J. Math. Soc. Japan
Vol. 33, No. 4, 1981

Majoration du nombre de classes d'un corps cubique cyclique de conducteur premier

Par C. MOSER et J. J. PAYAN

(Reçu le 8 août, 1980)

1. Motivations et notations.

La "conjecture" de Vandiver affirme que le nombre de classes h^{+} du sous-corps réel maximal $\boldsymbol{Q}_0^{(p)}$ de $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ corps cyclotomique d'indice premier p, n'est pas divisible par p. Ceci s'exprime dans la terminologie d'Iwasawa en disant que tout nombre premier p est ou bien régulier ou bien proprement irrégulier. On sait par ailleurs que le nombre de classes de toute extension intermédiaire de $\boldsymbol{Q}_0^{(p)}/\boldsymbol{Q}$ divise h^{+}, il en résulte que la conjecture suivante est plus faible que celle de Vandiver: p ne divise pas le nombre de classes de l'extension cyclique réelle de degré premier l et de conducteur p pour tout nombre premier l diviseur de $p-1$.

Nous envisageons ici le cas $l=3$; p désigne désormais un nombre premier congru à 1 modulo 3 et K le corps cubique cyclique de conducteur p. On note χ un caractère cubique non principal modulo p, $\tau(\chi)$ la somme de Gauss attachée à p $(\tau(\chi)=\sum_{x \bmod p}\chi(x)e^{2i\pi x/p})$, $h(K)$ le nombre de classes d'idéaux de K, $R(K)$ son régulateur, $\zeta_K(s)$ la fonction zeta associée à K et $L(s, \chi)$ la fonction L associée au caractère χ.

2. Formule analytique du nombre de classes et minoration du regulateur.

La formule analytique du nombre de classes, appliquée au corps K de discriminant p^2, s'écrit:

$$\lim_{s\to 1^{+}}\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}=|L(1, \chi)|^2=\frac{4}{p}h(K)R(K)$$

avec $L(1, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}$. On peut pour plus de détails se reporter à [3] chapitre 3, § 3.

On va démontrer que $h(K)$ est strictement inférieur à p et utiliser le résultat suivant:

PROPOSITION. (M. N. Gras [1])

$$R(K) \geqq \frac{3}{16}\left(\mathrm{Log}\,\frac{p-3}{3}\right)^2.$$

3. Majoration de $L(1, \chi)$.

On transpose la démarche suivie dans [2] pour majorer $L(1, \chi)$ lorsque χ est un caractère pair réel.

LEMME 3.1. *Soient $p>2$ un nombre premier et A un entier naturel dont on note A^* le plus petit résidu positif modulo p. Si χ est un caractère primitif modulo p, on a*

$$\left|\sum_{a=0}^{A} \sum_{n=-a}^{+a} \chi(n)\right| \leqq (A^*+1)\left[\sqrt{p} - \frac{A^*+1}{\sqrt{p}}\right].$$

Si de plus χ est pair,

$$\left|\sum_{a=0}^{A} \sum_{n=0}^{a} \chi(n)\right| \leqq \frac{1}{2}(A^*+1)\left[\sqrt{p} - \frac{A^*+1}{\sqrt{p}}\right].$$

DEMONSTRATION. La somme de Gauss $\tau(\chi)$ vérifie (voir par exemple [3] chapitre 1).

$$\sum_{x=1}^{p} \chi(x) \exp\left(\frac{2i\pi x n}{p}\right) = \bar{\chi}(n)\tau(\chi) \quad \text{pour tout entier } n$$

et

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{p}.$$

Posons pour simplifier $\varphi(A, \chi) = \tau(\chi) \sum_{a=0}^{A} \sum_{n=-a}^{a} \bar{\chi}(n)$; on établit facilement

