

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAX KAROUBI

Localisation de formes quadratiques I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 7, n° 3 (1974), p. 359-403

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_3_359_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LOCALISATION DE FORMES QUADRATIQUES I

PAR MAX KAROUBI

*A Monsieur Henri Cartan
pour son 70^e anniversaire.*

Soit A un anneau muni d'une anti-involution $a \mapsto \bar{a}$ et soit ε un élément du centre de A tel que $\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1$. On a défini dans [14] des groupes ${}_e L_n(A)$, analogues aux groupes $K_n(A)$ définis par Quillen, associés à la catégorie des A -modules projectifs de type fini munis de formes ε -quadratiques non dégénérées.

Soit maintenant S un sous-ensemble de A stable par l'anti-involution et par multiplication et formé d'éléments non-diviseurs de 0. Dans cet article et les suivants, nous nous proposons de comparer les groupes ${}_e L_n(A)$ et ${}_e L_n(A_S)$ où A_S désigne l'anneau localisé de A vis-à-vis du système multiplicatif S . En fait, cet article est consacré à l'étude du cas particulier $n = 0$ qui renferme déjà les idées algébriques essentielles pour traiter le cas général. En outre, ce cas particulier est « élémentaire » et nous n'aurons pas besoin, comme dans les articles suivants, d'introduire des groupes d'homotopie de catégories.

De manière précise, nous démontrons ici une suite exacte du type

$$(U) \quad {}_e L_1(A) \rightarrow {}_e L_1(A_S) \rightarrow {}_e U(A, S) \rightarrow {}_e L_0(A) \rightarrow {}_e L_0(A_S),$$

où ${}_e U(A, S)$ est un groupe analogue au groupe ${}_e U(A)$ construit dans [14] à l'aide de sous-modules de Lagrange au sens de Novikov [23] (*cf.* le paragraphe 2 pour la définition précise). Cette suite est analogue à la suite exacte de Bass et Heller :

$$(K) \quad K_1(A) \rightarrow K_1(A_S) \rightarrow K(A, S) \rightarrow K_0(A) \rightarrow K_0(A_S).$$

En fait, elle en est une généralisation.

Le groupe ${}_e U(A, S)$ [comme d'ailleurs le groupe $K(A, S)$] ne dépend que de la catégorie des A -modules de S -torsion M admettant une présentation finie du type

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où P_0 et P_1 sont projectifs de type fini. Si on pose $\hat{A} = \lim_{\leftarrow} A/s A$ et $\hat{A}_S = (\hat{A})_{i(S)}$ où $i : A \rightarrow \hat{A}$, on en déduit une suite exacte de Mayer-Vietoris analogue à une suite exacte

de Bak et Wall :

$${}_e L_1(\hat{A}) \otimes {}_e L_1(A_S) \rightarrow {}_e L_1(\hat{A}_S) \rightarrow {}_e L_0(A) \rightarrow {}_e L_0(\hat{A}) \otimes {}_e L_0(A_S) \rightarrow {}_e L_0(\hat{A}_S).$$

Bak et Wall ont montré l'intérêt d'une telle suite pour le calcul effectif des « groupes de Wall » qui sont essentiellement des « groupes de Witt » :

$${}_e W_n(A) = \text{Coker} [K_n(A) \rightarrow {}_e L_n(A)]$$

ou des « cogroupes de Witt » :

$${}_e W'_n(A) = \text{Ker} [{}_e L_n(A) \rightarrow K_n(A)]$$

pour des petites valeurs de n et pour $A = \mathbf{Z} \pi$ (cf. [14], p. 74). On démontre ainsi par exemple que les termes relatifs R et \hat{R} dans les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} L_1(\mathbf{Z} \pi) & \longrightarrow & L_1(\mathbf{Q} \pi) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & L_0(\mathbf{Z} \pi) \longrightarrow L_0(\mathbf{Q} \pi), \\ \bigoplus_p L_1(\mathbf{Z}_p \pi) & \longrightarrow & \bigoplus_p L_1(\mathbf{Q}_p \pi) & \longrightarrow & \hat{R} & \longrightarrow & \bigoplus_p L_0(\mathbf{Z}_p \pi) \longrightarrow \bigoplus_p L_0(\mathbf{Q}_p \pi), \end{array}$$

sont naturellement isomorphes.

Un autre intérêt de la suite exacte (U) est de pouvoir comparer les groupes de Witt ${}_e W_0(A)$ et ${}_e W_0(A_S)$ lorsque A/sA est un groupe abélien de torsion finie pour tout élément s de S . Nous montrons alors que $W_0(A) \otimes \mathbf{Z}[1/2] \approx W_0(A_S) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$. En utilisant le théorème de périodicité de [15], on peut en déduire que

$${}_e W_n(A) \otimes \mathbf{Z}[1/2] \approx W_n(A_S) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$$

pour toutes les valeurs de n . Ce résultat sera incorporé dans l'article [15] (encore en préparation). En particulier, la définition des groupes de Wall ne change pas (modulo la 2-torsion) en remplaçant l'anneau $\mathbf{Z} \pi$ par l'anneau $\mathbf{Q} \pi$.

Le premier paragraphe établit un certain nombre de sorites sur les modules de S -torsion munis de formes ε -quadratiques ou ε -hermitiennes.

Dans le deuxième paragraphe, on démontre la suite exacte (U).

Enfin, le troisième paragraphe contient les applications annoncées ainsi qu'une application à la L -théorie des extensions laurentiennes trouvée indépendamment par A. Ranicki [25].

Remarques sur les notations et la terminologie

— Un module M sera dit de dimension homologique finie s'il existe une résolution

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

pour un certain n où les modules P_i sont projectifs de *type fini*.

– Un groupe abélien M est dit de n -torsion si $nx = 0$ pour tout élément x de M . Un A -module M est dit de \mathfrak{p} -torsion (\mathfrak{p} étant un idéal de A) si $\lambda x = 0$ pour $\lambda \in \mathfrak{p}$ et $x \in M$. Il est dit de \mathfrak{p}^∞ -torsion s'il est de \mathfrak{p}^n -torsion pour n assez grand.

– Si M est un A -module projectif à droite de type fini, on note tM son *antidual*, c'est-à-dire le A -module (à droite) formé des applications \mathbb{Z} -linéaires $f : M \rightarrow A$ telles que $f(x\lambda) = \bar{\lambda}f(x)$ pour $\lambda \in A$ et $x \in M$ ($a \mapsto \bar{a}$ étant une anti-involution de A).

L'homomorphisme de $P \rightarrow {}^tP$ défini par $x \mapsto \tilde{x}$ où $\tilde{x}(f) = \overline{f(x)}$ est alors un isomorphisme. Si $x \in P$ et $y \in {}^tP$ on note $\langle x, y \rangle$ (resp. $\langle y, x \rangle$) l'élément $y(x)$ [resp. $\overline{y(x)}$]. Si $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme, on définit ${}^t f : {}^tN \rightarrow {}^tM$ de manière usuelle par la formule ${}^t f(g) = g.f$. On a alors la formule $\langle {}^t f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ et ${}^t {}^t f = f$ lorsqu'on identifie les modules à leurs « bidiaux ».

– Soit S un système multiplicatif contenu dans le centre d'un anneau A et formé d'éléments non-diviseurs de zéro. Si M et N sont deux A -modules, un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ est dit un *quasi-isomorphisme* si $f_s : M_s \rightarrow N_s$ est un isomorphisme.

– Avec les notations précédentes, soit s un élément de S . On note alors simplement A/s l'anneau A/sA . On note de même M/s le A/s -module M/sM .

– Pour alléger l'écriture, on posera $W_n(A) = {}_\varepsilon W_n(A)$ pour $\varepsilon = 1$ [14].

De même $L_n(A) = {}_1 L_n(A)$, $W(A) = {}_1 W(A)$, $W(A, S) = {}_1 W(A, S)$, etc.

– Dans cet article nous devons considérer beaucoup de groupes nouveaux définis à partir d'objets, de couples, de triples, etc.

Nous noterons souvent $d(\alpha)$ la classe de l'objet, du couple ou du triple α dans le groupe considéré. Pour les objets E , nous écrirons souvent $[E]$ au lieu de $d(E)$ ou même simplement E lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

– Sauf mention expresse du contraire, les formes quadratiques considérées seront non dégénérées.

– Le symbole ■ indiquera la fin d'une démonstration.

I. — Formes quadratiques sur les A -modules de S -torsion

Reprenons les notations générales de l'introduction et considérons la sous-catégorie pleine \mathcal{T}_S de la catégorie des A -modules à droite dont les objets sont les modules de type fini qui sont de S -torsion et de A -dimension homologique inférieure ou égale à 1.

On peut considérer A comme module à droite sur A en posant $a.\lambda = \bar{\lambda}a$ pour λ scalaire. De cette manière, $\text{Hom}(M, A)$, $\text{Ext}(M, A)$, etc. sont naturellement des A -modules à droite. Soit $d : \mathcal{T}_S \rightarrow \mathcal{T}_S$ le foncteur contravariant qui associe à tout objet M de \mathcal{T}_S l'objet $d(M) = \text{Ext}(M, A)$ et à tout morphisme f le morphisme $\text{Ext}(f, \text{Id}_A)$.

1.1. THÉORÈME. — *Le foncteur d est un « foncteur de dualité » dans le sens de [13]. En particulier, on a un isomorphisme fonctoriel $d^2 \approx \text{id}_{\mathcal{T}_S}$.*

Démonstration. — Soit s un élément de S tel que $sM = 0$. La suite exacte de A -modules

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\cdot s} A \rightarrow A/s \rightarrow 0,$$

induit une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}(M, A) & \rightarrow & \text{Hom}(M, A/s) & \xrightarrow{\approx} & \text{Ext}(M, A) \xrightarrow{0} \text{Ext}(M, A). \\ & & \parallel & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Si t est un autre élément de S , on a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(M, A/st) & \xrightarrow{\approx} & \text{Ext}(M, A) \\ \uparrow \cdot t & & \parallel \\ \text{Hom}(M, A/s) & \xrightarrow{\approx} & \text{Ext}(M, A) \end{array}$$

ce qui permet d'identifier $\text{Ext}(M, A)$ à la limite inductive $\lim_{s \in S} \text{Hom}(M, A/s)$ (cette limite inductive étant atteinte pour un certain s). L'application canonique de M dans $\text{Hom}(\text{Hom}(M, A/s))$ définie par $m \mapsto \tilde{m}$ où $\tilde{m}(f) = \overline{f(m)}$ induit un homomorphisme injectif de M dans $d^2(M)$ dont il reste à montrer que c'est un isomorphisme.

Puisque M est de dimension homologique 1, il existe une résolution projective de M de la forme

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P_0, A) \xrightarrow{t\alpha} \text{Hom}(P_1, A) \rightarrow \text{Ext}(M, A) \rightarrow 0.$$

Pour tout A -module projectif de type fini P , posons ${}^tP = \text{Hom}(P, A)$. Posons aussi $\hat{M} = \text{Hom}(M, A/s)$. La suite exacte précédente s'écrit donc :

$$0 \rightarrow {}^tP_0 \xrightarrow{t\alpha} {}^tP_1 \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0.$$

On peut rendre plus précise cette identification entre

$$\hat{M} = \text{Hom}(M, A/s) \quad \text{et} \quad \text{Ext}(M, A) \approx \text{Coker}({}^t\alpha).$$

D'après le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \text{Hom}(M, A/s) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(P_0, A) & \xrightarrow{\cdot s} & \text{Hom}(P_0, A) & \rightarrow & \text{Hom}(P_0, A/s) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow t\alpha & & \downarrow t\alpha & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(P_1, A) & \xrightarrow{\cdot s} & \text{Hom}(P_1, A) & \rightarrow & \text{Hom}(P_1, A/s) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Ext}(M, A) & & & & \end{array}$$

la correspondance cherchée est celle qui associe à $f : M \rightarrow A/s$ la classe de l'homomorphisme $f_1 : P_1 \rightarrow A$ dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{s} & A & \rightarrow & A/s \rightarrow 0 \end{array}$$

Soit $\theta : P_0 \rightarrow P_1$ un homomorphisme tel que $\theta \cdot \alpha = s$ (ce morphisme existe car $sM = 0$). Alors $f_0 = f_1 \cdot \theta$, ce qui permet de définir f à partir de f_1 .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que $M \approx \hat{M}$. Soit donc m un élément de M et soit p_0 un élément de P_0 tel que $\beta(p_0) = m$. Soit $\tilde{p}_0 : P_0 \rightarrow A$ l'homomorphisme défini par $\tilde{p}_0(f_0) = \overline{f_0(p_0)}$.

Enfin, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & {}^tP_0 & \xrightarrow{{}^t\alpha} & {}^tP_1 & \xrightarrow{\gamma} & \hat{M} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{p}_0 & & \downarrow h & & \downarrow k \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{s} & A & \rightarrow & A/s \rightarrow 0 \end{array}$$

où on pose

$$h(u) = (\tilde{p}_0 \cdot {}^t\theta)(u) = \tilde{p}_0(u \cdot \theta) = \overline{(u \cdot \theta)(p_0)}.$$

Si f est un élément quelconque de \hat{M} et si f_1 est un élément de tP_1 tel que $\gamma(f_1) = f$, on a donc (modulo s) les relations

$$k(f) = h(f_1) = (f_1 \cdot \theta)(p_0) = f_0(p_0)$$

avec les notations précédentes. Si \tilde{m} est l'image de m par l'homomorphisme canonique de M dans \hat{M} , on a donc $k = \tilde{m}$ ainsi que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \longrightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & {}^t{}^2(P_1) & \xrightarrow{{}^t{}^2\alpha} & {}^t{}^2(P_0) & \rightarrow & \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

Puisque P_0 et P_1 sont projectifs de type fini, les premières flèches verticales sont des isomorphismes. Il en est donc de même de la flèche $M \rightarrow \hat{M}$. ■

REMARQUE 1. — Une interprétation très voisine du groupe $\text{Ext}(M, A)$ est la suivante. La suite exacte

$$0 \rightarrow A_s^1 \rightarrow A_s \rightarrow A_s/A \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, A_s) \rightarrow \text{Hom}(M, A_s/A) \rightarrow \text{Ext}(M, A) \rightarrow \text{Ext}(M, A_s).$$

Puisque les groupes $\text{Hom}(M, A_s)$ et $\text{Ext}(M, A_s)$ sont nuls de manière évidente, on a ainsi $\text{Hom}(M, A_s/A) \approx \text{Ext}(M, A)$.

REMARQUE 2. — Une deuxième démonstration de l'isomorphisme $M \approx \hat{M}$ qui évite l'intermédiaire $\text{Ext}(M, A) \approx \text{Hom}(M, A/s)$ (néanmoins utile par la suite) est la suivante : pour tout objet M de \mathcal{T} , il existe une résolution

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

d'où on déduit les suites exactes

$$0 \rightarrow {}^tP_0 \xrightarrow{{}^t\alpha} {}^tP_1 \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow {}^{t^2}P_1 \xrightarrow{{}^{t^2}\alpha} {}^{t^2}P_0 \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0.$$

Il en résulte évidemment un isomorphisme de M sur \hat{M} qui est indépendant de la résolution projective choisie. Cette remarque est utile pour l'aspect suivant de la théorie : considérons un idéal bilatère p de A contenant au moins un élément régulier. Un module est de p^n -torsion si $p^n M = 0$. Si \mathcal{T}_p désigne la catégorie des A -modules de type fini et de dimension homologique 1 qui sont de p^n -torsion pour n assez grand, on vérifie que le foncteur $M \mapsto \hat{M} = \text{Ext}(M, A)$ est aussi un foncteur de dualité.

Conformément aux définitions générales de [13] relatives aux catégories hermitiennes, on peut introduire dans \mathcal{T}_s les notions de forme sesquilinéaire et de forme ε -hermitienne, ε étant un élément du centre de A tel que $\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1$ (la notion de forme ε -quadratique étant cependant légèrement modifiée, cf. ci-dessous). Dans ce contexte, une forme sesquilinéaire sur M est donnée par une application \mathbb{Z} -bilinéaire $\varphi : M \times M \rightarrow A_s/A$ (ou A/s pour s « assez grand ») telle que $\varphi(x\lambda, y) = \bar{\lambda}\varphi(x, y)$ et $\varphi(x, y\lambda) = \varphi(x, y)\lambda$ pour x et y appartenant à M et λ appartenant à A . L'ensemble des formes sesquilinéaires s'identifie à $\text{Hom}(M, \hat{M})$ d'après ce qui précède; on note $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ cette correspondance. On a donc la formule

$$\langle x, \tilde{\varphi}(y) \rangle = \varphi(x, y) \quad \text{pour } x \in M \text{ et } y \in M.$$

Une forme φ est dite non dégénérée si l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de M dans \hat{M} qui lui est associé est un isomorphisme. Une forme est dite ε -hermitienne si elle satisfait à la condition de symétrie supplémentaire $\varphi(y, x) = \varepsilon \overline{\varphi(x, y)}$.

