Miroslav Katětov
Lineární operátory. II

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 76 (1951), No. 2, 105--119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117000

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 76 (1951)

LINEÁRNÍ OPERÁTORY II

MIROSLAV KATĚTOV, Praha.

(Došlo dne 30. června 1950.)

Tato druhá část referátu má stejně jako jeho první část (viz Čas. mat. fys. **75**, D9—D31 (1950)) přípravný ráz. § 7 je věnován bilineárním formám a formám druhého stupně. V § 8 se zabývám vlastnostmi adjungovaného operátoru a operátory normálními. Jejich vlastnosti, hlavně pak jejich vyjádření (t. zv. spektrální representace) pomocí projektorů (jimiž se zabývám v § 9) budou hlavním předmětem celého referátu.

§ 7. Bilineární formy a formy druhého stupně.

Bilineární formy a formy druhého stupně jsou (nehledě ani k tomu, že jsou důležité samy o sobě) velmi užitečným nástrojem theorie operátorů. Tvrzení o těchto formách, obsažená v tomto paragrafu, jsou ovšem vlastně jen více méně triviálními pomocnými větami.

7,1. Nechť je dán lineární prostor (v. **1,1**) P a komplexní funkce φ v kartézském součinu $S \times S$, kde $S \subset\subset P$, taková, že pro libovolná α, β z $\boldsymbol{H}_1$ a x, x_i, y, y_i z S platí: (1) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$; (2) $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$; (3a) $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\, \varphi(x, y)$; (3b) $\varphi(x, \beta y) = \bar{\beta}\, \varphi(x, y)$. Pak říkáme, že je dána *bilineární forma* φ v P. Lineál S nazývám *oborem* bilineární formy φ a značím jej $\mathbf{D}\varphi$; prostor P nazývám někdy *prostorem argumentů* formy φ. Bilineární forma je tedy vlastně dvojice (P, φ), kde P je lineární prostor, φ je funkce s vlastnostmi, které jsme právě uvedli; zpravidla však nerozlišuji mezi samotnou funkcí φ a bilineární formou jako dvojicí (P, φ); srovn. odst. **6,1**.

Poznámky. 1. Mohli bychom definovat bilineární formu též obecněji tak, že φ by byla komplexní funkce v $S_1 \times S_2$, kde $S_1 \subset\subset P_1$, $S_2 \subset\subset P_2$ a P_1, P_2 jsou lineární prostory.

2. Mohli bychom nahradit na př. požadavek (3b) požadavkem (3b′) $\varphi(x, \beta y) = \beta\, \varphi(x, y)$, čímž bychom dostali jiný pojem bilineární formy; tímto pojmem se však nebudeme zabývat.

7,2. Příklady. (1) Nechť $\boldsymbol{H}_n$ má význam z **1,17**; nechť α_{ik} ($i,k = 1, \ldots, n$) jsou komplexní čísla. Pro $x = \{\xi_i\} \in \boldsymbol{H}_n$, $y = \{\eta_k\} \in \boldsymbol{H}_n$ klademe $\varphi(x, y) = \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k$. (2) Vnitřní součin (v libovolném unitárním prostoru) je bilineární forma. (3) Nechť $\boldsymbol{H}_\infty$ má význam z **2,2**; nechť $S \subset\subset \boldsymbol{H}_\infty$ se skládá z $x = \{\xi_k\}$ takových, že $\Sigma k |\xi_k|^2 < \infty$. Pro $x =$

$= \{\xi_k\} \in S$, $\eta = \{\eta_k\} \in S$ buď $\varphi(x, y) = \Sigma k \xi_k \bar{\eta}_k$. Pak je φ bilineární forma v $\boldsymbol{H}_\infty$, $\mathbf{D}\varphi = S$.

7,3. Nechť je dán lineární prostor P a komplexní funkce Q v $S \subset\subset P$ taková, že pro x, y, z z P a λ z $\boldsymbol{H}_1$ platí (1) $Q(x + y + z) - Q(x + y) - Q(y + z) - Q(z + x) + Q(x) + Q(y) + Q(z) = 0$; (2) $Q(\lambda x) = |\lambda|^2 . Q(x)$; (3) $\lim\limits_{\lambda \to 0} Q(x + \lambda y) = Q(x)$. Pak říkáme, že je dána *(hermitovská) forma druhého stupně* Q v P; lineál S nazývám *oborem* formy Q a značím $\mathbf{D}Q$. — Obdobně jako bilineární forma, je forma druhého stupně vlastně dvojice (P, Q), kde Q je funkce v $S \subset\subset P$.

Poznámky. 1. Kdybychom nahradili podmínku (2) podmínkou (2') $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$, dostali bychom jiný typ formy druhého stupně; nebudeme se jím však zabývat. — 2. Lze ukázat, že podmínka (3) je podstatná a že ji nemůžeme vynechat, jestliže chceme, aby každá forma druhého stupně Q v $\boldsymbol{H}_n$ se dala vyjádřit v obvyklém tvaru $Q(x) = \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k$, kde $\{\xi_i\} = x$.

7,4. Příklady forem druhého stupně: (1) $Q(x) = \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k$ v prostoru $\boldsymbol{H}_n$ z **1,17**; (2) $Q(x) = |x|^2$ v libovolném unitárním prostoru.

7,5. Nechť je dán lineární prostor P. Říkáme, že bilineární forma φ v P a forma druhého stupně Q v P si navzájem *přísluší*, jestliže (1) $\mathbf{D}\varphi = \mathbf{D}Q$, (2) $x \in \mathbf{D}Q \Rightarrow \varphi(x, x) = Q(x)$.

7,6. *Nechť je dán lineární prostor P. Potom ke každé bilineární formě φ v P přísluší právě jedna forma druhého stupně Q v P a obráceně.*

Důkaz. I. Je-li dána bilineární forma φ, pak pro $x \in \mathbf{D}\varphi$ položím $Q(x) = \varphi(x, x)$. Snadným počtem se zjistí, že Q splňuje podmínky (1), (2) z **7,3**. Ježto $Q(x + \lambda y) = Q(x) + \lambda\, \varphi(y, x) + \bar{\lambda}\, \varphi(x, y) + |\lambda|^2 Q(y)$, je zřejmě splněna též podmínka (3), takže Q je forma druhého stupně, jež zřejmě přísluší k φ. Je rovněž evidentní, že k jedné bilineární formě nemohou příslušet dvě různé formy druhého stupně.

II. Nechť je dána forma druhého stupně Q v P. Pro $x \in \mathbf{D}Q$, $y \in \mathbf{D}Q$ položme $\varphi_1(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$, $\varphi_2(x, y) = Q(x + \mathrm{i}y) - Q(x - \mathrm{i}y)$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\varphi_1(x, y) + \frac{\mathrm{i}}{4}\varphi_2(x, y)$. Funkce φ zřejmě splňuje podmínky (1), (2) z **7,1**. Tedy platí (*) $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\, \varphi(x, y)$, $\varphi(x, \beta y) = \beta\, \varphi(x, y)$ pro celá kladná a jak z toho ihned plyne, též pro kladná racionální α, β. Ježto $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$, máme $\varphi(-x, y) = \varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$, takže (*) platí pro reálná racionální α, β. Z toho vyplyne použitím **7,3**, (3) že (*) platí pro všechna reálná α, β. Snadným počtem zjistíme, že $\varphi_1(\mathrm{i}x, y) = -\varphi_2(x, y)$, $\varphi_2(\mathrm{i}x, y) = \varphi_1(x, y)$, $\varphi_1(x, \mathrm{i}y) = \varphi_2(x, y)$, $\varphi_2(x, \mathrm{i}y) = -\varphi_1(x, y)$, takže $\varphi(\mathrm{i}x, y) = \mathrm{i}\, \varphi(x, y)$ a $\varphi(x, \mathrm{i}y) = -\mathrm{i}\, \varphi(x, y)$. Z toho nyní již plyne, že jsou splněny podmínky (3a), (3b) z **7,1**, takže φ je bilineární forma. Zřejmě $x \in \mathbf{D}\varphi = \mathbf{D}Q \Rightarrow \varphi(x, x) = Q(x)$.

Předpokládejme nyní, že φ, φ' jsou bilineární formy v P, $\mathbf{D}\varphi = \mathbf{D}\varphi' = \mathbf{D}Q$ a $x \in \mathbf{D}Q \Rightarrow \varphi(x, x) = \varphi'(x, x) = Q(x)$. Pro $x \in \mathbf{D}Q$, $y \in \mathbf{D}Q$

položme $\psi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi'(x, y)$. Pak $x \in \mathbf{D}Q \Rightarrow \psi(x, x) = 0$, z čehož snadným počtem plyne pro libovolná x, y z $\mathbf{D}Q$ toto: $\psi(x, y) + \psi(y, x) = 0$, $\psi(\mathrm{i}x, y) + \psi(y, \mathrm{i}x) = 0$, $\psi(x, y) - \psi(y, x) = 0$, takže $\psi(x, y) = 0$. Tím je důkaz proveden.

