Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Miroslav Katětov
Lineární operátory. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 1, D9--D31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122339

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1950

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

který zde byl podán, lze však přece do značné míry porovnati československou a polskou vědeckou práci v různých oborech matematiky. V algebře a v teorii čísel byla zastoupena téměř jen naše vědecká práce. Zvláště se zdá, že v teorii čísel jest v Polsku málo badatelů. V geometrii se ukazuje převaha československá, přitom však polské geometrické práce jsou četné a cenné. Tradičními obory polské vědecké práce jsou matematická logika, teorie množin a topologie. V těchto oborech se naprosto nemůžeme měřit počtem prací s Poláky. Z teorie množin a topologie byly však s české strany podány některé významné a velmi zajímavé příspěvky. Naproti tomu matematická logika se u nás téměř nepěstuje. Dalším oborem, v němž Poláci daleko vynikali nad Československo, je klasická analysa. A to je po mém soudu největší slabina naší matematiky, kterou bude třeba v budoucnosti velmi intensivně odstraňovat. Obory zastoupené v sekcích 5 A a 5 B, kde velkou většinou byla sdělení československá, vynechávám v tomto ocenění, neboť jsou to obory, které jsou mi značně vzdálené.

Na sjezdu byla uspořádána řada společenských podniků, z nichž uvádím jen velkou recepci na polském velvyslanectví v Praze v úterý 30. srpna večer.

Sjezd byl zakončen v sobotu v 11,30 hod. závěrečnou schůzí, z níž byly poslány pozdravné a děkovné telegramy panu presidentu československé republiky a panu presidentu polské republiky, panu ministru školství, věd a umění a panu ministru oświaty.

Na sjezdu byly projednány na užších schůzkách různé konkretní otázky budoucí spolupráce československé a polské na poli matematiky. Zvláště bylo umluveno, že společné sjezdy československých a polských matematiků budou se konat v obdobích dvou až tříletých. Polská delegace pozvala československé matematiky na příští společný sjezd do Polska. Místo a datum bude stanoveno později. Sjezd se bude však pravděpodobně konat v roce 1951. V obdobích mezi sjezdy mají se konat menší společné pracovní konference věnované přesně stanoveným užším oborům matematiky.

LINEÁRNÍ OPERÁTORY I.

MIROSLAV KATĚTOV, Praha.

Tento článek je první částí referátu o hlavních pojmech a výsledcích theorie lineárních operátorů v HILBERTOVĚ prostoru. Tato theorie má četné aplikace (na př. v theorii diferenciálních a integrálních rovnic). Kromě toho jsou, jak známo, lineární operátory základním matematickým nástrojem kvantové (vlnové) mechaniky.

Podávám referát dosti obšírně. Vycházím od základů, uvádím podrobně definice a věty a většinou také stručné důkazy. Definice a věty formuluji pokud možno obecně; k aplikacím se dostávám až později, uvádím však již v této první části občas příklady. Způsob výkladu je všude velmi abstraktní.

Kromě lineárních operátorů v HILBERTOVĚ prostoru si všímám také lineárních operátorů (lineárních zobrazení) v normovaných lineárních prostorech, neboť četné věty platí již pro tyto obecnější prostory.

K porozumění referátu není třeba (s výjimkou některých příkladů a aplikací) zvláštních vědomostí kromě znalosti základních pojmů a výsledků theorie metrických prostorů a elementárních pojmů obecné theorie množin (a na několika místech transfinitní indukce a příbuzných pojmů; tato místa lze však vynechati bez větší újmy pro porozumění ostatního textu a vracet se k nim leda při odkazech). Definice a věty z theorie metrických prostorů cituji z knihy E. ČECHA, *Bodové množiny I*; užívám pro ni zkratky BM. Na několika málo místech uvádím bez důkazu některé věty z theorie (normovaných) lineárních prostorů a odkazuji na knihu S. BANACHA, *Théorie des opérations linéaires* (zkratka TOL) a autorovu práci *O normovaných vektorových prostorech*, Rozpravy II. třídy České akademie **53**, č. 45 (zkratka NVP).

Z knih o lineárních operátorech v HILBERTOVĚ prostoru lze uvésti tyto: J. v. NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (1932); M. H. STONE, *Linear transformations in* HILBERT *space* (1932); B. v. SZ. NAGY, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des* HILBERTSCHEN *Raumes* (1942).

První část referátu, obsažená v tomto článku, má přípravný ráz. Zabývám se v ní normovanými lineárními prostory (§ 1) a jejich lineárními zobrazeními (§§ 4 a 5) a unitárními prostory, jejichž speciálním případem je HILBERTŮV prostor (§§ 2 a 3). Teprve § 6 jedná o nejobecnějších vlastnostech lineárních operátorů. Paragrafy 4 a 5 lze zatím vynechat (až na **4,1**; **4,2**; **4,5**; **4,6**; **5,1**; **5,5**; **5,6**) a vracet se k nim jen při odkazech.

§ 1. Normované lineární prostory.

1,1. Označím H_1 množinu komplexních čísel. Když P je neprázdná množina a pro libovolná $x \in P, y \in P, \alpha \in \mathsf{H}_1$ je definován součet $x + y \in P$ a násobek $\alpha x \in P$ tak, že pro libovolná x, y, z z P a α, β z H_1 platí (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$; (2) $x + y = y + x$; (3) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$; (4) $(\alpha\beta) x = \alpha(\beta x)$; (5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$; (6) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$; (7) $1 . x = x$, pak říkáme, že množina P s danými operacemi je *komplexní lineární prostor*. Nahradíme-li v této definici H_1 množinou reálných čísel, dostaneme definici *reálného lineárního prostoru*. Zřejmě každý komplexní lineární prostor je zároveň reálným lineárním prostorem.

V celém paragrafu značí P, příp. s indexy, komplexní lineární prostor. V celém článku značí α, β, γ (příp. s indexy) komplexní čísla. Písmena m, n značí zpravidla přirozená čísla.

Každé P obsahuje zřejmě právě jeden prvek o takový, že $x \in P \Rightarrow \Rightarrow x + o = x$. Tento prvek nazýváme *nulou* (prostoru P) a značíme 0. Píšeme jako obvykle $-x$ místo $(-1) \cdot x$, $y - x$ místo $y + (-x)$ a pod.

1,2. Když $\emptyset \neq L \subset P$ a $x \in L$, $y \in L$, $\alpha \in \mathsf{H}_1 \Rightarrow x + y \in L$, $\alpha x \in L$, říkáme, že L je *lineál* a píšeme $L \subset\subset P$. — Každý lineál je zřejmě lineárním prostorem. Zřejmě platí: průnik neprázdné soustavy lineálů (prostoru P) je lineál.

1,3. Je-li $M \subset P$, nazveme *lineárním obalem* množiny M a označíme $[M]$ průnik všech $L \subset\subset P$, $L \supset M$. — Snadno se dokáže: je-li $M \neq \emptyset$, skládá se $[M]$ právě ze všech $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $a_i \in M$; jest $[\emptyset] = (0)$.

1,4. Zobrazení φ P do P_1 nazýváme *lineárním*, jestliže pro $x \in P$, $y \in P$, $\alpha \in \mathsf{H}_1$ platí (1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; (2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$, *antilineárním*, jestliže místo (2) platí (2') $\varphi(\alpha x) = \bar{\alpha}\varphi(x)$.

Jestliže φ_1, φ_2 jsou lineární [antilineární] zobrazení P do P_1 a $\alpha \in \mathsf{H}_1$, pak klademe pro $x \in P$ $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $(\alpha\varphi_1)(x) = \alpha\varphi_1(x)$. Zobrazení $\varphi_1 + \varphi_2$ a $\alpha\varphi_1$ jsou pak lineární [antilineární]. Snadno se zjistí, že množina lineárních [antilineárních] zobrazení P do P_1 s tímto součtem a násobkem je lineární prostor.

1,5. *Nechť f_i $(i = 1, \ldots, n)$ a g jsou lineární zobrazení P do H_1 a platí: $x \in P$, $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n) \Rightarrow g(x) = 0$. Pak pro vhodná α_i je $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.*

Důkaz. Nechť $n = 1$. Když $f_1 = 0$, zřejmě $g = 0$. Když $f_1 \neq 0$, buď $a \in P$, $f(a) = 1$. Zřejmě $x \in P \Rightarrow f(x - f(x) \cdot a) = 0 \Rightarrow g(x - f(x) \cdot a) = 0 \Rightarrow g(x) = g(a) \cdot f(x)$, takže $g = g(a) \cdot f$. Platí-li věta pro $n - 1$, buď L lineál $x \in P$, pro něž $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$. Pak $x \in L$, $f_n(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$, takže pro vhodné α_n platí $x \in L \Rightarrow (g - \alpha_n f_n)(x) = 0$. Z indukčního předpokladu nyní plyne $g - \alpha_n f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$.

1,6. Jestliže P je komplexní [reálný] lineární prostor a pro každé $x \in P$ je definováno nezáporné číslo $|x|$, zvané *norma* prvku x, tak, že pro $x \in P$, $y \in P$ platí (1) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$; (2) $|x + y| \leq |x| + |y|$; (3) $|\alpha x| = |\alpha| |x|$, říkáme, že P s touto normou je *komplexní* [*reálný*] *normovaný lineární prostor*. Komplexní normovaný lineární prostor je zřejmě (**1,1**) zároveň reálným normovaným lineárním prostorem.

Klademe-li pro $x \in P$, $y \in P$, kde P je komplexní nebo reálný normovaný lineární prostor, $\varrho(x, y) = |x - y|$, pak ϱ je metrika (BM **6,1**) v P; uvažujeme P vždy s touto metrikou, tedy jako metrický prostor; tím jsou v něm definovány pojmy vzdálenosti $\varrho(A, B)$ dvou množin (BM **6,5**), uzávěru (BM **8,1**), konvergence (BM **7,1**), úplného prostoru (BM **15,1**), spojitého zobrazení (BM **9,1**) atd.

Písmeno P (příp. s indexy) značí dále v tomto paragrafu vždy komplexní normovaný lineární prostor.

1,7. Příklad. Spojité komplexní funkce na kompaktním (BM **17,2**) metrickém prostoru K tvoří normovaný lineární prostor $C(K)$, když definujeme součet a násobek zřejmým způsobem a klademe $|x| = \sup_{t\in K}|x(t)|$.

1,8. Nechť N a S jsou libovolné množiny a nechť pro každé $\nu \in N$ je dán prvek $x_\nu \in S$. Pak říkáme, že je dán *soubor* $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ prvků množiny S. Prvky $x_\nu \in S$ nazýváme *členy* souboru, prvky $\nu \in N$ *indexy*, množinu N *množinou indexů*; místo $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ píšeme, není-li obavy z nedorozumění, pouze $\{x_\nu\}$. Soubor $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ je tedy vlastně zobrazení množiny N do jakési množiny. — Posloupnost je speciálním případem souboru, kdy N je množina přirozených čísel.

1,9. Nechť $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ je soubor prvků z P. Je-li $N \neq \emptyset$ konečná, má součet $\Sigma_{\nu\in N}x_\nu$ tohoto souboru obvyklý význam; pro $N = \emptyset$ klademe $\Sigma_{\nu\in N}x_\nu = 0$. Obecně definujeme součet takto: jestliže $s \in P$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $K \subset N$ tak, že pro každou konečnou M, $K \subset \subset M \subset N$, je $|\Sigma_{\nu\in M}x_\nu - s| < \varepsilon$, říkáme, že s je *součet* souboru $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ a značíme jej $\Sigma_{\nu\in N}x_\nu$. Je zřejmé, že k danému souboru existuje nejvýše jeden takový prvek (t. j. součet je určen jednoznačně). Existuje-li, říkáme, že $\{x_\nu\}$ je *součtově konvergentní*.

Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $K \subset N$ tak, že pro každou konečnou $M \subset N - K$ platí $|\Sigma_{\nu\in M}x_\nu| < \varepsilon$, říkáme, že soubor $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ je *součtově cauchyovský*.

$\{x_\nu\}$ je v tomto paragrafu vždy soubor prvků z P.

1,10. *Když* $s = \Sigma_{\nu\in N}x_\nu$, $t = \Sigma_{\nu\in N}y_\nu$, *pak* $\alpha s + \beta t = \Sigma_{\nu\in N}(\alpha x_\nu + \beta y_\nu)$. *Jsou-li* $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$, $\{y_\nu\}_{\nu\in N}$ *součtově cauchyovské, je* $\{\alpha x_\nu + \beta y_\nu\}$ *součtově cauchyovský.*

1,11. *Je-li* $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ *součtově cauchyovský, pak* (1) *každý soubor* $\{x_\nu\}_{\nu\in M}$, *kde* $M \subset N$, *je součtově cauchyovský*; (2) *množina* $\nu \in N$ *takových, že* $x_\nu \neq 0$, *je spočetná.*

Dokážeme (2). Je-li zmíněná množina nespočetná, pak existuje $\varepsilon > 0$ a nekonečná $T \subset N$ tak, že $\nu \in T \Rightarrow |x_\nu| > \varepsilon$. Je-li $K \subset N$ konečná, existuje $\mu \in T - K$. Jest $|x_\mu| > \varepsilon$, takže $\{x_\nu\}$ není součtově cauchyovský.