Soit Λ le sous-groupe de $A'_s = A_s/A$ formé des éléments a qui s'écrivent $b - \varepsilon \bar{b}$. Une forme ε -quadratique attachée à φ est la donnée d'une fonction $q : M \rightarrow A'_s/\Lambda$ telle que :

(i) $q(x\lambda) = \bar{\lambda}q(x)\lambda;$

(ii) $q(x+y) - q(x) - q(y) = \{ \varphi(x, y) \}$ où $\{ \varphi(x, y) \}$ désigne la classe de $\varphi(x, y)$ dans $A'_s/\Lambda;$

(iii) $\varphi(x, x) = q(x) + \bar{\varepsilon} \overline{q(x)}$ [cette notation a un sens puisque $q(x)$ est défini modulo Λ]. La forme quadratique q est dite non dégénérée si φ est non dégénérée. Sauf mention expresse du contraire les formes quadratiques et hermitiennes considérées par la suite seront non dégénérées.

Une manière classique de construire de telles formes quadratiques est de considérer des formes sesquilineaires $\tilde{\varphi}_0$ modulo des formes du type $\tilde{\psi}_0 - \bar{\varepsilon} {}^t\tilde{\psi}_0$. En posant

$$q(x) = \{ \varphi_0(x, x) \} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \bar{\varepsilon} \overline{\varphi_0(y, x)},$$

on vérifie aisément les axiomes ⁽¹⁾. Cependant, contrairement à ce qui se passe dans le cas des modules projectifs de type fini, toutes les formes quadratiques ne sont pas de ce type comme nous le montrerons plus loin.

De manière précise, nous allons construire des modules quadratiques de torsion à partir de modules quadratiques sur A_s essentiellement (cf. aussi [33], [9]). Pour cela, considérons un A -module projectif de type fini E et un morphisme de A -modules $\alpha : E \rightarrow {}^tE$ tel que α_s soit un isomorphisme (c'est-à-dire un quasi-isomorphisme d'après la terminologie introduite au début). On obtient ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & {}^t{}^2E & \xrightarrow{\varepsilon^t\alpha} & {}^tE & \rightarrow & \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

Si on suppose que ${}^t\alpha = \varepsilon\alpha$, on en déduit un isomorphisme canonique de M sur \hat{M} qu'on peut expliciter ainsi. Soit $\theta : {}^tE \rightarrow E$ un morphisme tel que $\theta \cdot \alpha = s$ et $\alpha \cdot \theta = s$ avec $s = \bar{s}$ (morphisme qui existe si s est « assez grand »). La forme ε -hermitienne φ sur M est alors définie par la formule

$$\varphi(\beta(x), \beta(y)) = \langle \theta(x), y \rangle \text{ mod } s.$$

Ceci résulte de l'identification faite plus haut entre les groupes $\text{Ext}(M, A)$, $\text{Hom}(M, A/s)$ et $\text{Hom}(M, A_s/A)$. Supposons maintenant que θ s'écrive $\theta_0 + \bar{\varepsilon} {}^t\theta_0$. Considérons alors la forme $q : M \rightarrow (A/s)$ définie par $q(x) = \langle \theta_0(x), x \rangle \text{ mod } s$ où $A/s \subset A'_s$. C'est clairement une forme quadratique attachée à Λ et φ . Notons ici que l'expression $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ désigne l'application de $E \times {}^tE$ dans A définie par $(u, v) \mapsto v(u)$. Si on identifie E à ${}^t{}^2E$, on a évidemment $\langle u, v \rangle = \langle \overline{v}, u \rangle$, formule bien commode pour effectuer les calculs.

Remarque. — Les formes ainsi obtenues ne sont pas hyperquadratiques en général. Comme exemple, on peut considérer $E = \mathbf{Z} \approx {}^t\mathbf{Z}$ et $\alpha = 2\theta_0 = 2$. On obtient alors la forme sur $\mathbf{Z}/2$ définie par $q(1) = 1$, $q(0) = 0$ et $\varphi(x, y) = xy$ (ici q est une application de $\mathbf{Z}/2$ dans $\mathbf{Z}/4$ et φ est l'application bilinéaire classique $\varphi : \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 \rightarrow \mathbf{Z}/2$).

⁽¹⁾ Cette notion est essentiellement due à Tits, Wall et Bak. De telles formes seront dites « hyperquadratiques » par la suite.

Une autre façon d'interpréter les formes ainsi définies sur M consiste à regarder tE comme un module sur A_s et à le munir des formes $\tilde{\varphi}$ et \tilde{q} induites par θ/s et θ_0/s , soit

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\langle \theta(x), y \rangle}{s} = \langle \alpha^{-1}(x), y \rangle$$

et

$$\tilde{q}(x) = \frac{\langle \theta_0(x), x \rangle}{s}.$$

Il est clair que les formes sur M sont alors induites par ces formes sur tE_s dans le sens qu'on a $\varphi(\beta(x), \beta(y)) = \tilde{\varphi}(x, y)$ et $q(\beta(x)) = \tilde{q}(x)$ dans A'_s et A'_s/Λ respectivement.

Soit maintenant L un sous-module de M. On dit qu'il est *isotrope* si $L \subset L^\perp$, $q|_L = 0$ et si M/L est de dimension homologique inférieure ou égale à 1 [ce qui implique la même propriété pour L, \hat{L} et $L^\perp = \text{Ker}(M \approx \hat{M} \rightarrow \hat{L})$]. Soit $F = \beta^{-1}(L)$. On a alors le diagramme commutatif suivant où F est projectif de type fini

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{h} & F & \rightarrow & L \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow j & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \end{array}$$

1.2. THÉORÈME. — Soit $\alpha_0 : E \rightarrow {}^tE$ tel que $\alpha_0 + \bar{\varepsilon}^t \alpha_0 = \alpha$. Il existe des morphismes uniques $\sigma : F \rightarrow {}^tF$ et $\sigma_0 : F \rightarrow {}^tF$ avec $\text{Coker } \sigma \approx L^\perp/L$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs (avec r convenable) :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE \\ \downarrow h & \nearrow j & \uparrow {}^t h \\ F & \xrightarrow{\sigma} & {}^tF \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha_0 + r - \bar{\varepsilon}^t r} & {}^tE \\ \downarrow h & & \uparrow {}^t h \\ F & \xrightarrow{\sigma_0} & {}^tF \end{array}$$

Si θ est un morphisme de tE dans E tel que $\theta\alpha = s$ et $\alpha\theta = s$ avec $s = \bar{s}$, la forme ε -hermitienne ψ ainsi induite sur F est définie par la formule

$$\psi(x, y) = \frac{\langle \theta(j(x)), j(y) \rangle}{s}.$$

De même, la forme quadratique Q associée à σ_0 est définie par la formule

$$Q(x) = \frac{\langle \theta_0(j(x)), j(x) \rangle}{s^2}$$

avec $\theta_0 = \theta \cdot \alpha_0 \cdot \theta$.

Démonstration. — Puisque h est un quasi-isomorphisme, l'unicité de σ et σ_0 est évidente. Pour vérifier les formules proposées, il suffit de localiser. Considérons par exemple la formule

$$\psi(x, y) = \frac{\langle \theta(j(x)), j(y) \rangle}{s}.$$

Le deuxième membre multiplié par s s'écrit :

$$\langle \theta(j(x)), j(y) \rangle = \langle \theta^t h \sigma(x), {}^t h \sigma(y) \rangle = \langle h \theta^t h^t h^{-1} \alpha h^{-1}(x), \sigma(y) \rangle = s \langle x, \sigma(y) \rangle.$$

On vérifie de même la deuxième formule. Il reste à établir l'existence de σ tel que $\text{Coker } \sigma \simeq L^\perp/L$ (l'existence de σ_0 et de r résultera alors de la formule définissant Q).

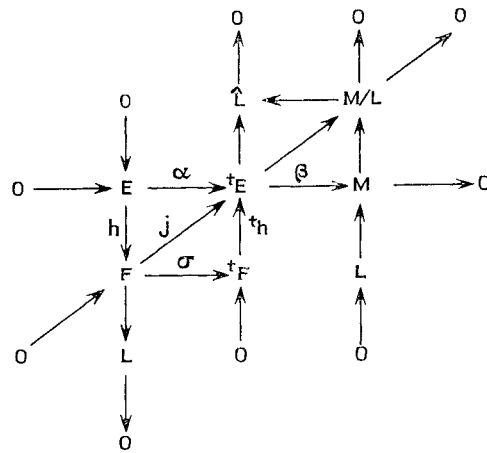
Pour cela considérons l'homomorphisme composé $F \xrightarrow{j} {}^t E \rightarrow M \rightarrow L$. Cet homomorphisme est nul car $L \subset L^\perp$. D'autre part, la suite

$$0 \rightarrow {}^t F \xrightarrow{{}^t h} {}^t E \rightarrow \hat{L} \rightarrow 0$$

étant exacte, on en déduit un homomorphisme $\sigma : F \rightarrow {}^t F$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & {}^t E \\ & j \nearrow & \uparrow {}^t h \\ F & \xrightarrow{\sigma} & {}^t F \end{array}$$

Ce diagramme s'insère d'ailleurs dans un diagramme plus vaste



De la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Coker } \sigma \rightarrow \text{Coker } {}^t h \sigma \rightarrow \text{Coker } {}^t h \rightarrow 0,$$

soit

$$0 \rightarrow \text{Coker } \sigma \rightarrow M/L \rightarrow \hat{L} \rightarrow 0,$$

on déduit bien que $\text{Coker } \sigma \approx L^\perp/L$. ■

Réciproquement, considérons des diagrammes commutatifs du type

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^t E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 & & E \xrightarrow{\alpha_0} {}^t E \\ \downarrow h \quad \nearrow j \quad \uparrow {}^t h & & \downarrow h \quad \uparrow {}^t h \\ F \xrightarrow{\sigma} {}^t F & & F \xrightarrow{\sigma_0} {}^t F \end{array}$$

avec

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{-1} \alpha_0 \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_0 + \varepsilon^{-1} \sigma_0.$$

Si $\theta : {}^tE \rightarrow E$ est choisi en sorte que $\alpha \cdot \theta = s$ et $\theta \cdot \alpha = s$, on en déduit des homomorphismes

$$\gamma : {}^tF \rightarrow F, \quad \theta_0 : {}^tE \rightarrow E \quad \text{et} \quad \gamma_0 : {}^tF \rightarrow F$$

définis respectivement par les formules

$$\gamma = h \cdot \theta \cdot {}^t h, \quad \theta_0 = \theta \cdot \alpha_0 \cdot \theta \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \gamma \cdot \sigma_0 \cdot \gamma.$$

On a donc les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\theta} & {}^tE \\ h \downarrow & & \uparrow {}^t h \\ F & \xleftarrow{\gamma} & {}^tF \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\theta_0} & {}^tE \\ h \downarrow & & \uparrow {}^t h \\ F & \xleftarrow{\gamma_0} & {}^tF \end{array}$$

Soit φ la forme ε -hermitienne définie sur M par

$$\varphi(\beta(x), \beta(y)) = s \langle \theta(x), y \rangle \text{ mod } s^2$$

et soit q la forme ε -quadratique associée définie par

$$q(\beta(x)) = \langle \theta_0(x), y \rangle \text{ mod } s^2.$$

1.3. THÉORÈME. — Soit $L = (\beta \cdot j)(F)$. Alors $L \subset L^\perp$ et $q|_L = 0$. En outre, les formes ε -hermitienne et ε -quadratique sur $L^\perp/L \approx \text{coker } \gamma$ sont induites par γ et γ_0 .

Démonstration. — Soient z et t deux éléments de F . On a alors les égalités

$$\begin{aligned} \varphi(\beta j(z), \beta(j(t))) &= s \langle \theta j(z), j(t) \rangle = s \langle \theta {}^t h \sigma(z), {}^t h \sigma t \rangle \\ &= s \langle h \theta {}^t h \sigma(z), \sigma(t) \rangle = s \langle \gamma \sigma(z), \sigma(t) \rangle \\ &= s^2 \langle z, \sigma(t) \rangle = 0 \text{ mod } s^2. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} q(\beta j(z)) &= \langle \theta_0 j(z), j(z) \rangle = \langle \theta_0 {}^t h \sigma(z), {}^t h \sigma(z) \rangle \\ &= \langle h \theta_0 {}^t h \sigma(z), \sigma(z) \rangle = \langle {}^t \sigma \gamma_0 \sigma(z), z \rangle \\ &= \langle \varepsilon \sigma \gamma_0 \sigma(z), z \rangle = \langle \varepsilon \sigma \gamma \sigma_0 \gamma \sigma(z), z \rangle \\ &= s^2 \langle \varepsilon \sigma_0(z), z \rangle = 0 \text{ mod } s^2. \end{aligned}$$

Puisque $\beta^{-1}(L) = j(F)$, on se retrouve (à isomorphisme près) dans les conditions d'applications du théorème 1.2. Puisque $L^\perp = \text{Ker}(\hat{M} \rightarrow \hat{L})$, on déduit du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{{}^t \alpha} & {}^t E & \rightarrow & \hat{M} \\ {}^t j \downarrow & & \downarrow \varepsilon^{-1} & & \downarrow \hat{x} \\ {}^t F & \xrightarrow{{}^t h} & {}^t E & \rightarrow & \hat{L} \end{array}$$

que L^\perp est l'image de tF par l'application composée ${}^tF \xrightarrow{h} {}^tE \xrightarrow{\beta} M$. Si x et y sont deux éléments de tF , on a donc

$$\varphi(\beta {}^t h(x), \beta {}^t h(y)) = \langle \theta {}^t h(x), {}^t h(y) \rangle = \langle h \theta {}^t h(x), y \rangle = \langle \gamma(x), y \rangle$$

(égalités mod s). De même, mod s^2 , on a les égalités

$$q(\beta {}^t h(x)) = \langle \theta_0 {}^t h(x), {}^t h(x) \rangle = \langle h \theta_0 {}^t h(x), x \rangle = \langle \gamma_0(x), x \rangle. \quad \blacksquare$$

II. — Le groupe ${}_eU(A, S)$ et la première suite exacte d'une localisation

Soit M un A -module quadratique de torsion dans le sens du paragraphe précédent. Nous dirons qu'il est *résoluble* s'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0,$$

avec $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon {}^t\alpha_0$, telle que les formes ε -hermitienne et ε -quadratique sur M soient induites par α et α_0 . Nous dirons qu'il est « *hyperrésoluble* » s'il existe en outre des morphismes $\chi : {}^tE \rightarrow {}^tE$ et $\eta : E \rightarrow E$ tels que $\chi + \varepsilon \eta = 1$, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE \\ \eta \downarrow & & \downarrow \chi \\ E & \xrightarrow{\varepsilon\alpha = {}^t\alpha} & {}^tE \end{array}$$

soit commutatif et tels que $\alpha_0 = \chi.\alpha$ induise la forme quadratique sur M . En fait, cette donnée munit M d'une forme hyperquadratique, le morphisme $\tilde{\varphi}_0 : M \rightarrow \hat{M}$ définissant q étant défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \eta & & \downarrow \chi & & \downarrow \tilde{\varphi}_0 \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{{}^t\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta_1} & \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

Si M est un module quadratique de torsion, un sous-module L est dit *lagrangien* si $L = L^\perp$, si $q|_L = 0$ et si M/L est de dimension homologique inférieure ou égale à 1. Si M est hyperquadratique, un sous-module L isotrope ou lagrangien est dit *hyperisotrope* ou *hyperlagrangien* s'il existe un choix de $\tilde{\varphi}_0$ tel que $(\tilde{\varphi}_0^{-1} \tilde{\varphi}_0)(L) \subset L$.