7,7. *Nechť φ je bilineární forma v $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{D}\varphi = \mathbf{H}_n$. Nechť prvky $a_1, \ldots, a_n$ tvoří ortonormální fundamentální množinu v $\mathbf{H}_n$. Pak existují (a jsou formou φ a prvky $a_1, \ldots, a_n$ jednoznačně určena) komplexní čísla α_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ taková, že $\varphi(x, y) = \Sigma\alpha_{ik}(x, a_i)\,(a_k, y)$ pro všechna $x, y \in \mathbf{H}_n$.*

Důkaz. Položím $\alpha_{ik} = \varphi(a_i, a_k)$.

Poznámka. Obdobná věta platí ovšem (vzhledem k **7,6**) pro formy druhého stupně.

7,8. Říkáme, že bilineární forma φ v P je *hermiteovská*, jestliže pro libovolná x a y z $\mathbf{D}\varphi$ čísla $\varphi(x, y)$ a $\varphi(y, x)$ jsou komplexně sdružená.

Příklad. Snadno se zjistí, že forma φ z **7,2**, (1) je hermiteovská, když a jen když $\overline{\alpha_{ik}} = \alpha_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

7,9. *Bilineární forma φ je hermiteovská, když a jen když příslušná k ní forma druhého stupně Q je reálná (t. j. $Q(x)$ je reálné číslo pro každé $x \in \mathbf{D}Q$).*

Důkaz. Je-li φ hermiteovská, pak máme vždy $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$, takže $Q(x) = \varphi(x, x)$ je reálné. Je-li $Q(x) = \varphi(x, x)$ vždy reálné, pak též $\varphi(x, y) + \varphi(y, x)$ je vždy reálné, tedy $-\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = \mathrm{i}\,\varphi(\mathrm{i}x, y) + \mathrm{i}\,\varphi(y, \mathrm{i}x)$ je vždy ryze imaginární. Z toho plyne, že $\varphi(x, y)$ a $\varphi(y, x)$ jsou komplexně sdružené.

7,10. Nechť P je nyní normovaný lineární prostor. Říkáme, že bilineární forma φ v P je *parciálně spojitá*, jestliže je „spojitá v každé proměnné zvláště", t. j. jestliže pro libovolná $a \in \mathbf{D}\varphi$, $b \in \mathbf{D}\varphi$ a $\varepsilon > 0$ existuje (1) $\delta_1 > 0$ takové, že $x \in \mathbf{D}\varphi$, $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |\varphi(x, b) - \varphi(a, b)| < \varepsilon$, (2) $\delta_2 > 0$ takové, že $y \in \mathbf{D}\varphi$, $|y - b| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(a, y) - \varphi(a, b)| < \varepsilon$. Říkáme, že φ je *spojitá*, jestliže je „spojitá v obou proměnných zároveň", t. j. jestliže pro libovolná $a \in \mathbf{D}\varphi$, $b \in \mathbf{D}\varphi$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $x \in \mathbf{D}\varphi$, $y \in \mathbf{D}\varphi$, $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta \Rightarrow |\varphi(x, y) - \varphi(a, b)| < \varepsilon$.

7,11. Snadno se zjistí, že bilineární forma φ je parciálně spojitá tehdy a jen tehdy, když k libovolným $a \in \mathbf{D}\varphi$, $b \in \mathbf{D}\varphi$, $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $z \in \mathbf{D}\varphi$, $|z| < \delta \Rightarrow |\varphi(a, z)| < \varepsilon$, $|\varphi(z, b)| < \varepsilon$, a že je spojitá tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $x \in \mathbf{D}\varphi$, $y \in \mathbf{D}\varphi$, $|x| < \delta$, $|y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x, y)| < \varepsilon$.

7,12. Jestliže P má nekonečnou dimensi (**1,16**), pak mohou existovat bilineární formy v P, které nejsou parciálně spojité. Uvedeme příklad. — Nechť P se skládá ze všech posloupností komplexních čísel $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ takových, že $\Sigma_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 < \infty$. Normu definujeme takto: $x = \sup |\xi_k|$. Pro

$x = \{\xi_k\} \in P$, $y = \{\eta_k\} \in P$ klademe $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k$. Zřejmě φ je bilineární, $\mathbf{D}\varphi = P$. Buď $y = \{k^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $x^{(n)} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\xi_k^{(n)} = n^{-1}$ pro $k \leq 2^{2n}$, $\xi_k^{(n)} = 0$ pro $k > 2^{2n}$. Zřejmě $x^{(n)} \in P$, $y \in P$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = 0$, $|\varphi(x^{(n)}, y)| = |\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \xi_k^{(n)}| > 1$, takže φ není parciálně spojitá. — Poznamenáváme ještě, že v tomto příkladě prostor P není úplný.

7,13. Parciálně spojitá bilineární forma nemusí býti spojitá. Příklad: nechť prvky a_k, $k = 1, 2, \ldots$, tvoří fundamentální orthonormální množinu v $\mathbf{H}_\infty$. Buď L lineál prvků $x \in \mathbf{H}_\infty$ takových, že $\sum_{k=1}^{\infty} k|(x, a_k)^2| < \infty$. Pro $x \in L$, $y \in L$ položme $\varphi(x, y) = \sum_1^{\infty} k(x, a_k)(a_k, y)$. Forma φ je parciálně spojitá, neboť pro $x \in L$, $y \in L$ máme $\varphi(x, y) = (\sum_1^{\infty} k(x, a_k)\, a_k, y) = (x, \sum_1^{\infty} k \,.\, (y, a_k)\, a_k)$; srv. **2,6** a **2,10**. Ježto $\varphi(a_k, a_k) = k$, není φ spojitá.

7,14. Nechť P je normovaný lineární prostor. Formu druhého stupně Q v P nazveme *parciálně spojitou*, jestliže ke každému $x \in \mathbf{D}Q$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $y \in \mathbf{D}Q$, $|y| < \delta \Rightarrow |Q(x + y) - Q(x) - Q(y)| < \varepsilon$. Spojitost formy Q je definována jako obvykle, t. j. nazýváme Q *spojitou*, jestliže ke každému $x \in \mathbf{D}Q$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $y \in \mathbf{D}Q$, $|y - x| < \delta \Rightarrow |Q(x) - Q(y)| < \varepsilon$.

7,15. *Je-li forma druhého stupně Q spojitá, je též parciálně spojitá.*

Důkaz. Pro $x \in \mathbf{D}Q$, $y \in \mathbf{D}Q$ jest $|Q(x + y) - Q(x) - Q(y)| \leq$ $\leq |Q(x + y) - Q(x)| + |Q(y)|$; pro každé $x \in \mathbf{D}Q$ a $\varepsilon > 0$ existují $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že pro $|y| < \delta_1$ jest $|Q(x + y) - Q(x)| < \varepsilon$, pro $|y| < \delta_2$ jest $|Q(y)| < \varepsilon$.

7,16. *Nechť P je normovaný lineární prostor. Bilineární forma φ v P je parciálně spojitá, když a jen když příslušná k ní forma druhého stupně Q je parciálně spojitá.*

Důkaz. Vyplyne ihned (srv. **7,11**) z toho, že (viz **7,6**) platí: $Q(x + y) - Q(x) - Q(y) = \varphi(x, y) + \varphi(y, x)$, $Q(\mathrm{i}x + y) - Q(\mathrm{i}x) - Q(y) = \mathrm{i}\varphi(x, y) - \mathrm{i}\varphi(y, x)$.

7,17. *Nechť P je normovaný lineární prostor. Bilineární forma φ v P je spojitá, když a jen když příslušná k ní forma druhého stupně Q je spojitá.*

Důkaz. Z rovností v předešlém důkazu plyne, že pro „malá" x, y jsou též čísla $\varphi(x, y) + \varphi(y, x)$, $\mathrm{i}\varphi(x, y) - \mathrm{i}\varphi(y, x)$ malá (v absolutní hodnotě). Použijeme pak **7,11**.

Poznámka. Podle **7,16**, **7,17** dostaneme z příkladů **7,12** a **7,13** ihned obdobné příklady pro formy druhého stupně.

7,18. *Forma druhého stupně Q je spojitá, když a jen když existuje $c > 0$ tak, že $x \in \mathbf{D}Q$, $|x| \leq 1 \Rightarrow |Q(x)| < c$.*

Vyplyne z rovností v důkazu **7,16**.

7,19. Důležité pro nás budou hlavně bilineární formy a formy druhého stupně v úplných unitárních prostorech. Budeme se nyní zabývat takovými formami, především jejich vztahem k operátorům.

Nechť φ je bilineární forma v $\boldsymbol{H}$. Jestliže A je lineární operátor v $\boldsymbol{H}$ takový, že $\boldsymbol{D}A = \boldsymbol{D}\varphi$, $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}\varphi}$ a $x \in \boldsymbol{D}\varphi$, $y \in \boldsymbol{D}\varphi \Rightarrow (Ax, y) = \varphi(x, y)$ [resp. $x \in \boldsymbol{D}\varphi$, $y \in \boldsymbol{D}\varphi \Rightarrow (x, Ay) = \varphi(x, y)$], pak říkáme, že operátor A a bilineární forma φ si navzájem *přísluší zleva*, resp. *zprava*.