1,12. *Součtově konvergentní soubor* $\{x_\nu\}$ *je součtově cauchyovský. Je-li* P *úplný, pak také každý součtově cauchyovský* $\{x_\nu\}$ *má součet.*

Dokážeme druhé tvrzení. Nechť $\{x_\nu\}$ je součtově cauchyovský. Je-li množina T všech $\nu \in N$, pro něž $x_\nu \neq 0$, konečná, má $\{x_\nu\}$ zřejmě součet. Je-li nekonečná, existuje podle **1,11** prostá posloupnost $\{\nu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ všech $\nu \in M$. Položíme $s_n = \sum_{k=1}^{n}x_{\nu(k)}$. Snadno se zjistí, že posloupnost $\{s_n\}$ je cauchyovská (BM **15,1**), tedy konvergentní, neboť P je úplný. Buď $s = \lim s_n$. Snadno se dokáže, že $s = \Sigma x_\nu$.

Korolár. *Soubor* $\{x_\nu\}$, $x \in \mathsf{H}_1$, *má součet když a jen když je součtově cauchyovský.*

1,13. *Soubor* $\{x_\nu\}$ *komplexních čísel má součet když a jen když má součet soubor* $\{|x_\nu|\}$. — To plyne z **1,12** a následujících nerovností (pro N

konečné, $x_\nu \in \mathsf{H}_1$), jež lze snadno odvodit: $|\Sigma_{\nu \in N} x_\nu| \leq \Sigma_{\nu \in N} |x_\nu| \leq k$ . . $\sup_{M \subset N} |\Sigma_{\nu \in M} x_\nu|$, kde k je pevné kladné číslo.

1,14. *Když $\{|x_\nu|\}$ má součet, pak $\{x_\nu\}$ je součtově cauchyovský.*

1,15. Když $M \subset P$, nazvu $\overline{[M]}$ *uzavřeným lineárním obalem* množiny M. Je-li $\overline{[M]} = P$, říkám, že M je *fundamentální* množina (v P).

1,16. Je-li Z množina, značí card$Z$ její mohutnost. Nejmenší mohutnost fundamentální množiny v P nazveme (*lineární*) *dimensí* komplexního normovaného lineárního prostoru P a značíme dim$P$. — Příklad (viz **1,7**): dim$C(K)$ je spočetná; rovná se card$K$, je-li K konečná; jinak je nekonečná.

1,17. Množina konečných posloupností $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, α_i komplexní čísla, n přirozené pevné, s obvyklou definicí součtu a násobku a normou $|\{\alpha_i\}| = (\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{-\frac{1}{2}}$, je komplexní normovaný lineární prostor. Značíme jej H_n. — H_0 značí prostor, obsahující pouze nulu.

1,18. *Když* dim$P = n$ *je konečná, pak existuje prosté lineární zobrazení φ prostoru H_n na P takové, že φ a φ^{-1} jsou stejnoměrně spojitá; P je tedy úplný a lokálně kompaktní.*

Důkaz. Když $a_1, \ldots, a_n$ tvoří fundamentální množinu v P, klademe $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i$ pro $x = \{\xi_i\} \in \mathsf{H}_n$. Není obtížné zjistit, že φ má žádané vlastnosti. Ježto H_n je, jak se snadno zjistí, isometrické (BM **6,4**) s E_{2n} (viz BM **6,1**), plyne z toho (viz BM **9,6,1**, BM **15,1,3** a BM **17,10,1**) tvrzení.

1,19. *Je-li $L \subset\subset P$, pak* dim$L \leq$ dim$P$.

Důkaz provedeme pro nekonečnou dim$P$, neboť jinak plyne z **1,18**. Buď $M \subset P$ fundamentální, card$M$ = dim$P$. Buď S množina všech $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, α_i racionální, $a_i \in M$. Pak $\overline{S} = P$. Pro $x \in S$, $n = 1, 2, \ldots$ buď $y_{x,n} \in L$, $\lim |y_{x,n} - x| = \varrho(x, L)$. Buď T množina všech $y_{x,n}$. Snadno se zjistí, že card$T \leq$ card$M$, $\overline{T} = L$.

1,20. *Nechť φ je reálná funkce v P taková, že pro $x \in P$, $y \in P$, $\alpha \in \mathsf{H}_1$ je $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\alpha x) = |\alpha| \varphi(x)$. Nechť $L \subset\subset P$ a nechť f je lineární zobrazení L do H_1, $x \in L \Rightarrow |f(x)| \leq \varphi(x)$. Potom existuje lineární zobrazení g prostoru P do H_1 takové, že $x \in P \Rightarrow |g(x)| \leq \varphi(x)$, $x \in L \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = f(x)$.*

Důkaz. Ježto P je zároveň reálný lineární prostor, vyplývá ihned z věty 1 na str. 27—28 v TOL, resp. věty **1,19** v NVP, že existuje reálná funkce ψ v P taková, že (1) $x \in P$, $y \in P$, α reálné $\Rightarrow \psi(x + y) = \psi(x) +$ $+ \psi(y)$, $\psi(\alpha x) = \alpha \psi(x)$; (2) $x \in L \Rightarrow \psi(x)$ se rovná reálné části $f(x)$; (3) $x \in P \Rightarrow |\psi(x)| \leq \varphi(x)$. Pro $x \in P$ položme $g(x) = \psi(x) - \mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x)$. Snadno se zjistí, že g je lineární zobrazení P do H_1. Když $x \in P$, pak pro vhodné $\alpha \in \mathsf{H}_1$, $|\alpha| = 1$, je $g(\alpha x)$ reálné, takže $|g(x)| = |g(\alpha x)| = |\psi(\alpha x)| \leq$ $\leq \varphi(\alpha x) = \varphi(x)$.

§ 2. Unitární prostory.

2,1. Nechť R je komplexní lineární prostor a nechť pro $x \in R$, $y \in R$ je definován *vnitřní součin* $(x, y) \in H_1$ tak, že pro x, y, z z R, α, β z H_1 platí (1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$; (2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $(x, \beta y) = \bar{\beta}(x, y)$; (3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$; (4) $x \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow (x, y) > 0$. Pak říkáme, že R s danou operací vnitřního součinu je *unitární prostor*. Pozměníme-li tuto definici tak, že R je reálný lineární prostor, (x, y) je vždy reálné, α, β jsou reálná, máme definici *euklidovského prostoru*.

Písmeno R, příp. s indexy, značí nadále v celém článku unitární prostor.

Je-li $Q \subset\subset R$, pak zřejmě Q je rovněž unitární prostor; říkáme, že je *vnořen* do R.

2,2. Příklady unitárních prostorů. (1) Označím H_∞ množinu všech posloupností $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\xi_n \in H_1$, takových, že $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$, se zřejmou definicí součtu a násobku a s vnitřním součinem $(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$. (2) R je množina spojitých komplexních funkcí v intervalu $\langle a, b\rangle$ se zřejmou definicí součtu a násobku a vnitřním součinem $(x, y) = \int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$. (3) R je množina skoroperiodických spojitých komplexních funkcí v $(-\infty, \infty)$ se zřejmou definicí součtu a násobku a vnitřním součinem $(x, y) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$.

2,3. *Pro* $x \in R$, $y \in R$ *platí* $|(x, y)|^2 \leqq (x, x)(y, y)$, $\sqrt{(x + y, x + y)} \leqq \leqq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$.

Dokážeme první nerovnost (jež je abstraktní formou t. zv. Schwarzovy čili Buňakovského nerovnosti). Zřejmě stačí předpokládat $(y, y) = 1$. Buď $\lambda = -(x, y)$. Jest $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqq 0$, tedy $(x, x) + \lambda(y, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda\bar{\lambda} \geqq 0$, tedy $(x, x) - (x, y)(y, x) \geqq 0$.

2,4. Když pro $x \in R$ položíme $|x| = \sqrt{(x, x)}$, pak jsou zřejmě splněny požadavky (1)—(3) z **1,6.** Unitární prostor R uvažujeme vždy s touto normou, tedy jako komplexní normovaný lineární prostor.

2,5. Položíme-li pro $x = \{\xi_i\} \in H_n$, $y = \{\eta_i\} \in H_n$ (viz **1,17**) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$, pak se H_n stává unitárním prostorem. Daná tím norma se shoduje s normou podle **1,17.**

2,6. *Když* $s = \Sigma_{\nu \in N} x_\nu$, $x_\nu \in R$, $a \in R$, *pak* $(s, a) = \Sigma_{\nu \in N}(x_\nu, a)$.

2,7. *Nechť* $x_\nu \in R$, $(x_\mu, x_\nu) = 0$ *pro* $\mu \neq \nu$. *Soubor* $\{x_\nu\}_{\nu \in N}$ *je součtově cauchyovský, když a jen když existuje* $\Sigma_{\nu \in N} |x_\nu|^2$. *Existuje-li* Σx_ν, *platí* $|\Sigma x_\nu|^2 = \Sigma |x_\nu|^2$.

Plyne z **1,12** (korolár) a rovnosti $\Sigma_{\nu \in M}|x_\nu|^2 = |\Sigma_{\nu \in M} x_\nu|^2$, jež pro konečnou M vyplývá ihned z předpokladu $(x_\mu, x_\nu) = 0$.

2,8. Říkáme, že $A \subset \mathsf{R}$, $B \subset \mathsf{R}$ jsou *navzájem orthogonální* a píšeme $A \perp B$, když $x \in A$, $y \in B \Rightarrow (x, y) = 0$. Když $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$, $A \subset \mathsf{R}$ píšeme ovšem $x \perp A$ místo $(x) \perp A$, $x \perp y$ místo $(x) \perp (y)$. Říkáme, že $M \subset \mathsf{R}$ je *orthogonální*, když $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y \Rightarrow (x, y) = 0$ a není $0 \in M$, *orthonormální*, když kromě toho $x \in M \Rightarrow |x| = 1$.

2,9. *Když $M \subset \mathsf{R}$ je orthonormální, $x \in \mathsf{R}$, pak soubor $\{(x, z) \,.\, z\}_{z \in M}$ je součtově cauchyovský a $\Sigma_{z \in M}|(x, z)|^2 \leqq |x|^2$.*

To plyne na základě **2,7** z nerovnosti $0 \leqq |x - \Sigma_{z \in K}(x, z) \,.\, z|^2 = |x|^2 - \Sigma_{z \in K}|(x, z)|^2$, platné pro konečnou $K \subset M$.

2,10. *Když $M \subset \mathsf{R}$ je fundamentální orthonormální množina, pak* (1) $x = \Sigma_{z \in M}(x, z)\, z$; (2) $|x|^2 = \Sigma_{z \in M}|(x, z)|^2$; (3) $(x, y) = \Sigma_{z \in M}(x, z)(z, y)$.

Důkaz. $\{(x, z)\, z\}_{z \in M}$ je podle **2,9** součtově cauchyovský, takže k důkazu (1) stačí dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ a každému konečnému $K' \subset M$ existuje konečná K tak, že $K' \subset K \subset M$, $|x - \Sigma_{z \in K}(x, z)\, z| < \varepsilon$. Ježto M je fundamentální, existuje konečná K taková, že $K' \subset K \subset M$, a soubor $\{\alpha_z\}_{z \in K}$ tak, že $|u| < \frac{1}{2}\varepsilon$, kde $u = x - \Sigma_{z \in K}\alpha_z z$. Podle **2,9** $\Sigma_{z \in K}|(u, z)|^2 \leqq |u|^2 < \frac{1}{4}\varepsilon^2$, t. j. $|\Sigma_{z \in K}((x, z) - \alpha_z)\, z|^2 = \Sigma_{z \in K}|(x, z) - \alpha_z|^2 < \frac{1}{4}\varepsilon^2$, takže K má žádanou vlastnost, ježto $|x - \Sigma_{z \in K}(x, z)\, z| \leqq |u| + |\Sigma_{z \in K}(\alpha_z - (x, z))\, z| < \varepsilon$. Ježto $|x|^2 - \Sigma_{z \in K}|(x, z)|^2 = |x - \Sigma_{z \in K}(x, z)\, z|^2$, máme zároveň důkaz (2). — Konečně, je-li $L \subset M$ konečná, $|u| < \varepsilon$, $|v| < \varepsilon$, kde $u = x - \Sigma_{z \in L}(x, z)\, z$, $v = y - \Sigma_{z \in L}(y, z) z$, pak podle **2,3** jest $|(x, y) - \Sigma_{z \in L}(x, z)(z, y)| = |(u, v)| \leqq |u|\,|v| < \varepsilon^2$. Z toho plyne (3).

