahoe sogar als kleiner als diejenige des Zürichsees, was gut mit der trotz kleiner P-Belastung schon jetzt festgestellten eutrophen Tendenz des Lake Tahoe übereinstimmt.

Der Quotient  $\beta_t/(\beta_t)_{\max}$  ist ein Mass für den Trophiegrad des Sees, wobei weniger die absolute Grösse, sondern mehr der Vergleich verschiedener Seen ausschlaggebend sein sollte. Die  $(\beta_t)_{\max}$ -Werte liegen meistens unter denjenigen von Vollenweider, doch ist die absolute Lage der Toleranzkurven in Abb. 5 ziemlich willkürlich infolge der innerhalb eines gewissen Rahmens variierbaren Ungleichung (53).

Anhand der Untersuchungen von PERRET [16] haben wir den *Sempachersee* mit dem Nährstoffmodell detaillierter zu erfassen versucht. In Tabelle 4 sind einige Daten

<sup>5)</sup> Offenbar spielt hier die Rücklösung von Phosphat aus den Sedimenten eine Rolle.

dieses Sees zusammengestellt, welche zur Berechnung der externen Modellparameter nötig sind. Mit Perrets P-Messungen und der orographischen Funktion  $F(h)$  (Abb. 9) wurden die Konzentrationsmittelwerte für  $E$  und  $H$  berechnet (Abb. 6). Die stationären Konzentrationen wurden für verschiedene  $\xi$  und  $R_H$  ermittelt (Tab. 5) und die beiden letzten Varianten in Abb. 6 schematisch den gemessenen Werten gegenübergestellt. Die Relaxationszeit  $1/\omega_1$  [vgl. (41)] ist etwa 50 Tage, da  $r$  und damit  $1/\tau$  sehr klein sind. Die Anpassungszeit von  $\pi_H$   $1/\omega_2$  beträgt rund 80 Tage. Diese effektive zeitliche Variation ist in Abb. 6 nicht berücksichtigt. Wie schon erwähnt, können offenbar auch kurzfristige P-Variationen (Algenblüten usw.) mit dem Modell nicht erfasst werden. Hingegen stimmt die relative Grösse der diversen P-Konzentrationen

Tabelle 4. Daten für den Sempachersee.

Fläche	14,4 km <sup>2</sup>
Mittlere Tiefe	$\bar{h} = 46$ m
Maximale Pegelschwankungen (entspricht 1prozentiger Seevolumenvariation)	41–47 cm
Seevolumen	$6,6 \times 10^8$ m <sup>3</sup>
Mittlerer Abfluss <sup>1)</sup>	1,2 m/sec
Mittlere Aufenthaltszeit	17 Jahre
Hydraulische Belastung $r$	0,0074 m/Tag
Einzugsgebiet	76,7 km <sup>2</sup>
P-Eintrag (1967/68)	
Mensch <sup>2)</sup>	8000 kg P/Jahr
Landwirtschaft <sup>3)</sup>	2700 kg P/Jahr
Total	rund 11000 kg P/Jahr
Spezifische Belastung $\beta_t$	770 mg P/m <sup>2</sup> Jahr

<sup>1)</sup> Laut Messungen an der Suhr bei Oberkirch, 1923–1931.

<sup>2)</sup> 7200 Einwohner im Einzugsgebiet à 3 g P/Tag.

<sup>3)</sup> 35 kg P/km<sup>2</sup> Jahr nach GÄCHTER und FURRER [25].

Tabelle 5. Modellrechnung für Sempachersee mit verschiedenen Parametern.

$\xi$ und $R_H$ in [Tag <sup>-1</sup> ]	Stationäre P-Konzentration [mg/m <sup>3</sup> ]				$(\beta_t)_{\max}$ [mg m <sup>-2</sup> Jahr <sup>-1</sup> ]	$\beta_t/(\beta_t)_{\max}$	$R_P$ [%]	
	$\lambda_E^0$	$\lambda_H^0$	$\pi_E^0$	$\pi_H^0$				
<i>Sommer</i> $\xi = 0,001, R_H = 0,02$	3,1	649	39,8	9,0	132	5,8	86	
	$R_H = 0,003$ 0,35	108	15,1	10,0	355	2,2	95	
	$\xi = 0,01, R_H = 0,02$	2,7	69	31,6	9,3	128	6,0	89
	0,01	1,1	36	21,4	9,8	200	3,8	93
	0,003	0,34	11,1	13,7	10,1	352	2,2	95
	0,007	0,7	24,3	17,8	9,9	251	3,1	94
<i>Winter</i> $\xi = 0,5, R_H = 0,02$	21,6	23,0	10,7	9,4	–	–	89	

$$\alpha = \begin{cases} 1,0 \text{ Tag}^{-1} \text{ im Sommer} \\ 0,05 \text{ Tag}^{-1} \text{ im Winter} \end{cases}$$

$$\beta_t = 770 \text{ mg m}^{-2} \text{ Jahr}^{-1}$$

$$R_E = \begin{cases} 3 R_H \text{ im Sommer} \\ R_H \text{ im Winter} \end{cases}$$