7,20. *Ke každé parciálně spojité bilineární formě φ v $\boldsymbol{H}$ přísluší zleva, po příp. zprava, právě jeden operátor v $\boldsymbol{H}$.*

Důkaz. Ježto φ je „spojitá v každé proměnné", existuje (podle **5,5**, kde klademe $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}\varphi$) pro každé $y \in \boldsymbol{D}\varphi$ právě jeden prvek $v \in \boldsymbol{H}$ takový, že $x \in \boldsymbol{D}\varphi \Rightarrow \varphi(x, y) = (x, v)$. Položíme $v = Ay$. Takto definujeme lineární operátor A v $\boldsymbol{H}$, jenž zřejmě přísluší k φ zprava. Jestliže A_1 a A_2 přísluší k φ zprava, pak pro libovolné $x \in \boldsymbol{D}\varphi$, $y \in \boldsymbol{D}\varphi$ máme $(x, A_1y - A_2y) = 0$, z čehož plyne $A_1y - A_2y \perp \boldsymbol{D}\varphi$, takže vzhledem k $A_1y \in \overline{\boldsymbol{D}\varphi}$, $A_2y \in \overline{\boldsymbol{D}\varphi}$ máme $A_1y - A_2y = 0$. Obdobný je důkaz, že existuje právě jeden operátor, příslušný k φ zleva.

Poznámka. Obráceně, ke každému lineárnímu operátoru A v $\boldsymbol{H}$ takovému, že $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}A}$, přísluší bilineární forma φ, definovaná rovností $\varphi(x, y) = (Ax, y)$. Tato forma nemusí být obecně parciálně spojitá; je-li však hermiteovská, je vždy parciálně spojitá.

7,21. *Operátor, příslušný k parciálně spojité bilineární formě φ v $\boldsymbol{H}$, je hermiteovský tehdy a jen tehdy, když φ je hermiteovská. Operátory, příslušné k φ zprava a zleva, jsou pak totožné.*

7,22. *Ke každému hermiteovskému operátoru A v $\boldsymbol{H}$ takovému, že $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}A}$, přísluší (právě jedna) bilineární forma φ. Tato forma je hermiteovská a parciálně spojitá.*

7,23. *Bilineární forma φ v $\boldsymbol{H}$ je spojitá, když a jen když příslušný k ní (zleva nebo zprava) operátor je omezený.*

Důkaz. Přísluší-li A k φ zleva, pak pro $x \in \boldsymbol{D}\varphi$, $y \in \boldsymbol{D}\varphi$ platí: $\sup_{|x|=1,\,|y|=1} |(Ax, y)| = c < \infty$. Ježto $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}\varphi}$, existují $y_n \in \boldsymbol{D}\varphi$ tak, že $\lim y_n = Ax$. Pro $|x| \leq 1$, $x \in \overline{\boldsymbol{D}\varphi}$ máme tedy $|(Ax, Ax)| \leq c$; z toho plyne tvrzení.

7,24. *Je-li A hermiteovský operátor v $\boldsymbol{H}$, $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}A}$, pak $|A| = \sup_{|x|=1} |Q(x)|$, kde Q je příslušná (ve smyslu, jenž je patrný z* **7,10** *a* **7,5**) *k A forma druhého stupně.*

To plyne z **6,42**.

7,25. Nechť P je libovolný lineární prostor; říkáme, že forma druhého stupně Q v P je *nezáporná*, jestliže $x \in \boldsymbol{D}Q \Rightarrow Q(x) \geq 0$. — Jestliže k operátoru A v $\boldsymbol{H}$ přísluší nezáporná forma druhého stupně, říkáme, že A je *nezáporný*. Pro operátory A, B v $\boldsymbol{H}$ píšeme $A \geq B$ a $B \leq A$, jestliže $\boldsymbol{D}A = \boldsymbol{H}$ anebo $\boldsymbol{D}B = \boldsymbol{H}$ a operátor $A - B$ je nezáporný.

Poznámka. Zřejmě tedy A je nezáporný, když a jen když (1) $A\boldsymbol{H} \subset \overline{\boldsymbol{D}A}$, (2) $x \in \boldsymbol{D}A \Rightarrow (Ax, x) \geq 0$.

7,26. *Jestliže operátor A v $\mathbf{H}$ je nezáporný, pak je hermiteovský.*

Plyne z **7,9** a **7,21** (srov. poznámku k **7,20**).

Poznámka. Lze udat příklady nezáporných forem druhého stupně, které nejsou parciálně spojité.

7,27. *Jestliže forma druhého stupně Q v libovolném lineárním prostoru P je nezáporná a φ je příslušná k ní bilineární forma, pak $x \in \mathbf{D}Q$, $y \in \mathbf{D}Q \Rightarrow$ $\Rightarrow |\varphi(x, y)|^2 \leqq Q(x)\, Q(y)$.*

Důkaz. Zvolme číslo α tak, aby $|\alpha| = 1$ a aby $\varphi(x, z)$, kde $z = \alpha y$, bylo reálné. Pro libovolné reálné λ máme $\lambda^2 Q(x) + 2\lambda\, \varphi(x, z) + Q(z) =$ $= Q(\lambda x + z) \geqq 0$ (použili jsme toho, že podle **7,9** φ je hermiteovská). Z toho plyne, že $[\varphi(x, z)]^2 - Q(x)\, Q(z) \leqq 0$, tedy $|\varphi(x, y)|^2 \leqq Q(x)\, Q(y)$.

7,28. Zavedeme tuto úmluvu: klademe vždy $\infty \,.\, 0 = 0 \,.\, \infty = 0$.

7,29. *Jestliže operátor A v $\mathbf{H}$ je nezáporný, pak pro každé $x \in \mathbf{D}A$ platí $|Ax|^2 \leqq |A|(Ax, x)$.*

Důkaz. Z **7,27** vyplývá, že pro $x \in \mathbf{D}A$, $y \in \mathbf{D}A$ platí $|(Ax, y)|^2 \leqq$ $\leqq (Ax, x) \,.\, (Ay, y)$, tedy $|(Ax, y)|^2 \leqq |A||y|^2(Ax, x)$; viz úmluvu **7,28**. Ježto $A\mathbf{H} \subset \overline{\mathbf{D}A}$, existují $y_n \in \mathbf{D}A$ tak, že $Ax = \lim y_n$. Z toho plyne $|(Ax, Ax)|^2 \leqq |A||Ax|^2(Ax, x)$, tedy $|Ax|^4 \leqq |A||Ax|^2(Ax, x)$, $|Ax|^2 \leqq$ $\leqq |A|(Ax, x)$.

7,30. *Je-li A prostý nezáporný operátor v $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}A \subset \overline{A\mathbf{H}}$, pak A^{-1} je též nezáporný.*

To plyne z poznámky k **7,25**, neboť zřejmě $A^{-1}\mathbf{H} \subset \mathbf{D}A^{-1}$ a $x \in \mathbf{D}A^{-1} = \overline{A\mathbf{H}} \Rightarrow (A^{-1}x, x) \geqq 0$.

§ 8. Adjungovaný operátor. Normální operátory.

V tomto paragrafu dospíváme již k poněkud hlubším výsledkům (viz na př. důležitou větu **8,21**, jež pochází od J. v. NEUMANNA) a zavádíme pojem normálního (zvláště pak normálního hermiteovského) operátoru, jenž má základní význam pro celou theorii operátorů.

8,1. *Nechť A je lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. Je-li $y \in \mathbf{H}'$, pak buď* (1) *pro žádné $v \in \mathbf{H}$ neplatí $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, y) = (x, v)$ anebo* (2) *existuje právě jedno $v \in \overline{\mathbf{D}A}$ takové, že $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, y) = (x, v)$.*

Důkaz. Jestliže $w \in \mathbf{H}$ a $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, y) = (x, w)$, buď v průmět w na $\overline{\mathbf{D}A}$. Pak $w - v \perp \mathbf{D}A$, z čehož plyne, že $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (x, v) = (x, w) =$ $= (Ax, y)$.

8,2. Nechť A je lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. Jestliže $y \in \mathbf{H}'$ a nastává případ (2) z **8,1**, položíme $v = A^*y$. Takto určený operátor A^* z $\mathbf{H}'$ do $\mathbf{H}$ je lineární. Nazýváme jej *adjungovaným* k A operátorem.

Poznámka. Obdobnou definici lze zavést pro operátory z P do P_1, kde P a P_1 jsou normované lineární prostory. A^* je pak operátor z $[P_1 \rightarrow]$ do $[P \rightarrow]$.

8,3. Příklad. Nechť operátor A v $\mathbf{H}_n$ je určen čísly α_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ tak jak uvedeno v **6,43.** Pak operátor A^* je určen čísly $\alpha^*_{ik} = \overline{\alpha}_{ki}$.