Remarque. — Cette distinction entre modules quadratiques et hyperquadratiques et entre sous-modules isotropes et hyperisotropes, etc. n'a évidemment un intérêt que dans le cas où 2 n'est pas inversible dans A . La distinction disparaît dans le cas contraire.

Considérons maintenant l'ensemble des triples (M, L_1, L_2) où M est un module ε -hyperquadratique et où L_1 et L_2 sont des sous-modules lagrangiens de M . Le

groupe ${}_eU(A, S)$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$(i) (M, L_1, L_2) + (M', L'_1, L'_2) = (M \oplus M', L_1 \oplus L'_1, L_2 \oplus L'_2);$$

$$(ii) (M, L_1, L_2) + (M, L_2, L_3) = (M, L_1, L_3);$$

(iii) $(M, L_1, L_2) = (L^\perp/L, L_1/L, L_2/L)$ où L est un sous-module hyperisotrope contenu dans L_1 et L_2 .

Remarque. — De la suite exacte

$$0 \rightarrow L^\perp/L \rightarrow M/L \rightarrow \hat{L} \rightarrow 0,$$

on déduit que L^\perp/L est de dimension homologique ≤ 1 . De même, des suites exactes

$$0 \rightarrow L_i/L \rightarrow M/L \rightarrow M/L_i \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow L^\perp/L \rightarrow L^\perp/L_i \rightarrow L_i/L \rightarrow 0,$$

il résulte que

$$(L^\perp/L)/(L_i/L) \approx L^\perp/L_i, \quad i = 1, 2,$$

sont des modules de dimension homologique ≤ 1 . Un simple calcul montre que les L_i/L sont des sous-modules lagrangiens de L^\perp/L .

2.1. LEMME. — Soit M un A -module ε -hyperquadratique et soit M^- le A -module M muni de la forme quadratique opposée. Alors $M \oplus M^-$ est isomorphe à $H(M) = M \oplus \hat{M}$ muni de la forme ε -quadratique « hyperbolique ».

Démonstration. — Elle est classique et nous renvoyons le lecteur à [13] pour les détails. Notons que cette proposition est fautive en général si on suppose M muni d'une forme quadratique qui n'est pas hyperquadratique. Par exemple, $M = \mathbf{Z}/2$ avec la forme $q : \mathbf{Z}/2 \rightarrow \mathbf{Z}/4$ décrite dans le paragraphe 1. Dans ce cas, $M \oplus M^-$ n'est pas hyperbolique puisque la forme quadratique prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}/4$ et non dans $\mathbf{Z}/2 = 2\mathbf{Z}/4$. Cependant, le sous-module L de $M \oplus M^-$ formé des couples (x, x) pour $x \in M$ est lagrangien. ■

Si N est un A -module de dimension homologique ≤ 1 , le module hyperbolique $N \oplus \hat{N}$ est hyperrésoluble. En effet, considérons une résolution de N :

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{\gamma} P \rightarrow N \rightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow Q \oplus {}^tP \xrightarrow{\alpha} {}^tQ \oplus P \rightarrow N \oplus \hat{N} \rightarrow 0,$$

où α est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon} {}^t\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

les conditions énoncées plus haut sont satisfaites. En outre, un calcul simple montre que la forme φ_0 induite sur $M = N \oplus \hat{N}$ est la forme hyperbolique, soit

$$\varphi_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = y_1(x_2)$$

ou encore

$$\tilde{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. LEMME. — Soit M un A -module ε -quadratique hyperrésoluble obtenu grâce à la suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

et grâce à des morphismes χ et η comme ci-dessus. Soit u un automorphisme orthogonal de M . Il existe alors un A -module ε -quadratique hyperrésoluble M' , soit

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\alpha'} {}^tE' \xrightarrow{\beta'} M' \rightarrow 0,$$

ainsi qu'un automorphisme orthogonal u' de M' tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E \oplus E' & \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} & {}^tE \oplus {}^tE' & \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} & M \oplus M' \rightarrow 0 \\ & & \uparrow {}^t v & & \downarrow v & & \downarrow u \oplus u' \\ 0 & \rightarrow & E \oplus E' & \xrightarrow{\alpha \oplus \alpha'} & {}^tE \oplus {}^tE' & \xrightarrow{\beta \oplus \beta'} & M \oplus M' \rightarrow 0 \end{array}$$

où v est un isomorphisme. De manière plus précise, on peut choisir

$$M' = M \oplus M^- \oplus M^- \quad \text{et} \quad u' = u \oplus u^{-1} \oplus u^{-1}.$$

Enfin, on a

$$(\alpha \oplus \alpha')_0 = {}^t v (\alpha \oplus \alpha')_0 v \text{ mod } \text{Im}(1 - \varepsilon T) \quad \text{où} \quad T(f) = {}^t f.$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord que la résolution de $M \oplus M^-$, soit

$$0 \rightarrow E \oplus E \xrightarrow{\alpha \oplus (-\alpha)} {}^tE \oplus {}^tE \xrightarrow{\beta \oplus \beta} M \oplus M^- \rightarrow 0$$

est isomorphe à la résolution de $M \oplus \hat{M}$ explicitée plus haut (avec M au lieu de N). En effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E \oplus E & \xrightarrow{\alpha \oplus (-\alpha)} & {}^tE \oplus {}^tE & \xrightarrow{\beta \oplus \beta} & M \oplus M^- \rightarrow 0 \\ & & \downarrow {}^t g^{-1} & & \downarrow g & & \downarrow f \\ 0 & \rightarrow & E \oplus E & \xrightarrow{\delta} & {}^tE \oplus {}^tE & \xrightarrow{\beta \oplus \beta_1} & M \oplus \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

où f , g et δ sont définis par les matrices

$$f = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{\varphi}^{-1} \tilde{\varphi}_0 & \tilde{\varphi}^{-1} \tilde{\varphi}_0 \\ \tilde{\varphi} & -\tilde{\varphi} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 - \chi & \chi \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{soit } {}^t g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \varepsilon \eta & -\varepsilon \eta \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, $g \cdot (\alpha_0 \oplus (-\alpha_0)) \cdot {}^t g$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} {}^t \eta \alpha_0 \eta - \chi \alpha_0 {}^t \chi & \alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$${}^t \eta \alpha_0 \eta = \varepsilon(1 - \chi) \chi \alpha \eta = \varepsilon \chi \alpha \eta - \varepsilon \chi^2 \alpha \eta$$

et

$$\chi \alpha_0 {}^t \chi = \chi^2 \alpha (1 - \varepsilon \eta) = -\varepsilon \chi^2 \alpha \eta + \chi^2 \alpha = -\varepsilon \chi^2 \alpha \eta + \varepsilon \chi \alpha \eta.$$

Donc l'expression précédente s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est bien congrue à

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mod Im}(1 - \bar{\varepsilon} T).$$

La commutativité du diagramme est assurée par celle des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} {}^t E \xrightarrow{\beta} M & & E \xrightarrow{\alpha} {}^t E \\ \chi \downarrow & \downarrow \tilde{\varphi}_0 & \eta \downarrow & \downarrow \chi \\ {}^t E \xrightarrow{\beta_1} \hat{M} & & E \xrightarrow{{}^t \alpha - \varepsilon \alpha} {}^t E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} {}^t E \xrightarrow{\beta} M & & E \xrightarrow{\alpha} {}^t E \\ \parallel & \downarrow \tilde{\varphi} & \eta \downarrow & \downarrow \chi \\ {}^t E \xrightarrow{\beta_1} \hat{M} & & E \xrightarrow{{}^t \alpha - \varepsilon \alpha} {}^t E \end{array}$$

Par ce transport de structure, l'automorphisme de $M \oplus M^-$ défini par $u \oplus u$ devient $u \oplus {}^t u^{-1}$ à un automorphisme ε -élémentaire près (cf. [13], p. 6). Pour achever la démonstration, quitte à changer u en $u \oplus u^{-1}$, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où on remplace M par $M \oplus \hat{M}$ et u par un automorphisme ε -élémentaire de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_0 - \bar{\varepsilon} {}^t u_0 & 1 \end{pmatrix},$$

par exemple (cf. [13], p. 10).

Soient maintenant r_0 et s_0 des endomorphismes de ${}^t E$ et de E respectivement qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^t E & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & s_0 \downarrow & & r_0 \downarrow & & u_0 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\varepsilon \alpha} & {}^t E & \xrightarrow{\beta_1} & \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow {}^t r_0 & & \downarrow {}^t s_0 & & \downarrow {}^t u_0 \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\varepsilon \alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta_1} & \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E \oplus E & \xrightarrow{\delta} & {}^tE \oplus {}^tE & \xrightarrow{\beta \oplus \beta_1} & M \oplus \hat{M} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow {}^t v^{-1} & & \downarrow v & & \downarrow u \\ 0 & \rightarrow & E \oplus E & \xrightarrow{\delta} & {}^tE \oplus {}^tE & \xrightarrow{\beta \oplus \beta_1} & M \oplus \hat{M} \rightarrow 0 \end{array}$$

avec

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_0 - \bar{\varepsilon} {}^t s_0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

De même

$$v \delta_0 {}^t v = \delta_0,$$

avec

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mod } \text{Im}(1 - \bar{\varepsilon} T).$$

Ceci achève la démonstration du lemme 2.2. ■

Soit M un module hyperrésoluble défini par une suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Si L_1 et L_2 sont deux sous-modules lagrangiens, on a alors des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\beta_i} & F_i & \rightarrow & L_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \\ & & \parallel & & \cap & & \cap \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \rightarrow & M \rightarrow 0 \end{array}$$

2.3. LEMME. — Soit β'_i l'isomorphisme $E_S \rightarrow F_{iS}$ obtenu à partir de β_i par localisation. Alors $\beta'_2 \beta'^{-1}_1$ est une isométrie de F_{1S} sur F_{2S} munis des formes explicitées en 1.2.

Démonstration. — Soit φ_i , $i = 1, 2$, la forme hermitienne sur F_i déduite de la suite exacte définissant M et soit $\theta : {}^tE \rightarrow E$ un homomorphisme tel que $\theta \cdot \alpha = s$ et $\alpha \cdot \theta = \bar{s}$ avec $s = \bar{\bar{s}}$. Si x et y sont deux éléments de E, on a la formule

$$\varphi_i(\beta_i(x), \beta_i(y)) = \frac{1}{s} \langle \theta \beta_i(x), \beta_i(y) \rangle \text{ mod } s = \langle x, \alpha(y) \rangle \text{ mod } s.$$

De même, si $\theta_0 : {}^tE \rightarrow E$ est un homomorphisme qui définit une forme quadratique sur tE et qui est tel que $\theta_0 + \bar{\varepsilon} {}^t \theta_0 = \theta$, la forme quadratique sur F_i est définie par

$$q_i(\beta_i(x)) = \frac{1}{s} \langle \theta_0 \beta_i(x), \beta_i(x) \rangle = \frac{1}{s} \langle {}^t \alpha \theta_0 \alpha(x), x \rangle.$$

Par conséquent, les formes hermitiennes φ_i tout comme les formes quadratiques q_i induisent la même forme hermitienne ou quadratique sur E . En localisant, on voit donc que $\beta_2^{-1} \beta_1$ est une isométrie entre modules quadratiques. ■

Soit $\mathcal{S} : {}_e Q(A) \rightarrow {}_e Q(A)_S$ le foncteur extension des scalaires avec les notations de [13], paragraphe 2. Le lemme précédent nous permet d'associer au triple (α, L_1, L_2) un élément du groupe de Grothendieck ${}_e L(\mathcal{S})$ à savoir la classe du triple (F_1, F_2, w) avec $w = \beta_2' \beta_1'^{-1}$. Nous nous proposons de démontrer maintenant que cette correspondance induit un isomorphisme entre les groupes ${}_e U(A, S)$ et ${}_e L(\mathcal{S})$. Nous noterons provisoirement $[\alpha, L_1, L_2]$ la classe du triple (F_1, F_2, w) (le morphisme α_0 tel que $\alpha_0 + \bar{\varepsilon} {}^t \alpha_0 = \alpha$ est sous-entendu dans cette notation).

2.4. LEMME. — Soit u un automorphisme orthogonal de M . Alors

$$[\alpha, L_1, L_2] = [\alpha, u(L_1), u(L_2)].$$

Démonstration. — Il est clair que

$$[\alpha, L_1, L_2] = [\alpha \oplus \alpha \oplus -\alpha \oplus -\alpha, L_1 \oplus L_1 \oplus L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_1 \oplus L_1 \oplus L_1].$$

D'après le lemme 2.2, on peut donc supposer sans restreindre la généralité qu'il existe un automorphisme v de ${}^t E$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^t E & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & {}^t(v)^{-1} & & v & & u \\ 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^t E & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \end{array}$$

Si on pose $G_i = \beta^{-1}(u(L_i))$, on voit que v réalise une isométrie entre F_i et G_i . En effet, puisque ${}^t v \theta v = \theta$, on a la formule

$$\langle \theta x, y \rangle = \langle \theta vx, vy \rangle.$$

De même, on a

$$\langle \theta_0 x, x \rangle = \langle \theta_0 vx, vx \rangle.$$

Enfin, si on pose $\gamma_i = v \beta_i$, on a le diagramme commutatif (en localisant) :

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\beta_2 \beta_1^{-1}} & F_2 \\ v \downarrow & & \downarrow v \\ G_1 & \xrightarrow{\gamma_2 \gamma_1^{-1}} & G_2 \end{array}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. ■

2.5. COROLLAIRE. — Si u est un commutateur, on a la relation

$$[\alpha, L_1, u(L_2)] = [\alpha, L_1, L_2].$$

En effet, soit $u = u_1^{-1} u_2^{-1} u_1 u_2$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned} [\alpha, L_1, (u_1^{-1} u_2^{-1} u_1 u_2)(L_1)] &= [\alpha, (u_2 u_1)(L_1), (u_1 u_2)(L_1)] \\ &= [\alpha, L_1, (u_1 u_2)(L_1)] - [\alpha, L_1, (u_2 u_1)(L_1)] \\ &= [\alpha, L_1, u_1(L_1)] + [\alpha, u_1(L_1), (u_1 u_2)(L_1)] \\ &\quad - [\alpha, L_1, u_2(L_1)] - [\alpha, u_2(L_1), (u_2 u_1)(L_1)] \\ &= [\alpha, L_1, u_2(L_1)] + [\alpha, L_1, u_1(L_1)] \\ &\quad - [\alpha, L_1, u_1(L_1)] - [\alpha, L_1, u_2(L_1)] = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque. — Le même corollaire s'applique si u est *stablement* un commutateur. En effet, si $u \oplus 1$ est un commutateur dans $M \oplus N$, c'est aussi un commutateur dans $M \oplus N \oplus N^-$ et on remplace alors les sous-modules lagrangiens L_i par $L_i \oplus L'$ où L' est le sous-module de $N \oplus N^-$ formé des couples (x, x) où $x \in N$. Il en est de même si u est stablement un produit de commutateurs.

2.6. THÉORÈME. — *L'élément $[\alpha, L_1, L_2]$ ne dépend pas de la résolution de M :*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^t E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0,$$

qui a été choisie.

Démonstration. — Soit

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\alpha'} {}^t E' \rightarrow M \rightarrow 0,$$

une autre résolution de M et soit

$$\alpha'' = \alpha \oplus \alpha' \oplus \alpha'.$$

Alors

$$[\alpha, L_1, L_2] = [\alpha'', L_1 \oplus L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_1 \oplus L_1].$$

Soit u l'automorphisme orthogonal de $M \oplus M \oplus M$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$u = \sigma \tau \sigma^{-1} \tau^{-1},$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(cf. [13]) et

$$u(L_2 \oplus L_1 \oplus L_1) = L_1 \oplus L_1 \oplus L_2.$$

D'après le corollaire précédent, on a donc

$$[\alpha'', L_1 \oplus L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_1 \oplus L_1] = [\alpha'', L_1 \oplus L_1 \oplus L_1, L_1 \oplus L_1 \oplus L_2] = [\alpha', L_1, L_2]. \quad \blacksquare$$

2.7. LEMME. — Soit L un sous-module hyperisotrope contenu dans $L_1 \cap L_2$. On a alors le diagramme (cf. 1.2)

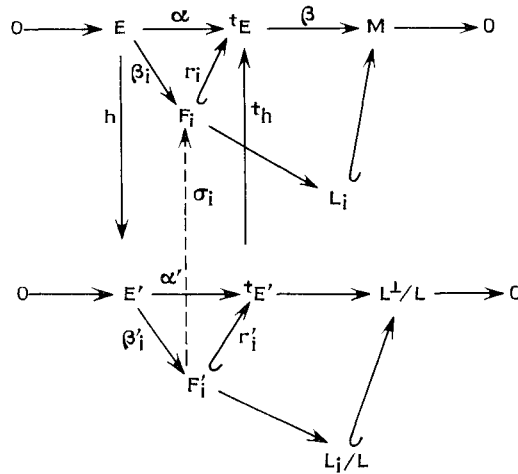
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \uparrow {}^th & & \\ 0 & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\alpha'} & {}^tE' & \xrightarrow{\beta'} & L^\perp/L \rightarrow 0 \end{array}$$

ainsi que la relation

$$[\alpha, L_1, L_2] = [\alpha', L_1/L, L_2/L].$$

Démonstration. — Le fait que L soit hyperisotrope implique que L^\perp/L est aussi un module hyperrésoluble, le morphisme χ pouvant se restreindre à E' (en le modifiant éventuellement en $\chi + \chi' - \bar{\varepsilon} {}^t\eta'$).

