Invent. math. 138, 573–629 (1999)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002229900021

Inventiones mathematicae

Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale

P. Boyer

Ecole Normale Supérieure de Cachan, Département de Mathématiques (bât. Cournot), 61, av. du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Oblatum 28-XII-1998 & 3-V-1999 / Published online: 5 August 1999

Introduction

On fixe un nombre premier l ainsi qu'une clotûre algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$. Etant donné un corps local non archimédien F et un entier $d \geq 1$, on dispose de trois groupes $GL_d = GL_d(F)$, $H_d = D_{F,d}^\times$, où $D_{F,d}$ est une algèbre à division centrale sur F d'invariant $1/d$ (unique à isomorphisme près), et W_F le groupe de Weil de F. On considère alors les ensembles de classes d'équivalence de représentations suivants:

– $\mathcal{A}^0_{GL_d}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations[1] irréductibles, admissibles et cuspidales de $GL_d(F)$, de caractères centraux d'ordre fini,
– $\mathcal{A}_{H_d}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations[1] irréductibles, admissibles de $D_{F,d}^\times$, de caractères centraux d'ordre fini,
– $\mathcal{G}^0(d)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations l-adiques (sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$)[1], irréductibles de dimension d de W_F, de déterminants d'ordre fini.

Pour F d'égale caractéristique positive p différente de l, Laumon, Rapoport et Stuhler ([17]) ont prouvé la correspondance de Langlands locale, c'est-à-dire l'existence d'une famille de bijections $\mathfrak{L}_{F,d} : \mathcal{A}^0_{GL_d} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^0(d),\ d \geq 1,$ possédant certaines propriétés de conservation de facteurs L et ε (cf. le paragraphe 1.2 pour un énoncé précis). En particulier pour $d = 1$, $\mathfrak{L}_{1,F}$ est induit par l'isomorphisme $W_F^{\mathrm{ab}} \simeq F^\times$ de la théorie du corps de classe abélien. Dans [12], Henniart a démontré la correspondance de Jacquet-Langlands locale, c'est-à-dire l'existence, pour tout $d \geq 1$, d'une

[1] On notera qu'en ce qui concerne ces représentations, la topologie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ne joue aucun rôle, de sorte qu'un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ étant fixé, on peut considérer ces représentations comme des représentations complexes.

injection $\mathfrak{J}_{F,d} : \mathcal{A}^0_{GL_d} \hookrightarrow \mathcal{A}_{H_d}$, caractérisée par l'égalité des caractères sur les éléments elliptiques réguliers semi-simples (cf. le paragraphe 1.1). Pour $d = 1$, $\mathfrak{J}_{1,F}$ est l'application identité.

Deligne et Carayol (cf. [5] et [4]) ont proposé une réalisation géométrique conjecturale de ces correspondances. Rappelons leur construction.

Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F et $\bar{\kappa}$ une clôture algébrique du corps résiduel κ de $\mathcal{O}$. On fixe un $\mathcal{O}$-module formel défini sur $\bar{\kappa}$ et de hauteur d (un tel $\mathcal{O}$-module est unique à isomorphisme près). Soit Def^d_0 l'anneau universel de ses déformations; Def^d_0 est une algèbre de séries formelles en $d-1$ indéterminées sur le complété $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ de l'anneau des entiers d'une extension non ramifiée maximale F^{nr} de F. Plus généralement, pour tout entier positif n, on considère le revêtement galoisien $\mathrm{Def}^d_0 \longrightarrow \mathrm{Def}^d_n$ défini par les bases de Drinfeld de niveau n sur la déformation universelle. Pour n variable, ces revêtements s'organisent en un système inductif de groupe de Galois, le groupe profini $GL_d(\mathcal{O})$.