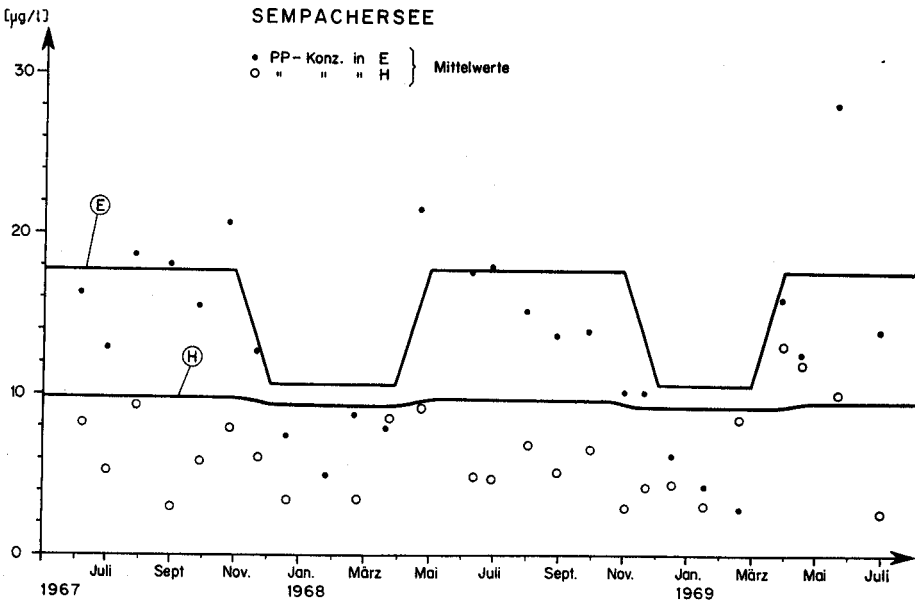
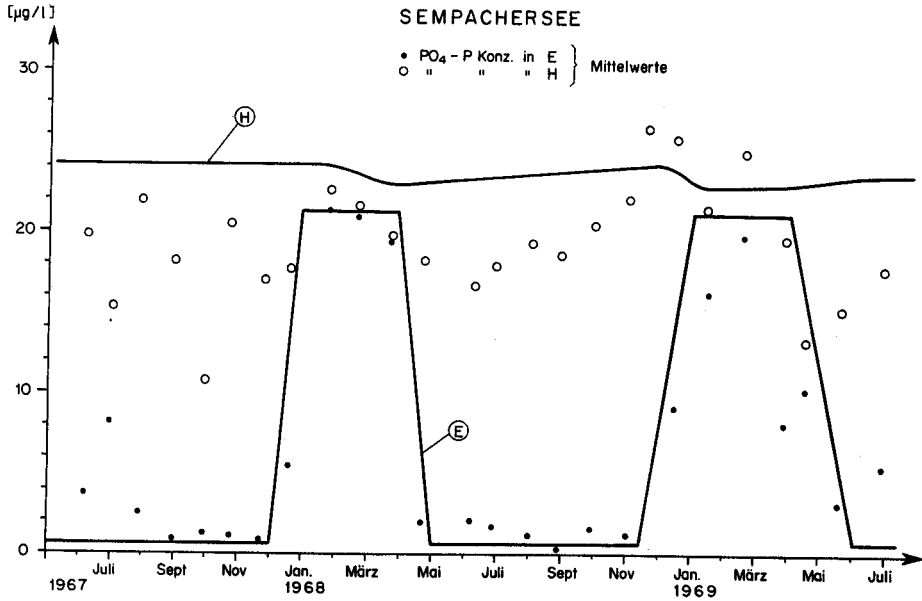


Abb. 6. Mittlere P-Konzentrationen im Sempachersee nach PERRET [16]. Vergleich mit dem schematisierten Konzentrationsverlauf nach dem Modell. Die GOP-Komponente ist nicht berücksichtigt.

in Modell und Messung recht gut überein, ebenso die saisonale Variation, dies vor allem für die Werte in  $E$ . Hingegen scheinen die beiden hypolimnischen Komponenten im Modell eher überschätzt. Eine gewisse Korrektur dürfte der nicht berücksichtigte GOP-Phosphor bringen, der in  $H$  zwischen 4 und 8 mg/m<sup>3</sup> schwankt und einen Teil des zugeführten P enthält.

Das durch den Vergleich von Theorie und gemessenen Konzentrationen für die Stagnation ermittelte  $\xi$  von rund 0,01 Tag<sup>-1</sup> stimmt mit den Ergebnissen der im Unterabschnitt 3.21 beschriebenen Methoden gut überein. Allerdings sind die Temperaturmessungen von Perret für eine vernünftige Anwendung (33) an der Grenze der notwendigen Genauigkeit. Besser eignet sich die Berechnung mit der Diffusionskonstante  $D$ , wobei wir die von Li [15] ermittelten  $D$ -Werte benützten. Stellt man den Temperaturverlauf im Metalimnion in idealisierter Form dar (Abb. 7), so ergibt sich die folgende Beziehung zwischen  $\xi$  und  $D$ :

$$\xi = \frac{D}{\Delta h} \cdot \frac{F(h_1)}{V_1} = \frac{D}{\Delta h \cdot h_1}, \quad (54)$$

wobei  $h_1$  die Dicke der konstanten Temperaturzone an der Seeoberfläche und  $V_1$  das zugehörige Volumen bedeutet. Die so ermittelten  $\xi$ -Werte sinken im Laufe der Stagnation von 0,02 Tag<sup>-1</sup> (Juni) auf 0,003 Tag<sup>-1</sup> (August–September). Die benützten Diffusionskonstanten liegen zwischen 0,08 und 0,02 cm<sup>2</sup>/sec.

Der schnelle Ausgleich zwischen  $\lambda_E$  und  $\lambda_H$  beim Einsetzen der Zirkulation motiviert die Wahl eines grossen  $\xi$  im Winter von 0,5 Tag<sup>-1</sup>.

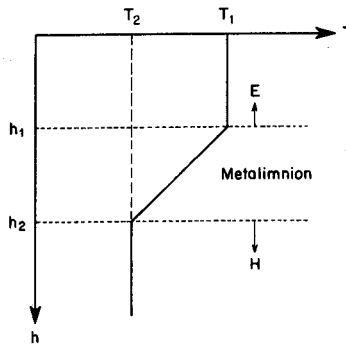


Abb. 7. Schematischer Temperaturverlauf in den oberen Seeschichten während der Sommerstagnation zur Berechnung von  $\xi$  aus der Diffusionskonstanten  $D$ .