Considérons maintenant le diagramme



D'après la définition de E' , on a $({}^tr'_i)(F'_i) \subset r_i(F_i)$. Donc le morphisme th induit un morphisme $\sigma_i : F'_i \rightarrow F_i$ qui est évidemment injectif. Nous avons d'autre part le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{\approx} & M/L^\perp \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & F_i & \xrightarrow{r_i} & {}^tE & \rightarrow & M/L_i \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \sigma_i & & \uparrow {}^th & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & F'_i & \xrightarrow{r'_i} & {}^tE' & \rightarrow & L^\perp/L_i \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Ce diagramme montre que σ_i est aussi surjectif. En fait, σ_i est une isométrie comme on le constate en localisant et en induisant les formes sur E et E' . En localisant, on obtient

ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\beta_2\beta_1^{-1}} & F_2 \\ \sigma_1 \uparrow & & \uparrow \sigma_2 \\ F'_1 & \xrightarrow{\beta_2\beta_1^{-1}} & F'_2 \end{array}$$

Par conséquent, on a bien

$$[\alpha, L_1, L_2] = [\alpha', L_1/L, L_2/L]. \quad \blacksquare$$

Pour pouvoir définir un homomorphisme du groupe ${}_eU(A, S)$ dans le groupe ${}_eL(\mathcal{S})$, nous avons besoin d'introduire un groupe intermédiaire, le groupe ${}_eU.(A, S)$ dont, la définition est en tout point analogue à celle du groupe ${}_eU(A, S)$, la seule différence consistant à considérer des triples (M, L_1, L_2) où M est un module quadratique hyperrésoluble.

2.8. LEMME. — *L'application canonique du groupe ${}_eU.(A, S)$ dans le groupe ${}_eU(A, S)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On définit une application en sens inverse $r' : {}_eU(A, S) \rightarrow {}_eU.(A, S)$ en associant au triple (M, L_1, L_2) le triple $(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_1)$. On vérifie sans trop de peine que r' est bien défini. Considérons par exemple

$$\begin{aligned} & r'((M, L_1, L_2) + (M, L_2, L_3)) \\ &= (M \oplus M^- \oplus M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus L_2, L_2 \oplus L_1 \oplus L_3 \oplus L_2) \\ &= (M \oplus M^- \oplus M \oplus M^-, L_2 \oplus L_1 \oplus L_1 \oplus L_2, L_2 \oplus L_1 \oplus L_3 \oplus L_2) \\ & \quad \text{(en appliquant un commutateur au premier membre)} \\ &= (M^- \oplus M, L_1 \oplus L_1, L_1 \oplus L_3) = r'(M, L_1, L_3). \end{aligned}$$

Il est clair que r' est l'homomorphisme inverse de l'homomorphisme canonique. \blacksquare

Des considérations qui précèdent on déduit un homomorphisme de ${}_eU.(A, S)$ dans ${}_eL(\mathcal{S})$ en associant à (M, L_1, L_2) l'élément

$$[\alpha, L_1, L_2] = d(F_1, F_2, w = \beta_{2S}(\beta_{1S})^{-1}) \quad (\text{où } \beta_{iS} = \beta'_i).$$

Notons

$$D : {}_eU(A, S) \rightarrow {}_eL(\mathcal{S}),$$

l'homomorphisme composé de cet homomorphisme et de l'isomorphisme de ${}_eU(A, S)$ sur ${}_eU.(A, S)$. Nous nous proposons de définir un homomorphisme en sens inverse

$$D' : {}_eL(\mathcal{S}) \rightarrow {}_eU(A, S).$$

Soit donc $d(F_1, F_2, w)$ un élément de ${}_eL(\mathcal{S})$. Notons φ et ψ les isomorphismes de F_1 sur $'F_1$ et de F_2 sur $'F_2$ qui sont déduits des formes hermitiennes sur F_1 et F_2 respectivement. Puisque $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varepsilon}'\varphi_0$, on peut poser

$$\chi_1 = \tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}^{-1} \quad \text{et} \quad \eta_1 = \bar{\varepsilon} \tilde{\varphi}^{-1} \tilde{\varphi}_0.$$

Considérons maintenant un objet E de $\mathcal{P}(A)$ et un quasi-isomorphisme $b : E \rightarrow F_1$ tel que $w.b$ soit un morphisme de $\mathcal{P}(A)$ (par exemple $E = F_1$ et $b = s$ assez grand). On suppose E choisi en sorte qu'il existe $\eta : E \rightarrow E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{b} & F_1 \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta_1 \\ E & \xrightarrow{b} & F_1 \end{array}$$

commute [i. e. que $b^{-1} \eta_1 b$ soit un morphisme de $\mathcal{P}(A)$]. On obtient ainsi les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E & \xrightarrow{{}^t b \phi b} & {}^t E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \\ b \downarrow & & \uparrow {}^t b \\ F_1 & \xrightarrow{\phi} & {}^t F_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E & \xrightarrow{{}^t b \phi b} & {}^t E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \\ w b \downarrow & & \uparrow {}^t b {}^t w \\ F_2 & \xrightarrow{\psi} & {}^t F_2 \end{array}$$

D'après le paragraphe 1, $M = \text{Coker}({}^t b \phi b)$ est un A -module de torsion hyperrésoluble et l'image de ${}^t F_1$ (resp. ${}^t F_2$) par l'application composée

$${}^t F_1 \xrightarrow{{}^t b} {}^t E \xrightarrow{\beta} M \quad (\text{resp. } {}^t F_2 \xrightarrow{{}^t b {}^t w} {}^t E \xrightarrow{\beta} M)$$

est un sous-module lagrangien L_1 (resp. L_2). On pose alors

$$D'(d(F_1, F_2, w)) = d(M, L_1, L_2).$$

Il faut voir maintenant que D' est bien défini par cette formule.

a. La classe de (M, L_1, L_2) dans le groupe ${}_e U(A, S)$ ne dépend pas du choix de E et b .

Il suffit de voir ce que devient cette classe lorsqu'on remplace b par $b.b'$ où $b' : E' \rightarrow E$.

On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E' & \xrightarrow{{}^t b' {}^t b \phi b b'} & {}^t E' \xrightarrow{\beta'} M' \rightarrow 0 \\ b' \downarrow & & \uparrow {}^t b' \\ 0 \rightarrow E & \xrightarrow{{}^t b \phi b} & {}^t E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \end{array}$$

Soit $L = (\beta' {}^t b' {}^t b \phi b)(E)$; alors L est un sous-module hyperisotrope de M' contenu dans L'_1 et L'_2 (en désignant par $L'_i, i = 1, 2$, les sous-modules lagrangiens obtenus par la construction précédente en remplaçant b par $b.b'$). D'après le paragraphe 1, on a donc $L^\perp/L \approx M$ et $L'_i/L \approx L_i$. Donc les classes des triples (M, L_1, L_2) et (M', L'_1, L'_2) dans le groupe ${}_e U(A, S)$ sont les mêmes.

b. Considérons deux triples (F_1, F_2, w) et (F_2, F_3, w') . Alors la classe du triple (M, L_1, L_3) associée à $(F_1, F_3, w' w)$ est égale à la somme des classes des triples (M, L_1, L_2) et (M, L_2, L_3) associées à (F_1, F_2, w) et (F_2, F_3, w') .

En effet, comme le laisse suggérer cet énoncé, on peut choisir E et b en sorte que $w b$ et $w' w b$ soient des morphismes de $\mathcal{P}(A)$. Les sous-modules lagrangiens L_1, L_2 et L_3 sont

alors les images dans M des images de tF_1 , tF_2 et tF_3 dans tE par les homomorphismes

$${}^tF_1 \xrightarrow{{}^tb} {}^tE, \quad {}^tF_2 \xrightarrow{{}^tb{}^tw} {}^tE \quad \text{et} \quad {}^tF_3 \xrightarrow{{}^tb{}^tw{}^tw'} {}^tE.$$

Puisque

$$d(M, L_1, L_3) = d(M, L_1, L_2) + d(M, L_2, L_3)$$

dans le groupe ${}_eU(A, S)$, on a bien l'égalité annoncée.

c. La classe du triple (M, L_1, L_2) ne dépend que de la classe du triple (F_1, F_2, w) dans le groupe ${}_eL(\mathcal{S})$.

En effet, (M, L_1, L_2) dépend additivement du triple (F_1, F_2, w) et la propriété *b* montre que (M, L_1, L_2) ne dépend que de la classe d'homotopie algébrique du triple (F_1, F_2, w) (cf. [13]).

2.9. THÉORÈME. — *Les homomorphismes D et D' définissent des isomorphismes réciproques entre les groupes ${}_eU(A, S)$ et ${}_eL(\mathcal{S})$.*

Démonstration. — Soit $d(M, L_1, L_2)$ un élément de ${}_eU(A, S)$. Puisque

$${}_eU(A, S) = {}_eU.(A, S),$$

on peut supposer qu'il existe une résolution de M de la forme

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0.$$

On a alors

$$D(d(M, L_1, L_2)) = d(F_1, F_2, w), \quad \text{où} \quad w = \beta_{2S} \beta_{1S}^{-1},$$

F_i et β_i étant définis par les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE \\ \beta_i \Big\downarrow & \nearrow j_i & \Big\uparrow {}^t\beta_i \\ F_i & \xrightarrow{\approx} & {}^tF_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E & \xrightarrow{\alpha} & {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & \parallel & \Big\uparrow j_i \quad \cup \\ 0 \rightarrow E & \rightarrow & F_i \rightarrow L_i \rightarrow 0 \end{array}$$

On peut donc choisir $\beta_1 = b$, ce qui assure l'égalité

$$(D'D)(d(M, L_1, L_2)) = d(M, L_1, L_2).$$

L'égalité $DD' = \text{Id}$ se démontre de manière analogue. ■

2.10. COROLLAIRE ET THÉORÈME. — *On a la suite exacte*

$${}_eL_1(A) \rightarrow {}_eL_1(A_S) \rightarrow {}_eU(A, S) \rightarrow {}_eL(A) \rightarrow {}_eL(A_S).$$

III. — Applications de la première suite exacte d'une localisation

Si S est un système multiplicatif dans un anneau A comme il a été décrit dans le paragraphe 1, on peut lui associer un nouvel anneau $\hat{A} = \lim_{\leftarrow} A/sA$ comme il est bien

connu. L'homomorphisme $A \xrightarrow{i} \hat{A}$ a comme noyau $\bigcap_{s \in S} sA$ et n'est pas surjectif en général.

Soit $S' = i(S) - \{0\}$. Un calcul simple montre que les éléments de S' sont réguliers dans \hat{A} ; on notera \hat{A}_S l'anneau localisé de \hat{A} pour ce système multiplicatif. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_S & \rightarrow & \hat{A}_S \end{array}$$

3.1. THÉORÈME. — Avec les notations précédentes, on a la suite exacte

$${}_eL_1(\hat{A}) \oplus {}_eL_1(A_S) \rightarrow {}_eL_1(\hat{A}_S) \rightarrow {}_eL(A) \rightarrow {}_eL(\hat{A}) \oplus {}_eL(A_S) \rightarrow {}_eL(\hat{A}_S).$$

Démonstration. — Pour ne pas confondre avec le système multiplicatif S notons ΣA et ΣA_S les suspensions des anneaux hermitiens A et A_S dans le sens de [13]. Si on note $\mathcal{S} : {}_eQ(A) \rightarrow {}_eQ(A_S)$ et $\hat{\mathcal{S}} : {}_eQ(\hat{A}) \rightarrow {}_eQ(\hat{A}_S)$ les foncteurs extension des scalaires, on a les suites exactes et les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_eL_1(A) & \rightarrow & L_1(A_S) & \rightarrow & {}_eL(\mathcal{S}) & \rightarrow & {}_eL(A) & \rightarrow & {}_eL(A_S) & \rightarrow & {}_eL(\Sigma \mathcal{S}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_eL_1(\hat{A}) & \rightarrow & {}_eL_1(\hat{A}_S) & \rightarrow & {}_eL(\hat{\mathcal{S}}) & \rightarrow & {}_eL(\hat{A}) & \rightarrow & {}_eL(\hat{A}_S) & \rightarrow & {}_eL(\Sigma \hat{\mathcal{S}}) \end{array}$$

D'après un argument classique, il suffit de prouver que

$${}_eL(\mathcal{S}) \approx {}_eL(\hat{\mathcal{S}}) \quad \text{et} \quad {}_eL(\Sigma \mathcal{S}) \approx {}_eL(\Sigma \hat{\mathcal{S}})$$

et même le premier isomorphisme seulement en remplaçant pour le deuxième \mathcal{S} par $\Sigma \mathcal{S}$. D'après le théorème 2.9, ceci est équivalent à prouver que ${}_eU(A, S) \approx {}_eU(\hat{A}, S')$, ce qui résulte évidemment du fait que la catégorie des A -modules de S -torsion est équivalente à celle des \hat{A} -modules de S' -torsion (cf. appendice 5).

Remarque. — Plus généralement, considérons un anneau B et un homomorphisme $i : A \rightarrow B$ tel que $T = i(S)$ soit formé d'éléments réguliers et tel que $A/s \approx B/i(s)$ pour tout élément s de S . Le même raisonnement permet de montrer qu'on a une suite exacte de Mayer-Vietoris :

$${}_eL_1(B) \oplus {}_eL_1(A_S) \rightarrow {}_eL_1(B_T) \rightarrow {}_eL(A) \rightarrow {}_eL(B) \oplus {}_eL(A_T) \rightarrow {}_eL(B_T)$$

avec $T = i(S)$.

On peut raisonnablement conjecturer que le théorème 3.1 peut s'étendre aux foncteurs ${}_eL_n$. De manière plus précise, on peut émettre la conjecture suivante :

3.2. CONJECTURE. — *On a la suite exacte*

$${}_eL_{n+1}(\hat{A}) \oplus {}_eL_{n+1}(A_S) \rightarrow {}_eL_{n+1}(\hat{A}_S) \rightarrow {}_eL_n(A) \rightarrow {}_eL_n(\hat{A}) \oplus {}_eL_n(A_S) \rightarrow {}_eL_n(\hat{A}_S). \quad (2)$$

En appliquant de nouveau le foncteur suspension, on voit que cette conjecture est déjà satisfaite pour $n \leq 0$. Dans un ordre d'idées différent, supposons que A , A_S , \hat{A} et \hat{A}_S soient K -réguliers d'après la terminologie de [12] et considérons les foncteurs ${}_eL^{-n}$ définis dans [13] et [14]. En appliquant le foncteur Ω un certain nombre de fois aux anneaux de la suite

$${}_eL(\hat{A}) \oplus {}_eL(A_S) \rightarrow {}_eL(\hat{A}_S) \rightarrow {}_eL^1(A) \rightarrow {}_eL^1(\hat{A}) \oplus {}_eL^1(A_S) \rightarrow {}_eL^1(\hat{A}_S),$$

on déduit la suite exacte

$${}_eL^{-n-1}(\hat{A}) \oplus {}_eL^{-n-1}(A_S) \rightarrow {}_eL^{-n-1}(\hat{A}_S) \rightarrow {}_eL^{-n}(A) \rightarrow {}_eL^{-n}(\hat{A}) \oplus {}_eL^{-n}(A_S) \rightarrow {}_eL^{-n}(\hat{A}_S).$$

Comme il a été signalé dans l'introduction, le théorème 2.10 est une généralisation de la suite exacte de Bass et Heller :

$$K_1(A) \rightarrow K_1(A_S) \rightarrow K(A, S) \rightarrow K(A) \rightarrow K(A_S),$$

où le foncteur $K(A, S)$ est celui défini dans [4] en considérant des *modules de dimension 1* (ce qui ne restreint pas la généralité).