8,4. *Jestliže A, B jsou lineární operátory z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$ a $A \subset B$, pak $A^* \supset B^*$.*

8,5. Bez předpokladu $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$ věta 8,4 neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu. Je-li $A \subset I$, kde I je jednotkový operátor v $\mathbf{H}$, pak $\mathbf{D}A^* = \mathbf{H}$ a pro každé $x \in \mathbf{H}$ prvek A^*x je průmětem x na $\overline{\mathbf{D}A}$.

8,6. *Platí $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ pro libovolný lineární operátor A z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$*

8,7. *Jestliže A je omezený operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, pak $\mathbf{D}A^* = \mathbf{H}'$.* — Neboť jestliže pro libovolné $y \in \mathbf{H}'$ klademe $f_y(x) = (Ax, y)$ pro $x \in \mathbf{D}A$, pak f_y je lineární funkcionála v $\mathbf{D}A$, z čehož vyplývá, že existuje $v \in \mathbf{H}$ takové, že $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, y) = (x, v)$, tedy nastává případ (2) z **8,1.**

8,8. *Jestliže A, B jsou lineární operátory z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, $\overline{\mathbf{D}(A + B)} = \mathbf{H}$, pak $(A + B)^* \supset A^* + B^*$. Je-li přitom operátor A nebo B omezený, pak $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

Důkaz. Nechť $y \in \mathbf{D}(A^* + B^*)$, $A^*y = u$, $B^*y = v$. Pak $x \in \mathbf{D}(A + B) \Rightarrow (Ax + Bx, y) = (x, u + v)$, z čehož plyne $u + v = (A + B)^* x$. Druhé tvrzení pak plyne z **8,7,** neboť je-li na př. B omezené, máme $A^* \supset -B^* + (A + B)^*$, tedy $\mathbf{D}A^* \supset \mathbf{D}(A + B)^*$.

8,9. *Nechť A je operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, B je operátor z $\mathbf{H}'$ do $\mathbf{H}''$. Je-li $\overline{\mathbf{D}(BA)} = \mathbf{H}$, pak $(BA)^* \supset A^*B^*$. Jestliže přitom operátor B je omezený, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}'$, pak $(BA)^* = A^*B^*$.*

Důkaz. Jestliže $z \in \mathbf{D}(A^*B^*)$, pak pro $x \in \mathbf{D}(BA)$ platí $(BAx, z) = (Ax, B^*z) = (x, A^*B^*z)$, z čehož vzhledem k $\overline{\mathbf{D}(BA)} = \mathbf{H}$ plyne $A^*B^*z = (BA)^*z$. — Je-li B omezený, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}'$, pak $\mathbf{D}(BA) = \mathbf{D}A$ a pro každé $z \in \mathbf{H}''$ máme $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (BAx, z) = (Ax, B^*z)$. Tedy pro $z \in \mathbf{D}(BA)^*$ platí $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (x, (BA)^*z) = (Ax, B^*z)$, takže $(BA)^*z = A^*B^*z$.

8,10. *Nechť A je operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. K tomu, aby A^* byl prostý, je nutné a stačí, aby $\overline{A\mathbf{H}} = \mathbf{H}'$.*

Důkaz. Když $\overline{A\mathbf{H}} = \mathbf{H}'$, pak pro každé $y \in \mathbf{H}'$, $y \neq 0$, máme $(Ax, y) \neq 0$ pro některé $x \in \mathbf{D}A$, z čehož plyne $A^*y \neq 0$. Když $\overline{A\mathbf{H}} \neq \mathbf{H}'$, buď $b \in \mathbf{H}'$, $b \perp A\mathbf{H}$, $b \neq 0$. Zřejmě $A^*b = 0$.

8,11. *Nechť A je prostý operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. Nechť $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$, $\overline{\mathbf{D}A^{-1}} = \mathbf{H}'$. Potom platí $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Důkaz. Nechť $y = (A^{-1})^*x$. Pak $v \in \mathbf{D}A^{-1} \Rightarrow (A^{-1}v, x) = (v, y)$, takže $u \in \mathbf{D}A \Rightarrow (u, x) = (Au, y)$, z čehož plyne $x = A^*y$, $y = (A^*)^{-1}x$. Nechť nyní $y = (A^*)^{-1}x$. Pak $x = A^*y$, tedy $u \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Au, y) = (u, x)$, tedy $v \in \mathbf{D}A^{-1} \Rightarrow (v, y) = (A^{-1}v, x)$, takže $y = (A^{-1})^*x$.

8,12. *Operátor A^* je vždy uzavřený.*

Důkaz. Nechť $x_n \in \mathbf{D}A^*$, $x_n \to x$, $A^*x_n \to y$. Potom pro $u \in \mathbf{D}A$ máme $(Au, x_n) \to (Au, x)$, $(u, A^*x_n) \to (u, y)$, $(Au, x_n) = (u, A^*x_n)$, takže $(Au, x) = (u, y)$ a zřejmě $y \in \overline{\mathbf{D}A}$, neboť $A^*x_n \in \overline{\mathbf{D}A}$. Tedy $y = A^*x$.

8,13. *Jestliže A je lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$ a platí $A = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu$, pak $A^* = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu^*$.*

Důkaz. Každé A_ν je (viz **6,22**) operátorem z L'_ν do L_ν, při čemž $\mathbf{H} = \bigoplus_{\nu \in N} L_\nu$, $\mathbf{H}' = \bigoplus_{\nu \in N} L_\nu'$, L_ν a L'_ν jsou tedy úplné unitární prostory (srov. **2,18**) a $L_\mu \perp L_\nu$, $L'_\mu \perp L_\nu'$ (pro $\mu \neq \nu$). A_ν^* jsou operátory z L'_ν do L_ν. Máme tedy dokázat: $u = A^*v$, když a jen když $v = \Sigma v_\nu$, $u = \Sigma A^* v_\nu$, kde ovšem $v_\nu \in L'_\nu$, ν probíhá N. Nechť tedy nejdříve $u = A^*v$, takže platí: $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, v) = (x, u)$, $u \in \overline{\mathbf{D}A}$. Buď $v = \Sigma v_\nu$, $v_\nu \in L'_\nu$, $u = \Sigma u_\nu$, $u_\nu \in L_\nu$. Zřejmě $\mathbf{D}A_\nu = L_\nu . \mathbf{D}A$; pro $z \in \mathbf{D}A_\nu$ máme $(Az, v) = (A_\nu z, v_\nu)$, $(z, u) = (z, u_\nu)$; z toho plyne, že $z \in \mathbf{D}A_\nu \Rightarrow (A_\nu z, v_\nu) = (z, u_\nu)$. Zřejmě též $u_\nu \in \overline{\mathbf{D}A_\nu} = \overline{L_\nu \mathbf{D}A}$, takže $u_\nu = A_\nu^* v_\nu$. — Nechť nyní máme obráceně $v = \Sigma v_\nu$, $v_\nu \in L'_\nu$, $u = \Sigma A_\nu^* v_\nu$. Jest $u_\nu = A_\nu^* v_\nu \in \overline{\mathbf{D}A_\nu}$, z čehož plyne, že $u \in \bigoplus \overline{\mathbf{D}A_\nu}$, a tedy, jak se snadno ukáže, $u \in \overline{\mathbf{D}A}$. Pro $x \in \mathbf{D}A$, $x = \Sigma x_\nu$, $x_\nu \in L_\nu$ máme $x_\nu \in \mathbf{D}A_\nu$, tedy $(A_\nu x_\nu, v_\nu) = (x_\nu, A_\nu^* v_\nu)$. Zřejmě $(Ax, v) = (\Sigma A_\nu x_\nu, \Sigma v_\nu)$, takže (viz **2,6**) platí: $(Ax, v) = \Sigma_{\nu \in N}(A_\nu x_\nu, v_\nu)$; obdobně $(x, u) = \Sigma_{\nu \in N}(x_\nu, A_\nu^* v_\nu)$. Z toho plyne $(Ax, v) = (x, u)$, čímž je důkaz proveden.

8,14. Nechť A je operátor z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}'$ (zpravidla ovšem půjde o úplné $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}'$). Lineál všech prvků $\{x, Ax\} \in \mathbf{R} \oplus^e \mathbf{R}'$, kde ovšem $x \in \mathbf{D}A$, označím $\mathbf{G}A$ (a nazývám někdy *grafem* operátoru A); lineál všech $\{Ax, -x\} \in \mathbf{R}' \oplus^e \mathbf{R}$ označíme $\mathbf{G}^*A$. $\mathbf{G}A$ je ovšem „graf“ zobrazení A v obvyklém smyslu (t. j. přímo zobrazení A, pojímané jako podmnožina kartézského součinu $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}'$). Význam $\mathbf{G}^*A$ bude patrný z dalšího.

Dvojici prvků u, v budeme značit $\{u, v\}$, aby nedošlo k záměně s vnitřním součinem.