2,11. *Je-li $A \subset \mathsf{R}$ orthogonální, $B \subset \mathsf{R}$ fundamentální, pak* card$A \leqq$ card$B$.

Důkaz. Smíme předpokládat, že A je orthonormální. Je-li B nekonečná, buď C množina $\sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$, $b_i \in B$, $\beta_i \in \mathsf{H}_1$ racionální. Pro $x \in A$ buď $z_x \in C$, $|x - z_x| < \frac{1}{2}$. Pro $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ je $|x - y| = \sqrt{2}$, tedy $z_x \neq z_y$. Tedy card$A \leqq$ card$C =$ card$B$. Je-li B konečná, je podle **1,18** (viz též BM **15,2,1**) $\mathsf{R} = [B]$, takže pro každé $x \in A$ je $x = \Sigma_{y \in B}\alpha_{xy} y$. Kdyby card$A >$ card$B$, pak pro vhodnou konečnou $D \subset A$ a vhodná λ_x, jež nejsou všechna rovná nule, platí $\Sigma_{x \in D}\lambda_x x = 0$, což je spor, neboť pro každé $y \in D$ dostáváme $0 = (\Sigma_{x \in D}\lambda_x x, y) = \lambda_y$.

2,12. *Je-li $M \subset \mathsf{R}$ spočetná neprázdná, pak existuje orthogonální $B \subset [M]$ tak, že $[B] = [M]$,* card$B \leqq$ card$M$.

Důkaz provedeme indukcí tak, že je-li $\{a_n\}$ prostá (konečná nebo nekonečná) posloupnost všech prvků z M, položíme $b_1 = |a_1|^{-1} a_1$, je-li $a_1 \neq 0$, jinak $b_1 = 0$, a dále $c_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_n, b_k)\, b_k$, $b_n = |c_n|^{-1} c_n$, je-li $c_n \neq 0$, jinak $b_n = 0$. Zřejmě $(b_m, b_n) = 0$ pro $m \neq n$, $|b_n| = 1$ pro $b_n \neq 0$. Označíme B množinu všech $b_n \neq 0$.

2,13. Když $L \subset\subset \mathsf{R}$, $x \in \mathsf{R}$, $y \in L$, $x - y \perp L$, říkáme, že y je *průmět* x na L. Zřejmě nemůže míti x na L dva různé průměty.

2,14. Když $L \subset\subset S \subset\subset \mathsf{R}$, pak lineál všech $x \in S$, $x \perp L$, nazveme *orthogonálním doplňkem* L v S a označíme $S \ominus L$.

2,15. Nechť $\{L_\nu\}_{\nu\in N}$ je soubor lineálů v R a $\mu \in N$, $\nu \in N$, $\mu \neq \nu \Rightarrow \Rightarrow L_\mu \perp L_\nu$. Nechť $L \subset\subset \mathsf{R}$ se skládá právě ze všech $x \in \mathsf{R}$, $x = \Sigma_{\nu\in N} x_\nu$, $x_\nu \in L_\nu$. Pak říkáme, že L je v prostoru R (*vnitřním*) *orthogonálním součtem* souboru $\{L_\nu\}$ a že tento soubor je v prostoru R *orthogonálním rozkladem* lineálu L.

Je evidentní, že k danému souboru $\{L_\nu\}$ navzájem orthogonálních lineálů v R existuje právě jeden lineál $L \subset\subset \mathsf{R}$, jenž je jeho součtem v R. Jsou-li však L_ν zároveň lineály v jiném prostoru R_1 (na př. je-li $\mathsf{R} \subset\subset \mathsf{R}_1$), může se orthogonální součet souboru $\{L_\nu\}$ v R_1 lišit od jeho orthogonálního součtu v R.

Je-li L v prostoru R orthogonálním součtem souboru $\{L_\nu\}$, píšeme $L = \bigoplus_{\nu\in N} L_\nu$; prostor R zde nevyznačujeme, neboť je obvykle patrný ze souvislosti. Místo $\bigoplus_{\nu=1,2}\{L_\nu\}$ píšeme ovšem $L_1 \oplus L_2$ a pod.

2,16. *Nechť $L \subset\subset \mathsf{R}$. Jestliže y je průmětem $x \in P$ na L, položme $y = \pi(x)$. Pak π je lineární zobrazení $L \oplus (\mathsf{R} \ominus L)$ na L, $\pi^{-1}(0) = \mathsf{R} \ominus L$ a platí $|\pi(x)| \leqq |x|$.*

2,17. *Má-li π význam z **2,16**, pak $v = \pi(u)$, když a jen když $|u - v| = = \inf_{z\in L}|u - z|$. Platí $|\pi(u)|^2 = (u, \pi(u)) = \sup_{z\in L, |z|\leqq 1}|(u, z)|^2$.*

Důkaz. Není-li $v = \pi(u)$, pak existuje $t \in L$ tak, že $(u - v, t) \neq 0$, tedy pro vhodné α je $(u - v, \alpha t) < 0$ a pro dostatečně malá $\varepsilon > 0$ platí $|u - (v - \varepsilon\alpha t)|^2 = |(u - v) + \varepsilon\alpha t|^2 = |u - v|^2 + 2\varepsilon(u - v, \alpha t) + \varepsilon^2|\alpha t|^2 < < |u - v|^2$. Ostatní plyne z $z \in L \Rightarrow |u - z| = |u - \pi(u)|^2 + |\pi(u) - z|^2$, $|(u, z)| = |(\pi(u), z)|$.

2,18. *Nechť $\bigoplus_{\nu\in N} L_\nu = L \subset\subset \mathsf{R}$. Potom* (1) *je-li $M \subset N$, je lineál $S = \bigoplus_{\nu\in M} L_\nu$ uzavřený v L a je orthogonální k $\bigoplus_{\nu\in N-M} L_\nu$;* (2) *je-li pro $\nu \in N$ $A_\nu \subset L_\nu$ fundamentální v L_ν, pak množinové spojení všech A_ν je fundamentální v L.* — To se dokáže na základě **2,7** a **2,6**.

2,19. Nechť $\{\mathsf{R}_\nu\}_{\nu\in N}$ je soubor unitárních prostorů. Nechť R je množina všech $\{x_\nu\}$, $x_\nu \in \mathsf{R}_\nu$, takových, že $\Sigma_{\nu\in N}|x_\nu|^2$ existuje. Zavedeme v R součet, násobek a vnitřní součin takto: je-li $x = \{x_\nu\}$, $y = \{y_\nu\}$, pak $x + y = \{x_\nu + y_\nu\}$ ($\Sigma|x_\nu + y_\nu|^2$ existuje, jak plyne z $|x_\nu + y_\nu|^2 \leqq \leqq 2|x_\nu|^2 + 2|y_\nu|^2$ a **1,12**), $\alpha x = \{\alpha x_\nu\}$, $(x, y) = \Sigma_{\nu\in N}(x_\nu, y_\nu)$ (tento součet existuje, jak plyne z **1,12** a z toho, že pro konečnou $M \subset N$ je $|\Sigma_{\nu\in M}(x_\nu, y_\nu)| \leqq \leqq \Sigma_{\nu\in M}|x_\nu| |y_\nu| \leqq \Sigma_{\nu\in M}|x_\nu|^2 + \Sigma_{\nu\in M}|y_\nu|^2$). R je pak, jak se snadno zjistí, unitární prostor. Nazýváme jej (*vnějším*) *orthogonálním součtem* souboru $\{\mathsf{R}_\nu\}$ a značíme $\bigoplus^e_{\nu\in N} \mathsf{R}_\nu$. Pro konečnou N píšeme také na př. $\mathsf{R}_1 \oplus^e \mathsf{R}_2$ a pod. Je-li S unitární prostor a pro každé $\nu \in N$ $\mathsf{R}_\nu = \mathsf{S}$, píšeme S^c, kde $c = \operatorname{card} N$, místo $\bigoplus^e_{\nu\in N} \mathsf{S}$.

2,20. *Je-li $\mathsf{R} = \bigoplus^e_{\nu\in N} \mathsf{R}_\nu$ a je-li L_ν lineál všech $\{x_\mu\} \in \mathsf{R}$ s $x_\mu = 0$ pro $\mu \neq \nu$, pak $\mathsf{R} = \bigoplus_{\nu\in N} L_\nu$.*

2,21. Lineární resp. antilineární zobrazení φ R do R' nazýváme (*unitárně*) *isomorfním* resp. *antiisomorfním*, když pro $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}$ platí $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$, resp. $(\varphi(x), \varphi(y)) = (y, x)$.

2,22. *Když* $L = \bigoplus_{\nu \in N} L_\nu \subset\subset \mathsf{R}$ *a pro* $x = \Sigma x_\nu \in L$, $x_\nu \in L_\nu$, *klademe* $\varphi(x) = \{x_\nu\}$, *pak* φ *je isomorfní zobrazení* L *do* $\bigoplus^{e}_{\nu \in N} L_\nu$.

§ 3. Úplné unitární prostory.

3,1. Úplný unitární prostor nekonečné dimense nazýváme (*komplexním*) HILBERTOVÝM *prostorem* (*v širším smyslu*); je-li jeho dimense spočetná, nazýváme jej (*komplexním*) HILBERTOVÝM *prostorem v užším smyslu*. Unitární prostor dimense n (podle **1,18** nutně úplný) nazýváme prostě *n-rozměrným unitárním prostorem*. Písmeno H, příp. s indexy, značí dále vždy úplný unitární prostor, H_∞ HILBERTŮV prostor v užším smyslu, H_n, n přirozené, n-rozměrný unitární prostor (a to H_1 vždy prostor komplexních čísel). — Poznamenáme ještě, že prostor H_∞ z **2,2**, (1) je skutečně úplný a má spočetnou dimensi, prostor R z **2,2**, (2) má spočetnou dimensi, není však úplný; prostor R z **2,2**, (3) je úplný a jeho dimense se rovná mohutnosti kontinua.

Je-li $\mathsf{R} \subset\subset \mathsf{H}$, $\overline{\mathsf{R}} = \mathsf{H}$, říkáme, že H je *úplný obal* R a označujeme H znakem $\tilde{\mathsf{R}}$.

3,2. *Každé* R *má úplný obal. Jsou-li* $\mathsf{H}^{(1)}$, $\mathsf{H}^{(2)}$ *úplné obaly prostoru* R, *pak existuje unitárně isomorfní zobrazení* φ $\mathsf{H}^{(1)}$ *na* $\mathsf{H}^{(2)}$ *takové, že* $x \in \mathsf{R} \Rightarrow \varphi(x) = x$.

Důkaz. Cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ prvků z R nazveme ekvivalentními, když $\lim(x_n - y_n) = 0$. Přiřadíme nyní každé cauchyovské posloupnosti $\{x_n\}$, $x_n \in \mathsf{R}$, jakýsi prvek, který označím $\lambda\{x_n\}$, a to tak, že (1) $\lambda\{x_n\} = \lambda\{y_n\}$, když a jen když $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou ekvivalentní, (2) je-li $\lim x_n = x$, je $\lambda\{x_n\} = x$. Množinu všech $\lambda\{x_n\}$ označím H (tím vlastně předbíhám výsledek důkazu) a položím $\lambda\{x_n\} + \lambda\{y_n\} = \lambda\{x_n + y_n\}$, $\alpha \,.\, \lambda\{x_n\} = \lambda\{\alpha x_n\}$, $(\lambda\{x_n\}, \lambda\{y_n\}) = \lim(x_n, y_n)$. Snadno se zjistí, že tím je v H definován jednoznačně (t. j. tak, že na př. $\xi + \eta$ závisí pouze na ξ, η, nikoli však na volbě posloupností $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ takových, že $\lambda\{x_n\} = \xi$, $\lambda\{y_n\} = \eta$) součet, násobek a vnitřní součin, splňující příslušné podmínky, takže H je unitárním prostorem. Je-li posloupnost $\{\xi_m\}$ prvků z H cauchyovská, $\xi_m = \lambda\{x_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$, pak v prostoru H platí $\lim_{n\to\infty} x_{m,n} = \xi_m$. Zvolíme-li pro každé m index $n = n(m)$ tak, že $|\xi_m - x_{m,n(m)}| < m^{-1}$, pak se snadno zjistí, že $\{x_{m,n(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ je cauchyovská a $\lim \xi_m = \lambda\{x_{m,n(m)}\}$. Tedy H je úplný. Zřejmě $\mathsf{R} \subset\subset \mathsf{H}$, $\overline{\mathsf{R}} = \mathsf{H}$, takže H je úplný obal R.

Když $\mathsf{H}^{(1)}$, $\mathsf{H}^{(2)}$ jsou úplné obaly R, pak pro $x \in \mathsf{H}^{(1)}$, $y \in \mathsf{H}^{(2)}$ položme $y = \varphi(x)$, když pro $z_n \in \mathsf{R}$ $z_n \to x$ (v $\mathsf{H}^{(1)}$), je $z_n \to y$ (v $\mathsf{H}^{(2)}$). Snadno se zjistí, že φ má žádané vlastnosti.