Il est maintenant naturel de comparer le résultat de Bass et Heller à celui obtenu dans le paragraphe précédent. En fait, on va démontrer le théorème de comparaison suivant :

3.3. THÉORÈME. — *On a les diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1(A) & \rightarrow & K_1(A_S) & \rightarrow & K(A, S) & \rightarrow & K(A) & \rightarrow & K(A_S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_eL_1(A) & \rightarrow & {}_eL_1(A_S) & \rightarrow & {}_eU(A, S) & \rightarrow & {}_eL(A) & \rightarrow & {}_eL(A_S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1(A) & \rightarrow & K_1(A_S) & \rightarrow & K(A, S) & \rightarrow & K(A) & \rightarrow & K(A_S) \end{array}$$

où les homomorphismes sont explicités plus bas.

Démonstration. — Il est clair que les foncteurs oubli \emptyset et hyperboliques h réalisent des diagrammes commutatifs du type précédent à condition d'identifier les groupes $K(\mathcal{S})$ et $K(A, S)$ d'une part, les groupes ${}_eL(\mathcal{S})$ et ${}_eU(A, S)$ d'autre part. Cependant, on peut

(2) Cette conjecture est maintenant résolue. La démonstration paraîtra dans le troisième article de cette série.

définir directement des homomorphismes

$$\begin{aligned} h &: K(A, S) \rightarrow {}_e U(A, S), \\ \theta &: {}_e U(A, S) \rightarrow K(A, S), \end{aligned}$$

de la manière suivante.

Soit N un A -module de torsion. Alors le triple (M, L_1, L_2) avec $M = N \oplus \hat{N}$, $L_2 = N \oplus 0$, $L_1 = 0 \oplus \hat{N}$ définit un élément de ${}_e U(A, S)$. On en déduit un homomorphisme du groupe libre engendré par les modules de torsion dans le groupe ${}_e U(A, S)$. Pour voir que cet homomorphisme se factorise à travers le groupe $K(A, S)$, il suffit de vérifier que l'image de N par l'homomorphisme composé $K(A, S) \rightarrow K(\mathcal{S}) \rightarrow {}_e L(\mathcal{S})$ coïncide avec l'image de $d(M, L_1, L_2)$ dans le groupe ${}_e L(\mathcal{S})$ par l'homomorphisme ${}_e U(A, S) \rightarrow {}_e L(\mathcal{S})$. Soit donc

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{\alpha} P \rightarrow N \rightarrow 0,$$

une résolution projective de N . On en déduit la résolution déjà utilisée de $N \oplus \hat{N}$:

$$0 \rightarrow {}'P \oplus Q \xrightarrow{\delta} P \oplus {}'Q \rightarrow \hat{N} \oplus N \rightarrow 0,$$

avec

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \varepsilon & {}'\alpha \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

L'homomorphisme δ se factorise de deux manières différentes suivant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} {}'P \oplus Q & \xrightarrow{\delta} & P \oplus {}'Q \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}'\alpha \end{pmatrix} \\ {}'P \oplus P & \xrightarrow{\quad} & P \oplus {}'P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} {}'P \oplus Q & \xrightarrow{\delta} & P \oplus {}'Q \\ \begin{pmatrix} {}'\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}'Q \oplus Q & \xrightarrow{\quad} & Q \oplus {}'Q \end{array}$$

Avec les notations du paragraphe 2, on a donc

$$\begin{aligned} F_2 &= {}'P \oplus P, & F_1 &= {}'Q \oplus Q, \\ \beta_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, & \beta_1 &= \begin{pmatrix} {}'\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui démontre évidemment l'assertion. Celle-ci se résume ainsi dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(A, S) & \xrightarrow{h} & {}_e U(A, S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathcal{S}) & \xrightarrow{H} & {}_e L(\mathcal{S}) \end{array}$$

En ce qui concerne maintenant l'homomorphisme θ , il est simplement défini par la correspondance qui associe au triple (M, L_1, L_2) la différence $L_2 - L_1$. Pour vérifier que θ

est bien défini il suffit de démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_eU(A, S) & \xrightarrow{\theta} & K(A, S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_eL(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\theta} & K(\mathcal{S}) \end{array}$$

Avec de nouveau les mêmes notations que celles du paragraphe 2, on a les suites exactes

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\beta_1} F_1 \rightarrow L_1 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\beta_2} F_2 \rightarrow L_2 \rightarrow 0.$$

A la différence $L_2 - L_1$ correspond donc

$$d(E, F_2, \beta_{2S}) - d(E, F_1, \beta_{1S}),$$

soit $d(F_1, F_2, \beta_{2S} \beta_{1S}^{-1})$, considéré comme un élément de $K(\mathcal{S})$. ■

3.4. LEMME. — Soit $d(M, L_1, L_2)$ un élément de ${}_eU(A, S)$. Alors

$$d(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_2)$$

appartient à l'image de l'homomorphisme $h : K(A, S) \rightarrow {}_eU(A, S)$. De manière précise, c'est l'image de l'élément $L_2 - L_1$ par h .

Démonstration. — Soit Δ le « sous-module diagonal » de $M \oplus M^-$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y) tels que $x = y$. On peut alors écrire :

$$d(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_2) = d(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, \Delta) - d(M \oplus M^-, L_2 \oplus L_2, \Delta).$$

Soit $L = (L_1 \oplus L_1) \cap \Delta$. Alors L^\perp s'identifie à l'ensemble des couples (x, y) tels que $\forall z \in L_1, \varphi(z, y - x) = 0$, donc à l'ensemble des couples (x, y) tels que $x - y \in L_1$. Il s'ensuit que $L^\perp/L \approx L_1 \times M/L_1 \approx L_1 \oplus \hat{L}_1$, la forme quadratique sur L^\perp/L s'identifiant à la forme hyperbolique. De même $(L_1 \oplus L_1)/L$ s'identifie à $L_1 \oplus 0$ et Δ/L à $0 \oplus \hat{L}_1$. Donc

$$d(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, \Delta) = -h(L_1),$$

et, de la même manière,

$$d(M \oplus M^-, L_2 \oplus L_2, \Delta) = -h(L_2).$$

Donc

$$d(M \oplus M^-, L_1 \oplus L_1, L_2 \oplus L_2) = h(L_2) - h(L_1). \quad \blacksquare$$

3.5. LEMME. — Supposons que pour tout élément s de S , il existe des éléments x_i du centre de A/s tels que $x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = -1$. Alors le groupe $(\text{Coker } K(A, S) \xrightarrow{h} {}_eU(A, S))$ est de 2^n -torsion au plus.

Démonstration. — Par récurrence sur n , démontrons d'abord l'existence d'une matrice Λ_n de type $(2^{n-1}, 2^{n-1})$ dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des x_i telle que $\Lambda_n \Lambda_n^* = \Lambda_n^* \Lambda_n = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$. Il suffit de poser

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & -x_n I_{2^{n-2}} \\ \bar{x}_n I_{2^{n-2}} & \Lambda_{n-1}^* \end{pmatrix},$$

où I_p désigne de manière générale la matrice identité d'ordre p . Considérons maintenant un élément

$$x = d(M, L_1, L_2) \in {}_\varepsilon U(A, S).$$

Alors

$$2^n x = 2^{n-1} x + 2^{n-1} x,$$

où

$$2^{n-1} x = d(\underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{2^{n-1}}, \underbrace{L_1 \oplus \dots \oplus L_1}_{2^{n-1}}, \underbrace{L_2 \oplus \dots \oplus L_2}_{2^{n-1}}).$$

Si $\varphi_0 : M \rightarrow {}^t M$ désigne la forme sesquilinéaire définissant la forme quadratique sur M , on a

$$\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_0 \sim \Lambda_n (\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_0) \Lambda_n^* = -(\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_0).$$

Par conséquent $2^n x$ appartient à l'image de h d'après le lemme antérieur, ce qui démontre l'assertion. ■

Remarque. — Posons

$$n = 8k + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 8$$

et

$$\begin{aligned} \theta(8k) &= 2^{4k-1}, & \theta(8k+1) &= 2^{4k}, & \theta(8k+2) &= 2^{4k+1}, \\ \theta(8k+3) &= \theta(8k+4) = 2^{4k+2} & \text{et} & & \theta(8k+5) &= \theta(8k+6) = \theta(8k+7) = 2^{4k+3}. \end{aligned}$$

Alors les calculs sur les algèbres de Clifford effectués en [11] montrent l'existence d'automorphismes e_2, \dots, e_n de $Z^{\theta(n)}$ tels que $e_i e_j = -e_j e_i$, $i \neq j$, $(e_i)^2 = -1$ et $(e_i)^* = -e_i$. Si l'involution de A est triviale, la matrice $\Lambda = x_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ satisfait alors à l'identité $\Lambda \Lambda^* = \Lambda^* \Lambda = -1$.

Si $n = 4$ par exemple, cette matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas général (avec l'involution triviale sur A), il en résulte que $\text{Coker}[K(A, S) \rightarrow {}_\varepsilon U(A, S)]$ est de $2\theta(n)$ torsion au plus.

En suivant [14], posons pour tout anneau B :

$${}_\varepsilon W_n(B) = \text{Coker}(K_n(B) \rightarrow {}_\varepsilon L_n(B)) \quad \text{et} \quad W'_n(B) = \text{Ker}({}_\varepsilon L_n(B) \rightarrow K_n(B))$$

L'application naturelle ${}_e W'_n(B) \rightarrow {}_e W_n(B)$ a un noyau et un conoyau qui sont des groupes de 2-torsion. De la même manière posons

$${}_e \Gamma(A, S) = \text{Coker}(K(A, S) \rightarrow {}_e U(A, S)) \quad \text{et} \quad {}_e \Gamma'(A, S) = \text{Ker}({}_e U(A, S) \rightarrow K(A, S)).$$

Alors l'application naturelle ${}_e \Gamma'(A, S) \rightarrow {}_e \Gamma(A, S)$ a un noyau et un conoyau qui sont des groupes de 2-torsion. Considérons maintenant les suites et les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} L_1(A) & \rightarrow & K_1(A_S) & \rightarrow & K(A, S) & \rightarrow & K(A) & \rightarrow & K(A_S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_e L_1(A) & \rightarrow & {}_e L_1(A_S) & \rightarrow & {}_e U(A, S) & \rightarrow & {}_e L(A) & \rightarrow & {}_e L(A_S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_e W_1(A) & \rightarrow & {}_e W_1(A_S) & \rightarrow & {}_e \Gamma_1(A_S) & \rightarrow & {}_e W(A) & \rightarrow & {}_e W(A_S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Une « chasse au diagramme » élémentaire montre que la suite

$${}_e W_1(A) \rightarrow {}_e W_1(A_S) \rightarrow {}_e \Gamma(A, S) \rightarrow {}_e W(A) \rightarrow {}_e W(A_S),$$

est un complexe dont l'homologie est un groupe de 2-torsion. On en déduit le théorème suivant :

3.6. THÉORÈME. — *Reprenons les hypothèses du lemme 3.5. Alors le noyau et le conoyau de l'homomorphisme*

$${}_e W(A) \rightarrow {}_e W(A_S),$$

sont des groupes de 2^{n+1} -torsion au plus. Si A est noethérien régulier, le conoyau est un groupe de 2^n -torsion au plus.

Ce théorème se déduit effectivement des considérations précédentes, du moins en ce qui concerne le noyau. L'assertion concernant le conoyau s'en déduit par l'observation standard qu'il suffit de remplacer l'anneau A par sa suspension ΣA . Si A est noethérien régulier, $K^1(A) = 0$, donc la suite ${}_e W(A) \rightarrow {}_e W(A_S) \rightarrow {}_e \Gamma(\Sigma A, S)$ est exacte.

3.7. COROLLAIRE. — *Supposons que pour tout élément s de S, le groupe A/s soit de torsion impaire finie (i. e. qu'il existe n tel que $n \cdot A/s = 0$). Alors le noyau et le conoyau de l'homomorphisme ${}_e W(A) \rightarrow {}_e W(A_S)$ sont des groupes de 8-torsion au plus (et même de 4-torsion au plus pour le conoyau si A est noethérien régulier). Si en outre la torsion n est produit de nombres premiers de la forme $4p+1$, ces groupes sont de 4-torsion au plus (de 2-torsion seulement pour le conoyau si A est noethérien régulier).*

En effet, puisque $n \cdot A/s = 0$, on a un homomorphisme de \mathbf{Z}/n dans A/s . Puisque tout élément de \mathbf{Z}/n (n impair) est somme de deux carrés et que -1 est un carré dans $\mathbf{Z}/4p+1$ si $4p+1$ est premier, l'assertion résulte bien du théorème précédent.

Exemple. — Le conoyau de $W(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Z}[1/5])$ est un groupe de 2-torsion au plus. Dans le deuxième article de cette série nous donnerons des méthodes pour calculer ce conoyau (et d'autres).

3.8. PROPOSITION. — Supposons que pour tout élément s de S , le groupe A/s soit de torsion finie (paire ou impaire). Alors le noyau et le conoyau de l'homomorphisme ${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S)$ sont des groupes de 16-torsion au plus. Si A est noethérien régulier, le conoyau de l'homomorphisme ${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A_S)$ est de 8-torsion au plus.

Démonstration. — En suivant le même schéma, il suffit de démontrer que -1 est somme de quatre carrés dans $\mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$ d'après la remarque qui suit le lemme 3. Modulo 8 nous avons $-1 = 1+1+1+4$, donc il suffit de résoudre l'équation

$$(1+x)^2 = 1+y$$

avec $y = 0 \pmod{8}$. Le développement du binôme $(1+y)^{1/2}$ s'écrit :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(\frac{y}{4}\right)^n$$

avec $\mu_n \in \mathbf{Z}$ (cf. [13], p. 18) et le développement est bien convergent puisque $y = 0 \pmod{8}$. ■

3.9. COROLLAIRE. — Soit A' l'anneau $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/2]$. Alors le noyau et le conoyau de l'homomorphisme ${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A')$ sont des groupes de 16-torsion au plus. Si A est noethérien régulier, le conoyau de l'homomorphisme ${}_eW(A) \rightarrow {}_eW(A')$ est de 8-torsion au plus.

Exemple. — Si $A = \mathbf{Z}$, le conoyau de l'homomorphisme ${}_1W(\mathbf{Z}) \rightarrow {}_1W(\mathbf{Z}')$ est en fait $\mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$. Ceci sera démontré dans le deuxième article de cette série.

Les considérations que nous venons de développer sur les groupes ${}_eW$ se transcrivent sans peine aux groupes ${}_eW'$. D'après le travail de R. Sharpe [29] on a des homomorphismes naturels

$${}_eW_1(A) \rightarrow {}_{-e}W'^1(A) \quad \text{et} \quad {}_eW'_1(A) \rightarrow {}_eW_1(A),$$

dont le noyau et le conoyau sont des groupes de 2-torsion (cf. aussi [14] et [15]). Les propositions et corollaires précédents s'étendent donc aussi aux groupes ${}_eW_1$ et ${}_eW'_1$. Nous en laissons le soin au lecteur. En particulier, si on remplace dans la définition des groupes de chirurgie de Wall l'anneau $\mathbf{Z} \pi$ par l'anneau $\mathbf{Q} \pi$, la définition n'est altérée que par un facteur de 2^r-torsion avec $r \leq 5$ (probablement $r \leq 4$).

Un autre exemple intéressant d'application est le suivant. Remplaçons l'anneau A par l'anneau $A[x]$ et considérons le système multiplicatif constitué par les x^n . Alors l'anneau localisé s'identifie à $A[x, x^{-1}]$, l'involution sur cet anneau étant induite par l'involution de A et changeant x^n en x^{-n} .

3.10. PROPOSITION. — Soit \mathcal{T} la catégorie des $A[x]$ -modules de dimension 1 et de torsion pour le système multiplicatif (x^n) . Alors tout objet de \mathcal{T} est un A -module projectif de type fini et le foncteur de dualité $M \rightarrow \hat{M}$ s'identifie au foncteur $M \mapsto \text{Hom}_A(M, A)$.