Pour chaque entier $n \geq 0$, $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}^d_n)$ est un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$ qui est spécial au sens de [1]. Une clôture séparable de $\hat{F}^{\mathrm{nr}}$ étant fixée, Berkovich construit dans loc. cit. le foncteur Ψ_η des cycles évanescents pour le morphisme structural $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \longrightarrow \mathrm{Def}^d_n$, ainsi que ses foncteurs dérivés. Le faisceau $R^{d-1}\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ sur la fibre spéciale de $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}^d_n)$ (réduite à un point) est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action de W_F, que l'on notera $\Psi_{d,n}$. L'action de $GL_d(\mathcal{O})$ sur le système inductif des Def^d_n induit évidemment une action de $GL_d(\mathcal{O})$ sur le système inductif Ψ_d des $\Psi_{d,n}$. Pour tout caractère ξ de $F^\times$ d'ordre fini, notons $\Psi_d(\xi)$ le facteur direct de Ψ_d sur lequel le centre $\mathcal{O}^\times$ de $GL_d(\mathcal{O})$ agit par la restriction de ξ à $\mathcal{O}^\times$. On notera encore $\Psi_d(\xi)$ la limite du système inductif $\Psi_d(\xi)$. Cette limite peut être munie d'une action du noyau $\mathfrak{P}$ de l'application

$$\begin{aligned} GL_d(F) \times D^\times_{F,d} \times W_F &\longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ (g, \delta, w) &\longmapsto \mathrm{val}(\mathrm{rn}(\delta)) - \mathrm{val}(\det(g)) + \deg(w) \\ &\qquad (\text{modulo } d\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

où $\mathrm{rn} : D^\times_{F,d} \to F^\times$ est la norme réduite et $\deg : W_F \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ est l'application degré. Cette action est définie de telle sorte que le centre $F^\times$ de $GL_d(F)$ agisse par le caractère ξ.

La représentation locale fondamentale $\mathcal{U}_d(\xi)$ définie par Deligne et Carayol, est alors l'induite de $\mathfrak{P}$ à $GL_d(F) \times D^\times_{F,d} \times W_F$ de la représentation $\Psi_d(\xi)$. En particulier $\mathcal{U}_d(\xi)$ est une représentation admissible de $GL_d(F) \times D^\times_{F,d}$ et le centre $F^\times$ de $GL_d(F)$ y agit par le caractère ξ.

Théorème. *(conjecture de Deligne-Carayol) Soit $\pi \in \mathcal{A}^0_{GL_d}$ une représentation cuspidale irréductible de $GL_d(F)$ de caractère central ξ. Pour ρ une représentation admissible irréductible de $D^\times_{F,d}$ et σ une représentation l-adique irréductible de W_F, la multiplicité de $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$ dans $\mathcal{U}_d(\xi)$ est non nulle si et seulement si (ρ, σ) appartient à $\mathcal{A}_{H_d} \times \mathcal{G}^0(d)$ et est* *isomorphe au couple* $(\mathfrak{J}_{F,d}(\check{\pi}), \mathfrak{L}_{F,d}(\pi)\otimes|-|^{\frac{1-d}{2}})$*, où* $\check{\pi}$ *est la représentation contragrédiente de* π*. Dans ce cas, cette multiplicité est égale à* 1.

Ce résultat de nature locale est prouvé par voie globale en utilisant les variétés de modules des faisceaux elliptiques de Drinfeld ou plutôt leurs variantes compactes dues à Stuhler. On choisit une courbe projective X, irréductible, lisse et géométriquement connexe sur κ. On fixe deux places distinctes o et ∞ de X que pour simplifier on supposera rationnelles sur le corps des constantes κ. On identifie $\mathcal{O}$ au complété de l'anneau local de X en la place o. On fixe une algèbre à division D, centrale sur le corps des fonctions de X, de dimension d^2 ramifiée seulement en deux places x_1, x_2 distinctes des places ∞, o et telle que D_{x_i} $(i = 1, 2)$ est une algèbre à division. On pose $X' = X\backslash\{\infty, x_1, x_2\}$ et on choisit un faisceau d'ordres maximaux $\mathcal{D}$ de D.

Pour tout idéal I de l'anneau A des fonctions régulières sur $X\backslash\{\infty\}$, les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques définis par Stuhler peuvent être munis de I-structures de niveaux. Pour définir leurs variétés de modules $\mathcal{M}_{I,o}$ au dessus de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$, il faut pour $o \in V(I)$, utiliser la notion de base de Drinfeld. Pour I décrivant l'ensemble des idéaux de A, les schémas $\mathcal{M}_{I,o}$ s'organisent en un système projectif qui, via les correspondances géométriques de Hecke, est muni d'une action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$.