#### 4. Diffusionsmodell für das Hypolimnion

Die Behandlung des Hypolimnions als vollständig durchmischtes System ist für viele Fragestellungen ungenügend. So haben wir beispielsweise schon darauf hingewiesen, dass die O<sub>2</sub>-Zehrung  $\Delta s$  im Sommer tatsächlich nicht homogen in  $H$  verteilt ist, so dass die Ungleichung (53) nichts auszusagen vermag über allfällige anaerobe Gebiete in den tiefen Seeschichten. In diesem Kapitel soll kurz beschrieben werden, wie eine in der Vertikalen nichthomogene O<sub>2</sub>-Theorie aufzubauen ist und O<sub>2</sub>-Defizite am Seegrund berechnet werden können.

Die Gleichungen für die PP-Konzentration  $\pi$  und die O<sub>2</sub>-Konzentration  $s$  als Funktion von Tiefe  $h$  und Zeit  $t$  lauten während der Stagnationsperiode<sup>6)</sup>:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -g \frac{\partial \pi}{\partial h} - R\pi, \quad (55a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = D \frac{\partial^2 s}{\partial h^2} - \Gamma \cdot R \pi. \quad (55b)$$

$D$  ist die Diffusionskonstante, eine im allgemeinen örtlich und zeitlich variable Grösse, welche wir aber als konstant annehmen werden;  $\Gamma = 140$  nach (18). In (55a) haben wir den gegenüber der Sedimentation kleinen Diffusionsterm von vorneherein weggelassen.

Wenn wir annehmen, der See besitze am Anfang der Stagnation überall die PP-Konzentration  $\pi_0$  und behalte diese in  $E$  während des Sommers bei, so lautet die Lösung von (55a) für  $h > h_E$ :

$$\pi(h, t) = \begin{cases} \pi_0 e^{-Rt} & \text{für } t < t^* = \frac{h - h_E}{g} \\ \pi_0 e^{-a(h-h_E)} & \text{für } t > t^* \end{cases}, \quad (56)$$

wobei  $a = R/g$  ist.  $\pi$  nimmt zuerst zeitlich exponentiell ab bis zu jenem Zeitpunkt  $t^*$ , an dem  $\pi$  zeitlich konstant wird und als Funktion von  $h$  eine Exponentialfunktion darstellt. Die Zeit  $t^*$  bis zum Erreichen der jeweiligen stationären Konzentration wächst mit zunehmender Tiefe.

Am Seegrund sammelt sich das während der Fallzeit in  $H$  nicht mineralisierte organische Material an. Nehmen wir an, es werde dort ebenfalls mineralisiert (ohne dass die entstehenden Substanzen deswegen ins überstehende Wasser zurückdiffundieren müssen), so ergibt sich an der Sedimentoberfläche der folgende O<sub>2</sub>-Bedarf  $V_s$  pro Fläche und Zeit ( $h_m$  = Tiefe des Sees an der betrachteten Stelle):

$$V_s(t) = \begin{cases} \pi_0 \cdot g \Gamma e^{-Rt} & \text{für } t < t^* = \frac{h_m - h_E}{g} \\ \pi_0 g \Gamma e^{-a(h_m - h_E)} & \text{für } t > t^* \end{cases}. \quad (57)$$

$V_s$  wird kompensiert durch den entsprechenden O<sub>2</sub>-Gradienten am Seegrund, welcher sich aus der Beziehung O<sub>2</sub>-Fluss =  $-D \partial s / \partial h$  ergibt:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial h} \right|_{h_m} = - \frac{V_s(t)}{D}. \quad (58)$$

Setzt man (56) in (55b) ein, so ergibt sich eine Differentialgleichung für  $s(h, t)$  von der Art

$$\frac{\partial s}{\partial t} = D \frac{\partial^2 s}{\partial h^2} - f(h, t), \quad (59)$$

wobei ferner die Randbedingung (58) zu erfüllen ist. Die Randbedingung gegen oben ( $h = h_E$ ) lautet  $s = s_E$ , wobei  $s_E$  die O<sub>2</sub>-Sättigung in  $E$  bedeutet.

<sup>6)</sup> Zur Vereinfachung lassen wir bei  $\pi$ ,  $g$  und  $R$  den Index  $H$  weg.

Eine Lösung von (59) ist im Prinzip möglich, aber kompliziert. Wir wollen hier nur einen wichtigen Aspekt behandeln: Der Diffusionsterm  $D \partial^2 s / \partial h^2$  ist am Anfang der Stagnation nur am Rand von  $H$  ( $h = h_E$  oder  $h_m$ ) von Bedeutung, da nach der Winterzirkulation  $s$  homogen über  $H$  verteilt ist, der Gradient also 0 ist. Aus (56) und (57) kann man entnehmen, dass die  $O_2$ -Zehrung gross wird am Seegrund und unmittelbar unter dem Epilimnion, was tatsächlich auch mit den Beobachtungen übereinstimmt. Kritischer dürfte der  $O_2$ -Schwund am Seegrund sein; ihn wollen wir hier berechnen:

Der (anfänglich homogene)  $O_2$ -Schwund  $\Delta s_M$  in  $H$  durch Mineralisation allein ist

$$\begin{aligned} \Delta s_M(h, t) &= \Gamma R \int_0^t \pi(h, t') dt' \\ &= \pi_0 \cdot \Gamma \cdot R \left[ \int_0^{t^*} e^{-Rt'} dt' + \int_{t^*}^t e^{-a(h-h_E)} dt' \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Die Lösung von (60) lautet:

$$\Delta s_M(h, t) = \begin{cases} \pi_0 \cdot \Gamma \{1 - e^{-Rt}\} & \text{für } t < t^* \\ \pi_0 \Gamma \{1 - e^{-a(h-h_E)} [1 - R(t-t^*)]\} & \text{für } t > t^*. \end{cases} \quad (61)$$