8,15. *Je-li A lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, pak platí $\mathbf{G}^*A^* = (\overline{\mathbf{D}A} \oplus^e \mathbf{H}') \ominus \mathbf{G}A$, $\mathbf{G}A^* = (\mathbf{H}' \oplus^e \overline{\mathbf{D}A}) \ominus \mathbf{G}^*A$.*

Důkaz. Nechť $y \in \mathbf{D}A^*$; pak pro $x \in \mathbf{D}A$ máme $(\{x, Ax\}, \{A^*y, -y\}) = (x, A^*y) - (Ax, y) = 0$. Je-li $\{u, v\} \in (\overline{\mathbf{D}A} \oplus^e \mathbf{H}') \ominus \mathbf{G}A$, pak $u \in \overline{\mathbf{D}A}$ a pro $x \in \mathbf{D}A$ máme $(\{u, v\}, \{x, Ax\}) = 0$, tedy $(u, x) + (v, Ax) = 0$, $(-u, x) = (v, Ax)$; tedy $-u = A^*v$, z čehož plyne $\{u, v\} \in \mathbf{G}^*A^*$. Obdobný je důkaz druhé rovnosti.

8,16. *Je-li A uzavřený operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, pak $\overline{\mathbf{D}A^*} = \mathbf{H}'$. Je-li při tom $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$, pak $A^{**} = A$.*

Důkaz. Kdyby $\overline{\mathbf{D}A^*} \neq \mathbf{H}'$, pak by existoval prvek $b \in \mathbf{H}'$, $b \perp \mathbf{D}A^*$, $b \neq 0$, načež bychom měli $\{b, 0\} \in \mathbf{H}' \oplus^e \overline{\mathbf{D}A}$, $\{b, 0\} \perp \mathbf{G}A^*$, z čehož vzhledem k uzavřenosti A plyne podle **8,15** a **3,10**, že $\{b, 0\} \in \mathbf{G}^*A$, tedy

$b = A0$, což není možné. Druhé tvrzení vyplyne, užijeme-li dvakrát (pro A a pro A^* místo A) rovností v **8,15**.

8,17. *Je-li A operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$, pak A^{**} je uzavřený, $\overline{\mathbf{D}A^{**}} = \mathbf{H}$, $A^{****} = A^{**}$.*

To plyne z **8,12** a **8,16**.

8,18. *Nechť A je operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. Je-li $\overline{\mathbf{D}A^*} = \mathbf{H}'$, pak $A \subset A^{**}$; $A = A^{**}$ platí, když a jen když A je uzavřené a $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$.*

8,19. *Operátor A v $\mathbf{H}$ je hermiteovský, když a jen když $A \subset A^*$. Je-li A hermiteovský operátor v $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}A = \mathbf{H}$, pak $A = A^*$.*

8,20. *Nechť A je uzavřený lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$. Potom $I + A A^*$ je prostý nezáporný (a tedy hermiteovský) uzavřený operátor a položíme-li $B = (I + AA^*)^{-1}$, pak B je nezáporný, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}'$, $|B| \leqq 1$, $B^* = B$; položíme-li $C = A^*B$, platí $\mathbf{D}C = \mathbf{H}'$, $|C| \leqq 1$. Konečně, značí-li A' zúžení operátoru A^* na $\mathbf{D}(AA^*)$, pak A^* je nejmenší uzavřené rozšíření operátoru A' a platí $\overline{\mathbf{D}A'} = \mathbf{H}'$.*

Důkaz. Podle **8,15** a **3,10** máme $\mathbf{H}' \oplus^e \overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{G}^*A \oplus \mathbf{G}A^*$. Z toho ihned plyne: ke každému $u \in \mathbf{H}'$ existuje právě jedna dvojice prvků $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}'$ taková, že platí (*) $\{u, 0\} = \{Ax, -x\} + \{y, A^*y\}$; přitom je $x \in \mathbf{D}A$, $y \in \mathbf{D}A^*$. Položím $x = Cu$, $y = Bu$. Zřejmě C je lineární operátor z $\mathbf{H}'$ do $\mathbf{H}$, B je lineární operátor v $\mathbf{H}'$, $\mathbf{D}C = \mathbf{D}B = \mathbf{H}'$. Operátor B je prostý, neboť je-li $Bu = 0$, pak máme $\{u, 0\} = \{Ax, -x\}$, tedy $x = 0$, $u = Ax = 0$.

Pro libovolné $u \in \mathbf{H}'$ platí, jak plyne z (*), že $u = ACu + Bu$, $A^*Bu = Cu$. Z toho plyne $u = AA^*Bu + Bu$. Tedy $(I + AA^*) B = I$. Operátor $I + AA^*$ je prostý nezáporný; neboť kdyby $(u + AA^*u, u) \leqq \leqq 0$ pro $u \neq 0$, pak by $|u|^2 + (AA^*u, u) \leqq 0$, tedy $|u|^2 + (A^*u, A^*u) \leqq \leqq 0$, což není možné. Z toho ovšem plyne, že $B = (I + AA^*)^{-1}$ a že operátor B je rovněž nezáporný (viz **7,30**).

Ježto B je nezáporný, je podle **7,26** hermiteovský, tedy podle **8,19** jest $B^* = B$. Ze vztahu (*) plyne dále pro libovolné $u \in \mathbf{H}'$ toto: $|u|^2 = = |\{Ax, -x\}|^2 + |\{y, A^*y\}|^2$, kde $x = Cu, y = Bu$; tedy $|u|^2 = |ACu|^2 + + |Cu|^2 + |Bu|^2 + |A^*Bu|^2$. Z toho plyne $|B| \leqq 1$, $|C| \leqq 1$. Ježto B je omezený, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}'$, je uzavřený, takže též $I + AA^*$ je podle **6,12** uzavřený. Zbývá ještě dokázat poslední tvrzení věty; k tomu stačí (viz též **8,16**) zjistit, že $\overline{\mathbf{G}A'} = \mathbf{G}A^*$. Předpokládejme tedy, že $x \in \mathbf{D}A^*$ a $\{x, A^*x\} \perp \mathbf{G}A'$. Pak máme $(x, y) + (A^*x, A^*y) = 0$ kdykoli $y \in \mathbf{D}(AA^*)$; z toho však plyne, že $y \in \mathbf{D}(AA^*) \Rightarrow (x, y) + (x, AA^*y) = 0$, tedy $y \in B\mathbf{H}' \Rightarrow (x, B^{-1}y) = 0$, takže $x = 0$.

8,21. *Nechť A je uzavřený lineární operátor z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$ a nechť $\overline{\mathbf{D}A} = = \mathbf{H}$. Potom operátor $I + A^*A$ je prostý nezáporný (a tedy hermiteovský), $B = (I + A^*A)^{-1}$ je nezáporný, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}$, $|B| \leqq 1$, $B^* = B$. Položíme-li $C = AB$, pak $\mathbf{D}C = \mathbf{H}$, $|C| \leqq 1$. Konečně, je-li A' zúžení operátoru A na*

$\mathbf{D}(A^*A)$, *pak A je nejmenší uzavřené rozšíření operátoru A' a platí* $\overline{\mathbf{D}A'} =$ $= \mathbf{H}$.

Důkaz. Plyne z **8,20**, když tam dosadíme A^* za A a použijeme pak toho, že podle **8,16** jest $A^{**} = A$.

8,22. Nejdůležitější lineární operátory v $\mathbf{H}$ jsou ty, které splňují podmínku $A^* = A$. Budeme nejdříve zkoumat širší a rovněž velmi důležitou třídu *normálních* operátorů. Lineární operátor A v $\mathbf{H}$ nazveme *normálním*, jestliže je uzavřený a $A^*A = AA^*$.

8,23. Jednoduchý příklad normálního operátoru, který není hermiteovský: v prostoru $\mathbf{H}_2$ dvojic $\{\xi_1, \xi_2\}$ operátor, který převádí $\{\xi_1, \xi_2\}$ v $\{\xi_2, -\xi_1\}$. Příklad operátoru, který není normální: ve stejném prostoru operátor, který převádí $\{\xi_1, \xi_2\}$ v $\{2\xi_2, -\xi_1\}$.

8,24. *Je-li A normální operátor v $\mathbf{H}$, pak* $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$. — Neboť podle **8,20** jest $\overline{\mathbf{D}(AA^*)} = \mathbf{H}$, tedy $\overline{\mathbf{D}(A^*A)} = \mathbf{H}$.

8,25. *Je-li operátor A v $\mathbf{H}$ normální, pak je též A^* normální.* — Neboť z **8,24** a **8,18** plyne $A^{**} = A$.

8,26. *Nechť A je operátor v $\mathbf{H}$. K tomu, aby A byl normální hermiteovský, je nutné a stačí, aby $A^* = A$.*

Důkaz. Je-li A normální hermiteovský, pak z **8,20** plyne, že A^* je nejmenší uzavřené rozšíření operátoru A', jenž je zúžením A^* na $\mathbf{D}(AA^*) = \mathbf{D}(A^*A) \subset \mathbf{D}A$. Ježto A je hermiteovský, jest $A \subset A^*$, takže máme $A' \subset A$. Ježto A je uzavřený, plyne z toho $A^* = A$. Je-li $A^* = A$, pak evidentně A je normální hermiteovský.