3,3. *Nechť* $\emptyset \neq K \subset \mathsf{R}$ *a* $x \in K,\ y \in K \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in K$. *Jestliže* $x_n \in K$, $\lim_{n\to\infty}|x_n| = \inf_{x\in K}|x|$, *pak* $\{x_n\}$ *je cauchyovská.*

To plyne z toho, že $|x_m| \to \delta = \inf_{x\in K}|x|$ a $|x_m - x_n|^2 = 2|x_m|^2 + 2|x_n|^2 - 4|\frac{1}{2}(x_m + x_n)|^2 \leq 2|x_m|^2 + 2|x_n|^2 - 4\delta^2$.

3,4. *Nechť* $\emptyset \neq K \subset \mathsf{R}$, *K je úplné a* $x \in K,\ y \in K \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in K$. *Potom existuje právě jeden prvek* $x \in K$ *takový, že* $y \in K \Rightarrow |y| \geqq |x|$.

Důkaz. Existuje $\{x_n\}$, $x_n \in K$, taková, že $\lim|x_n| = \delta = \inf_{x\in K}|x|$. Podle **3,3** je $\{x_n\}$ cauchyovská, tedy konvergentní. Je-li $x = \lim x_n$, je $|x| = \delta$. Když $x' \in K$, $|x'| = \delta$, pak podle **3,3** posloupnost $\{x, x', x, x', \ldots\}$ je cauchyovská, takže $x = x'$.

3,5. *Nechť* $L \subset\subset \mathsf{R}$ *je úplný. Pak každé* $x \in \mathsf{R}$ *má průmět na* L.

Důkaz. Buď $x \in \mathsf{R}$. Buď K množina všech $x - u$, $u \in L$. Podle **3,4** existuje $y \in L$ tak, že $z \in L \Rightarrow |x - z| \geqq |x - y|$. Podle **2,17** y je průmět x na L.

Korolár. *Je-li* $L \subset\subset \mathsf{R}$ *úplný,* $L \neq \mathsf{R}$, *pak existuje* $x \in \mathsf{R}$, $x \neq 0$, $x \perp L$. — Stačí zvolit $y \in \mathsf{R}$, y non $\in L$ a položit $x = y - z$, kde z je průmět y na L.

3,6. K důkazu následující věty **3,7** bychom mohli použít principu transfinitní indukce. Použijeme však jiné věty z obecné theorie množin, jež je ekvivalentní s větou o dobrém uspořádání, resp. s axiomem výběru, a které lze zpravidla používat mnohem jednoduššeji než principu transfinitní indukce.

Zornova věta. *Nechť Z je množina,* S *je systém jejích částí a platí: když* $M \subset Z$ *a* $K \in \mathsf{S}$ *pro každou konečnou* $K \subset M$, *pak* $M \in \mathsf{S}$. *Potom ke každé* $A \in \mathsf{S}$ *existuje* $B \in \mathsf{S}$ *tak, že platí* $A \subset B$ *a pro* $B \subset C$, $C \in \mathsf{S}$ *je* $B = C$.

Naznačím zhruba důkaz Zornovy věty na základě principu transfinitní indukce: položíme $A_0 = A$, pro $\xi > 0$ limitní položíme $A_\xi = \Sigma_{\eta<\xi}A_\eta$, pro $\xi = \eta + 1$ isolované zvolíme, je-li to možné, $A_\xi \in \mathsf{S}$, $A_\xi \supset A_\eta$, $A_\xi \neq A_\eta$; není-li to možné, ukončíme transfinitní posloupnost členem A_η. Z toho, že $M \subset Z$ patří do S, kdykoli každá konečná $K \subset M$ patří do S, vyplyne, že každá A_ξ patří do S. Je patrno, že posloupnost $\{A_\xi\}$ má poslední člen; ten má žádané vlastnosti.

3,7. *Je-li* $A \subset \mathsf{H}$ *orthonormální, pak existuje fundamentální orthonormální* $B \supset A$.

Důkaz. Buď S soustava všech orthonormálních částí H. Pak předpoklady Zornovy věty jsou splněny, takže existuje orthonormální $B \supset A$ taková, že je-li $C \supset B$ orthonormální, je $C = B$. Kdyby $[\overline{B}] \neq \mathsf{H}$, pak podle **3,5** (korolár) existuje $x \in \mathsf{H}$, $x \neq 0$, $x \perp B$, což vede ke sporu. Tedy B je fundamentální.

3,8. *Když* R_ν *jsou úplné, pak* $\mathsf{R} = \bigoplus^{e}_{\nu\in N}\mathsf{R}_\nu$ *je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$, $x_n = \{x_{n,\nu}\} \in \mathsf{R}$, $x_{n,\nu} \in \mathsf{R}_\nu$, je cauchyovská posloupnost. Ježto $|x_m - x_n|^2 = \Sigma_{\nu\in N}|x_{m,\nu} - x_{n,\nu}|^2$, je každá $\{x_{n,\nu}\}_{n=1}^{\infty}$

cauchyovská, tedy existují $x_\nu = \lim_{n\to\infty} x_{n,\nu}$. Ježto $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje k tak, že je vždy $|x_n|^2 \leqq k$, tedy pro každou konečnou $M \subset N$ $\Sigma_{\nu\in M}|x_{n,\nu}|^2 \leqq k$ a odtud (přechodem $n \to \infty$) $\Sigma_{\nu\in M}|x_\nu|^2 \leqq k$. Z toho snadno plyne: $\Sigma_{\nu\in N}|x_\nu|^2$ existuje, $x = \{x_\nu\} \in \mathsf{R}$. Podobně se nyní dokáže, že $x = \lim x_n$.

3,9. *Jsou-li $L_\nu \subset\subset \mathsf{H}$ uzavřené, $L = \bigoplus L_\nu$, pak isomorfní zobrazení φ z **2,22** zobrazuje L na $\bigoplus^e L_\nu$, takže L je úplný.*

Důkaz. Když $\{x_\nu\} \in \bigoplus^e L_\nu$, pak $\Sigma|x_\nu|^2$ existuje, tedy podle **2,7** $\{x_\nu\}$ je součtově cauchyovský, tedy existuje $x = \Sigma x_\nu \in L$. Jest $\varphi(x) = \{x_\nu\}$. Tedy φ zobrazuje L na $\bigoplus^e L_\nu$, načež úplnost L plyne z **3,8**.

3,10. *Je-li $L \subset\subset \mathsf{R}$ úplný, pak $\mathsf{R} = L \oplus (\mathsf{R} \ominus L)$, $L = \mathsf{R} \ominus (\mathsf{R} \ominus L)$.* — To plyne z **3,5** a **2,16**.

3,11. *Nechť $M \subset \mathsf{R}$, $M_1 \subset \mathsf{R}_1$ jsou fundamentální orthonormální množiny, R_1 je úplný, ψ je prosté zobrazení M do M_1. Pak existuje právě jedno isomorfní zobrazení φ prostoru R do R_1 takové, že $x \in M \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x)$.*

Důkaz. Pro $x \in \mathsf{R}$ položím $\varphi(x) = \Sigma_{z\in M}(x, z)\,\psi(z)$ (viz **2,10**; **2,9** a **1,12**). Snadno se zjistí, že φ má žádané vlastnosti.

3,12. Jestliže existuje isomorfní zobrazení R na R_1, říkám, že jsou R a R_1 *isomorfní.*

3,13. *Když* $\dim \mathsf{H} = \dim \mathsf{H}'$, *pak* H *a* H' *jsou isomorfní.*

Důkaz. Podle **3,7** existují fundamentální orthonormální $M \subset \mathsf{H}$, $M' \subset \mathsf{H}'$. Podle **2,11** je $\operatorname{card} M = \dim \mathsf{H} = \dim \mathsf{H}' = \operatorname{card} M'$, takže existuje prosté zobrazení ψ M na M'. Použijeme nyní **3,11** (na ψ i na ψ^{-1}).

§ 4. Spojitá lineární zobrazení.

V celém paragrafu značí písmeno P, příp. s indexy, komplexní normovaný lineární prostor.

4,1. Lineární nebo antilineární zobrazení φ prostoru P do P_1 nazývám *omezeným*, když existuje c takové, že $x \in P \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq c|x|$. Existuje pak nejmenší takové $c \geqq 0$; značím je $|\varphi|$ a nazývám *normou* zobrazení φ. Není-li φ omezené, říkám, že má *nevlastní normu* $|\varphi| = \infty$.

Poznámka. Dále mluvím všude jen o lineárních zobrazeních. Pro antilineární zobrazení platí obdobné věty.

4,2. *Lineární zobrazení je omezené, když a jen když je spojité.*

4,3. Příklady. (1) Je-li $x \in C(K)$ (viz **1,7**), $y \in C(K_1)$, kde K_1 je pevně zvolená kompaktní část K, a $t \in K_1 \Rightarrow y(t) = x(t)$, kladu $y = \varphi(x)$. Pak φ je spojité lineární zobrazení $C(K)$ na $C(K_1)$, $|\varphi| = 1$. — (2) Nechť K je interval $\langle 0, 1\rangle$. Nechť F je pevně zvolená spojitá funkce ve čtverci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Je-li $x \in C(K)$, $y \in C(K)$, $y(t) = \int_0^1 F(t, s)\, x(s)\, ds$, kladu

$y = \psi(x)$. Snadno se zjistí, že ψ je spojité lineární zobrazení $C(K)$ do $C(K)$, $|\psi| = \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 |F(t, s)|\, ds$.

4,4. *Nechť φ je omezené lineární zobrazení P do P_1. Je-li soubor $\{x_\nu\}$, $x_\nu \in P$, součtově cauchyovský, pak také $\{\varphi(x_\nu)\}$ je součtově cauchyovský. Má-li $\{x_\nu\}$ součet, pak $\Sigma\varphi(x_\nu) = \varphi(\Sigma x_\nu)$.*

4,5. *Množina spojitých lineárních zobrazení P do P_1 s operacemi podle* **1,4** *a normou podle* **4,1** *je normovaný lineární prostor. Je-li P_1 úplný, je tento prostor úplný.*

Úmluva. Označujeme tento prostor $[P \to P_1]$.

Důkaz provedeme pouze pro druhé tvrzení. Buď $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in [P \to P_1]$, cauchyovská, P_1 úplný. Pak každá $\{\varphi_n(x)\}$ je cauchyovská, tedy existuje $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$. Ježto $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská, je $\sup|\varphi_n| = c < \infty$, tedy $x \in P \Rightarrow |\varphi_n(x)| \leq c|x|$ pro $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow |\varphi(x)| \leq c|x|$. Tedy $\varphi \in$ $\in [P \to P_1]$ a snadno se zjistí, že $|\varphi_n - \varphi| \to 0$.

4,6. *Je-li $L \subset\subset P$, $\bar{L} = P$, P_1 úplný, $\varphi \in [L \to P_1]$, pak existuje právě jedno $\psi \in [P \to P_1]$ takové, že $x \in L \Rightarrow \psi(x) = \varphi(x)$. Jest $|\psi| = |\varphi|$.*

4,7. *Nechť $M \subset [P \to P_1]$. Když lineál L těch prvků z P, pro něž $\sup_{\varphi\in M}|\varphi(x)| < \infty$, je hustý v P a v sobě 2. kategorie, pak $L = P$ a M je omezená.*

Poznámka. Jak se snadno zjistí (viz též BM, cvičení **12,14**), je lineál L 2. kategorie v P, když a jen když je 2. kategorie v sobě a hustý v P.

Důkaz. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď B_n množina $x \in P$ takových, že $\varphi \in$ $\in M \Rightarrow |\varphi(x)| \leq n$. Pak $L = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, B_n jsou uzavřené. Je-li L v sobě 2. kategorie (BM **12,3**) a hustý v P, pak některá B_p není řídká v L, tedy (BM, cvičení **12,6**) není řídká v P, takže existuje $b \in B_p$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $x \in P$, $|x - b| < \varepsilon \Rightarrow x \in B_p \Rightarrow$ pro $\varphi \in M$ je $|\varphi(x)| \leq p$. Z toho plyne: $z \in P$, $|z| < \varepsilon$, $\varphi \in M \Rightarrow |\varphi(z)| \leq 2p$, tedy $\varphi \in M \Rightarrow |\varphi| \leq 2p\varepsilon^{-1}$. Zřejmě pak $L = P$.