Démonstration. — Si M est un objet de \mathcal{T} , on a une résolution projective de M :

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Si $\theta : Q \rightarrow P$ est un morphisme injectif quelconque (par exemple l'inverse de α multiplié par une puissance convenable de x) on a aussi une suite exacte

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{\theta} P \rightarrow M' \rightarrow 0.$$

Quitte à remplacer M par $M \oplus M'$, on peut donc supposer que $P = Q$ et même, quitte à ajouter un supplémentaire à Q , que P est un A -module libre, soit $(A[x])^p$. De cette manière, on peut écrire α sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ où α_n est une matrice $p \times p$ à coefficients dans A . Si on identifie $A[x]^p$ à $A^p \oplus \dots \oplus A^p \oplus \dots$, la matrice de α est donc du type

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\beta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n x^n$$

l'inverse de α dans l'anneau des automorphismes de $(A[x, x^{-1}])^p$ et soit β' l'endomorphisme du A -module $A^p \oplus \dots \oplus A^p \oplus \dots$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_{-1} & \beta_{-2} & \dots \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} & \dots \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}.$$

Il est clair que β' est inverse à gauche de α' . Par conséquent, M est bien un module projectif de type fini. Par ailleurs,

$$\hat{M} = \text{Hom}_{A[x]}(M, A[x, x^{-1}]/A[x])$$

et tout élément f de \hat{M} s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$f(u) = x^{-1}f_{-1}(u) + x^{-2}f_{-2}(u) + \dots + x^{-n}f_{-n}(u) + \dots,$$

avec la relation

$$f_{-n-1}(u) = f_{-n}(xu) = \dots = f_{-1}(x^n u).$$

La correspondance $f \mapsto f_{-1}$ réalise clairement l'isomorphisme cherché entre \hat{M} et $\text{Hom}_A(M, A)$. ■

Nous nous proposons de calculer maintenant le groupe ${}_e L_1(A[x, x^{-1}])$ du moins si 2 est inversible dans A (si 2 n'est pas inversible dans A des résultats analogues ont été trouvés indépendamment par Ranicki [25]). De manière précise, on a le théorème suivant :

3.11. THÉORÈME. — *Si 2 est inversible dans A , on a un isomorphisme*

$${}_e L_1(A[x, x^{-1}]) \approx {}_e U(A) \oplus {}_e L_1(A) \oplus \text{Im } \gamma,$$

où γ est l'homomorphisme composé

$$\hat{K}_1(A[x]) \oplus \hat{K}_1(A[x^{-1}]) \rightarrow K_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow {}_\varepsilon L_1(A[x, x^{-1}]),$$

où on pose

$$\hat{K}_1(A[x^{\pm 1}]) = \text{Ker}[K_1(A[x^{\pm 1}]) \rightarrow K_1(A)] \approx \text{Coker}[K_1(A) \rightarrow K_1(A[x^{\pm 1}])].$$

On a de même les isomorphismes

$${}_\varepsilon W'_1(A[x, x^{-1}]) \approx {}_\varepsilon W'_1(A) \oplus {}_\varepsilon W_1(A),$$

$${}_\varepsilon W_1(A[x, x^{-1}]) \approx {}_\varepsilon W_1(A) \oplus G,$$

où

$$G = \text{Coker}[K(A) \rightarrow {}_\varepsilon U(A)] \approx -{}_\varepsilon W'^1(A) \quad (\text{cf. appendice 3}).$$

Démonstration. — Admettons les résultats de [14] et [15] où on démontre que le groupe W_1 d'un anneau et le groupe W d'un foncteur sont des invariants d'homotopie. On a donc

$${}_\varepsilon W_1(A[x]) \approx {}_\varepsilon W_1(A) \quad \text{et} \quad {}_\varepsilon \Gamma(A[x], S) \approx {}_\varepsilon \Gamma(A, S),$$

où on pose en général

$${}_\varepsilon \Gamma(A, S) = \text{Coker}[K(A, S) \rightarrow {}_\varepsilon U(A, S)] \approx \text{Coker}[K(\mathcal{S}) \rightarrow {}_\varepsilon L(\mathcal{S})] \approx {}_\varepsilon W(\mathcal{S}).$$

Par ailleurs, si on pose

$$B = A[x],$$

la proposition précédente permet d'identifier le groupe ${}_\varepsilon U(B, S)$ à un groupe construit à l'aide de triples (M, L_1, L_2) où M est un A -module projectif de type fini muni d'une forme ε -quadratique et d'un endomorphisme nilpotent auto-adjoint v et où L_1 et L_2 sont deux sous-modules lagrangiens invariants par l'action de v . Un tel triple est évidemment homotope au même triple avec $v = 0$ (considérer l'homotopie $t \rightarrow vt$). On en déduit

$${}_\varepsilon \Gamma(B, S) \approx \text{Coker}[K(A) \xrightarrow{u} {}_\varepsilon U(A)] \approx -{}_\varepsilon W'^1(A)$$

d'après le théorème de périodicité de [14] et [15].

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(A[x]) & \rightarrow & K_1(A[x, x^{-1}]) & \rightarrow & K(B, S) & \rightarrow & K(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ {}_\varepsilon L_1(A[x]) & \rightarrow & {}_\varepsilon L_1(A[x, x^{-1}]) & \rightarrow & {}_\varepsilon U(B, S) & \rightarrow & {}_\varepsilon U(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_\varepsilon W_1(A[x]) & \rightarrow & {}_\varepsilon W_1(A[x, x^{-1}]) & \rightarrow & {}_\varepsilon \Gamma(B, S) & \rightarrow & \text{Coker } u \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Dans ce diagramme, les deux premières suites sont exactes (à l'exception des pointillés) d'après Bass [4] et d'après le théorème 2.10. D'après Bass, l'homomorphisme

$$K_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow K(B, S)$$

est surjectif (cf. aussi [12]). Donc la suite

$$0 \rightarrow {}_eW_1(A) \rightarrow {}_eW_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow \text{Coker } u \rightarrow 0$$

est exacte et scindée, ce qui démontre déjà la dernière partie du théorème. D'autre part, l'homomorphisme composé

$${}_eL_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow {}_eU(B, S) \rightarrow {}_eU(A)$$

se scinde. En effet, d'après [14], tout élément de ${}_eU(A)$ peut aussi s'écrire $d(E, p, q)$ où E est un A -module ε -quadratique et où p et q sont des projecteurs dans E tels que $p^* = 1-p$ et $q^* = 1-q$. Un calcul simple montre alors que

$$\alpha = (qx + 1 - q)(px^{-1} + 1 - p)$$

est un automorphisme orthogonal. D'après les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \bar{E} \xrightarrow{x\varphi} {}^t\bar{E} & & \bar{E} \xrightarrow{\varphi} {}^t\bar{E} \\ \downarrow px+1-p & \uparrow {}^t(px+1-p) & \downarrow qx+1-q & \uparrow {}^t(qx+1-q) \\ \bar{E} \xrightarrow{\varphi} {}^t\bar{E} & & \bar{E} \xrightarrow{\varphi} {}^t\bar{E} \end{array}$$

où $\bar{E} = E \otimes_A A[x]$ et où $\varphi : \bar{E} \rightarrow {}^t\bar{E}$ est l'isomorphisme déduit de la forme quadratique sur E , l'homomorphisme ${}_eU(A) \xrightarrow{\sigma} {}_eL_1(A[x, x^{-1}])$ défini par $d(E, p, q) \mapsto d(\bar{E}, \alpha)$ est bien l'inverse à droite de l'homomorphisme ${}_eL_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow {}_eU(A)$. D'autre part, il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \xrightarrow{\beta} & K_1(A[x, x^{-1}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_eU(A) & \xrightarrow{\sigma} & {}_eL_1(A[x, x^{-1}]) \end{array}$$

est commutatif où β est l'homomorphisme de « périodicité » décrit dans [12] par exemple. Il en résulte que ce diagramme se scinde dans son ensemble. Comme conséquence, considérons un élément a de ${}_eL_1(A[x, x^{-1}])$ contenu dans le supplémentaire de ${}_eU(A)$ dans ${}_eL_1(A[x, x^{-1}])$ (vis-à-vis du scindage ci-dessus). L'image de cet élément dans ${}_eW_1(A[x, x^{-1}])$ appartient à l'image de ${}_eW_1(A) \rightarrow {}_eW_1(A[x, x^{-1}])$ et, quitte à modifier a par un élément provenant de ${}_eL_1(A[x])$, on voit que a provient d'un élément de $K_1(A[x, x^{-1}])$. On peut même supposer que cet élément appartient à l'image de l'homomorphisme

$$K_1(A[x]) \oplus K_1(A[x^{-1}]) \rightarrow K_1(A[x, x^{-1}])$$

d'après la suite exacte de Bass :

$$K_1(A[x]) \oplus K_1(A[x^{-1}]) \rightarrow K_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow K(A) \rightarrow 0$$

(cf. le diagramme p. 388).

On en déduit évidemment la première partie du théorème.

En ce qui concerne la seconde partie du théorème, on remarque le diagramme (qui se scinde également) :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ W'_1(A[x, x^{-1}]) & \twoheadrightarrow & {}_e W_1(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_e L_1(A[x, x^{-1}]) & \twoheadrightarrow & {}_e U(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1(A[x, x^{-1}]) & \twoheadrightarrow & K(A) \end{array}$$

Puisque ${}_e W'_1$ est aussi un invariant d'homotopie (cf. [15]), il en résulte bien que le noyau de ${}_e W'_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow {}_e W_1(A)$ se réduit à ${}_e W'_1(A)$. ■

3.12. COROLLAIRE. — On a la suite exacte

$$0 \rightarrow {}_e L_1(A) \rightarrow {}_e L_1(A[x]) \oplus {}_e L_1(A[x^{-1}]) \rightarrow {}_e L_1(A[x, x^{-1}]) \rightarrow {}_e U(A) \rightarrow 0.$$

(cf. appendice 3).

3.13. COROLLAIRE. — Supposons en outre A noethérien régulier. On a alors

$${}_e L_1(A[x, x^{-1}]) \approx {}_e L_1(A) \oplus {}_e U(A).$$

Exemple. — Si A est un corps commutatif F muni de l'involution triviale et de caractéristique différente de 2, on a donc

$${}_1 W'_1(F[x, x^{-1}]) \approx \mathbf{Z}/2 \times F^*/(F^*)^2; \quad {}_1 W_1(F[x, x^{-1}]) \approx \mathbf{Z}/2$$

et

$${}_{-1} W'_1(F[x, x^{-1}]) = {}_{-1} W_1(F[x, x^{-1}]) = 0.$$

Remarque. — Le théorème 3.11 et ses corollaires utilise de manière essentielle les résultats (non encore publiés) de [15]. Dans le deuxième article de cette série nous calculerons indépendamment les groupes ${}_e V(A[x, x^{-1}])$ et ${}_e W'(A[x, x^{-1}])$, 2 n'étant pas nécessairement inversible dans A (cf. appendice 2).

Soit A un anneau de Dedekind muni de l'involution triviale et soit \mathfrak{p} un idéal maximal de A . Désignons encore par $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$ la catégorie des A -modules de dimension homologique 1 et de \mathfrak{p}^n -torsion, $n = 1, 2, \dots$. Alors $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$ est une catégorie hermitienne grâce au foncteur $M \mapsto \hat{M} = \text{Ext}(M, A)$. En effet, soit $A_{\mathfrak{p}} = \varprojlim A/\mathfrak{p}^n$ et soit π un élément de \mathfrak{p} qui n'appartient pas à \mathfrak{p}^2 . On a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\pi} A_{\mathfrak{p}} \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow 0.$$

Puisque \mathcal{T}_p est évidemment équivalente à la catégorie des A_p -modules de dimension 1 et de p^∞ -torsion et que $\text{Ext}_A(M, A) \approx \text{Ext}_{A_p}(M, A_p)$, on se retrouve devant la situation envisagée dans cet article avec le système multiplicatif $\{\pi^n\}$. En particulier, π étant choisi, on peut identifier \hat{M} et $\text{Hom}(M, A_p/A)$. On désignera par ${}_e U(A, p)$ le groupe construit de manière analogue au groupe ${}_e U(A, S)$ en considérant des triples (M, L_1, L_2) où M est un objet de \mathcal{T}_p muni d'une forme ε -hyperquadratique et où $L_i, i = 1, 2$, sont des sous-modules lagrangiens de M .

3.13. PROPOSITION. — Soit S le système multiplicatif $A - \{0\}$. On a alors un isomorphisme naturel ${}_e U(A, S) \approx \bigoplus_p {}_e U(A, p)$, p parcourant l'ensemble des idéaux maximaux de A .

Démonstration. — Soit \mathcal{T} la catégorie des A -modules de S -torsion. On a alors une équivalence de catégories $\mathcal{T} \sim \bigoplus_p \mathcal{T}_p$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que c'est une équivalence de catégories hermitiennes. Si M est un objet de \mathcal{T} et si

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \rightarrow M \rightarrow 0,$$

est une résolution projective de M , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^t Q \xrightarrow{{}^t \alpha} {}^t P \rightarrow \hat{M} \rightarrow 0,$$

avec $M = \text{Ext}(M, A)$. En itérant le procédé, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow {}^{t^2} P \xrightarrow{{}^{t^2} \alpha} {}^{t^2} Q \rightarrow \hat{\hat{M}} \rightarrow 0.$$

Puisque $P \approx {}^{t^2} P$ et $Q \approx {}^{t^2} Q$ de manière naturelle, on en déduit un isomorphisme de M sur $\hat{\hat{M}}$ qui est indépendant de la résolution choisie. Ainsi les différentes inclusions $\mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}$ sont compatibles avec les isomorphismes « canoniques » $M \approx \hat{\hat{M}}$ (cf. appendice 4). ■

Remarque. — Notons que la notion d'orthogonalité ne dépend que du foncteur de dualité. Si L est un sous-module d'un module quadratique M , L^\perp s'identifie au noyau de l'application composée $M \approx \hat{M} \rightarrow \hat{L}$.

3.14. PROPOSITION. — Soit A un anneau de Dedekind muni de l'involution triviale. Alors l'homomorphisme $W(A) \rightarrow W(A_S)$ est injectif.

Démonstration. — Soit M un A -module quadratique (ici $\varepsilon = 1$) qui est hyperbolique en tant que A_S -module. Il existe donc un sous-module L de M tel que L_S soit lagrangien dans M . Donc L est aussi isotrope d'après la condition de l'énoncé. Soit L' un sous-module maximal de M pour la relation d'inclusion tel que $L' \supset L$ et tel que L' soit isotrope.