Pour tout idéal I de A, on considère la cohomologie l-adique de la fibre générique de $\mathcal{M}_{I,o}$ et plus particulièrement son groupe en degré médian $H^{d-1}_{\eta_o,I}$. C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de W_F. Pour I variable, les $H^{d-1}_{\eta_o,I}$ forment un système inductif. L'action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$ sur le système projectif des $\mathcal{M}_{I,o}$, induit évidemment une action de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$ sur la limite inductive $H^{d-1}_{\eta_o}$ des $H^{d-1}_{\eta_o,I}$. Cette limite est une représentation globale de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \times W_F$ dont la description est donnée en termes automorphes dans [17].

On prouve l'équivalent du théorème de Serre-Tate pour les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques, et on obtient en particulier que le complété de l'anneau de $\mathcal{M}_{I,o}$ en n'importe quel point supersingulier de sa fibre spéciale, est isomorphe à l'anneau Def_n^d défini ci-dessus, où n est la multiplicité de o dans I. On en déduit alors, à l'aide d'un théorème de Berkovich ([1]), que l'espace vectoriel $\mathcal{U}_d(\xi)$, en tant que représentation de $GL_d(F)\times W_F$, est «contenu» dans $H^{d-1}_{\eta_o}$. Le point essentiel de la preuve du théorème est que la différence entre ces deux représentations ne contient pas de représentations cuspidales de $GL_d(F)$.

Pour démontrer ce fait, on est amené à étudier plus en détail la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$. On définit une stratification de cette fibre telle que le polygone de Newton soit constant en tous les points géométriques d'une même strate. Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d$, on obtient alors un sous-schéma localement fermé $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ de pure dimension $d-h$ (résultat conjecturé par Rapoport). En particulier $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}$ est l'ensemble des points supersinguliers. Cette stratification est compatible aux morphismes de restriction du niveau

$\mathcal{M}_{J,o} \longrightarrow \mathcal{M}_{I,o}$, pour $J \subset I$ des idéaux de A. On montre enfin que, pour tout $1 \leq h \leq d-1$, $\varprojlim_I \mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ est un κ-schéma «induit» sous l'action des correspondances de Hecke de $GL_d(F)$.

Décrivons brièvement le contenu des différents paragraphes.

La première partie est de nature locale. Après quelques rappels de notations sur les correspondances locales de Jacquet-Langlands (1.1) et de Langlands (1.2), on introduit suivant Drinfeld les anneaux de déformations universelles Def_n^d d'un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur d sur $\bar{\kappa}$ (2.1). La limite inductive sur n des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels de dimension finie $\Psi_{d,n}$ définis via les travaux de Berkovich (2.2), est munie suivant Deligne et Carayol, via les correspondances de Hecke (2.3), d'une action du groupe $\mathfrak{P}$. La représentation locale fondamentale (2.4) est alors l'induite de $\mathfrak{P}$ à $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F$ de cette représentation. La conjecture de Deligne-Carayol (3.2.4) est exprimée en termes de multiplicité (3.1) se calculant à partir d'un sous-groupe compact ouvert assez petit de $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times$.

La deuxième partie de nature globale est consacrée aux $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques de Drinfeld et Stuhler (4.1) ainsi qu'à leurs structures de niveaux. Leurs variétés de modules $\mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ définies dans un premier temps pour $o \notin V(I)$, sont munies de correspondances géométriques de Hecke (4.2). On calcule ensuite les déformations de $\mathcal{M}_{I,o}$ (5.1.4) et on montre que déformer un point géométrique de $\mathcal{M}_{I,o}$ est équivalent à déformer le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné qui lui est associé (5.3). En utilisant la théorie du module de coordonnée de Genestier (6.1) reliant certains $\mathcal{O}_o$-modules de Dieudonné aux $\mathcal{O}_o$-modules divisibles, on montre l'équivalent du théorème de Serre-Tate pour les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques (6.3). Via la notion de base de Drinfeld (7.1), les variétés $\mathcal{M}_{I,o}$ sont définies pour I arbitraire (7.2). On étend alors les correspondances de Hecke (7.3) et le théorème de Serre-Tate (7.4). On montre alors que le morphisme de restriction du niveau $r_{J,I} : \mathcal{M}_{J,o} \longrightarrow \mathcal{M}_{I,o}$ pour $J \subset I$ deux idéaux quelconques de A, est fini et plat (7.5).