$$\begin{aligned}
\varphi(A, \chi) &= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \sum_{a=0}^{A} \sum_{n=-a}^{a} \exp\left(\frac{2i\pi x n}{p}\right) \\
&= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x)\left(\exp\frac{i\pi x}{p} - \exp\frac{-i\pi x}{p}\right)^{-1} \sum_{a=0}^{A} \left\{\exp\left(\frac{i\pi x(2a+1)}{p}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi x(2a+1)}{p}\right)\right\} \\
&= \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \frac{\sin^2 \frac{(A+1)x\pi}{p}}{\sin^2 \frac{\pi x}{p}}
\end{aligned}$$

d'où immédiatement

$$|\varphi(A, \chi)| \leqq \sum_{x=1}^{p-1} \frac{\sin^2 \frac{(A^*+1)\pi x}{p}}{\sin^2 \frac{\pi x}{p}}$$

mais

$$\sum_{x=1}^{p-1} \frac{\sin^2\left(\frac{(A^*+1)\pi x}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{p}\right)} = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{a=0}^{A^*} \sum_{n=-a}^{a} \exp\frac{2i\pi n x}{p}$$

$$= \sum_{a=0}^{A^*} \sum_{n=-a}^{a} \left\{-1+\sum_{x=1}^{p} \exp\frac{2i\pi n x}{p}\right\}$$

soit encore

$$|\varphi(A, \chi)| \leqq p(A^*+1)-(A^*+1)^2$$

d'où le lemme.

LEMME 3.2. *Si $p>100$ est un nombre premier congru à 1 modulo 3, on a*

$$|L(1, \chi)| \leqq \gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\, p$$

où γ est la constante d'Euler.

DEMONSTRATION. Posons $S(-1)=S(0)=0$ et pour $n \geqq 1$, $S(n)=\sum_{a=0}^{n} \sum_{j=0}^{a} \chi(j)$; le lemme 1 montre que $|S(n)| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3$ pour $n \in \boldsymbol{N}$.

Par ailleurs $S(p-1)=S(p)$ résulte facilement de $\sum_{x=1}^{p} \chi(x)=0$ et $S(p-1)=0$ découle de l'égalité $\sum_{x=1}^{p-1} x\chi(x)=0$ qui se démontre en utilisant $\chi(-1)=1$ et le fait que la somme des x compris entre 0 et $p-1$, tels que $\chi(x)$ prenne une même valeur, est égale à $p \cdot \frac{p-1}{6}$. Remarquons encore que $|S(n)| \leqq \frac{n(n+1)}{2}$, majoration meilleure que celle du lemme 1 pour $n<\sqrt{p}$.

De l'égalité $\chi(n)=S(n)-2S(n-1)+S(n-2)$ valable pour $n \geqq 1$, on tire

$$L(1, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Notons comme d'habitude $[\sqrt{p}]$ la partie entière de $\sqrt{p}$ et posons

$$\Sigma_1=\sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\Sigma_2=\sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\Sigma_3=\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2S(n)}{n(n+1)(n+2)}.$$

On va majorer séparément $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$ et $|\Sigma_3|$ pour obtenir l'assertion du lemme 3.2.

L'inégalité $|S(n)| \leqq \frac{n(n+1)}{2}$ entraine

$$|\Sigma_1| \leqq \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n+2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} + \sum_{n=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{1}{n}.$$

La formule d'Euler-Maclaurin entraîne pour $m \geqq 2$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leqq \gamma + \operatorname{Log} m + \frac{1}{2m}$$

d'où

$$|\Sigma_1| \leqq \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} p + \frac{1}{2[\sqrt{p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]}$$

un calcul élémentaire prouve que

$$\frac{1}{2[\sqrt{p}]} + \frac{1}{2+[\sqrt{p}]} + \frac{1}{1+[\sqrt{p}]} < \frac{5}{2\sqrt{p}} \quad \text{pour } p > 16.$$

D'où pour $p > 16$: $|\Sigma_1| < \gamma - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} p + \frac{5}{2\sqrt{p}}$.