4,8. *Nechť pro $n = 1, 2, \ldots$ je $\varphi_n \in [P \to P_1]$ a nechť L je lineál těch $x \in P$, pro něž $\{\varphi_n(x)\}$ je cauchyovská. Je-li L hustý v P a v sobě 2. kategorie, pak $L = P$ a $\{\varphi_n\}$ je omezená. Je-li $\{\varphi_n\}$ omezená, pak L je uzavřené.*

Důkaz. Je-li $\sup|\varphi_n| = c < \infty$, $x_k \in L$, $x_k \to x$, buď $\varepsilon > 0$. Pak pro vhodné k platí pro každé n $|\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x)| \leq c|x_k - x| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Ježto $x_k \in L$, je $|\varphi_m(x_k) - \varphi_n(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ pro velká m, n. Z těchto nerovností plyne $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$ pro velká m, n. Tedy $\{\varphi_n(x)\}$ je cauchyovská, $x \in L$; tedy L je uzavřené. — Nechť L je hustý v P a v sobě 2. kategorie. Ježto L je částí lineálu těch $x \in P$, pro něž $\{\varphi_n(x)\}$ je omezená, odvodí se z **4,7** (a poznámky k **4,7**) snadno, že $\{\varphi_n\}$ je omezená, tedy L je uzavřené, $L = \bar{L} = P$.

4,9. Říkáme, že množina lineárních zobrazení $M \subset [P \to P_1]$ je *bodově omezená*, když pro každé $x \in P$ množina všech $\varphi(x)$, $\varphi \in M$, je omezená. Říkáme, že posloupnost $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in [P \to P_1]$, je *bodově cauchyovská*, resp. že *bodově konverguje k* $\varphi \in [P \to P_1]$, když pro každé $x \in P$ $\{\varphi_n(x)\}$ je bodově cauchyovská, resp. konverguje k $\varphi(x)$.

4,10. *Je-li* $M \subset [P \to P_1]$ *omezená, je bodově omezená; je-li bodově omezená a je-li* P *v sobě 2. kategorie, pak je omezená.* — To plyne z **4,7**.

4,11. *Pro posloupnost zobrazení* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *platí tyto implikace vlastností: cauchyovská* $\Rightarrow$ *bodově cauchyovská* $\Rightarrow$ *bodově omezená; konverguje k* φ $\Rightarrow$ *bodově konverguje k* φ.

4,12. *Konvergují-li* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *bodově k* $\varphi \in [P \to P_1]$, *je* $|\varphi| \leq \leq \underline{\lim}|\varphi_n|$.

4,13. *Nechť posloupnost zobrazení* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *je omezená. Když pro každé* $x \in A$, *kde* $A \subset P$ *je fundamentální,* $\{\varphi_n(x)\}$ *je cauchyovská, resp. konverguje k* $\varphi(x)$, *kde* $\varphi \in [P \to P_1]$, *pak* $\{\varphi_n\}$ *je bodově cauchyovská, resp. konverguje bodově k* φ.

Důkaz provedeme jen pro první tvrzení. Buď $z \in P$. Když $\varepsilon > 0$, pak pro vhodné $y \in [A]$ je $|\varphi_n(z) - \varphi_n(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ pro každé n. Ježto $\{\varphi_n(y)\}$ je cauchyovská, je $|\varphi_m(y) - \varphi_n(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ pro velká m, n. Z uvedených nerovností plyne: pro velká m, n je $|\varphi_m(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon$. Tedy $\{\varphi_n(z)\}$ je cauchyovská.

4,14. *Je-li* P_1 *úplný, pak každá omezená bodově cauchyovská posloupnost zobrazení* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *je bodově konvergentní.*

Důkaz. Je-li $\sup|\varphi_n| = c < \infty$ a klademe-li pro $x \in P$ $\varphi(x) = \lim\varphi_n(x)$, jest $x \in P \Rightarrow |\varphi(x)| \leq c|x|$, tedy $\varphi \in [P \to P_1]$.

4,15. *Je-li* P *v sobě 2. kategorie,* P_1 *úplný, pak každá bodově cauchyovská posloupnost zobrazení* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *je bodově konvergentní.* — To plyne z **4,11**; **4,10**; **4,14**.

4,16. *Je-li* $\dim P$ *spočetná,* $\dim P_1$ *konečná, pak z každé omezené posloupnosti zobrazení* $\varphi_n \in [P \to P_1]$ *lze vybrat bodově konvergentní posloupnost.*

Důkaz. Podle **1,18** je P_1 lokálně kompaktní. Z toho se snadno odvodí, že pro $c > 0$ je množina všech $x \in P_1$, $|x| \leq c$, kompaktní. Z toho pak plyne, že z každé $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in P$, lze vybrat konvergentní posloupnost. Nechť nyní $A \subset P$ je spočetná fundamentální. Známou „diagonální" methodou (užívá se jí na př. na začátku důkazu věty BM **16,7**) dokážeme, že z $\{\varphi_n\}$ lze vybrat posloupnost $\{\varphi_n'\}$ tak, že $x \in A \Rightarrow \{\varphi_n'(x)\}$ je konvergentní. Z **4,13**, úplnosti P_1 (viz **1,18**) a **4,14** plyne nyní tvrzení.

4,17. *Nechť* $\varphi \in [P \to P_1]$, P *je úplný. Pak množina všech* $\varphi(x)$, $|x| < 1$, *je buď řídká anebo otevřená v* P_1 *a množina* $\varphi(P)$ *je buď v sobě 1. kategorie anebo úplná.*

Důkaz vynecháváme. Je proveden (pro reálné normované lineární prostory; pro komplexní je však stejný) v TOL, str. 38 a NVP **4,1**; **4,2**; **4,3**.

4,18. Uvádíme příklad bodově konvergentní posloupnosti. Buď $K = \langle -1, 1 \rangle$, $P = C(K)$ (viz **1,17**). Je-li $x \in P$, $y \in P$ a $-1 \leq t \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y(t) = x(n^{-1}t) - x(0)$, položme $y = \varphi_n(x)$. Pak $\varphi_n \in [P \to P]$, $|\varphi_n| = 2$. Zřejmě $x \in P \Rightarrow \varphi_n(x) \to 0$, takže φ_n konverguje bodově k $0 \in [P \to P]$.

§ 5. Lineární funkcionály. Slabá konvergence.

V celém paragrafu značí písmeno P, příp. s indexy, komplexní normovaný lineární prostor.

5,1. Spojité lineární zobrazení P do H_1 nazýváme *lineární funkcionálou* v P. Místo $[P \to \mathsf{H}_1]$ píšeme $[P \to]$. Z **4,5** plyne, že $[P \to]$ je úplný.

5,2. Příklady. Je-li pro $x \in P = C(K)$ $f(x) = x(t_0)$, $t_0 \in K$ pevné, pak $f \in [P \to]$ a taková f tvoří fundamentální množinu v $[P \to]$. Když $K = \langle a, b \rangle$ a $f(x)$ se rovná pro $x \in P = C(K)$ Stieltjesovu integrálu $\int_a^b x(t) \, \mathrm{d}F(t)$, kde F je funkce s konečnou variací, pak $f \in [P \to]$.

5,3. *Když $L \subset\subset P$, $f \in [L \to]$, pak existuje $g \in [P \to]$ tak, že $x \in L \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x) = f(x)$ a $|g| = |f|$.*

Plyne z **1,20**, když tam položíme $\varphi(x) = |f|\,|x|$.

5,4. *Když $L \subset\subset P$, $a \in P$, $\varrho(a, L) > 0$, pak existuje $g \in [P \to]$ tak, že $|g| = 1$, $g(a) = \varrho(a, L)$ a $x \in L \Rightarrow g(x) = 0$.*

Plyne z **1,20** když tam klademe $\varphi(x) = \varrho(x, L)$ pro $x \in P$ a $f(x) =$ $= \alpha\varrho(a, L)$ pro $x = \alpha a$.

Korolár. *Jestliže P obsahuje prvky různé od nuly, pak platí:* (1) *Ke každému $a \in P$ existuje $f \in [P \to]$ tak, že $|f| = 1$, $f(a) = |a|$;* (2) *je-li K množina $f \in [P \to]$ takových, že $|f| = 1$, pak pro $x \in P$ platí $|x| =$ $= \sup_{f \in K} |f(x)|$.*

5,5. *Když $x \in \tilde{\mathsf{R}}$ a pro $u \in \mathsf{R}$ je $f(u) = (u, x)$, pak $f \in [R \to]$ a $|f| = |x|$. Obráceně, ke každému $f \in [\mathsf{R} \to]$ existuje právě jeden prvek $x \in \tilde{\mathsf{R}}$ takový, že $u \in \mathsf{R} \Rightarrow f(u) = (u, x)$.*

Důkaz. První tvrzení plyne z toho, že $|(u, x)| \leq |u|\,|x|$ a pro $u_n \to x$ je $|(u_n, x)| - |u_n|\,|x| \to 0$. Buď $f \in [\mathsf{R} \to]$. Buď $L = f^{-1}(0)$, $\bar{L}$ uzávěr L v $\tilde{\mathsf{R}}$. Z **3,5** (korolár) plyne, že existuje $z \in \tilde{\mathsf{R}}$ tak, že $z \perp \bar{L}$, $|z| =$ $= |f|$. Snadno se zjistí, že pro vhodné $\alpha \in \mathsf{H}_1$ má $x = \alpha z$ žádané vlastnosti.

5,6. *Každému $f \in [\mathsf{R} \to]$ přiřaďme (podle **5,5**) $\varphi(f) \in \tilde{\mathsf{R}}$ tak, že $(u, \varphi(f)) =$ $= f(u)$ pro každé $u \in \mathsf{R}$. Pak $[\mathsf{R} \to]$ s vnitřním součinem $(f, g) = (\varphi(g), \varphi(f))$ je úplný unitární prostor a φ je jeho unitárně antiisomorfní zobrazení na $\tilde{\mathsf{R}}$.* — To plyne z **5,5**.

Poznámky. 1. Snadno se zjistí (podle **5,5**), že norma, zavedená v $[\mathsf{R} \to]$ touto definicí vnitřního součinu, se shoduje s normou podle **4,1**. 2. Obdobné věty platí pro antilineární funkcionály (t. j. spojitá antilineární zobrazení R do H_1).

5,7. *Když $M \subset \tilde{\mathsf{R}}$ a lineál L těch $x \in \mathsf{R}$, pro něž* $\sup_{y \in M}|(x, y)| < \infty$, *je v sobě 2. kategorie a hustý v* R, *pak M je omezená, $L = \mathsf{R}$.* — To plyne z **4,7** a **5,5**.

5,8. *Nechť $A \subset P$. Když lineál L těch $\varphi \in [P \to]$, pro něž $\varphi(A)$ je omezená, je v sobě 2. kategorie a hustý v $[P \to]$, pak A je omezená, $L = [P \to]$.*

Obdobně jako v **4,7** dokážeme: pro vhodná $\varepsilon > 0$, $p > 0$ platí $\varphi \in [P \to]$, $|\varphi| < \varepsilon$, $x \in A \Rightarrow |\varphi(x)| \leqq 2p$. Podle **5,4** (korolár) je pak $x \in A \Rightarrow |x| \leqq 2p\varepsilon^{-1}$. Zřejmě pak $L = [P \to]$.

5,9. *Nechť $x_n \in P$ $(n = 1, 2, \ldots)$, L je lineál všech $\varphi \in [P \to]$, pro něž $\{\varphi(x_n)\}$ je cauchyovská. Je-li L v sobě 2. kategorie a hustý v $[P \to]$, pak $\{x_n\}$ je omezená. Je-li $\{x_n\}$ omezená, pak L je uzavřený.*

První tvrzení plyne z **5,8** (viz též poznámku k **4,7**), druhé se dokáže obdobně (s vyměněnými úlohami φ a x) jako druhé tvrzení **4,8**.

5,10. Říkáme, že $A \subset P$ je *slabě omezená*, když každá $f(A)$, $f \in [P \to]$, je omezená. Říkáme, že posloupnost prvků $x_n \in P$ je *slabě cauchyovská*, resp. *slabě konverguje k $x \in P$*, když každá $\{f(x_n)\}$, $f \in [P \to]$, je cauchyovská, resp. konverguje k $f(x)$.

5,11. Příklady. (1) V prostoru H_∞ z **2,2** platí: prvky $x_m = \{\xi_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergují slabě k $x = \{\xi_n\}$, když a jen když $\{x_m\}$ je omezená a pro každé n je $\lim_{m\to\infty} \xi_{m,n} = \xi_n$. (2) V prostoru $C(K)$ (viz **1,7**) platí: x_n konvergují slabě k x, když a jen když $\{x_n\}$ je omezená, $x_n(t) \to x(t)$ pro každé $t \in K$. (3) Když $K = \langle 0, 1 \rangle$, $x_n \in C(K)$, $x_n(t) = t^n$, pak $\{x_n\}$ je slabě cauchyovská, ale není slabě konvergentní.

5,12. *Množina $A \subset P$ je slabě omezená, když a jen když je omezená.*

To plyne z **5,8**, **4,5** a toho, že úplný prostor je v sobě 2. kategorie (BM **15,8,2**).