La troisième partie concerne l'étude de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$. On applique une construction générale sur les φ-faisceaux (8) tout d'abord au φ-faisceau d'un $\mathcal{O}$-module divisible universel (9) puis au φ-faisceau associé à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique de $\mathcal{M}_{I,o}$. On définit ainsi une stratification de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$ par des sous-schémas localement fermés $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ ($1 \leq h \leq d$) (10.1) de telle sorte que l'anneau local de $\mathcal{M}_{I,o}$ en tout point géométrique de la h-ième strate est donné par Def_n^h. On s'intéresse dans un premier temps aux points géométriques de $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}$ dont on montre qu'il en existe par la théorie de la multiplication complexe, et on en donne une description adélique (10.2). L'étude, donnée par le théorème de Serre-Tate, de la situation locale en un tel point permet alors (10.3) de montrer que $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ est de pure dimension $d-h$ (résultat conjecturé par Rapoport).

Le théorème principal est prouvé par voie globale dans la quatrième partie. On rappelle tout d'abord la description en termes automorphes d'après

[17] de la cohomologie globale de la fibre générique de $\mathcal{M}_{I,o}$ (11.5). Dans le cas où la multiplicité de o dans I est non nulle, on montre que les strates $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ pour $1 \leq h \leq d-1$, sont induites sous l'action des correspondances de Hecke de $GL_d(F_o)$ (13.1) de sorte que la contribution cuspidale de ces strates à la suite spectrale des cycles évanescents est nulle. La contribution des points supersinguliers à cette suite spectrale est calculée grâce à un théorème de Berkovich via l'uniformisation du complété formel de $\mathcal{M}_{I,o}$ le long des points supersinguliers (14). La représentation locale fondamentale apparait alors comme «inclue» dans la cohomologie globale (15.3) et même égale en ce qui concerne les représentations cuspidales de $GL_d(F_o)$ (13.2), ce qui permet de prouver le théorème principal via une bonne globalisation des données (15.4).

Je remercie profondément Gérard Laumon tant pour son aide mathématique déterminante que pour ses constants encouragements. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Henri Carayol, Michael Harris et à Michael Rapoport pour leurs nombreuses remarques et corrections. Ma gratitude va aussi à Alain Genestier et Ioan Badulescu pour leurs enrichissantes discussions, ainsi qu'a Guy Henniart pour ses explications précises et précieuses.

Table des matières

I Enoncé de la conjecture de Deligne-Carayol

Soient F un corps local non archimédien, d'égale caractéristique p, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F, π une uniformisante et k le corps résiduel de cardinal q. Notons I_F le sous-groupe d'inertie de $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Le groupe de Weil W_F de F est défini par le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[d, "="] & W_F \arrow[r, "\deg"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & G_F \arrow[r] & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

la topologie de W_F étant telle que I_F, avec sa topologie de Krull, est un sous-groupe ouvert de W_F, et que W_F/I_F est isomorphe à $\mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète. *Dans toute la suite l désigne un nombre premier différent de p.*

1 Correspondances locales de Jacquet-Langlands et de Langlands

1.1 Correspondance de Jacquet-Langlands locale

Soit $D_{F,d}$ «l»'algèbre à division centrale sur F, d'invariant $1/d$. Soit $\mathcal{A}_{GL_d}$ (resp. $\mathcal{A}_H$) l'ensemble des classes d'équivalence des représentations complexes admissibles, irréductibles de $GL_d(F)$ (resp. de $D_{F,d}^\times$) de caractère central d'ordre fini. On note $\mathcal{A}_{GL_d}^0$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{GL_d}$ constitué des représentations cuspidales.

Soit π un élément de $\mathcal{A}_{GL_d}$. Pour tout élément f de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$, l'opérateur $\pi(f)$ est de rang fini et admet donc une trace $\Theta_\pi(f)$. Soit $GL_d(F)_{\mathrm{rss}}$ l'ouvert de $GL_d(F)$ formé des éléments réguliers semi-simples, i.e. des éléments dont le polynôme caractéristique est irréductible et à racines (dans une clôture algébrique de F) deux à deux distinctes. La restriction de la distribution invariante $f \mapsto \Theta_\pi(f)$ à cet ouvert est donnée par une fonction invariante localement constante que l'on notera encore Θ_π.