8,27. *Je-li A hermiteovský operátor v $\mathbf{H}$ a přitom $\mathbf{D}A = \mathbf{H}$ nebo $A\mathbf{H} = \mathbf{H}$, pak A je normální.*

Důkaz. Ježto A je hermiteovský, máme $A \subset A^*$. Je-li $\mathbf{D}A = \mathbf{H}$, plyne z toho již $A = A^*$. Je-li $A\mathbf{H} = \mathbf{H}$, pak, jak patrno, A^* je prostý, a z toho a z $A\mathbf{H} = \mathbf{H}$ již plyne $A = A^*$.

8,28. Zavedeme následující pojem, jenž m. j. umožňuje jinou charakterisaci normálních operátorů: nazveme operátory A, B z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$ *metricky podobnými*, jestliže $\mathbf{D}A = \mathbf{D}B$ a $x \in \mathbf{D}A = \mathbf{D}B \Rightarrow |Ax| = |Bx|$.

Snadno se zjistí: jsou-li A a B metricky podobné, pak $(Ax, Ay) =$ $= (Bx, By)$ pro $x \in \mathbf{D}A$, $y \in \mathbf{D}A$.

8,29. *Nechť operátory A, B z $\mathbf{H}$ do $\mathbf{H}'$ jsou uzavřené a* $\overline{\mathbf{D}A} = \overline{\mathbf{D}B} =$ $= \mathbf{H}$. *Potom A, B jsou metricky podobné, když a jen když $A^*A = B^*B$.*

Důkaz. I. Nechť A, B jsou metricky podobné operátory. Jestliže $y \in \mathbf{D}(A^*A)$, pak pro $x \in \mathbf{D}B = \mathbf{D}A$ jest $(Bx, By) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$, takže (Bx, By) závisí spojitě na x, a tedy (viz **5,5** a **8,1**) platí $By \in \mathbf{D}B^*$, $y \in \mathbf{D}(B^*B)$ a $(x, B^*By) = (x, A^*Ay)$ pro $x \in \mathbf{D}B = \mathbf{D}A$. Z toho plyne $A^*A \subset B^*B$ a obdobně $B^*B \subset A^*A$. II. Nechť $A^*A =$ $= B^*B$. Buď $L = \mathbf{D}(A^*A) = \mathbf{D}(B^*B)$. Je-li $x \in L$, pak $(Ax, Ax) = (x,$ $A^*Ax) = (x, B^*Bx) = (Bx, Bx)$. Je-li nyní $u \in \mathbf{D}A$, pak z **8,21** (poslední tvrzení) plyne, že existují $x_n \in L$ tak, že $x_n \to u$, $Ax_n \to Au$. Ježto $x_n \in L$, máme $|Ax_m - Ax_n| = |Bx_m - Bx_n|$, takže posloupnost prvků Bx_n je cauchyovská, tedy konverguje k prvku $v \in \mathbf{H}$. Ježto B je uzavřené, máme $u \in \mathbf{D}B$, $Bu = v = \lim Bx_n$. Tedy $\mathbf{D}A \subset \mathbf{D}B$. Ježto $x_n \in L$, máme $|Ax_n| = |Bx_n|$, tedy $|Bu| = \lim|Bx_n| = \lim|Ax_n| = |Au|$. Podobně se ukáže $\mathbf{D}B \subset \mathbf{D}A$.

8,30. *Nechť A je uzavřený operátor v $\mathbf{H}$, $\overline{\mathbf{D}A} = \mathbf{H}$. Pak A je normální, když a jen když A^* a A jsou metricky podobné.*

To plyne z **8,29** a z toho, že podle **8,16** máme $A^{**} = A$.

8,31. *Jestliže A a B jsou normální operátory v $\mathbf{H}$, $A \subset B$, pak $A = B$.*

Důkaz. Podle **8,30** jest $\mathbf{D}A^* = \mathbf{D}A$, $\mathbf{D}B^* = \mathbf{D}B$. Máme $A \subset B$, tedy podle **8,4** $A^* \supset B^*$, takže $\mathbf{D}A^* \supset \mathbf{D}B^*$, $\mathbf{D}A \supset \mathbf{D}B$. Z toho již plyne $\mathbf{D}A = \mathbf{D}B$, $A = B$.

8,32. *Jestliže operátory A, B v $\mathbf{H}$ jsou normální, operátor B je omezený a $B^*A = BA^*$, pak $A + B$ je normální.*

Důkaz. Z **8,24** a **6,17** plyne $\mathbf{D}B = \mathbf{H}$, takže $\mathbf{D}(A + B) = \mathbf{D}A$ a tedy (podle **6,17**) máme $\overline{\mathbf{D}(A + B)} = \mathbf{H}$. Tedy podle **8,8** jest $(A + B)^* = A^* + B^*$. Podle **8,30** stačí tedy dokázat, že $A^* + B^*$ a $A + B$ jsou metricky podobné. Ježto z **8,30** vyplývá, že $\mathbf{D}A = \mathbf{D}A^*$, máme $\mathbf{D}(A^* + B^*) = \mathbf{D}(A + B)$. Stačí tedy dokázat pro $x \in \mathbf{D}(A + B)$, že $|Ax + Bx| = |A^*x + B^*x|$. Jest $|Ax + Bx|^2 = (Ax + Bx, Ax + Bx) = |Ax|^2 + |Bx|^2 + (Ax, Bx) + (Bx, Ax)$. Ježto podle **8,7** $\mathbf{D}B^* = \mathbf{H}$, máme $(Ax, Bx) = (B^*Ax, x) = (BA^*x, x) = (A^*x, B^*x)$. Z toho a z **8,30** plyne nyní $|Ax + Bx|^2 = |A^*x|^2 + |B^*x|^2 + (A^*x, B^*x) + (B^*x, A^*x) = |A^*x + B^*x|^2$.

Poznámka. Bez předpokladu omezenosti A nebo B věta ovšem neplatí. Stačí vzít normální A takové, že $\mathbf{D}A \neq \mathbf{H}$ a položit $B = -A$.

8,33. *Jsou-li A, B normální hermiteovské operátory v $\mathbf{H}$ a je-li jeden z nich omezený, pak $A + B$ je normální hermiteovský.*

Plyne z **8,32** a **6,38**.

8,34. *Jestliže A, B jsou normální operátory v $\mathbf{H}$, jeden z nich je omezený a jest $AB = BA$, $AB^* = B^*A$, $BA^* = A^*B$, pak AB je normální.*

Důkaz. Nechť třeba B je omezený. Ježto (viz **8,24** a **6,17**) $\mathbf{D}B = \mathbf{H}$, podle **8,9** máme $(BA)^* = A^*B^*$. Jest $BAA^*B^* = BA^*AB^* = A^*BB^*A = A^*B^*BA$; podle **6,14** je $BA = AB$ uzavřený. Tedy $BA = AB$ je normální.

8,35. *Jestliže A, B jsou normální hermiteovské operátory v $\mathbf{H}$, jeden z nich je omezený a $AB = BA$, pak operátor AB je normální hermiteovský.*

Plyne z **8,26**, **8,34** a **6,38**.

8,36. *Jestliže normální operátor A v $\mathbf{H}$ je prostý, pak $\overline{A\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ a operátor A^* je též prostý.*

Důkaz. Ježto A a A^* jsou podle **8,30** metricky podobné, je A^* prostý (neboť je-li $A^*x = 0$, jest $|Ax| = |A^*x| = 0$, $x = 0$). Z toho plyne $\overline{A\mathbf{H}} = \mathbf{H}$.

8,37. *Je-li A prostý normální operátor v $\mathbf{H}$, pak A^{-1} je též normální.*

Důkaz. Z **8,30** plyne, že A^* je prostý, takže podle **8,10** platí $\overline{A\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, tedy $\overline{\mathbf{D}A^{-1}} = \mathbf{H}$. Podle **8,11** jest tedy $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, takže máme $A^{-1}(A^{-1})^* = A^{-1}(A^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} = (AA^*)^{-1} = (A^*)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^* A^{-1}$.

8,38. *Jestliže operátor A v $\mathbf{H}$ je prostý normální hermiteovský, pak A^{-1} je normální hermiteovský.*

Plyne z **6,38**, **8,26** a **8,32**.

8,39. *Nechť A je lineární operátor v $\mathbf{H}$ a nechť $A = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu$, A_ν jsou vnitřní operátory. Potom A je normální, když a jen když A_ν jsou normální, a je normální hermiteovský, když a jen když A_ν jsou normální hermiteovské.*

Důkaz. Podle **8,13** jest $A^* = \bigoplus_{\nu \in N} A_\nu^*$. Jestliže operátory A jsou normální, pak podle **8,30** A_ν a A_ν^* jsou (pro každé ν) metricky podobné, z čehož ihned vyplývá, že A a A^* jsou metricky podobné, tedy A je normální. Podobně se dokáže zbytek věty (pro hermiteovské operátory použijeme ještě **6,39**).

§ 9. Projektory.

Písmeno P značí v tomto paragrafu stále normovaný lineární prostor.

9,1. Lineární operátor A v P nazýváme *projektorem*, jestliže (1) $A^2 = A$, (2) $\mathbf{D}A = P$, (3) operátor A je uzavřený.