Der  $O_2$ -Schwund am Seegrund und in dessen Nähe setzt sich zusammen aus  $\Delta s_M$  und Diffusionsverlusten infolge der Mineralisation von organischem Material am Boden.

$$\Delta s = \Delta s_M + \Delta s_D. \quad (62)$$

Die Berechnung von  $\Delta s_D$  für  $h = h_m$  ist im Anhang II beschrieben [vgl. (B11)] und der Verlauf von  $\Delta s$  am Seegrund in Abb. 8 dargestellt. Weiter ist die Dicke  $\delta$  der Wasserschicht aufgetragen, innerhalb welcher der Effekt erhöhter  $O_2$ -Zehrung in der Nähe des Seegrundes spürbar ist:

$$\delta = - \frac{\Delta s_D}{(\partial s / \partial h) h_m}. \quad (63)$$

Die Daten entsprechen ungefähr den Verhältnissen im Sempachersee an der tiefsten Stelle ( $h_m = 87$  m), wobei nach LI [15]  $D = 0,1$  cm<sup>2</sup>/sec = 0,86 m<sup>2</sup>/Tag,  $R = 0,007$  Tag<sup>-1</sup> und  $g = 0,3$  m/Tag gewählt worden ist.

$\Delta s$  ist proportional zu  $\pi_0$ . Für  $\pi_0$  wählten wir 10 mg/m<sup>3</sup>, was ungefähr der PP-Konzentration während der Zirkulation entspricht (vgl. Tab. 5). Die  $O_2$ -Messungen von PERRET [16] zeigen allerdings in den tiefen Schichten des Hypolimnions einen raschen und fast vollständigen Sauerstoffschwund.

Da die Messungen nicht jedesmal an der exakt gleichen Stelle vorgenommen wurden, eignen sie sich schlecht für einen detaillierten Vergleich mit der oben skizzierten Theorie. Unser Ziel war es vielmehr, die «homogene  $O_2$ -Bedingung» (53) durch ein realistischeres Modell zu ersetzen. Im Prinzip könnte mit (61), (62) und (B11) eine dem Abschnitt 3.4 ähnliche Eutrophierungstheorie aufgebaut werden beispielsweise mit der Bedingung, dass die  $O_2$ -Konzentration im See nirgends unter 5 mg/l sinken darf. Die Erarbeitung eines derartigen kontinuierlichen Modells setzt allerdings auf



der anderen Seite eine bessere Kenntnis der biologischen, chemischen und physikalischen Vorgänge voraus und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

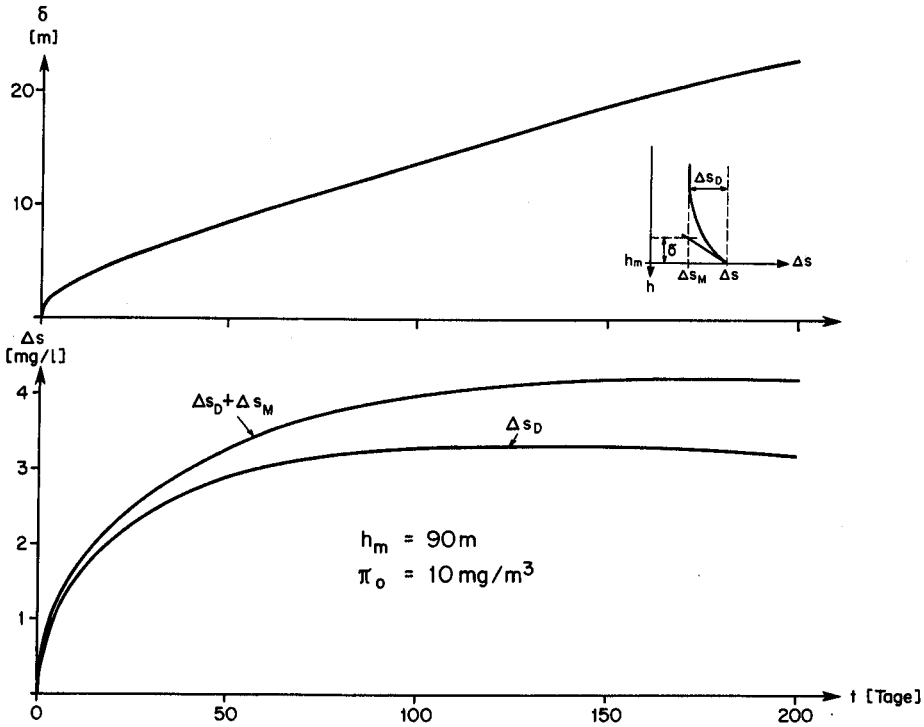


Abb. 8. Theoretischer Verlauf der  $O_2$ -Zehrung während der Sommerstagnation am Grund eines 90 m tiefen Sees mit Verhältnissen wie der Sempachersee.

$\Delta s_D = O_2$ -Zehrung infolge Mineralisierung sedimentierten organischen Materials;

$\Delta s_M = O_2$ -Zehrung durch Mineralisation von organischem Material im überstehenden Wasser;

$\delta =$  Dicke der Zone erhöhter  $O_2$ -Zehrung.

## 5. Zusammenfassung

Die Entwicklung theoretischer Modelle in der Limnologie ist in den letzten Jahren im Hinblick auf die zivilisationsbedingte Eutrophierung vieler Seen dringend geworden. Neben biochemischen Prozessen haben physikalische Vorgänge (insbesondere Transportphänomene) einen entscheidenden Einfluss auf den Stoffhaushalt eines Sees. Mathematische Modelle ermöglichen die Berechnung der relevanten Stoffkonzentrationen in Abhängigkeit von den äusseren Bedingungen (Input-Bedingungen) und den Vergleich verschiedener Seen hinsichtlich deren Eutrophierungsempfindlichkeit.