Alors $L_S = L'_S$ puisque L_S est lagrangien. D'autre part, M/L' est un module sans S -torsion puisque L' est maximal. Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \rightarrow L' \rightarrow L'^{\perp} \rightarrow L'^{\perp}/L' \rightarrow 0.$$

Puisque $L^{\perp}/L' \subset M/L'$, L^{\perp}/L' est sans torsion et s'injecte dans son localisé qui est $L_S^{\perp}/L_S = 0$. Donc $L' = L^{\perp}$. Enfin M/L' s'injecte dans M_S/L_S qui est projectif. Donc M/L' s'injecte aussi dans $(M/L')_T$ où $T = A - \{0\}$. Par suite M/L' est un module sans torsion donc projectif d'après un théorème bien connu et L' , facteur direct de M , est ainsi un sous-module lagrangien de M . ■

3.15. PROPOSITION. — *L'homomorphisme naturel ${}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}U(A, \mathfrak{p})$ est bijectif pour $\varepsilon = +1$ et 2 inversible dans A .*

Démonstration. — Soit $d(M, L_1, L_2)$ un élément de $U(A, \mathfrak{p})$. Alors $L_1 \cap L_2$ est de dimension 1. Quitte à remplacer M par $(L_1 \cap L_2)^{\perp}/L_1 \cap L_2$, on peut donc supposer que $L_1 \cap L_2 = 0$. D'autre part, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow L_1 \rightarrow M \rightarrow L_2 \rightarrow 0,$$

d'où une application injective de L_2 dans \hat{L}_1 . En échangeant les rôles de L_1 et L_2 , on a aussi une application injective de L_1 dans \hat{L}_2 qui est duale de la précédente. Puisque \hat{L}_1/L_2 et \hat{L}_2/L_1 sont de dimension 1, les applications précédentes sont bijectives. On en déduit que $d(M, L_1, L_2)$ peut s'écrire $d(L_1 \oplus \hat{L}_1, L_1 \oplus 0, 0 \oplus \hat{L}_2)$, donc appartient à l'image de l'homomorphisme $K(A, \mathfrak{p}) \rightarrow U(A, \mathfrak{p})$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(A, \mathfrak{p}) & \rightarrow & U(A, \mathfrak{p}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K(A/\mathfrak{p}) & \rightarrow & U(A/\mathfrak{p}) \end{array}$$

l'homomorphisme $K(A/\mathfrak{p}) \rightarrow K(A, \mathfrak{p})$ est surjectif d'après [4]. Il en est donc de même de l'homomorphisme

$$U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow U(A, \mathfrak{p}),$$

D'autre part, le groupe $U(A/\mathfrak{p})$ se calcule à partir de la suite exacte

$$K_1(A/\mathfrak{p}) \rightarrow L_1(A/\mathfrak{p}) \rightarrow U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow K(A/\mathfrak{p}) \rightarrow L(A/\mathfrak{p}).$$

On en déduit $U(A/\mathfrak{p}) = \mathbf{Z}/2$. D'après la proposition 3.14 l'homomorphisme $L(A_{\mathfrak{p}}) \rightarrow L(F_{\mathfrak{p}})$ est injectif car $A_{\mathfrak{p}}$ est principal. On peut donc calculer aussi le groupe $U(A, \mathfrak{p})$ grâce à la suite exacte

$$L_1(A_{\mathfrak{p}}) \rightarrow L_1(F_{\mathfrak{p}}) \rightarrow U(A, \mathfrak{p}) \rightarrow 0$$

($F_{\mathfrak{p}}$ désignant le corps des fractions de $A_{\mathfrak{p}}$). Donc $U(A, \mathfrak{p}) \simeq \mathbf{Z}/2$. En utilisant ce qui précède, on obtient le résultat annoncé. ■

La suite exacte d'une localisation dans le cas d'un anneau de Dedekind s'écrit donc :

$$L_1(A) \rightarrow L_1(F) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_p \mathbf{Z}/2 \rightarrow L(A) \rightarrow L(F).$$

L'homomorphisme

$$L_1(F) \approx \mathbf{Z}/2 \times F^*/(F^*)^2 \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

est égal à 0 sur le facteur $\mathbf{Z}/2$ et coïncide avec la p -valuation mod 2 sur le facteur $F^*/(F^*)^2$. Soit $Cl(A)$ le groupe (multiplicatif) des classes d'idéaux de A . On définit alors un homomorphisme $\mathbf{Z}/2 \rightarrow Cl(A)/Cl(A)^2$ par la formule $(v_p) \mapsto p^v p$. Cet homomorphisme induit en fait un isomorphisme entre $Coker \alpha$ et $Cl(A)/Cl(A)^2$ et on a donc la suite exacte (sans doute bien connue) :

$$0 \rightarrow Cl(A)/Cl(A)^2 \xrightarrow{h} L(A) \rightarrow L(F),$$

où h est induite par le foncteur hyperbolique en raison du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_p \mathbf{Z} & \longrightarrow & K(A) & \longrightarrow & K(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_p \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & L(A) & \longrightarrow & L(F) \end{array}$$

3.16. CONJECTURE ⁽³⁾. — Soit A un anneau de Dedekind muni de l'involution triviale tel que $1/2 \in A$ et soit $\varepsilon = \pm 1$. On a alors une suite exacte

$${}_e L_{n+1}(A) \rightarrow {}_e L_{n+1}(F) \rightarrow \bigoplus_p {}_e U_n(A/p) \rightarrow {}_e L_n(A) \rightarrow {}_e L_n(F)$$

Nous allons conclure ce paragraphe par une application à l'homologie du groupe orthogonal et aux théorèmes de périodicité décrits dans [14] si 2 est inversible dans A . Tout d'abord, du fait que

$${}_e W(A) \otimes_{\mathbf{Z}'} {}_e W(A) \approx {}_e W(A) \otimes_{\mathbf{Z}'} {}_e W(A) \approx {}_e W(A') \otimes_{\mathbf{Z}'} {}_e W(A') \approx {}_e W(A') \otimes_{\mathbf{Z}'} {}_e W(A'),$$

on a

$${}_e W(A[x]) \otimes_{\mathbf{Z}} {}_e W(A) \approx {}_e W(A) \otimes_{\mathbf{Z}} {}_e W(A) \quad (\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2], A' = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}')$$

pour tout anneau avec involution A (2 n'étant pas nécessairement inversible dans A). En suivant le schéma décrit dans [14], on en déduit l'existence et l'unicité d'une théorie ${}_e W^{-n}(A)$ caractérisée par les axiomes suivants :

1° ${}_e \overline{W}^0(A) = {}_e W(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'$;

2° pour toute suite exacte d'anneaux avec involution

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

⁽³⁾ Cette conjecture est maintenant résolue. Une démonstration paraîtra dans le troisième article de cette série.

on a une « suite exacte d'homologie » :

$${}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n-1}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n-1}(A'') \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A') \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A'');$$

$$3^{\circ} \quad {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A) \approx {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A[x]).$$

En fait, cette théorie est même périodique de période 4 puisqu'elle coïncide avec ${}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}')$ qui est périodique d'après les résultats de [14].

Ces considérations peuvent se transposer dans la K-théorie du type de Quillen par exemple. En effet, si u désigne un générateur de la partie libre de ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}')$, $8u$ est l'image d'un élément de ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z})$ par l'homomorphisme ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) \rightarrow {}_{-1}W_2(\mathbf{Z}')$. Il suffit de répéter les considérations du paragraphe 5 de [14] en remplaçant la forme quadratique $+x^2$ par la forme quadratique représentée par la matrice de Milnor. De même, si v désigne un générateur de la partie libre de ${}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z}') = {}_{-1}W^2(\mathbf{Z}')$, $8v$ est l'image d'un élément de ${}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z})$ par l'homomorphisme ${}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z}) \rightarrow {}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z}')$ d'après la proposition 3.8. appliquée à l'anneau $(^4)\mathbf{Z}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$ avec l'involution $x \mapsto x^{-1}$, $y \mapsto y^{-1}$ (anneau qui est noethérien régulier). D'après les arguments de cup-produit décrits dans [14], on en déduit que ${}_{\varepsilon}L_n(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}' \approx {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-n}(A) \oplus \Sigma$. Parmi les nombreuses conséquences de ce fait (cf. [14]) retenons le calcul partiel suivant de l'homologie du groupe orthogonal :

3.17. THÉORÈME. — Soit A un anneau quelconque muni d'une involution. L'homologie du groupe orthogonal ${}_{\varepsilon}O(A)$ à coefficients rationnels est alors le produit tensoriel gradué de trois algèbres de Hopf :

$${}_{\varepsilon}S_*(A) \otimes {}_{\varepsilon}\Lambda_*(A) \otimes {}_{\varepsilon}M_*(A),$$

où ${}_{\varepsilon}M_0 = \mathbf{Q}$ et où ${}_{\varepsilon}S(A)$ et ${}_{\varepsilon}\Lambda_*(A)$ s'explicitent comme suit :

1° ${}_{\varepsilon}S_*(A)$ est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel gradué

$$({}_{\varepsilon}\overline{W}^{-2}(A) \oplus {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-4}(A) \oplus \dots) \otimes_{\mathbf{Z}'} \mathbf{Q};$$

2° ${}_{\varepsilon}\Lambda_*(A)$ est l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel gradué

$$({}_{\varepsilon}\overline{W}^{-1}(A) \oplus {}_{\varepsilon}\overline{W}^{-3}(A) \oplus \dots) \otimes_{\mathbf{Z}'} \mathbf{Q}.$$

APPENDICE 1

Remarque sur la définition de ${}_{\varepsilon}L(A)$

Soit L un sous-module isotrope d'un module projectif de type fini M muni d'une forme ε -quadratique. Si L est facteur direct dans M , nous allons montrer que $M \approx L^{\perp}/L \oplus H(L)$. En effet, de la suite exacte

$$0 \rightarrow L^{\perp} \rightarrow M \approx {}^tM \rightarrow {}^tL \rightarrow 0,$$

(*) Rappelons (cf. [14]) que ${}_{\varepsilon}W_n(A[x, x^{-1}]) \approx {}_{\varepsilon}W_n(A) \oplus {}_{\varepsilon}W_{n-1}(A) \oplus ?$, du moins pour $n \geq 0$.

nous déduisons que L^\perp est aussi facteur direct dans M . Par conséquent L est facteur direct dans L^\perp . Si N est un supplémentaire quelconque de L dans L^\perp , on a évidemment $N \approx L^\perp/L$. En outre, les formes hermitienne et quadratique se restreignent bien à L^\perp/L en sorte que la forme induite sur N est non dégénérée. Par conséquent $M = N \oplus N^\perp$ où L est un sous-module de Lagrange de N^\perp . On est ainsi ramené à démontrer l'assertion dans le cas où $L = L^\perp$. Dans ce cas, on peut écrire $M = L \oplus {}^tL$, la forme ε -hermitienne $\varphi : M \rightarrow {}^tM$ étant de la forme

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi' \\ \bar{\varepsilon} {}^t\varphi' & h \end{pmatrix}.$$

Puisque φ est une matrice inversible, φ' est surjectif. D'autre part L^\perp est le noyau de l'homomorphisme composé $L \oplus {}^tL \xrightarrow{{}^t\varphi} {}^tL \oplus L \rightarrow {}^tL$, soit $L \oplus \text{Ker } \varphi'$. Puisque $L = L^\perp$, $\text{Ker } \varphi' = 0$ et φ' est donc un isomorphisme. La forme φ_0 restreinte à L étant de la forme $\psi_0 - \bar{\varepsilon} {}^t\psi_0$, la matrice de φ_0 peut être choisie de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi' \\ 0 & h_0 \end{pmatrix},$$

avec

$$h = h_0 + \bar{\varepsilon} {}^t h_0.$$

On a alors l'identité

$$\begin{pmatrix} \varphi'^{-1} & 0 \\ -h_0 \varphi'^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varphi' \\ 0 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\varphi'^{-1} & -{}^t\varphi'^{-1} {}^t h_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui montre que $M \approx H(L)$.

APPENDICE 2

Remarque sur la définition du groupe ${}_eV(A)$

Soit ${}_eQ(A)$ la catégorie des modules ε -quadratiques introduite dans [13] et soit $F : {}_eQ(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ le foncteur oubli. En suivant des techniques éprouvées en K -théorie algébrique et topologique, on définit le groupe ${}_eV(A)$ comme étant le groupe de Grothendieck du foncteur F ([4], [11], [14]). On a donc la suite exacte

$${}_eL_1(A) \rightarrow K_1(A) \rightarrow {}_eV(A) \rightarrow {}_eL(A) \rightarrow K(A).$$

On peut aussi définir directement le groupe ${}_eV(A)$ en partant de triples (E, g_1^0, g_2^0) où E est un A -module projectif de type fini et où $g_i^0 : E \rightarrow {}^tE, i = 1, 2$ sont des représentants de formes ε -quadratiques sur E . Le groupe ${}_eV(A)$ est le quotient du groupe libre engendré par ces triples par les relations

$$\begin{aligned} (E, g_1^0, g_2^0) + (F, h_1^0, h_2^0) &= (E \oplus F, g_1^0 \oplus h_1^0, g_2^0 \oplus h_2^0), \\ (E, g_1^0, g_2^0) + (E, g_2^0, g_3^0) &= (E, g_1^0, g_3^0) \end{aligned}$$

(on notera que la relation d'isomorphie est conséquence des relations ci-dessus; cf. [14], par exemple).

Une autre manière d'interpréter les groupes ${}_eV(A)$ à travers les différents articles de Wall consiste à considérer des formes quadratiques « basiques », c'est-à-dire des formes quadratiques sur des modules libres munis d'une base e_1, \dots, e_{2n} , les « changements de base » devant avoir une classe triviale dans le groupe $K_1(A)$. L'application qui associe à une telle forme quadratique basique le triple $(H(A^n), g_1^0, g_2^0)$ où g_1^0 est la forme canonique sur $H(A^n)$ et où g_2^0 représente la forme donnée sur A^{2n} réalise un isomorphisme entre les groupes de Grothendieck correspondants. Cependant, nous ne nous servons pas de cette interprétation ici.

Soit maintenant L un sous-module isotrope de E pour les formes g_1^0 et g_2^0 . D'après le premier appendice, L^\perp/L peut être muni de deux formes quadratiques h_1^0 et h_2^0 . Si g_1 et g_2 sont les formes ε -hermitiennes associées à g_1^0 et g_2^0 respectivement, supposons en outre que L soit stable par $g_1^{-1}g_2 = h$. On a alors le lemme suivant :

LEMME. — Dans le groupe ${}_eV(A)$ on a la relation

$$(E, g_1^0, g_2^0) = (L^\perp/L, h_1^0, h_2^0) + (H(L), k_1^0, k_2^0),$$

où k_1^0 est la forme quadratique canonique sur $H(L)$ et où k_2^0 est la forme quadratique dont un représentant (noté encore $k_2^0 : L \oplus {}^tL \rightarrow {}^tL \oplus L$) est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon} {}^t h \\ h & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Puisque L est stable par $g_2^{-1}g_1$, l'orthogonal de L pour la forme g_1 coïncide avec l'orthogonal de L pour la forme g_2 . En considérant l'espace $N \approx L^\perp/L$ de l'appendice 1 et son orthogonal, on se ramène au cas où $L = L^\perp$. D'après les calculs de l'appendice 1, on peut même supposer que $E = L \oplus {}^tL$ et que la forme g_1^0 est celle définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre alors que g_2^0 est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon {}^t h \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

qui est congruente (par produit par des matrices élémentaires) à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon} {}^t h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

APPENDICE 3

Remarques sur la définition du groupe ${}_eU(A)$

Parallèlement au groupe ${}_eV(A)$, il est intéressant de considérer le groupe de Grothendieck ${}_eU(A)$ du foncteur hyperbolique

$$H : \mathcal{P}(A) \rightarrow {}_eQ(A)$$

[où $\mathcal{P}(A)$ désigne la catégorie $\mathcal{P}(A)$ restreinte aux isomorphismes]. On a donc la suite exacte

$$K_1(A) \rightarrow {}_eL_1(A) \rightarrow {}_eU(A) \rightarrow K(A) \rightarrow {}_eL(A).$$

De manière plus concrète, le groupe ${}_eU(A)$ se construit à l'aide de triples (E, F, α) où E et F sont deux objets de $\mathcal{P}(A)$ et où $\alpha : H(E) \rightarrow H(F)$ est une isométrie. En fait, ${}_eU(A)$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de ces triples par les relations

$$(E, F, \alpha) + (E', F', \alpha') = (E \oplus E', F \oplus F', \alpha \oplus \alpha'),$$

$$(E, F, \alpha) + (F, G, \beta) = (E, G, \beta\alpha).$$

Dans cet appendice nous proposons une autre définition du groupe ${}_eU(A)$ (inspirée par le travail de Novikov [23] et [14]) où s'introduisent les modules lagrangiens et qui justifie heuristiquement les considérations du paragraphe 2. On considère les triples (M, L_1, L_2) où M est un module quadratique et où L_1 et L_2 sont deux sous-modules de Lagrange de M . On définit un groupe ${}_eU'(A)$ comme le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations

$$(M, L_1, L_2) + (M', L'_1, L'_2) = (M \oplus M', L_1 \oplus L'_1, L_2 \oplus L'_2),$$

$$(M, L_1, L_2) + (M, L_2, L_3) = (M, L_1, L_3).$$

Si $d(E, F, \alpha)$ est un élément de ${}_eU(A)$, on peut trouver sur $M = H(E)$ deux sous-modules de Lagrange qui sont $E \oplus 0$ et $\alpha^{-1}(F \oplus 0)$. Cette correspondance induit évidemment un homomorphisme de ${}_eU(A)$ dans ${}_eU'(A)$.