9,2. Příklady projektorů. 1. V prostoru $\mathbf{H}_n$ z **1,17** operátor, který přiřazuje prvku $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ prvek $\{\xi_1, \ldots, \xi_p, 0 \ldots 0\}$; při tom $p = 1, 2, \ldots, n$ je pevně zvolené číslo. 2. Nechť L_2 je prostor z **6,10**, (2). Zvolme číslo c, $a < c < b$ a pro $x \in L_2$ položme $y = Ax$, kde $y \in L_2$, $y(t) = 0$ pro $a < t < c$, $y(t) = x(t)$ pro $c < t < b$. Snadno se zjistí, že A je projektor.

Poznámka. Lze ukázat, že v $\mathbf{H}_n$ je každý hermiteovský operátor, jehož oborem je celé $\mathbf{H}_n$, součtem p projektorů, $p \leq n$. To plyne na př. ze známé věty lineární algebry o převedení hermiteovské matice na diagonální tvar.

9,3. *Jestliže E je projektor v P, pak $E^{-1}(0)$ a $E(P)$ jsou uzavřené, $u \in E(P) \Rightarrow Eu = u$, a každé $z \in P$ lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $z = x + y$, kde $x \in E^{-1}(0)$, $y \in E(P)$.*

Důkaz. Zřejmě lineál $E^{-1}(0)$ je uzavřený. Jestliže $y_n = Ex_n$, $y_n \to y$, pak $Ey_n = y_n$, takže z uzavřenosti E plyne $Ey = y$. Je-li $u \in E(P)$, pak $u = Ev$, $Eu = Ev = u$. Je-li $z \in P$, pak $z = (z - Ez) + Ez$ a zřejmě $z - Ez \in E^{-1}(0)$.

9,4. *Jestliže A je operátor v P, $A^2 = A$, $\mathbf{D}A = P$ a lineály $A^{-1}(0)$, $A(P)$ jsou uzavřené, pak A je projektor.*

Důkaz. Když $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, pak $Ax_n - x_n \to y - x$, $Ax_n - x_n \in A^{-1}(0)$, tedy $y - x \in A^{-1}(0)$, $Ay = Ax$, dále $y \in A(P)$, takže $y = Ay$, $y = Ax$. Tedy operátor A je uzavřený, t. j. má též vlastnost (3) z **9,1**.

9,5. *Nechť $L_0 \subset\subset P$, $L_1 \subset\subset P$ jsou uzavřené lineály takové, že (1) každé $z \in P$ lze vyjádřit ve tvaru $z = x + y$, $x \in L_0$, $y \in L_1$, (2) žádné $z \neq 0$ neleží zároveň v L_0 a v L_1. Pak existuje právě jeden projektor E v P takový, že $E^{-1}(0) = L_0$, $E(P) = L_1$.*

Důkaz. Zmíněné vyjádření $z = x + y$ je určeno jednoznačně. Položím tedy $Ez = y$. Z **9,4** nyní vyplyne, že E je projektor. Je-li E_1 projektor o zmíněných vlastnostech, pak $x \in L_0 \Rightarrow E_1 x = Ex$, a je-li $y \in L_1$, pak $y = E_1 v$, $v \in P$, tedy $E_1 y = E_1 E_1 v = E_1 v = y = Ey$; z toho podle (1) plyne $E_1 = E$.

9,6. *Je-li E projektor v P, pak $I - E$ je rovněž projektor a jest $(I - E)^{-1}(0) = E(P)$, $(I - E)(P) = E^{-1}(0)$.*

9,7. *Nechť E_1 a E_2 jsou projektory v P. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:* (1) $E_1 E_2 = E_1 = E_2 E_1$; (2) $E_2^{-1}(0) \subset E_1^{-1}(0)$, $E_1(P) \subset E_2(P)$.

Důkaz. Nechť platí (1). Když $E_2 x = 0$, pak $E_1 x = E_1 E_2 x = 0$; když $x \in E_1(P)$, pak $x = E_1 x = E_2 E_1 x = E_2 x$, tedy $x \in E_2(P)$. Nechť platí (2). Pak pro libovolné $x \in P$ jest jednak $x - E_2 x \in E_2^{-1}(0)$, tedy $x - E_2 x \in E_1^{-1}(0)$, $E_1 x - E_1 E_2 x = 0$, jednak $E_1 x \in E_2(P)$, tedy podle **9,3** $E_2 E_1 x = E_1 x$.

9,8. *Jestliže prostor P je úplný, pak každý projektor v P je omezený.*

Plyne z **6,18**.

9,9. Bez předpokladu úplnosti P věta **9,8** neplatí. Příklad: buď $\mathbf{H}_\infty$ prostor z **2,2**, (1). Nechť lineál $L_0 \subset\subset \mathbf{H}_\infty$ se skládá z $\{\xi_n\}$ takových, že $\xi_n = 0$ pro sudé n; nechť $L_1 \subset\subset \mathbf{H}_\infty$ se skládá z $\{\xi_n\} \in \mathbf{H}_\infty$ takových, že $\xi_{2k-1} = k\xi_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Zřejmě $L_0 L_1 = (0)$, lineály L_0 a L_1 jsou uzavřené v $\mathbf{H}_\infty$. Označím $\mathbf{R}$ lineál všech $z = x + y$, $x \in L_0$, $y \in L_1$, a pro každé z tohoto tvaru položím $Az = y$. Pak A je operátor v $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}A = \mathbf{R}$, $A^2 = A$ a z **9,4** plyne, že A je projektor. Nechť p je celé kladné; buď $x = \{\xi_n\} \in \mathbf{H}_\infty$, $\xi_{2p} = 1$, $\xi_n = 0$ pro $n \neq 2p$. Snadno se zjistí, že $x \in \mathbf{R}$; je-li $\{\eta_n\} = Ax$, máme $\eta_{2p-1} = p$, $\eta_{2p} = 1$, $\eta_n = 0$ pro $2p - 1 \neq n \neq 2p$. Tedy $|x| = 1$, $|Ax| = \sqrt{p^2 + 1}$. Tedy projektor A není omezený.

9,10. Zavedeme toto označení: je-li P lineární prostor, $A \subset P$, $B \subset P$, pak $A \dotplus B$ značí množinu všech $x + y$, $x \in A$, $y \in B$.

9,11. *Nechť P je úplný, E_1 a E_2 jsou projektory v P, $E_1 E_2 = E_2 E_1$. Potom $E_1 E_2$ a $E = E_1 + E_2 - E_1 E_2$ jsou též projektory v P a platí: $E_1 E_2(P) = E_1(P) \cdot E_2(P)$, $(E_1 E_2)^{-1}(0) = E_1^{-1}(0) \dotplus E_2^{-1}(0)$, $E(P) = E_1(P) \dotplus E_2(P)$, $E^{-1}(0) = E_1^{-1}(0) \cdot E_2^{-1}(0)$.*

Důkaz. Snadným počtem se zjistí, že $(E_1E_2)^2 = E_1E_2$, $E^2 = E$. Z **9,8**, **6,15** a **6,13** plyne, že E_1E_2 a E jsou uzavřené. Tedy jsou oba projektory. Je-li $E_1E_2x = 0$, pak $x = (x - E_2x) + E_2x$, $x - E_2x \in E_2^{-1}(0)$, $E_2x \in E^{-1}(0)$. Tedy $(E_1E_2)^{-1}(0) \subset E_1^{-1}(0) \dotplus E_2^{-1}(0)$. Je-li $x \in E(P)$, pak $x = E_1x + (x - E_1x)$ a máme $E_1x \in E_1(P)$, $E_2(x - E_1x) = E_2x - E_2E_1x = Ex - E_1x = x - E_1x$, takže $x - E_1x \in E_2(P)$. Tedy $E(P) \subset E_1(P) \dotplus E_2(P)$. Důkazy ostatních tvrzení jsou ještě snadnější.

Korolár. *Jestliže E_1, E_2 jsou projektory v úplném P a $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$, pak $E_1 + E_2$ je projektor.*

Budeme se nyní zabývat těmi projektory v $\mathbf{H}$, jež jsou zároveň hermiteovskými operátory.

9,12. *Operátor A v $\mathbf{H}$ je hermiteovským projektorem, když a jen když A je normální operátor a $A^2 = A$.*

Důkaz. Podmínka je zřejmě nutná. Předpokládejme, že je splněna. Z **8,30** plyne $\mathbf{D}A^* = \mathbf{D}A$ a z toho dále $\mathbf{D}(A^*A^*) = \mathbf{D}(AA^*) = \mathbf{D}(A^*A) = \mathbf{D}(A^2) = \mathbf{D}A$. Podle **8,9** máme $A^* = (AA)^* \supset A^*A^*$. Tedy $A^* = A^*A^*$. Pro libovolné $x \in \mathbf{D}A$ máme $A(x - Ax) = 0$, tedy podle **8,30** $|A^*(x - Ax)| = 0$, $A^*x - A^*Ax = 0$. Tedy $A^* = A^*A$. Ježto A^* je též normální (**8,25**), $(A^*)^2 = A^*$, můžeme dosadit A^* za A a máme $A = A^{**} = A^{**}A^* = AA^* = A^*A$, tedy $A = A^*$, takže A je hermiteovský. Z toho plyne: $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow (Ax, x) = (A^2x, x) = (Ax, Ax) \geq 0$. Položíme-li $B = I - A$, pak B je normální, $B^2 = B$, takže, jak jsme právě ukázali, platí $x \in \mathbf{D}A = \mathbf{D}B \Rightarrow (Bx, x) \geq 0$, z čehož plyne: $x \in \mathbf{D}A \Rightarrow |x|^2 \geq (Ax, x)$. Z toho vyplývá podle **6,42**, že $|A| \leq 1$ a dále podle **6,18**, že $\mathbf{D}A = \mathbf{H}$. Tedy A je projektor.