Im Kapitel 2 werden verschiedene Modelltypen, insbesondere das kontinuierliche Modell (Diffusionsmodell) und das Boxmodell, diskutiert und den zur Verifizierung des Modells nötigen Messdaten gegenübergestellt, woraus sich die praktischen Grenzen der Modellkomplexität ergeben.

Im Kapitel 3 wird ein dynamisches Zweiboxmodell, bestehend aus den beiden Untersystemen Epilimnion und Hypolimnion, für einen See mit einem festen limitierenden Nährstoff (z.B. Phosphor) entwickelt (Abb. 3). Die Lösung des Differentialgleichungssystems (26) für  $\text{PO}_4$ -Phosphor bzw. partikulären Phosphor ergibt über eine stöchiometrische Gleichung vom Redfieldtyp (17) den zeitlichen Konzentrationsverlauf anderer biologisch wichtiger Elemente wie insbesondere von Sauerstoff. Viele Seen durchlaufen während des Jahres zwei verschiedene Zustände (Stagnation und Zirkulation). Die stationäre Lösung des Systems (29) stellt eine gute Näherung für diese Zustände dar, da die Anpassungszeit meistens in der Größenordnung weniger Wochen liegt. Ein Mass für die  $\text{O}_2$ -Zehrung in den tiefen Seeschichten wird durch die partikuläre P-Konzentration im Epilimnion während des Sommers geliefert; diese ihrerseits hängt neben orographischen und hydrologischen Daten vom P-Input ab. Beschreibt man nach Thienemann den Trophiegrad des Sees mit Hilfe der  $\text{O}_2$ -Verhältnisse, so ermöglicht das P-Nährstoffmodell die Berechnung eines direkten Zusammenhangs zwischen Trophiegrad einerseits, P-Input, mittlerer Seetiefe und hydraulischer Belastung andererseits (Abb. 5). Die Theorie stimmt erstaunlich gut mit dem empirischen Resultat von VOLLENWEIDER [3] überein. Ferner werden P-Retentionsfaktoren berechnet (46) und mit Messungen an einigen Schweizer Seen verglichen (Tab. 3). Für den Sempachersee wird der zeitliche Verlauf theoretischer und gemessener P-Konzentrationen verglichen (Abb. 6).

Die für Boxmodelle typische Voraussetzung homogener Verhältnisse stimmt für das Hypolimnion schlecht. Im Kapitel 4 wird im Sinne einer Verfeinerung des Modells mit Hilfe eines Diffusionsmodells die durchschnittliche Sauerstoffzehrung (wie sie im Kapitel 3 benützt wird) durch den  $\text{O}_2$ -Konzentrationsverlauf als Funktion der Tiefe und Zeit ersetzt (Abb. 8). Die Rechnung ergibt – in Übereinstimmung mit dem experimentellen Wissen – ein  $\text{O}_2$ -Minimum unmittelbar am Seegrund, welches sich im Laufe des Sommers verstärkt.

## RÉSUMÉ

Vu le fait que la vie moderne provoque une eutrophication croissante de nos lacs, il est devenu de plus en plus urgent que la limnologie développe des modèles théoriques. A part les processus biochimiques, les phénomènes physiques (surtout les phénomènes de transport) ont une influence décisive sur le bilan de matière d'un lac. Des modèles mathématiques permettent de calculer les concentrations de matières pertinentes en relation avec des paramètres externes (conditions de «input») et de comparer la sensibilité d'eutrophication de différents lacs. Le chapitre 2 traite plusieurs types de modèles, surtout le modèle de diffusion et le modèle à «box», qui sont comparés avec les données de mensuration nécessaires afin de vérifier ces modèles; les limitations pratiques de la complexité des modèles peuvent en être déduites.

Le chapitre 3 développe un modèle dynamique à deux box, comprenant les deux systèmes subordonnés, épilimnion et hypolimnion, pour un lac avec une substance nutritive limitante (ex.: phosphore, fig. 3). En utilisant l'équation stoechiométrique du type Redfield (équation 17), la concentration d'autres substances biologiques importantes qui sont en fonction du facteur temporel comme l'oxygène peut être obtenue par la solution du système des équations différentielles pour le phosphore sous la forme de phosphates et le phosphore en particules (équation 26). Dans l'espace d'une année une grande partie de nos lacs passent par deux états (stagnation et circulation). L'état d'équilibre donne une bonne idée de ces deux états puisque la période d'adaptation s'étend sur quelques semaines. La concentration du phosphore en particules, qui dépend de l'addition dans l'épilimnion du phosphore aussi bien que les quantités orographiques et hydrologiques, sert en tant que mesure de désoxygénation dans les couches profondes pendant la période

de stagnation estivale. Si, comme chez Thienemann, la teneur en oxygène dans le lac est utilisée comme critère de classification de son état trophique, le modèle du phosphore comme substance nutritive donne la corrélation entre l'état trophique d'une part, et l'addition du phosphore, profondeur moyenne et la charge hydraulique d'autre part (fig. 5). Cette théorie correspond bien avec les résultats empiriques de VOLLENWEIDER [3]. De plus, les facteurs de rétention de phosphore sont calculés (équation 46) et comparés avec des résultats obtenus de quelques lacs suisses (table 3). Quant au Sempachersee, le développement en temps des concentrations de phosphore de dérivation théorique et mesurée est examiné (fig. 6). L'hypolimnion ne se prête pas pour être représenté par un modèle à box, comme celui-ci exige des conditions homogènes. On améliore en chapitre 4 le modèle à l'aide d'un modèle de diffusion où on remplace le taux moyen de désoxygénation par l'évolution de la concentration en oxygène (comme on l'utilise en chapitre 3) en fonction de la profondeur et du temps (fig. 8). Selon notre expérience, le minimum en oxygène immédiatement au-dessus de la plaine augmente pendant la période de stagnation estivale.