5,13. *Pro posloupnost prvků $x_n \in P$ platí tyto implikace vlastností: cauchyovská $\Rightarrow$ slabě cauchyovská $\Rightarrow$ slabě omezená $\Leftrightarrow$ omezená; konvergentní $\Rightarrow$ slabě konvergentní $\Rightarrow$ slabě cauchyovská.*

5,14. *Když $x_n \in P$ konvergují slabě k $x \in P$, pak $|x| \leqq \underline{\lim}|x_n|$.*

Důkaz. Buď $\underline{\lim}|x_n| = c < \infty$. Pak $f \in [P \to] \Rightarrow |f(x)| \leqq c|f|$, takže podle **5,4** (korolár 2) je $|x| \leqq c$.

5,15. *Nechť posloupnost prvků $x_n \in P$ je omezená. Nechť pro každé $f \in M$, kde $M \subset [P \to]$ je fundamentální, $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská, resp. konverguje k $f(x)$, kde $x \in P$. Pak $\{x_n\}$ je slabě cauchyovská, resp. slabě konverguje k x.*

Důkaz provedeme pro druhé tvrzení. Buď $\sup|x_n| = c < \infty$ a buď $\varepsilon > 0$. Buď $f \in [P \to]$. Pro vhodné $g \in [M]$ je $|f(x_n) - g(x_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ pro každé n, dále $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Ježto $g(x_n) \to g(x)$, je pro velká n $|g(x_n) - g(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Z těchto nerovností plyne pro velká n $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

5,16. *Když $x_n \in P$ konvergují slabě k $x \in P$, pak existují α_{nk} tak, že* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k = x$.

Důkaz. Buď $A \subset P$ množina všech x_n. Kdyby $\delta = \varrho(x, [A]) > 0$, pak by podle **5,4** existovalo $f \in [P \to]$ tak, že $f(x) = \delta$ a $z \in [A] \Rightarrow f(z) = 0$. To však je ve sporu se slabou konvergencí $\{x_n\}$ k x. Tedy $\varrho(x, [A]) = 0$, z čehož plyne tvrzení.

5,17. *Nechť φ je spojité lineární zobrazení P do P_1. Když $x_n \in P$ a $\{x_n\}$ je slabě cauchyovská, resp. slabě konverguje k $x \in P$, pak $\{\varphi(x_n)\}$ je slabě cauchyovská, resp. slabě konverguje k $\varphi(x)$.*

Důkaz. Když pro $f \in [P_1 \to]$, $x \in P$ položím $g(x) = f(\varphi(x))$, pak $g \in [P \to]$, takže je-li $\{x_n\}$ slabě cauchyovská, je $\{f(\varphi(x_n))\}$ cauchyovská pro každé $f \in [P \to]$.

5,18. *Je-li* $\dim[P \to]$ *spočetná, pak z každé omezené posloupnosti prvků $x_n \in P$ lze vybrat slabě cauchyovskou posloupnost.*

Důkaz. Buď $M \subset [P \to]$ spočetná fundamentální. „Diagonální" methodou (viz důkaz **4,16**) ukážeme, že z $\{x_n\}$ lze vybrat $\{x_n'\}$ tak, že $f \in M \Rightarrow \{f(x_n')\}$ je cauchyovská. Z **5,15** plyne, že $\{x_n'\}$ je slabě cauchyovská.

5,19. *Slabě cauchyovská posloupnost prvků z H je slabě konvergentní.*

Důkaz. Buď $\{x_n\}$ slabě cauchyovská. Podle **5,13** je $\sup|x_n| = c < \infty$. Podle **5,5** pro každé $y \in \mathsf{H}$ posloupnost $\{(x_n, y)\}$, tedy též posloupnost $\{(y, x_n)\}$ je cauchyovská. Když položím $f(y) = \lim(y, x_n)$, pak $|f(y)| \leqq c|y|$, takže $f \in [\mathsf{H} \to]$, tedy podle **5,5** pro vhodné $x \in \mathsf{H}$ platí: $y \in \mathsf{H} \Rightarrow (y, x) = f(y) = \lim(y, x_n)$, takže $\{x_n\}$ slabě konverguje k x.

5,20. *V prostoru H_∞ lze z každé omezené posloupnosti vybrat posloupnost slabě konvergentní.*

To plyne z **5,18** a **5,19**, neboť podle **5,6** je $\dim[\mathsf{H}_\infty \to]$ spočetná.

5,21. Říkáme, že posloupnost zobrazení $\varphi_n \in [P \to P_1]$ je *slabě bodově cauchyovská*, resp. *slabě bodově konverguje k* $\varphi \in [P \to P_1]$, když pro každé $x \in P$ posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$ je v P_1 slabě cauchyovská, resp. slabě konverguje k $\varphi(x)$.

Úmluva. Slovo „bodově" zpravidla vynecháváme a říkáme pouze, že $\{\varphi_n\}$ je *slabě cauchyovská*, resp. *slabě konverguje*.

Poznámka. Je třeba rozlišovat mezi právě definovanými pojmy a pojmem slabě cauchyovské, resp. slabě konvergentní posloupnosti $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in [P \to P_1]$ ve smyslu definice **5,10** (s $[P \to P_1]$ místo P). Konvergencí v tomto smyslu se teď nezabýváme.

5,22. Příklad. Buď $K = \langle 0, 1 \rangle$, pro $t \in K$ buď $\psi_n(t) = t^{\sqrt{n}} - t^n$. Zřejmě $t \in K \Rightarrow \psi_n(t) \to 0$. Definuji $\varphi_n \in [P \to P]$, kde $P = C(K)$, takto: je-li $y = \varphi_n(x)$, potom pro $t \in K$, je $y(t) = x(\psi_n(t)) - x(0)$. Zřejmě $x \in P$, $t \in K \Rightarrow x(\psi_n(t)) - x(0) \to 0$, takže (viz **5,11**, (2)) každá $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in P$, konverguje slabě k 0, tedy $\{\varphi_n\}$ konverguje slabě k $0 \in [P \to P]$. Buď

$a(t) = t$ pro $t \in K$, takže $a \in P$. Snadno se zjistí, že $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\varphi_{n'}(a) - \varphi_n(a)| = 1$, takže $\{\varphi_n(a)\}$ není cauchyovská, $\{\varphi_n\}$ není bodově cauchyovská.

5,23. *Pro posloupnost zobrazení $\varphi_n \in [P \to P_1]$ platí tyto implikace vlastností: bodově cauchyovská $\Rightarrow$ slabě cauchyovská $\Rightarrow$ bodově omezená; bodově konvergentní $\Rightarrow$ slabě konvergentní $\Rightarrow$ slabě cauchyovská.*

* **5,24.** *Když zobrazení $\varphi_n \in [P \to P_1]$ konvergují slabě k $\varphi \in [P \to P_1]$, pak $|\varphi| \leq \overline{\lim}|\varphi_n|$.* — To plyne z **5,14.**

5,25. *Nechť $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in [P \to P_1]$, je omezená. Nechť pro každé $f \in M$, $x \in A$, kde $M \subset [P_1 \to]$, $A \subset P$ jsou fundamentální, posloupnost $\{f(\varphi_n(x))\}$ je cauchyovská, resp. konverguje k $f(\varphi(x))$, kde $\varphi \in [P \to P_1]$. Pak $\{\varphi_n\}$ je slabě cauchyovská, resp. konverguje slabě k φ.*

Důkaz vynecháváme, neboť je v podstatě kombinací důkazů vět **4,13** a **5,15**.

5,26. *Když* $\dim P$, $\dim[P_1 \to]$ *jsou spočetné, pak z každé omezené posloupnosti zobrazení $\varphi_n \in [P \to P_1]$ lze vybrat slabě cauchyovskou posloupnost.*

Důkaz. Podle **5,18** lze z každé $\{\varphi_n(x)\}$, kde $x \in P$, vybrat slabě cauchyovskou posloupnost. Nechť $A \subset P$ je spočetná fundamentální. „Diagonální" methodou (viz důkaz **4,16**) dokážeme, že z $\{\varphi_n\}$ lze vybrat $\{\varphi_n'\}$ tak, že pro $x \in A$ je $\{\varphi_n'(x)\}$ slabě cauchyovská, t. j. pro $f \in [P_1 \to]$, $x \in A$ je $\{f(\varphi_n'))\}$ cauchyovská. Použijeme nyní **5,25**.

5,27. *Slabě cauchyovská $\{\varphi_n\}$, kde $\varphi_n \in [P \to \mathsf{H}]$, je slabě konvergentní.* — To plyne z **5,19**; **4,7** a **5,14**.

5,28. *Je-li* $\dim P$ *spočetná, pak z každé omezené posloupnosti zobrazení $\varphi_n \in [P \to \mathsf{H}_\infty]$ lze vybrat slabě konvergentní posloupnost.* — To plyne z **5,26** a **5,27**.

§ 6. Lineární operátory.

V celém paragrafu značí P, příp. s indexy, komplexní normovaný lineární prostor.

6,1. Nechť jsou dány P, P_1 a lineární zobrazení A lineálu $L \subset\subset P$ do P_1. Pak říkám, že je dán *lineární operátor z P do P_1*. Lineární operátor je tedy vlastně trojice (P, P_1, A), kde A je lineární zobrazení $L \subset\subset P$ do P_1. Zpravidla však nerozlišuji mezi tímto operátorem a zobrazením A a značím je stejně. Lineál L nazývám *oborem* operátoru A a značím jej $\mathsf{D}A$. Nazývám někdy P *prostorem argumentů*, P_1 *prostorem hodnot* operátoru A. Místo $A(x)$, kde $x \in \mathsf{D}A$, píši zpravidla Ax. Množinu všech Ax, kde $x \in M \subset P$, značím $A(M)$. Je-li $P = P_1$, říkám, že A je lineární operátor v P nebo že A je *vnitřní lineární operátor*. Místo lineární operátor říkám většinou pouze operátor, protože jinými operátory než lineárními se zde nezabývám.

6,2. Příklad. Buď $K = \langle a, b\rangle$, $P = C(K)$. Pro $x \in P$, $y \in P$ buď

$y = Ax$, když a jen když pro každé $t \in K$ je $x(t) = \int_a^t y(t)\,dt + x(a)$. Pak A je lineární operátor v P, $\overline{\mathsf{D}A} = P$, $A(P) = P$, A není omezené.

6,3. Když A je operátor z P do P_1, A' je operátor z P' do P_1', $P' \subset\subset P$, $P_1' \subset\subset P$ a množina všech dvojic $(x, A'x)$ je částí množiny všech dvojic (x, Ax), říkáme, že operátor A' je *částí* operátoru A a píši $A' \subset A$. Je-li $P' = P$, $P_1' = P_1$, říkáme, že A' je *zúžení* A, A je *rozšíření* A'.

6,4. Násobek αA operátoru A definujeme ovšem podle **1,4**. Je-li $\{A_\nu\}_{\nu \in N}$ soubor operátorů z P do P_1, pak definuji součet tohoto souboru — operátor $\Sigma_{\nu\in N} A_\nu$ z P do P_1 takto: $(\Sigma A_\nu)\, x = \Sigma_{\nu\in N} A_\nu x$, kdykoli pravá strana má smysl. Tato definice je zřejmě ve shodě s **1,4**. Zřejmě $\mathsf{D}(\Sigma A_\nu) \subset \subset \Pi_{\nu\in N} \mathsf{D}A_\nu$.

Poznámka. Když $\mathsf{D}A_\nu = P$, A_ν jsou omezené, t. j. $A_\nu \in [P \to P_1]$, pak může existovat také součet ΣA_ν ve smyslu **1,9**, který je třeba rozlišovat od součtu ve smyslu **6,4**. Když jde o operátory a není řečen opak, jedná se vždy o součet podle **6,4**.

6,5. Nechť A je operátor z P do P_1, B je operátor z P_1 do P_2. Jejich *součin* AB je operátor z P do P_2, definovaný takto: $(AB)\, x = A(Bx)$, kdykoli pravá strana má smysl, t. j. $x \in \mathsf{D}B$, $Bx \in \mathsf{D}A$.

6,6. Jestliže operátor A z P do P_1 je prostý (BM **2,6**), definuji *inversní* operátor A^{-1} z P_1 do P takto: $y = A^{-1}x \Leftrightarrow x = Ay$.

6,7. Operátory O z P do P_1, I v P definuji takto: $x \in P \Rightarrow Ox = 0 \in \in P_1$, $Ix = x$. Nazýváme je *nulovým*, resp. *jednotkovým* operátorem (z P do P_1, resp. v P).