9,13. *Je-li E hermiteovský projektor v $\mathbf{H}$, pak $O \leq E \leq I$ a $|E| = 1$, pokud není $E = O$.*

Důkaz. Nerovnosti $O \leq E \leq I$ a $|E| \leq 1$ plynou z nerovností ke konci předcházejícího důkazu. Když $|E| < 1$, pak podle **6,15** máme $|E| = |E^2| \leq |E|^2$, z čehož plyne $|E| = 0$.

9,14. *Projektor E v $\mathbf{H}$ je hermiteovský, když a jen když $E^{-1}(0) \perp E\mathbf{H}$; máme pak $\mathbf{H} = E^{-1}(0) \oplus E\mathbf{H}$.*

Důkaz. Je-li E hermiteovský, $Ex = 0$, $y = Ev$, pak $(x, y) = (x, Ev) = (Ex, v) = 0$. Je-li podmínka splněna, pak pro $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$ jest $(x - Ex, Ey) = 0$, tedy $(x, Ey) = (Ex, Ey)$, z čehož plyne $(y, Ex) = (Ey, Ex)$ a tedy $(x, Ey) = (Ex, y)$.

9,15. *Jestliže A, B jsou hermiteovské operátory v $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}A = \mathbf{H}$, $\mathbf{D}B = \mathbf{H}$, pak $AB = O$, když a jen když $A\mathbf{H} \perp B\mathbf{H}$.*

Důkaz. Když $AB = O$, pak pro $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$ máme $(Ax, By) = (x, ABy) = 0$. Když $A\mathbf{H} \perp B\mathbf{H}$, pak pro $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$ máme $(Ax, By) = 0$, tedy $(x, ABy) = 0$, z čehož plyne $ABy = 0$.

9,16. *Nechť $\{E_\nu\}_{\nu \in N}$ je soubor hermiteovských projektorů v $\mathbf{H}$ a nechť*

$E_\mu E_\nu = O$ *pro* $\mu \neq \nu$. *Potom* $E = \Sigma_{\nu \in N} E_\nu$ *je hermiteovský projektor v* $\mathbf{H}$, $E\mathbf{H} = \oplus_{\nu \in N} E_\nu \mathbf{H}$, $E^{-1}(0)$ *je průnikem všech* $E_\nu^{-1}(0)$.

Důkaz. Na základě **9,15** se snadno zjistí, že pro libovolné $x \in \mathbf{H}$ a libovolná $\nu_k \in N$, $k = 1, \ldots, n$, prvky $E_{\nu_k} x$ $(k = 1, \ldots, n)$ a $x - \Sigma_{k=1}^n E_{\nu_k} x$ jsou všechny navzájem ortogonální. Z toho plyne, že $\Sigma_{k=1}^n |E_{\nu_k} x|^2 \leqq |x|^2$, takže $\Sigma_{\nu \in N} |E_\nu x|^2 \leqq |x|^2$. Tedy podle **2,7** existuje součet $\Sigma E_\nu x$ pro každé x, t. j. $\mathbf{D}E = \mathbf{H}$, a jest $|Ex| \leqq 1$. Z **2,6** a z ortogonality $E_\mu \mathbf{H}$ a $E_\nu \mathbf{H}$ pro $\mu \neq \nu$ plyne, že pro libovolná $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}$ máme $(Ex, Ey) = \Sigma_{\nu \in N}(E_\nu x, E_\nu y) = \Sigma_{\nu \in N}(E_\nu x, y) = \Sigma_{\nu \in N}(x, E_\nu y)$, takže máme $(Ex, Ey) = (x, Ey) = (Ex, y)$, z čehož plyne $E^2 = E$, $E^* = E$. Zřejmě $E\mathbf{H} \subset \oplus_{\nu \in N} E_\nu \mathbf{H}$. Je-li $x = \Sigma_{\nu \in N} x_\nu$, $x_\nu \in E_\nu \mathbf{H}$, pak z podmínky $E_\mu E_\nu = O$ plyne $Ex = \Sigma_{\nu \in N} E x_\nu = \Sigma_{\nu \in N} E_\nu x_\nu = \Sigma_{\nu \in N} x_\nu = x$, takže $x \in E\mathbf{H}$. Tedy $E\mathbf{H} = \oplus_{\nu \in N} E_\nu \mathbf{H}$. Je-li $Ex = 0$, pak ze vzájemné ortogonality lineálů $E_\nu \mathbf{H}$ plyne, že každý sčítanec v $Ex = \Sigma_{\nu \in N} E_\nu x$ se rovná nule, takže x leží ve všech $E_\nu^{-1}(0)$.

9,17. *Nechť lineály* $L_\nu \subset\subset \mathbf{H}$ *jsou uzavřené*, $L = \oplus_{\nu \in N} L_\nu$. *Pro* $x \in \mathbf{H}$, $\nu \in N$, *buď* $E_\nu x$ *průmět* x *na* L_ν *a* Ex *buď průmět* x *na* L. *Potom* E_ν *a* E *jsou hermiteovské projektory v* $\mathbf{H}$, $E = \Sigma_{\nu \in N} E_\nu$.

Důkaz. Na základě **9,5** a **9,14** se snadno ověří, že E_ν, E jsou hermiteovské projektory; ježto $E_\nu \mathbf{H} = L_\nu$, můžeme použít **9,16.**

9,18. *Jestliže* E_ν, $\nu \in N$, *jsou hermiteovské projektory v* $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}(\Sigma_{\nu \in N} E_\nu) = \mathbf{H}$, $|\Sigma_{\nu \in N} E_\nu| \leqq 1$, *pak* $E_\mu E_\nu = O$ *pro* $\mu \neq \nu$ *a* $\Sigma_{\nu \in N} E_\nu$ *je hermiteovský projektor.*

Důkaz. Nechť $x \in E_\mu \mathbf{H}$. Ježto hermiteovské projektory jsou nezáporné, máme $|x|^2 \geqq (\Sigma_{\nu \in N} E_\nu x, x) = (E_\mu x, x) + \Sigma_{\substack{\nu \in N \\ \nu \neq \mu}}(E_\nu x, x)$, tedy $\Sigma_{\substack{\nu \in N \\ \nu \neq \mu}}(E_\nu x, x) \leqq 0$, $(E_\nu x, x) = 0$ pro každé $\nu \neq \mu$, a tedy podle **7,29** $E_\nu x = 0$ pro $\nu \neq \mu$. Z toho plyne $E_\nu E_\mu = O$ pro $\nu \neq \mu$. Nyní použijeme **9,16.**

9,19. *Jestliže* E_1 *a* E_2 *jsou hermiteovské projektory v* $\mathbf{H}$, *pak následující podmínky jsou ekvivalentní.* (1) $E_1 \geqq E_2$, (2) $E_1 E_2 = E_2$, (3) $E_2 E_1 = E_2$, (4) $E_2 H \subset E_1 H$, (5) $E_1^{-1}(0) \subset E_2^{-1}(0)$. *Jsou-li tyto podmínky splněny, pak* $E_1 - E_2$ *je projektor.*

Důkaz. Ekvivalence podmínek (4) a (5) plyne z **9,14.** Když platí (4), pak máme $E_1 y = y$ pro $y \in E_2 \mathbf{H}$, tedy $E_1 E_2 x = E_2 x$ pro každé $x \in \mathbf{H}$. Když platí (5), pak pro každé $x \in \mathbf{H}$ máme $E_1 x - x \in E_2^{-1}(0)$, $E_2 E_1 x - E_2 x = 0$. Zřejmě z (2) plyne (4), z (3) plyne (5). Tedy (2) až (5) jsou ekvivalentní. Operátor $E_1 - E_2$ je hermiteovský; jsou-li (2) až (5) splněny, pak $(E_1 - E_2)(E_1 - E_2) = E_1 - E_2 - E_2 + E_2 = E_1 - E_2$, takže $E_1 - E_2$ je projektor, $E_1 - E_2 \geqq 0$ (podle **9,13**) a $E_1 \geqq E_2$. Jestliže $E_1 \geqq E_2$, pak $x \in \mathbf{H}$, $E_1 x = 0 \Rightarrow E_2 x = 0$, takže $E_1^{-1}(0) \subset E_2^{-1}(0)$. Tedy (1) je ekvivalentní s (2) až (5).