### SUMMARY

During the last years, the development of theoretical models in limnology has become urgent due to increasing eutrophication of many lakes by human activity. Physical as well as biochemical processes (i.e. transport phenomena) have a significant influence on the material balance of a lake. Mathematical models are developed to calculate the relevant concentrations in dependence from external parameters (input data) and to compare different lakes due to their eutrophication sensitivity. In Chapter 2, several types of models are discussed, especially the continuous model (diffusion model) and the box model. In order to get the practical limits of model complexity, an evaluation is made of the necessary amount of measurements for the model verification.

In Chapter 3, a two-box model consisting of the subsystems epilimnion and hypolimnion, for lakes with one specific limiting nutrient factor (e.g. phosphorus), is employed (Fig. 3). By using an equation of the Redfield type (17), the depending concentration of other biologically important substances (e.g. oxygen) follows from the solution of the system of differential equations for  $PO_4$ -phosphorus and particulated P, respectively (26). In a year's time many lakes go through two different states (stagnation and circulation). The steady state solution of the model (29) is a good approximation for these states, as the relaxation time normally lies in the order of a few weeks. During summer stagnation, a measure of the  $O_2$ -depletion in the deep layers is given by the epilimnic particulated P-concentration, which itself depends from the P-input as well as from orographic and hydrological quantities. Therefore, if – similar to Thienemann –  $O_2$ -conditions in the lake are used for the classification of its trophic state, the P-nutrient model gives the connection between trophic state on one side and P-input, mean depth and hydraulic loading on the other side (Fig. 5). The result is in an astonishingly good agreement with VOLLENWEIDER's [3] empirical data. Furthermore, we compare theoretical P-retention factors (46) of some Swiss lakes with experimental data (Table 3). Finally, effective and computed time variation of P-concentration in Sempachersee are compared (Fig. 6).

The assumption of homogenous conditions which is typical for box models is far from reality in the hypolimnion. In Chapter 4, we improve the model by replacing the mean  $O_2$ -depletion (as used in Chapter 3) by a diffusion calculation which yields the  $O_2$  concentration as a function of time and depth (Fig. 8). In accordance with experimental knowledge we get a  $O_2$  minimum at the sediment water interface which increase during summer stagnation.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] LOTKA, A. J., *Elements of Physical Biology* (Williams & Wilkins, Baltimore 1925).
- [2] VOLTERRA, V., *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Gauthier-Villars, Paris 1931).
- [3] VOLLENWEIDER, R. A., *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Seen- und Fließgewässereutrophierung, unter besonderer Berücksichtigung des Phosphors und des Stickstoffes als Eutrophierungsfaktoren*, OECD/DAS/CSI/68.27 (1968).
- [4] IMBODEN, D. M., und STUMM, W., *Der Einfluss des Menschen auf die geochemischen Kreisläufe in der Atmosphäre*, *Chimia* 27, 155 (1973).

- [5] VOLLENWEIDER, R. A., Arch. Hydrobiol. 66, 1 (1969).
- [6] VOLLENWEIDER, R. A., *Input-Output Models* (1972, im Druck).
- [7] SIEGENTHALER, U., *Sauerstoff-18, Deuterium und Tritium im Wasserkreislauf*, Dissertation, Bern 1971; und SIEGENTHALER, U., OESCHGER, H., und TONGIORGI, E., in: *Isotope Hydrology 1970*, International Atomic Energy Agency (Wien 1970).
- [8] BROECKER, W. S., und LI, Y. H., J. Geophys. Res. 75, 3545 (1970).
- [9] RUTTNER, F., *Grundriss der Limnologie* (Berlin 1940).
- [10] REDFIELD, A. C., KETCHUM, B. H., und RICHARDS, F. A., *The Sea 2* (Wiley, New York 1963).
- [11] STUMM, W., Proc. First Intern. Conf. Water Poll. Res. London (Pergamon Press, N.Y. 1962), S. 216.
- [12] STUMM, W., und LECKIE, J. O., Proc. 5th Intern. Water Poll. Res. Conf., San Francisco 1970 (Pergamon Press 1971).
- [13] GÄCHTER, R., Schweiz. Z. Hydrol. 30, 1 (1968).
- [14] BURNS, N. M., und ROSS, C., in: *Project Hypo*, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, und United States Environmental Protection Agency, Region V (1971).
- [15] LI, Y. H., Schweiz. Z. Hydrol. 35/1, 1-7 (1973).
- [16] PERRET, P., *Untersuchungen über die Bodenfauna des Litorals im eutrophierenden Sempachersee*, Dissertation, Basel 1972, Schweiz. Z. Hydrol. 35 (im Druck).
- [17] BLOESCH, J., *Messung der Sedimentation in verschiedenen Tiefenstufen des Vierwaldstättersees (Horwer Bucht), mit besonderer Berücksichtigung des Phosphors*, Diplomarbeit ETH Zürich (1967).
- [18] STADELMANN, P., Schweiz. Z. Hydrol. 33, 1 (1971).
- [19] ZIMMERMANN, P., Schweiz. Z. Hydrol. 23, 342 (1961).
- [20] O'MELIA, CH. R., Schweiz. Z. Hydrol. 34, 1 (1972).
- [21] Bericht EAWAG (1971).
- [22] Bericht EAWAG (1970).
- [23] THIENEMANN, A., *Der Sauerstoff im eutrophen und oligotrophen See*, Die Binnengewässer 4 (Stuttgart 1928).
- [24] ROBERTS, P. V., *Merkmale der grössten Schweizer Naturseen*, EAWAG, interner Bericht (1972).
- [25] GÄCHTER, R., und FURRER, O. J., Schweiz. Z. Hydrol. 34, 41 (1972).
- [26] CARSLAW, H. S., und JAEGER, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition (Oxford University Press 1959).