LEMME. — *L'homomorphisme ${}_eU(A) \rightarrow {}_eU'(A)$ décrit ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. — On va définir un homomorphisme en sens inverse. Soit donc $d(M, L_1, L_2)$ un élément de ${}_eU'(A)$. D'après l'appendice 1, M s'identifie à la fois à $H(L_1)$ et $H(L_2)$. On peut ainsi trouver des isométries $f_i : H(L_i) \rightarrow M$ qui induisent l'identité sur L_i . Donc $\alpha : f_2^{-1} f_1 : H(L_1) \rightarrow H(L_2)$ est une isométrie. Montrons que $d(L_1, L_2, \alpha)$ ne dépend que du triple (M, L_1, L_2) . En effet, si $f'_i : H(L_i) \rightarrow M$ est une autre isométrie, $f_i^{-1} f'_i$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_i - \bar{\varepsilon} \lambda_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc est ε -élémentaire dans le sens de [13]. Il en résulte que

$$d(L_1, L_2, f_2^{-1}f_1') = d(L_1, L_2, f_2^{-1}f_2'f_2'^{-1}f_1'f_1^{-1}f_1) = d(L_1, L_2, f_2^{-1}f_1)$$

d'après [13]. Enfin, si L_3 est un troisième sous-module de Lagrange, et si $f_3 : H(L_3) \rightarrow M$ est une isométrie qui est l'identité sur L_3 , on a évidemment

$$d(L_1, L_2, f_2^{-1}f_1) + d(L_2, L_3, f_3^{-1}f_2) = d(L_1, L_3, f_3^{-1}f_1).$$

Ceci démontre que l'homomorphisme ${}_eU'(A) \rightarrow {}_eU(A)$ est bien défini. C'est clairement l'homomorphisme inverse du précédent. On identifiera désormais ${}_eU(A)$ et ${}_eU'(A)$ grâce à cet isomorphisme. ■

LEMME 2. — Soient L_1 et L_2 deux sous-modules de Lagrange de M . Soit L un sous-module isotrope de M , facteur direct de M , tel que $L \subset L_1 \cap L_2$. On a alors

$$d(M, L_1, L_2) = d(L^\perp/L, L_1/L, L_2/L).$$

Démonstration. — Comme dans l'appendice 1, écrivons $L^\perp = L \oplus N$. On peut écrire de même :

$$L_1 = L \oplus L'_1, \quad L_2 = L \oplus L'_2.$$

On a alors

$$d(M, L_1, L_2) = d(N, L'_1, L'_2) + d(N^\perp, L, L) = d(L^\perp/L, L_1/L, L_2/L). \quad \blacksquare$$

LEMME 3. — Soit $d(M, L_1, L_2)$ un élément de ${}_eU(A)$. Écrivons $M = L_1 \oplus {}^tL_1$ et supposons que la projection sur L_1 parallèlement à tL_1 induise un isomorphisme de L_2 sur L_1 . Alors $d(M, L_1, L_2) = 0$.

Démonstration. — Puisque $L_1 \approx L_2$ et que $M \approx L_1 \oplus {}^tL_1 \approx L_2 \oplus {}^tL_2$, il existe une isométrie $\alpha : M \rightarrow M$ telle que $\alpha(L_1) = L_2$. Si on écrit $M = L_1 \oplus {}^tL_1$, la matrice de α est de la forme

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix},$$

où u est un isomorphisme. En multipliant à droite par la matrice

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix},$$

ce qui ne change pas l'image, on peut même supposer que $u = 1$. Puisque α est orthogonale, on en déduit aisément que α est produit de matrices ε -élémentaires. Donc $d(M, L_1, L_2) = 0$. ■

APPENDICE 4

L'homomorphisme de Gysin en L-théorie

Soit A un anneau noethérien et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux unitaires tel que B soit un A-module de dimension homologique et de type fini grâce à f . En K-théorie ordinaire, on définit alors un « homomorphisme de Gysin » $f^* : K(B) \rightarrow K(A)$ de la manière suivante. Si M est un B-module projectif de type fini, il existe une résolution

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où les P_i sont des A-modules projectifs de type fini. La correspondance $[M] \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i [P_i]$ définit l'homomorphisme cherché (cf. Bass [4]). Cet homomorphisme est en outre un homomorphisme de K(A)-modules et on a $(g.f)^* = f^*.g^*$.

En L-théorie, le phénomène est beaucoup plus complexe. Dans cet appendice, nous allons seulement considérer le cas où B est le quotient de A par un idéal principal $\mathfrak{p} = (f)$ où f est non-diviseur de zéro. Il s'en suit que tout A/ \mathfrak{p} -module projectif de type fini peut être considéré comme un A-module de type fini, ce qui permet, en suivant le schéma du paragraphe 2, de définir un homomorphisme

$${}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}L(A).$$

De manière plus précise, tout élément de ${}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p})$ peut s'écrire $d(M, L_1, L_2)$ où M est défini par une résolution

$$0 \rightarrow E \rightarrow {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Les deux sous-modules de Lagrange L_i déterminent alors des modules quadratiques F_i sur A grâce aux diagrammes (cf. § 1)

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow E \rightarrow {}^tE \rightarrow M \rightarrow 0 & & \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & {}^tE \\ \beta_i \uparrow & \nearrow j_i & \uparrow {}^t\beta_i \\ F_i & \longrightarrow & {}^tF_i \\ & \approx & \end{array} \\ \parallel & \begin{array}{c} \uparrow p_i \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{array} & \\ 0 \rightarrow E \rightarrow F_i \rightarrow L_i \rightarrow 0 & & \end{array}$$

PROPOSITION 1. — Les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} {}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}L(A) & & {}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}L(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(A/\mathfrak{p}) \rightarrow K(A) & & K(A/\mathfrak{p}) \rightarrow K(A) \end{array}$$

où l'homomorphisme

$${}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow K(A/\mathfrak{p})$$

est défini par

$$d(M, L_1, L_2) \mapsto [L_1] - [L_2]$$

et où l'homomorphisme

$$K(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p})$$

associe au module L l'élément $d(L \oplus {}^tL, L \oplus 0, 0 \oplus {}^tL)$.

Démonstration. — La commutativité du premier diagramme résulte immédiatement des définitions. Pour le second, on peut noter les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} Q \oplus {}^tP & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}} & {}^tQ \oplus P \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ Q \oplus {}^tQ & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & {}^tQ \oplus Q \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q \oplus {}^tP & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}} & {}^tQ \oplus P \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P \oplus {}^tP & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & {}^tP \oplus P \end{array}$$

pour toute résolution projective de type fini

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{\alpha} P \rightarrow M \rightarrow 0$$

d'un A/\mathfrak{p} -module projectif de type fini M . ■

PROPOSITION 2. — « L'homomorphisme de Gysin » ${}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}L(A)$ est un homomorphisme de « ${}_{\eta}L(A)$ -modules ». De manière plus précise, si A est commutatif, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \times {}_{\eta}L(A) & \rightarrow & {}_{\varepsilon}U(A/\mathfrak{p}) \times {}_{\eta}L(A/\mathfrak{p}) & \rightarrow & {}_{\varepsilon\eta}U(A/\mathfrak{p}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon}L(A) \times {}_{\eta}L(A) & \longrightarrow & & \longrightarrow & {}_{\varepsilon\eta}L(A) \end{array}$$

La proposition 1 nous permet par ailleurs de définir des homomorphismes

$$\begin{aligned} {}_{\varepsilon}W_1(A/\mathfrak{p}) &\rightarrow {}_{\varepsilon}W'(A), \\ -{}_{\varepsilon}W'^1(A/\mathfrak{p}) &\rightarrow {}_{+\varepsilon}W(A) \end{aligned}$$

(en utilisant le théorème de périodicité, ce qui suppose 2 inversible dans A).

En posant

$${}_{\varepsilon}\overline{W}^n(A) = {}_{\varepsilon}W^n(A) \otimes_{\mathbf{Z}} [1/2],$$

on en déduit un homomorphisme ${}_{\varepsilon}\overline{W}^n(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{n+1}(A)$. Si \mathfrak{p} est un idéal de dimension p , il serait intéressant de définir un « homomorphisme de Gysin » ${}_{\varepsilon}\overline{W}^n(A/\mathfrak{p}) \rightarrow {}_{\varepsilon}\overline{W}^{n+p}(A)$.

APPENDICE 5

Dans le paragraphe 3 nous avons admis le résultat suivant :

LEMME. — Soit $i : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $i(S) = S'$ soit formé d'éléments non-diviseurs de zéro dans B et tel que $A/s \approx B/i(s)$ pour tout élément s de S .

Alors la catégorie des A -modules de dimension homologique ≤ 1 et de S -torsion est équivalente à la catégorie des B -modules de dimension homologique ≤ 1 et de S' -torsion grâce au foncteur $M \mapsto \bar{M} = M \otimes_A B$.

Démonstration. — Soit

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

une résolution projective de M où P_0 et P_1 sont projectifs de type fini. On en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, B) \rightarrow \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{P}_0 \rightarrow \bar{M} \rightarrow 0,$$

où $\text{Tor}_1^A(M, B) = 0$ en raison de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tor}_1^A(M, B) & \xrightarrow[0]{\text{Tor}(1, i(s))} & \text{Tor}_1^A(M, B) & \rightarrow & \text{Tor}_1^A(M, B/i(s)) & \rightarrow & M \otimes_A B \xrightarrow[0]{1 \otimes i(s)} M \otimes_A B \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \text{Tor}_1^A(M, A/s) & \simeq & M \end{array}$$

où s est choisi en sorte que $sM = 0$. Par conséquent, le foncteur $M \mapsto \bar{M}$ est bien défini. (Noter que $M \approx \bar{M}$ en tant que A -modules.) C'est un foncteur pleinement fidèle car

$$\text{Hom}_A(M, N) \approx \text{Hom}_{A/s}(M, N) \approx \text{Hom}_{B/i(s)}(\bar{M}, \bar{N}) \approx \text{Hom}_B(\bar{M}, \bar{N}).$$

Il reste donc à démontrer que le foncteur est essentiellement surjectif. Soit R un B -module de S' -torsion qui est de B -dimension homologique ≤ 1 considéré comme A -module de S -torsion par restriction des scalaires. Nous allons démontrer que R est de A -dimension homologique ≤ 1 .

Par hypothèse, il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0 \rightarrow R \rightarrow 0,$$

où Q_0 et Q_1 sont des B -modules projectifs de type fini. Puisque β_s est un isomorphisme, il existe $\beta' : Q_0 \rightarrow Q_1$ tel que β'_s soit un isomorphisme égal à $s\beta_s^{-1}$ pour s convenable. On a donc aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow Q_0 \xrightarrow{\beta'} Q_1 \rightarrow R' \rightarrow 0$$

et R est de dimension homologique ≤ 1 si $R \oplus R'$ est de dimension homologique ≤ 1 . Si on pose $R'' = R \oplus R'$ et $T = Q_0 \oplus Q_1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow T \xrightarrow{\gamma} T \rightarrow R'' \rightarrow 0,$$

où on peut même supposer $T = B^n$ en ajoutant éventuellement un supplémentaire à T . Si u et v sont deux endomorphismes de B^n tels que u_s et v_s soient des isomorphismes, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Coker}(u) \rightarrow \text{Coker}(vu) \rightarrow \text{Coker}(v) \rightarrow 0,$$

ce qui montre que $\text{Coker } (vu)$ est de dimension homologique ≤ 1 s'il en est de même de $\text{Coker } u$ et $\text{Coker } v$. Considérons maintenant $m = 2n$ et un élément s de S tel que $i(s)\gamma^{-1}$ soit une matrice $n \times n$ à coefficients dans B . Soit $\delta : T^m \rightarrow T^m$ l'endomorphisme défini par la matrice

$$\delta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & s'^2 \gamma^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } s' = i(s).$$

Alors R'' est de dimension homologique ≤ 1 s'il en est de même de $\text{Coker } \delta$. D'autre part, on a l'identité

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & s'^2 \gamma^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' & -s' \gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s' \gamma^{-1} \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que $\text{Coker } \theta$ est de A -dimension homologique ≤ 1 lorsque θ est une matrice $2n \times 2n$ de la forme

$$\begin{pmatrix} s' & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} s' & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans l'un ou l'autre cas, on montre aisément que $\text{Coker } \theta \approx B^n/s' B^n \approx A^n/s A^n$ qui est de A -dimension homologique ≤ 1 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BAK, *Solution to the congruence subgroup problem for λ -hermitian forms* (à paraître).
- [2] A. BAK, *Weak approximation for central extensions of quadratic elementary groups* (à paraître).
- [3] A. BAK et W. SCHARLAU, *Witt groups of orders and finite groups* (à paraître).
- [4] H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1967.
- [5] H. BASS, J. MILNOR et J.-P. SERRE, *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$)* (Publ. I. H. E. S., n° 33, 1967, p. 59-137).
- [6] H. BASS, *Unitary algebraic K-theory* (Lecture Notes in Math., n° 343, p. 57-209).
- [7] H. BASS, *Some problems in "classical" algebraic K-theory* (Lecture Notes in Math., n° 342, p. 3-70).
- [8] S. E. CAPPELL, *Mayer-Vietoris sequences in hermitian K-theory* (Lecture Notes in Math., n° 343, p. 478-512).
- [9] A. H. DURFEE, *Diffeomorphism classification of isolated hypersurface singularities* (Thèse, Cornell university).
- [10] I. M. GEL'FAND et A. S. MISCENKO, *Quadratic forms over commutative group rings and the K-theory* (Funct. Anal. and appl., vol. 3, 1969, p. 277-281).
- [11] M. KAROUBI, *Algèbres de Clifford et K-théorie* (Ann. sc. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 1, 1968, p. 161-270).
- [12] M. KAROUBI, *La périodicité de Bott en K-théorie générale* (Ann. sc. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 4, 1971, p. 63-95).
- [13] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique II* (Math. Scand., 32, 1973, p. 57-86).
- [14] M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne* (Lecture Notes in Math., n° 343, p. 301-411).
- [15] M. KAROUBI, *Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal* (à paraître).
- [16] M. KNEBUSCH, *Grothendieck und Witttringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen*, S-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., 1969/1970, 3, Abh Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1970.
- [17] M. KNEBUSCH et W. SCHARLAU, *Quadratische Formen und quadratische Reziprozitätsgesetze über algebraischen Zahlkörpern* (Math. Z., vol. 121, 1971, p. 346-368).

- [18] M. KNESER et D. PUPPE, *Quadratische formen und verschlingungs-invarianten von knoten* (*Math. Z.* vol. 58, 1953, p. 376-384).
- [19] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-theory* (*Annals Math. Stud.*, vol. 72, 1971).
- [20] J. MILNOR, *Algebraic K-theory and quadratic forms* (*Invent. Math.*, vol. 9, 1970, p. 318-344).
- [21] J. MILNOR et D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Springer, 1973.
- [22] A. S. MIŠCENKO, *Homotopy invariants of non-simply connected manifolds, I. Rational invariants* (*Izv. Akad. Nauk. S. S. R.*, ser. math., vol. 34, 1970, p. 501-514).
- [23] S. P. NOVIKOV, *The algebraic construction and properties of Hermitian analogues of K-theory for rings with involution from the point of view of Hamiltonian formalism. Some applications to differential topology and the theory of characteristic classes* (I : *Izv. Akad. Nauk. S. S. R.*, ser. math., vol. 34, 1970, p. 253-288. II : *ibid.*, p. 475-500).
- [24] O. T. O'MEARA, *Introduction to quadratic forms*, Springer, 1963.
- [25] A. A. RANICKI, *Algebraic L-theory IV Polynomial extension rings* (*Commentarii Math. Helv.*, vol. 49, 2, 1974, p. 137-167).
- [26] W. SCHARLAU, *Quadratic reciprocity laws* (*J. Number Theory*, vol. 4, 1972, p. 78-97).
- [27] W. SCHARLAU, *Remarks on symmetric bilinear forms over Euclidean domains* (à paraître).
- [28] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [29] R. SHARPE, *On the structure of the unitary Steinberg group* (à paraître).
- [30] T. A. SPRINGER, *Quadratic forms over fields with a discrete valuation I* (*Indag. Math.*, vol. 17, 1955, p. 352-362).
- [31] C. T. C. WALL, *On the classification of Hermitian forms, IV. Global rings* (à paraître).
- [32] C. T. C. WALL, *On the axiomatic foundations of the theory of Hermitian forms* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 67, 1970, p. 243-250).
- [33] C. T. C. WALL, *Quadratic forms on finite groups* (*Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 4, 1972, p. 156-160).

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1973.)

Max KAROUBI,
 U. E. R. de Mathématiques,
 Université de Paris VII,
 2, place Jussieu,
 75230 Paris-Cedex 05.