6,8. *Když A je operátor z P do P_1, A_ν, $\nu \in N$, jsou operátory z P_1 do P_2, pak $(\Sigma A_\nu)\, A = \Sigma(A_\nu A)$. Když A_i jsou operátory z P do P_1, A je operátor z P_1 do P_2, pak $A(\sum_{i=1}^n A_i) \supset \sum_{i=1}^n AA_i$.*

6,9. Říkáme, že operátor A z P do P_1 je *uzavřený*, když platí: jestliže $x_n \in \mathsf{D}A$, $\lim x_n = x \in P$, $\lim Ax_n = y \in P_1$, pak $x \in \mathsf{D}A$, $y = Ax$.

Zřejmě A je uzavřený když a jen když množina všech (x, Ax), $x \in \mathsf{D}A$, je uzavřená v kartézském součinu (BM **6,2**) P a P_1 (jako metrických prostorů).

6,10. Příklady uzavřených operátorů. (1) Mějme prostor H_∞ z **2,2**, (1). Pro $x = \{\xi_n\} \in \mathsf{H}_\infty$, $y = \{\eta_n\} \in \mathsf{H}_\infty$ položme $y = Ax$, když $\eta_n = n\xi_n$ pro každé n. A je prostý uzavřený neomezený operátor, $\mathsf{D}A$ je tedy (viz dále **6,18**) v sobě 1. kategorie; $A(\mathsf{H}_\infty) = \mathsf{H}_\infty$, A^{-1} je omezený. — (2) Buď L_2 množina všech měřitelných (sr. BM **21,4**) komplexních funkcí v daném intervalu (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, takových, že $\int_a^b |x(t)|^2\, dt < <\infty$; při tom považujeme dvě funkce za stejné, když se liší pouze na množině nulové míry. Definujeme v L_2 součet a násobek evidentním způsobem, vnitřní součin jako $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$. Snadno se zjistí, že L_2 je unitární prostor; lze dokázat, že je úplný a má spočetnou dimensi. Položme nyní pro $x \in \mathsf{L}_2$, $y \in \mathsf{L}_2$ $y = Ax$, když (1) pro každé $t \in (a, b)$ je $x(t) = x(c) + \int_c^t y(t)\,dt$, kde $c \in (a, b)$ je pevné, (2) $\lim_{x\to a} x(t) = 0$, $\lim_{x\to b} x(t) = 0$. Operátor A je uzavřený a není omezený. $\mathsf{D}A$ se skládá ze všech absolutně spojitých funkcí x v (a, b), splňujících podmínku (2) a takových, že $\int_a^b |x(t)|^2\,dt < \infty$, $\int_a^b |x'(t)|^2\,dt < \infty$; $\mathsf{D}A$ je v L_2 1. kategorie.

6,11. *Operátor A má uzavřené rozšíření, když a jen když platí: jestliže $x_n \in \mathsf{D}A$, $\lim x_n = 0$, $\lim Ax_n = y$, pak $y = 0$.*

Důkaz. Podmínka je zřejmě nutná. Je-li splněna, kladu pro $x \in P$ $y = Bx$, kdykoli existují $x_n \in \mathsf{D}A$ tak, že $\lim x_n = x$, $\lim Ax_n = y$. Snadno se zjistí, že B je lineární operátor, $B \supset A$. Nechť $z_n \in \mathsf{D}B$, $\lim z_n = z$, $\lim Bz_n = v$. Z definice operátoru B plyne: pro každé n existuje $x_n \in \mathsf{D}A$ tak, že $|x_n - z_n| < n^{-1}$, $|Ax_n - Bz_n| < n^{-1}$. Máme $\lim x_n = z$, $\lim Ax_n = v$, tedy $v = Bz$. Tedy B je uzavřený.

6,12. *Je-li A prostý uzavřený operátor, pak A^{-1} je též uzavřený.*

6,13. *Je-li A omezený operátor z P do P_1 a je-li lineál $\mathsf{D}A$ uzavřený v P, je A uzavřený.*

Důkaz. Když $x_n \in \mathsf{D}A$, $\lim x_n = x$, $\lim Ax_n = y$, pak $x \in \mathsf{D}A$, tedy podle **4,2** $\lim Ax_n = Ax$, $y = Ax$.

6,14. *Nechť B je omezený operátor z P do P_1, $\mathsf{D}B$ je uzavřené v P a nechť A je uzavřený operátor z P_1 do P_2. Pak operátor AB je uzavřený.*

Důkaz. Nechť $x_n \in \mathsf{D}(AB)$, $\lim x_n = x \in P$, $\lim ABx_n = y \in P_2$. Pak $x \in \mathsf{D}B$, takže $\lim Bx_n = Bx$, z čehož plyne $\lim A(Bx_n) = ABx$, $y = ABx$.

6,15. *Jsou-li A, B omezené operátory z P_1 do P_2, resp. z P do P_1, pak AB je omezený a jest $|AB| \leqq |A|\,|B|$.*

6,16. *Nechť A, B jsou operátory z P do P_1, A je uzavřený, B je omezený, lineál $\mathsf{D}B$ je uzavřený. Pak $A + B$ je uzavřený.*

Důkaz. Když $x_n \in \mathsf{D}(A + B) = \mathsf{D}A \,.\, \mathsf{D}B$, $\lim x_n = x$, $\lim(A + B)\,x_n = y$, pak $x \in \mathsf{D}B$, $\lim Bx_n = Bx$, tedy $\lim Ax_n = y - Bx$, $y - Bx = Ax$, $y = (A + B)\,x$.

6,17. *Omezený operátor A z P do úplného P_1 je uzavřený, když a jen když lineál $\mathsf{D}A$ je uzavřený.*

Důkaz. Když A je uzavřený, $x_n \in \mathsf{D}A$, $x_n \to x$, pak $\{Ax_n\}$ je cauchyovská, tedy existuje $y = \lim x_n$; z toho plyne $x \in \mathsf{D}A$, takže $\mathsf{D}A$ je uzavřený. Když $\mathsf{D}A$ je uzavřený, $x_n \in \mathsf{D}A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, pak $x \in \mathsf{D}A$ a máme $x_n - x \to 0$, z čehož plyne $Ax_n - Ax \to 0$, $Ax = y$, takže A je uzavřený.

6,18. *Když A je uzavřený operátor z úplného P do úplného P_1, pak buď A je neomezený a $\mathsf{D}A$ je v sobě 1. kategorie anebo A je omezený a $\mathsf{D}A$ je úplný.*

Důkaz. Pro $x \in \mathsf{D}A$ položme $|x|' = |x| + |Ax|$. Lineál $\mathsf{D}A$ s touto normou je normovaný lineární prostor; označíme jej P'. Když $\{x_n\}$, $x_n \in P'$, je v P' cauchyovská, pak zřejmě jsou cauchyovské též $\{x_n\}$ v P a $\{Ax_n\}$ v P_1, takže existují $x = \lim x_n$ (v P) a $y = \lim Ax_n$ (v P_1). Jest $y = Ax$, z čehož plyne $\lim |x_n - x|' = 0$. Tedy P' je úplný. Identické zobrazení φ prostoru P' na $\mathsf{D}A \subset\subset P$ je zřejmě omezené lineární zobrazení. Tedy podle **4,17** buď (1) obraz množiny všech $x \in P'$, $|x|' < 1$, je v $\mathsf{D}A$ řídký, takže $\mathsf{D}A$ je 1. kategorie v sobě a φ^{-1} není spojité anebo (2) zmíněný obraz je v $\mathsf{D}A$ otevřený, takže zobrazení φ^{-1} je omezené a $\mathsf{D}A$ je úplné.

V případě (1) nemůže A býti omezené, neboť pak by pro $x_n \in \mathsf{D}A$ platilo $|x_n| \to 0 \Rightarrow |Ax_n| \to 0 \Rightarrow |x_n|' = |x_n| + |Ax_n| \to 0$, takže φ^{-1} by bylo spojité, což je spor. V případě (2) platí pro $x_n \in \mathsf{D}A$ implikace $|x_n| \to 0 \Rightarrow |x_n|' \to 0 \Rightarrow |Ax_n| \to 0$, takže A je spojité.

6,19. *Když operátor A z P do P_1 je uzavřený a $\overline{A(P)} \subset\subset P_1$ je lokálně kompaktní, pak A je omezený.*

Důkaz. Předpokládejme, že A není omezený. Pak existují, jak se snadno zjistí, $x_n \in \mathsf{D}A$ tak, že $\lim x_n = 0$, $|Ax_n| = 1$. Z předpokladu se ihned odvodí, že množina $y \in P_1$, $|y| \leq 1$, je kompaktní; z toho plyne, že existuje vybraná z $\{Ax_n\}$ konvergentní posloupnost $\{Ax_n'\}$. Je-li $y = \lim Ax_n'$, je $|y| = 1$, $y = A0 = 0$, což je spor.

6,20. *Když A je uzavřený operátor z P do P_1, $\{x_\nu\}_{\nu \in N}$ je soubor prvků z P, $x = \Sigma x_\nu$, $y = \Sigma A x_\nu$, pak $y = Ax$.*

Důkaz. Z definice součtu souboru vyplývá: existují konečné množiny $K^n \subset N$ tak, že pro každé n je $K^n \subset K^{n+1}$ a položíme-li $s_n = \Sigma_{\nu \in K^n} x_\nu$, $t_n = \Sigma_{\nu \in K^n} A x_\nu$, jest $\lim s_n = x$, $\lim t_n = y$. Ježto zřejmě $t_n = As_n$, máme $y = Ax$.

6,21. Pro $\nu \in N$ buď A_ν lineární operátor z R_ν do R_ν'. *Vnějším orthogonálním součtem* souboru $\{A_\nu\}$ nazvu operátor A z $\mathsf{R} = \oplus^{\mathrm{e}}_{\nu \in N} \mathsf{R}_\nu$ do $\mathsf{R}' = \oplus^{\mathrm{e}}_{\nu \in N} \mathsf{R}_\nu'$, definovaný tak, že pro $x = \{x_\nu\} \in \mathsf{R}$, $y = \{y_\nu\} \in \mathsf{R}'$ je $y = Ax$, když a jen když $\nu \in N \Rightarrow y_\nu = A_\nu x_\nu$. Píšeme $A = \oplus^{\mathrm{e}}_{\nu \in N} A_\nu$; je-li N konečná, píšeme na př. $A_1 \oplus^{\mathrm{e}} A_2$ místo $\oplus^{\mathrm{e}}_{\nu = 1,2} A_\nu$ a pod.

6,22. Nechť A je lineární operátor z R do R' a nechť pro $\nu \in N$ je A_ν lineární operátor z $L_\nu \subset\subset \mathsf{R}$ do $L_\nu' \subset\subset \mathsf{R}'$. Nechť R je (v R) orthogonálním součtem souboru $\{L_\nu\}$, R' je (v R') orthogonálním součtem souboru $\{L_\nu'\}$ a nechť pro $x \in \mathsf{R}$, $y \in \mathsf{R}'$ je $y = Ax$, když a jen když $x = \Sigma x_\nu$, $y = \Sigma A_\nu x_\nu$. Pak říkáme, že operátor A je (*vnitřním*) *orthogonálním součtem* souboru $\{A_\nu\}$ a píšeme $A = \oplus_{\nu \in N} A_\nu$.

Zřejmě platí: když pro $\nu \in N$ L_ν je lineál v R, L_ν' je lineál v R', A_ν je operátor z L_ν do L_ν' a když R je orthogonálním součtem souboru $\{L_\nu\}$, R' je orthogonálním součtem souboru $\{L_\nu'\}$, pak existuje právě jeden operátor A z R do R', který je orthogonálním součtem souboru $\{A_\nu\}$. Může ovšem — za uvedených předpokladů — existovati operátor A' z jakéhosi R_1 do R_1', který je odlišný od A a je rovněž *orthogonálním* součtem souboru $\{A_\nu\}$.

6,23. Příklad. V prostoru H_∞ z **2,2**, (1) buď pro $k = 1, 2, \ldots$ L_k lineál všech $\{\xi_n\} \in H_\infty$, $\xi_n = 0$ pro $n \neq k$. Je-li A operátor z **6,10**, (1) a pro $n = 1, 2, \ldots$ I_n je jednotkový operátor v L_n, jest $A = \oplus_n nI_n$.

6,24. *Nechť $A = \oplus^{e}_{\nu \in N} A_\nu$, kde A_ν je z R_ν do R_ν'. Buď pro $\nu \in N$ L_ν lineál $\{x_\mu\} \in$ R takových, že $x_\mu = 0$ pro $\mu \neq \nu$, L_ν' lineál $\{y_\mu\} \in$ R' takových, že $y_\mu = 0$ pro $\mu \neq \nu$. Položme $y = A^{\mathrm{i}}_\nu x$, když a jen když $x = \{x_\mu\} \in L_\nu$, $y = \{y_\mu\} \in L_\nu'$, $y_\nu = A_\nu x_\nu$. Pak $A = \oplus_{\nu \in N} A^{\mathrm{i}}_\nu$.*

6,25. *Buď A operátor z R do R', A_ν (pro $\nu \in N$) operátor z L_ν do L_ν'. Buď $A = \oplus A_\nu$. Položme $A^{e} = \oplus^{e} A_\nu$. Buď φ, resp. ψ lineární zobrazení R do $\oplus^{e} L_\nu$, resp. R' do $\oplus^{e} L_\nu'$, definované v* **2,22**. *Potom A^{e} je rozšířením $\psi A \varphi^{-1}$. Jsou-li R a R' úplné, je $A^{e} = \psi A \varphi^{-1}$.*

6,26. *Nechť A je operátor z R do R' a pro $\nu \in N$ nechť A_ν je operátor z L_ν do L_ν'; nechť $A = \oplus A_\nu$. Nechť A_ν' je z R do R', $y = A_\nu' x$, kdykoli $y = A_\nu z$, kde z je průmět x na L_ν. Potom $A = \Sigma_{\nu \in N} A_\nu'$* (součet ve smyslu **6,4**).