Der Autor dankt neben vielen Mitarbeitern der EAWAG ganz besonders R. Gächter für seine wertvolle Hilfe und seine unermüdliche Geduld, einen Physiker in die Geheimnisse der Limnologie einzuweihen.

**Anhang**

*I. Die orographische Beschreibung des Sees*

Es sei  $F(h)$  die Seefläche in Abhängigkeit von der Seetiefe, wobei  $F(0) = F_E$  die Seeoberfläche darstellt und  $F(h_{max}) = 0$  gilt (Abb. 10). Das totale Seevolumen ist

$$V = \int_0^{h_{max}} F(h) dh \tag{A1}$$

und entsprechend für Epilimnion bzw. Hypolimnion

$$V_E = \int_0^{h_E} F(h) dh, V_H = \int_{h_E}^{h_{max}} F(h) dh, V = V_E + V_H. \tag{A2}$$

Die Tiefe des Epilimnions  $h_E$  sei fest, wobei wir offenlassen wollen, zu welchem Teil das Metalimnion gezählt werden soll.

$$\text{Totale mittlere Tiefe: } \bar{h} = \frac{V}{F_E}. \tag{A3}$$

Mittlere Tiefen von  $E$  und  $H$ : [ $F_H = F(h_E)$ ].

$$\bar{h}_E = \frac{V_E}{F_E}; \bar{h}_H = \frac{V_H}{F_H}; \bar{h}' = \bar{h}_E + \bar{h}_H. \tag{A4}$$

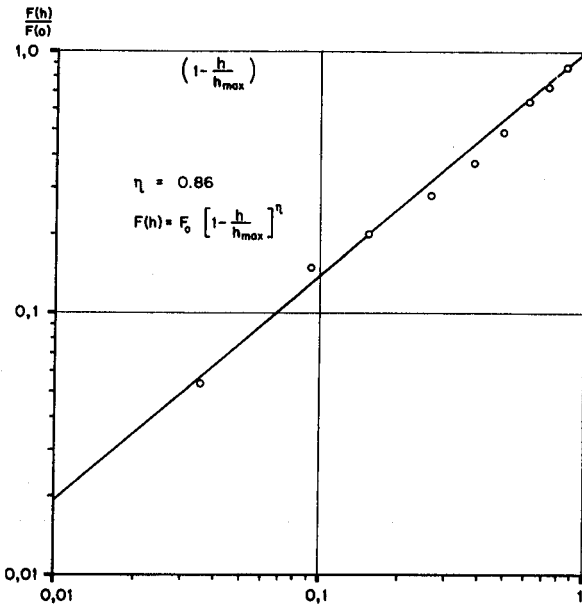


Abb. 9. Verlauf der orographischen Funktion  $F(h)$  im Sempachersee und Näherungsformel zu deren Darstellung.

Es gilt  $\bar{h}_E < h_E$  und  $\bar{h} < \bar{h}'$  (vgl. Abb. 10). Die totale mittlere Tiefe  $\bar{h}$  kann irreführend sein, da durchaus  $\bar{h} < h_E$  möglich ist, obschon in Wirklichkeit der See an gewissen Stellen tiefer als  $h_E$  sein und somit ein Hypolimnion besitzen kann.

Wir definieren die beiden Verhältnisse

$$\varepsilon = \frac{V_H}{V_E} \text{ und } \gamma = \frac{\bar{h}_H}{\bar{h}_E}. \quad (\text{A5})$$

Im Prinzip ist  $F(h)$  irgendeine (monoton fallende) Funktion der Tiefe  $h$ , so dass strenggenommen Vereinfachungen in den Modellparametern nicht allgemein möglich sind. Hingegen zeigt sich in der Praxis, dass häufig folgende Funktionenklasse benützt werden kann:

$$F(h) = F_E \left[ 1 - \frac{h}{h_{\max}} \right]^\eta, \quad \eta > 0, \quad (\text{A6})$$

d. h.

$$\ln \left( \frac{F(h)}{F_E} \right) = \eta \cdot \ln \left( \frac{h_{\max} - h}{h_{\max}} \right). \quad (\text{A7})$$

$\eta$  liegt normalerweise zwischen 0,5 und 2. In Abb. 9 ist die lineare Beziehung (A7) für den Sempachersee aufgetragen; man erhält  $\eta = 0,86$ .

Die Funktionenklasse (A6) ergibt die folgenden Beziehungen:

$$V = \frac{F_E \cdot h_{\max}}{\eta + 1}; \quad \bar{h} = \frac{h_{\max}}{\eta + 1} \quad (\text{A8})$$

$$\text{und mit } \varrho = \left( 1 - \frac{h_E}{h_{\max}} \right) = 1 - \left( \frac{h_E}{(\eta + 1)\bar{h}} \right):$$

$$V_E = F_E \cdot \bar{h} (1 - \varrho^{\eta+1}), \quad (\text{A9})$$

$$V_H = F_E \cdot \bar{h} \cdot \varrho^{\eta+1}, \quad (\text{A10})$$

$$\bar{h}_E = \bar{h} (1 - \varrho^{\eta+1}), \quad (\text{A11})$$

$$\bar{h}_H = \bar{h} \cdot \varrho, \quad (\text{A12})$$

$$\varepsilon = \frac{\varrho^{\eta+1}}{1 - \varrho^{\eta+1}}, \quad (\text{A13})$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{1 - \varrho^{\eta+1}}, \quad (\text{A14})$$

Da  $\varrho < 1$ , folgt aus (A13) und (A14)  $\gamma > \varepsilon$  bzw.