Pour $|\Sigma_2|$, le lemme 3.1 donne :

$$|\Sigma_2| \leqq \sqrt{p} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)}$$

soit encore :

$$|\Sigma_2| < 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} - \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

On voit facilement que

$$\sum_{n=1+[\sqrt{p}]}^{p-2} \frac{n+1}{n(n+2)} > \operatorname{Log} \frac{p}{2+[\sqrt{p}]} - \frac{1}{2+[\sqrt{p}]}.$$

En rassemblant ces inégalités, on obtient

$$|\Sigma_2| \leqq 1 - \frac{\sqrt{p}}{p-1} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \operatorname{Log} p + \frac{3}{p} \quad \text{pour tout } p.$$

En utilisant la majoration $|S(n)| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3$, on obtient

$$|\Sigma_3| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3 \sum_{n=1+p}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

soit encore

$$|\Sigma_3| < \frac{1}{8}(\sqrt{p})^3 \frac{1}{(p+1)(p+2)} < \frac{1}{8\sqrt{p}}.$$

Des majorations obtenues pour $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$ et $|\Sigma_3|$ on déduit pour $p>16$:

$$|L(1,\chi)|<\gamma-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Log} p+\frac{13-4\operatorname{Log} p+\dfrac{24}{\sqrt{p}}}{8\sqrt{p}}$$

pour $p>100$ on a $\dfrac{13}{4}+\dfrac{6}{\sqrt{p}}<\operatorname{Log} p$; d'où l'énoncé du lemme.

4. Majoration de $h(K)$.

En reprenant la proposition du §2 et la majoration du lemme 3.2, on obtient pour $p>100$

$$h(K)<\frac{p}{3}\frac{(2\gamma-1+\operatorname{Log} p)^2}{\left[\operatorname{Log} p-\operatorname{Log} 3+\operatorname{Log}\left(1-\dfrac{3}{p}\right)\right]^2}<\frac{2p}{3}.$$

D'où compte tenu des valeurs de $h(K)$ connues pour $p<100$ (voir par exemple les tables de [**1**]) le:

THEOREME. $h(K)<\dfrac{2p}{3}$,

et son

COROLLAIRE. *Si K est un corps cubique cyclique de conducteur premier p, alors p ne divise pas le nombre de classes de K.*

REMARQUE. Si p est un nombre premier congru à 1 modulo 4, le nombre de classes d'idéaux de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{p})$ est

$$h_p=\frac{\sqrt{p}}{2}\frac{L(1,\chi)}{\operatorname{Log}\varepsilon_p}$$

où χ est le caractère de Legendre $\left(\dfrac{}{p}\right)$ et où ε_p est est l'unité fondamentale de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{p})$. Or, on a $\varepsilon_p>\sqrt{p}-1$. D'après le lemme 3.2, on a donc pour $p>100$

$$h_p<\frac{\sqrt{p}}{2}\frac{\operatorname{Log} p+2\gamma-1}{2\operatorname{Log}(\sqrt{p}-1)}<\sqrt{p}$$

et on sait pour $p<100$, $h_p=1$. En particulier h_p est premier à p, résultat qui semblait déjà connu de Gauss.

REMARQUE. Marie-Nicole Gras, que nous remercions, nous a communiqué au vu de sa table [**1**] que la valeur de $L(1,\chi)$ pour $p=643$ est 2,782 alors que $\gamma-\dfrac{1}{2}+\operatorname{Log} 643=3{,}310$; ceci donne une idée de la majoration fournie par le lemme 3.2.

Bibliographie

[1] M. N. Gras, Méthodes algorithmiques de calcul numérique du nombre de classes et des unités des extensions cubiques cycliques de $\boldsymbol{Q}$, J. Reine Angew. Math., 227 (1975).
[2] Loo-Keng Hua, On the least solution of Pell's equation, Amer. J. Math., (1942).
[3] Serge Lang, Cyclotomic Fields, G.T.M. 59, Springer Verlag, 1978.

C. MOSER
Institut Fourier
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin-d'Hères
France

J. J. PAYAN
Institut Fourier
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin-d'Hères
France