Soit ρ un élément de $\mathcal{A}_H$. L'espace sous-jacent à ρ est de dimension finie et pour tout élément δ de $D_{F,d}^\times$, on peut donc former la trace $\Theta_\rho(\delta)$ de $\rho(\delta)$.

On dira que $\delta \in D_{F,d}^\times$ correspond à un élément semi-simple γ de $GL_d(F)$ si le polynôme caractéristique réduit de δ coïncide au polynôme caractéristique de γ. Si γ est un élément semi-simple de $GL_d(F)$ qui correspond à $\delta \in D_{F,d}^\times$, il est alors automatiquement elliptique.

Par définition, on dit que ρ **correspond à π par la correspondance locale de Jacquet-Langlands** si pour tout élément δ de $D_{F,d}^\times$ et tout élément γ de $GL_d(F)_{\mathrm{rss}}$ correspondant à δ, on a

$$\Theta_\rho(\delta) = (-1)^{d-1}\Theta_\pi(\gamma).$$

Théorème 1.1.1. *(cf. [12] Appendice) Pour tout élément π de $\mathcal{A}_{GL_d}^0$, il existe un unique élément ρ de $\mathcal{A}_H$ qui corresponde à π au sens de la définition ci-dessus; on le notera $\mathfrak{J}_{F,d}(\pi)$.*

Remarque : Un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow \mathbb{C}$ étant fixé, on notera encore $\mathcal{A}^0_{GL_d}$ (resp. $\mathcal{A}_H$) les ensembles de représentations l-adique correspondant aux $\iota^{-1} \circ \pi \circ \iota$ (resp. $\iota^{-1} \circ \rho \circ \iota$) pour $\pi \in \mathcal{A}^0_{GL_d}$ (resp. $\rho \in \mathcal{A}_H$). On notera de même $\mathfrak{J}_{F,d}$ pour le composé $\iota^{-1} \circ \mathfrak{J}_{F,d} \circ \iota$.

Cette correspondance locale ne sera en fait qu'exploitée dans le contexte global de la proposition 15.4.

1.2 Correspondance de Langlands locale

(cf. [14]) Pour tout entier $d \geq 1$, on note $\mathcal{G}^0(d)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations complexes irréductibles de dimension d de W_F, de déterminant d'ordre fini.

Pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout élément $\pi \in \mathcal{A}_{GL_d}$, Godement et Jacquet définissent les facteurs $L(\pi)$ et $\varepsilon(\pi)$ (le facteur ε dépend du choix d'un caractère additif de F). Jacquet et Piatetski-Shapiro associent à toute paire $(\pi, \pi') \in \mathcal{A}_{GL_d} \times \mathcal{A}_{GL_{d'}}$, les facteurs $L(\pi, \pi')$ et $\varepsilon(\pi, \pi')$. De la même façon si σ est un élément de $\mathcal{G}^0(d)$ (resp. $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}^0(d) \times \mathcal{G}^0(d')$), on a des facteurs $L(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma)$ (resp. $L(\sigma, \sigma')$ et $\varepsilon(\sigma, \sigma')$).

Théorème 1.2.1. *(cf. [17] théorème (15.7)* ***correspondance de Langlands locale****) Il existe une unique suite d'applications bijectives $(\mathfrak{L}_{F,d})_d$ de $\mathcal{A}^0_{GL_d}$ dans $\mathcal{G}^0(d)$ telle que:*

- *pour tout $\pi \times \pi' \in \mathcal{A}^0_{GL_d} \times \mathcal{A}^0_{GL_{d'}}$, on a $L\left(\mathfrak{L}_{F,d}(\pi) \otimes \mathfrak{L}_{d',F}(\pi')\right) = L(\pi \otimes \pi')$;*
- *pour tout $\pi \in \mathcal{A}^0_{GL_d}$, on a $\mathfrak{L}_{F,d}(\check{\pi}) = \check{\mathfrak{L}}_{F,d}(\pi)$.*

Remarque : $\mathfrak{L}_{F,1}$ est induit par l'isomorphisme $W_F^{ab} \simeq F^\times$ de la théorie du corps de classe abélien.