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \varrho^\eta < 1. \quad (\text{A15})$$

In Abb. 11 ist  $\varepsilon/\gamma$  für verschiedene  $\eta$  als Funktion von  $\bar{h}$  aufgetragen ( $h_E = 12$  m). Die Abweichung zwischen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  wird – unabhängig von  $\eta$  – für Seen mit  $\bar{h} > 75$  m kleiner als 15%.

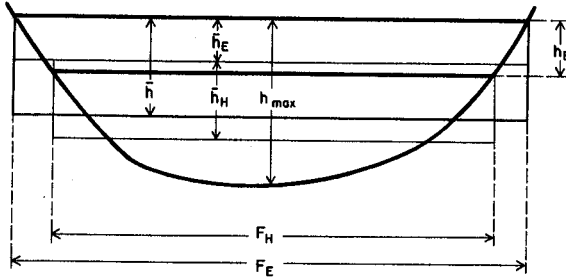


Abb. 10. Definition der orographischen Parameter.

$\bar{h}$ : totale mittlere Tiefe;  $\bar{h}_E$ ,  $\bar{h}_H$ : mittlere Tiefe von Epi- bzw. Hypolimnion;  $h_E$  = effektive Tiefe des Epilimnions;  $F_E$  = totale Seefläche;  $F_H$  = Seefläche an der effektiven Grenze zwischen Epi- und Hypolimnion.

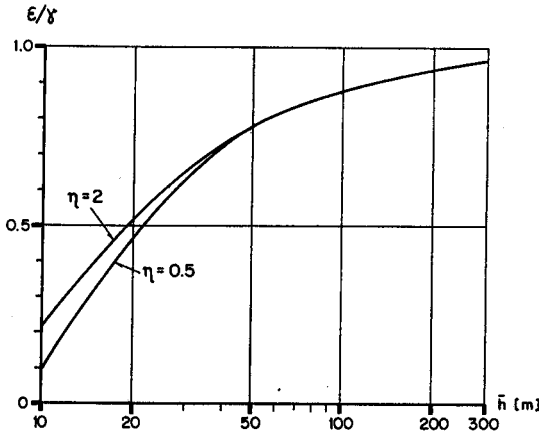


Abb. 11.  $\epsilon/\gamma$  als Funktion von  $\bar{h}$  für verschiedene  $\eta$ .  $\epsilon = V_H/V_E$ ;  $\gamma = h_H/\bar{h}_E$ .  $\eta$  = Parameter für die orographische Funktion  $F(h)$ , vgl. (A6).

### II. Sauerstoffzehrung am Seegrund

Die Berechnung von  $\Delta s_D$  aus (62) erfolgt mit der normalen Diffusionsgleichung und der Randbedingung (58). Wir führen zur Vereinfachung die neuen Koordinaten

$$x = h_m - h \tag{B1}$$

und die Bezeichnung  $y = \Delta s_D$  ein. Es ist also die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{B2}$$

mit der Randbedingung<sup>7)</sup>

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = - \frac{\pi_0 \Gamma g}{D} e^{-Rt} \tag{B3}$$

<sup>7)</sup> Wir setzen  $t < h_m - h_E/g$  voraus, was für alle  $t < T_{St} \sim 180$  Tage erfüllt sein dürfte, falls  $h_m > 80$  m ist.

zu lösen. Da  $y(t=0) = 0$ , lautet (B2) für die Laplace-Transformierte [26]  $\bar{y}$ :

$$D \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = p y. \quad (\text{B4})$$

Mit  $q^2 = p/D$  ist die Lösung von (B4) von der Form

$$y(p, x) = A(p) e^{-qx} + B(p) e^{qx}. \quad (\text{B5})$$

Es ist  $B(p) = 0$  wegen des Verhaltens von  $\bar{y}$  für  $x \rightarrow \infty$ . Somit folgt

$$\left. \frac{d\bar{y}}{dx} \right|_{x=0} = -q A(p). \quad (\text{B6})$$

Es gilt [26]  $\frac{d\bar{y}}{dx} = \overline{\left( \frac{dy}{dx} \right)}$ , also ist

$$\begin{aligned} -q A(p) &= -\frac{\pi_0 \Gamma g}{D} \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-Rt} dt \\ &= -\frac{\pi_0 \Gamma g}{D} \cdot \frac{1}{p+R}. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Daraus folgt  $A(p) = \frac{\pi_0 \Gamma g}{D} \frac{1}{q(p+R)}$  und

$$\bar{y}(p, x) = \frac{\pi_0 \Gamma g}{D} \frac{e^{-qx}}{q(p+R)}. \quad (\text{B8})$$

Die Rücktransformation ergibt nach [26], Appendix V:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{\pi_0 \Gamma g}{2D} e^{-Rt} \left( -\frac{D}{R} \right)^{1/2} \left\{ e^{-x\sqrt{-R/D}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{-Rt} \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{x\sqrt{-R/D}} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{-Rt} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Für den Seegrund ( $x=0$ ) vereinfacht sich (B9) zu

$$y(0, t) = \frac{i}{2} e^{-Rt} \frac{\pi_0 \Gamma g}{\sqrt{DR}} \{ \operatorname{erfc} [-\sqrt{-Rt}] - \operatorname{erfc} [\sqrt{-Rt}] \}. \quad (\text{B10})$$

Die Theorie der Fehlerfunktion  $\operatorname{erfc}(x)$  für komplexe Argumente findet man z. B. bei CARSLAW und JAEGER [26].

Die Lösung von (B10) hat die Form

$$\Delta_{SD}(t) = y(0, t) = \pi_0 \frac{g\Gamma}{\sqrt{DR}} \cdot v(\sqrt{Rt}, 0), \quad (\text{B11})$$

wobei die Funktion  $v(\xi, \eta)$  im erwähnten Buch tabelliert ist (Appendix II, Tabelle III).

Adresse des Autors:

Dr. Dieter M. Imboden, EAWAG, Überlandstrasse 133, CH-8600 Dübendorf.