6,27. *Nechť A je operátor z R' do R'', B je operátor z R do R' a pro $\nu \in N$ A_ν je operátor z L_ν' do L_ν'', B_ν je operátor z L_ν do L_ν'. Nechť $A = \oplus A_\nu$, $B = \oplus B_\nu$. Potom $AB \subset \oplus A_\nu B_\nu$.*

Nechť A je prostý operátor v R, $A = \oplus A_\nu$. Pak $A^{-1} = \oplus A_\nu^{-1}$.

6,28. *Když $A = \oplus A_\nu$, pak* $|A| = \sup |A_\nu|$.

6,29. *Když $A = \oplus A_\nu$, pak platí: A je uzavřený, když a jen když každý A_ν je uzavřený.*

Důkaz. Nechť každý A_ν je uzavřený. Buď $y_n = Ax_n$, $x_n = \Sigma_\nu x_{n\nu}$, $y_n = \Sigma_\nu A_\nu x_{n\nu}$; $x_n \to x = \Sigma x_\nu$, $y_n \to y = \Sigma y_\nu$. Pak $|y_n - y|^2 = \Sigma_\nu |A_\nu x_{n\nu} - y_\nu|^2$, $|x_n - x|^2 = \Sigma_\nu |x_{n\nu} - x_\nu|^2$, takže pro každé ν je $x_{n\nu} \to x_\nu$, $A_\nu x_{n\nu} \to y_\nu$, tedy $y_\nu = A_\nu x_\nu$, $y = Ax$.

6,30. Nechť A je operátor z R do R'. Říkáme, že $\{L_\nu\}$ *rozkládá orthogonálně* operátor A, jestliže existují $A_\nu \subset A$ a operátor B z R do R' tak, že L_ν je prostor argumentů operátoru A_ν a jest $A \subset B$, $B = \oplus A_\nu$. Jestliže A je operátor v R a lze volit A_ν tak, že jsou vnitřními operátory, říkáme, že $\{L_\nu\}$ (*orthogonálně*) *invariantně rozkládá* A.

Příklad. Nechť α_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ jsou komplexní čísla, $\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_{ki}$. Nechť pro $\{\xi_k\} \in H_n$ (viz **2,5** a **1,17**), $\{\eta_i\} \in H_n$ je $\{\eta_i\} = A\{\xi_k\}$, když $\eta_i = \Sigma_k \alpha_{ik} \xi_k$. Pak množina β takových, že pro vhodné $x \neq 0$ z H_n je $Ax = \beta x$, je konečná. Je-li $\{\beta_i\}_{i=1}^{p}$ prostá posloupnost všech takových β, L_i lineál všech x, pro něž $Ax = \beta_i x$, pak $\{L_i\}_{i=1}^{p}$ rozkládá invariantně operátor A.

Poznámka. Lze ukázat, že smysl definice **6,30** se nezmění, když v ní místo „operátor B z R do R'" píšeme pouze „operátor B".

6,31. *Jestliže $\{L_\nu\}$ rozkládá invariantně vnitřní operátory A, B v* R, *pak rozkládá také operátor $A + B$ a je-li A prostý, též operátor A^{-1}.*

6,32. Nechť A je operátor v R. Říkáme, že $L \subset\subset$ R je *invariantní vzhledem k A*, když $A(L) \subset L$ a každé $x \in$ DA má průmět y na L, $y \in$ DA.

6,33. *Když L_i $(i = 1, \ldots, n)$ jsou invariantní vzhledem k A a $L_i \perp L_j$ pro $i \neq j$, pak $L = \bigoplus_{i=1,\ldots n} L_i$ je též invariantní vzhledem k A.* — Plyne z toho, že je-li x_i projekce x na L_i, je Σx_i projekce x na L.

6,34. *Když $\{L_\nu\}$ invariantně rozkládá vnitřní operátor A, pak každé L_ν je invariantní vzhledem k A.*

6,35. *Nechť A je operátor v* R. *Nechť* R $= \bigoplus_{\nu \in N} L_\nu$ *a pro každé ν jsou L_ν a* R $\ominus L_\nu$ *invariantní vzhledem k A. Pak $\{L_\nu\}$ rozkládá A invariantně.*

Důkaz. Buď $y = Ax$. Pro $\nu \in N$ buď x_ν průmět x na L_ν, $z_\nu = x - x_\nu$. Pak $x_\nu \in$ DA, z_ν je průmět x na R $\ominus L_\nu$, tedy $z_\nu \in$ DA, takže $Ax = Ax_\nu + Az_\nu$ a jest $Ax_\nu \in L_\nu$, $Az_\nu \perp L_\nu$. Tedy Ax_ν je průmět y na L_ν. Z toho plyne $y = \Sigma Ax_\nu$. — Označíme-li A_ν operátor v L_ν takový, že $v = A_\nu u$, když a jen když $u \in L_\nu$, $v = Au$, máme $y = \Sigma A_\nu x_\nu$. Z toho snadno plyne $A \subset \bigoplus A_\nu$, z čehož vyplývá tvrzení.

6,36. *Nechť A je prostý operátor v* R. *Nechť $L \subset\subset$* R *a* R $\ominus L$ *jsou invariantní vzhledem k A. Pak jsou invariantní též vzhledem k A^{-1}.*

Důkaz. Buď $z \in$ DA^{-1} a buď $x = A^{-1}z$, takže $x \in$ DA. Buď u průmět x na L, $v = x - u$. Pak $u \in$ DA, $v \in$ DA a máme $z = Ax = Au + Av$, při čemž $Au \in L$, $Av \in$ R $\ominus L$, takže Au je průmět Ax na L Av je průmět Ax na R $\ominus L$. Z toho plyne tvrzení, neboť je-li $z \in L$, je $Av = 0$, tedy $v = A^{-1}Av = 0$, $x = u \in L$, a obdobně pro $z \in$ R $\ominus L$ je $x = v \in$ R $\ominus L$.

6,37. Nechť A je lineární operátor v R. Jestliže $x \in$ DA, $y \in$ DA $\Rightarrow$ $(Ax, y) = (x, Ay)$, říkáme, že A je *hermiteovský* operátor.

6,38. *Nechť A, B, A_ν pro $\nu \in N$ jsou hermiteovské operátory v* R. *Potom $\Sigma_{\nu \in N} A_\nu$ je hermiteovský operátor; je-li A prostý, je A^{-1} hermiteovský; je-li $AB = BA$, je AB hermiteovský.*

Dokážeme jen jedno tvrzení. Je-li $AB = BA$, pak pro $x \in$ DAB, $y \in$ DAB jest $Bx \in$ DA, $y \in$ DA, $x \in$ DB, $Ay \in$ DB, tedy $(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy) = (x, ABy)$.

6,39. *Když A je operátor v* R, *$A = \bigoplus A_\nu$, kde A_ν jsou vnitřní operátory, pak A je hermiteovský, když a jen když A_ν jsou hermiteovské.*

Důkaz. Buď $x \in$ DA, $y \in$ DA. Nechť A_ν je operátor v L_ν. Pak $x = \Sigma x_\nu$, $x_\nu \in L_\nu$, $y = \Sigma y_\nu$, $y_\nu \in L_\nu$, $Ax = \Sigma A_\nu x_\nu$, $Ay = \Sigma A_\nu y_\nu$, takže máme podle **2,6** $(Ax, y) = \Sigma(A_\nu x_\nu, y) = \Sigma(A_\nu x_\nu, \Sigma y_\mu) = \Sigma(A_\nu x_\nu, y_\nu) = \Sigma(x_\nu, A_\nu y_\nu) = \Sigma(x, A_\nu y_\nu) = (x, Ay)$.

6,40. *Nechť A je hermiteovský operátor v* R, *$L \subset\subset$* R *je invariantní vzhledem k A a jest $L \subset \overline{\text{D}A}$. Potom též* R $\ominus L$ *je invariantní vzhledem k A.*

Důkaz. Buď $x \in \mathsf{D}A$, u průmět x na L. Pak $u \in \mathsf{D}A$, takže $v = x - u \in \mathsf{D}A$, v je průmět x na $\mathsf{R} \ominus L$. Je-li $x \in \mathsf{R} \ominus L$, $x \in \mathsf{D}A$, pak $y \in L \,.\, \mathsf{D}A \Rightarrow (Ax, y) = (x, Ay) = 0$, takže $Ax \perp L \,.\, \mathsf{D}A$. Platí však $L \subset \overline{L \,.\, \mathsf{D}A}$, neboť je-li $z \in L$, $\varepsilon > 0$, existuje $t \in \mathsf{D}A$ tak, že $|z - t| < \varepsilon$ a zřejmě pak $|z - s| < \varepsilon$, kde s je průmět t na L, takže $s \in L \,.\, \mathsf{D}A$. Z toho plyne $Ax \perp L$, $Ax \in \mathsf{R} \ominus L$.

6,41. *Když A je hermiteovský operátor v* R, *pak*

$$sup_{|x|=1, |y|=1} |(Ax, y)| = sup_{|x|=1} |(Ax, x)|,$$

kde ovšem x, y probíhají lineál $\mathsf{D}A$.

Důkaz. Buď $x \in \mathsf{D}A$, $y \in \mathsf{D}A$, $|x| = 1$, $|y| = 1$. Pak pro vhodné α, $|\alpha| = 1$ je $(Ax, \alpha y)$ reálné, tedy, jak ihned plyne z toho, že pak $(Ax, \alpha y) = (A\alpha y, x)$, platí: $4(Ax, \alpha y) = (Au, u) - (Av, v)$, kde $u = x + \alpha y$, $v = x - \alpha y$. Tedy $4|(Ax, y)| \leqq |(Au, u)| + |(Av, v)| \leqq 4 \sup_{|x|=1}|(Ax, x)|$. Z toho plyne tvrzení.

6,42. *Když A je hermiteovský operátor v* R *a* $A\mathsf{R} \subset \overline{\mathsf{D}A}$, *pak* $|A| = \sup_{|x|=1}|(Ax, x)|$.

Důkaz. Nechť $c > 0$, $x \in \mathsf{D}A$, $|x| = 1$, $|Ax| > c$. Zřejmě existují $z_n \in \mathsf{D}A$ tak, že $|z_n| = 1$, $\lim z_n = |Ax|^{-1}Ax$, tedy $\lim|(Ax, z_n)| = |Ax|$, takže pro velká n je $|(Ax, z_n)| > c$. Ve spojení s **6,41** plyne z toho tvrzení.

6,43. Příklady hermiteovských operátorů. (1) Buď A operátor v prostoru H_n z **2,5** a **1,17**, definovaný takto: pro $i, k = 1, \ldots, n$ je $\alpha_{ik} \in \mathsf{H}_1$ $A\{\xi_k\} = \{\Sigma_k \alpha_{ik}\xi_k\}_i$. A je hermiteovský, když a jen když pro libovolná i, k je $\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_{ki}$. (2) Je-li A operátor z **6,10**, (2), je iA hermiteovský.

*

Linear operators I. This is the first part (§§ 1—6) of an expository article on the theory of linear operators (in HILBERT space, mainly.) Normed linear and unitary spaces, linear mappings and general properties of linear operators are considered. Headings of the paragraphs: § 1. Normed linear spaces. § 2. Unitary spaces. § 3. Complete unitary spaces. § 4. Continuous linear transformations. § 5. Linear functionals. Weak convergence. § 6. Linear operators.

BIRACIONÁLNÍ TRANSFORMACE A JEJICH ZOBRAZENÍ.

LUCIEN GODEAUX, profesor university v Liège (Belgie).

Z francouzštiny přeložil Dr Josef Metelka.

Souhrn z přednášek, čtených p. Lucienem Godeaux, profesorem na universitě v Liège, v květnu 1948 na Karlově universitě v Praze.

Tento článek jest propracováním jisté poznámky, kterou jsem uveřejnil v roce 1942 a kde jsem zobrazil páry bodů, odpovídajících si rovinnou biracionální transformací, na body jisté plochy [2].*)

*) Čísla v závorkách odkazují na seznam literatury, uvedený na konci.