Remarque : Pour toute représentation (σ, V) de $\mathcal{G}^0(d)$, par continuité et par le fait que le caractère central est d'ordre fini, σ se factorise par un quotient fini de sorte qu'un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow \mathbb{C}$ étant fixé, $\iota^{-1} \circ \sigma \circ \iota$ est une représentation l-adique, c'est-à-dire continue pour la toplologie l-adique sur $\iota^{-1}(V)$.

Le théorème ci-dessus est obtenu via l'étude de la cohomologie du schéma de module des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques (cf. le paragraphe 11). *La correspondance de Langlands locale ne sera utilisée dans ce texte, que sous la forme du théorème 11.5,* dû à Laumon, Rapoport et Stulher.

2 La représentation locale fondamentale

2.1 Les $\mathcal{O}$-modules formels et leurs déformations

On reprend les résultats de Drinfeld dans [7] §1 et §4. **Un groupe formel** (commutatif) sur un anneau R est par définition, une série formelle $f \in$

$R[[x,y]]$ telle que $f(x,y) = f(y,x)$, $f(x,0) = x$ et $f(x, f(y,z)) = f(f(x,y),z)$. Un homomorphisme d'un groupe formel f vers un groupe formel g, est une série formelle $\varphi \in R[[x]]$ telle que $\varphi(f(x,y)) = g(\varphi(x), \varphi(y))$. Si R est de caractéristique p, on note τ l'endomorphisme de Frobenius qui correspond à la série $\varphi(x) = x^p$. L'anneau des endomorphismes du groupe additif est alors l'anneau non commutatif $R\{\{\tau\}\}$ muni de la loi de commutation $\tau.r = r^p.\tau$, pour tout élément r de R. On note $D : \mathrm{End}\, f \to R$, l'homomorphisme canonique $\varphi \mapsto \varphi'(0)$.

Soient R une $\mathcal{O}$-algèbre et $\gamma : \mathcal{O} \to R$ l'homomorphisme structural. Un $\mathcal{O}$-**module formel** sur R est un couple (f, ψ) où f est un groupe formel sur R et ψ est un homomorphisme de $\mathcal{O}$ vers $\mathrm{End}\, f$, tel que $D \circ f = \gamma$. On notera ψ_a pour $\psi(a)$. Une **isogénie** du groupe formel (f, ψ) est un endomorphisme φ du groupe formel f qui vérifie $\psi_a(\varphi(x)) = \varphi(\psi_a(x))$, pour tout élément $a \in \mathcal{O}$.

Soient κ' un sur-corps de κ et (f, ψ) un $\mathcal{O}$-module formel sur κ'. Si φ est un endomorphisme non nul de (f, ψ), il existe un entier h et une série formelle Φ tels que $\varphi(x) = \Phi(x^{q^h})$. L'entier h est appelé **la hauteur** de φ. La hauteur d'un $\mathcal{O}$-module formel sur κ' est par définition la hauteur de l'endomorphisme ψ_π.

Proposition 2.1.1. *(cf. [7] §1) Il existe des $\mathcal{O}$-modules formels de hauteur arbitraire et tous les $\mathcal{O}$-modules formels de hauteur d sur une clôture séparable de κ sont isomorphes. L'anneau des endomorphismes d'un tel $\mathcal{O}$-module formel est isomorphe à l'anneau des entiers $\mathcal{D}_{F,d}$ d'une algèbre à division centrale $D_{F,d}$ sur F, d'invariant $1/d$.*

Un $\mathcal{O}$-module formel sur $\bar\kappa$ de hauteur d, est dit **normal** si l'action de la puissance d-ème du Frobenius de κ sur le groupe formel f est égale à l'action de π. Dans la suite, tous les $\mathcal{O}$-modules formels considérés seront normaux (sur $\bar\kappa$).

Une **structure de niveau** n au sens de Drinfeld, sur un $\mathcal{O}$-module formel (f, ψ) sur R, est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$\iota_n : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d \longrightarrow R$$

où R est muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module via la formule $a.r = \psi_a(r)$ pour tout $a \in \mathcal{O}$ et tout $r \in R$, tel que $\psi_\pi(x)$ est divisible par $\prod_{\alpha \in (\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d}(x - \iota_n(\alpha))$.

Soit $\mathcal{O}^{nr}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathcal{O}$ et $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$ sa complétion. On considère la catégorie C dont les objets sont les $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbres locales complètes noethériennes, de corps résiduel isomorphe à $\bar\kappa = \hat{\mathcal{O}}^{nr}/(\pi)$. Les morphismes de C sont les homomorphismes locaux de $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbres. Soient $(\bar f, \bar\psi)$ un $\mathcal{O}$-module formel sur $\bar\kappa$, de hauteur d, normal et R un objet de C.

Une **déformation** de $(\bar f, \bar\psi)$ définie sur R est un $\mathcal{O}$-module formel (f, ψ) sur R tel que sa réduction modulo l'idéal maximal de R est $(\bar f, \bar\psi)$. Des déformations (f_1, ψ_1) et (f_2, ψ_2) de $(\bar f, \bar\psi)$ définies sur R sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux $\mathcal{O}$-modules formels sur R, induisant l'identité sur $(\bar{f}, \bar{\psi})$.

Proposition 2.1.2. *(cf. [7] §4) Le foncteur de la catégorie C dans la catégorie des ensembles qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations sur R de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, à isomorphisme près, est représenté par une $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre Def_0^d isomorphe à l'algèbre des séries formelles $\hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t_1, \cdots, t_{d-1}]]$.*

Une déformation de niveau n de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, définie sur un objet R de C, est par définition une déformation (f, ψ) définie sur R et munie d'une structure de niveau n. En particulier ι_n est à valeurs dans $\mathfrak{m}$.

Proposition 2.1.3. *Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations de niveau n sur R de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, à isomorphisme près, est représenté par une $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre Def_n^d telle que:*

- Def_n^d *est régulier,*
- *pour $m \leq n$, le morphisme de restriction du niveau $\mathrm{Def}_m^d \to \mathrm{Def}_n^d$ est un revêtement fini, plat, galoisien de groupe de Galois $GL_d(\mathcal{O}/(\pi^n))$.*

Remarque : L'action de $GL_d(\mathcal{O})$ sur Def_m^d est donnée sur la structure de niveau n par son action à droite sur $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d$. De même le groupe des automorphismes $\mathcal{D}_{F,d}^\times$ de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ agit naturellement sur Def_m^d. Les actions de $GL_d(\mathcal{O})$ et de $\mathcal{D}_{F,d}^\times$ sur Def_n^d, commutent et sont compatibles aux morphismes de restriction du niveau $\mathrm{Def}_m^d \longrightarrow \mathrm{Def}_n^d$ ($m \leq n$). On remarque alors que l'action d'un élément $(z, z) \in GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times$, pour $z \in \mathcal{O}^\times$ vu comme un élément du centre de $GL_d(\mathcal{O})$ et de $\mathcal{D}_{F,d}^\times$, est triviale.

2.2 Cohomologie évanescente

Pour chaque entier $n \geq 0$, $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^d)$ est un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$ qui est spécial au sens de [1]. Fixons une clôture séparable $\overline{\hat{F}^{\mathrm{nr}}}$ de $\hat{F}^{\mathrm{nr}}$. Dans loc. cit. Berkovich construit le foncteur Ψ_η des cycles évanescents pour le morphisme structural $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \longrightarrow \mathrm{Def}_n^d$, ainsi que ses foncteurs dérivés. Le faisceau $R^i\Psi_\eta(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ sur la fibre spéciale de $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^d)$ (réduite à un point) est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action de W_F, que l'on notera $\Psi_n^{d,i}$. Suivant les notations de l'introduction, le groupe en degré maximal $\Psi_n^{d,d-1}$ sera noté $\Psi_{d,n}$. On rappelle que $\mathrm{Gal}(\overline{\hat{F}^{\mathrm{nr}}}/\hat{F}^{\mathrm{nr}})$ est isomorphe à $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{\mathrm{nr}})$. En particulier $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{\mathrm{nr}})$ agit naturellement sur le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie $\Psi_n^{d,i}$. De plus, les actions géométriques de $\mathcal{D}_{F,d}^\times$ et $GL_d(\mathcal{O})$ sur Def_n^d induisent une action de $GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times$ sur $\Psi_n^{d,i}$ qui commute à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{\mathrm{nr}})$.

On fixe un caractère d'ordre fini ξ de $F^\times$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. On note $\Psi_n^{d,i}(\xi')$ la composante ξ'-isotypique de $\Psi_n^{d,i}$ où ξ' est la restriction de ξ à $\mathcal{O}^\times$ et $\mathcal{O}^\times$ est identifié au centre de $GL_d(\mathcal{O})$. Un élément z de $\mathcal{O}^\times$, vu comme élément du centre $\mathcal{O}^\times \subset \mathcal{D}_{F,d}^\times$, agit alors sur $\Psi_n^{d,i}(\xi')$ via le scalaire $\xi'(z)^{-1}$. On pose $\Psi^{d,i}(\xi') = \varinjlim_n \Psi_n^{d,i}(\xi')$, où les flêches de transition sont induites par les morphismes de restriction du niveau $\mathrm{Def}_m^d \longrightarrow \mathrm{Def}_n^d$ ($m \leq n$). Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\Psi^{d,i}(\xi')$ est muni d'une action du groupe produit $GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{nr})$ et pour tout entier n, on a un isomorphisme $(GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{nr}))$-équivariant $\big(\Psi^{d,i}(\xi')\big)^{K_{d,n}} \simeq \Psi_n^{d,i}(\xi')$, où $K_{d,n} := \mathrm{Ker}\,(GL_d(\mathcal{O}) \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}/(\pi^n)))$.

2.3 Correspondances de Hecke

On fixe un élément τ de W_F dont l'image dans $F^\times$ est l'uniformisante π. Soit $\mathfrak{P}$ le noyau de l'application

$$\begin{aligned} GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F &\longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ (g,\delta,w) &\longmapsto -\mathrm{val}(\det g) + \mathrm{val}(\mathrm{rn}(\delta)) + \deg(w) \\ &\qquad\qquad \text{modulo } d\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

où $\mathrm{rn} : D_{F,d}^\times \to F^\times$ désigne la norme réduite. Le sous-groupe $\mathfrak{P}$ contient $GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{nr})$. Suivant Deligne et Carayol, on cherche à prolonger l'action de $GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^\times \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{nr})$ sur $\Psi^{d,i}(\xi')$, au sous-groupe $\mathfrak{P}$. On commence par donner les actions d'éléments particuliers qui forment un système générateur de $\mathfrak{P}$.

(i) Aux éléments du type $(z_1, z_2, 1)$ pour $z_1, z_2 \in F^\times$, où l'on identifie $F^\times$ respectivement au centre de $GL_d(F)$ et de $D_{F,d}^\times$, on associe l'endomorphisme $\xi(z_1 z_2^{-1})\,\mathrm{Id}$ de $\Psi^{d,i}(\xi')$.

Proposition 2.3.1. *(cf. [7] §4) Soit R une $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbre locale complète de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$. Soit (f,ψ) un $\mathcal{O}$-module formel défini sur R et muni d'une structure de niveau n, ι_n. Soit $P \subset (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d$ un sous-module. On définit $\alpha(X) := \prod_{p\in P} f(X, \iota_n(p))$. Il existe alors un unique $\mathcal{O}$-module formel (f_P, ψ_P) défini sur R tel que*

$$\alpha \circ f(X,Y) = f_P(\alpha(X), \alpha(Y)) \text{ et } \forall a \in \mathcal{O},\ \alpha \circ \psi_a(X) = \psi_{P,a}(\alpha(X)).$$

Si m est tel que le morphisme naturel $\theta : (\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d \longrightarrow (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d/P$ est injectif, alors l'homomorphisme $\iota_n \circ \theta$ de $(\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d$ dans l'idéal maximal de R est une structure de niveau m sur f_P que l'on note $\iota_{P,m}$.

Soit g un élément de $M_d(\mathcal{O})$ de déterminant non nul. Pour tout $m \geq 0$, soit n tel que le noyau de l'application $\times g : (F/\mathcal{O})^d \longrightarrow (F/\mathcal{O})^d$ est contenu dans $(\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d$ et tel que l'image de $(\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d$ par $\times g$ contienne $(\pi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d$. On note $((f, \psi), \iota_n)$ la déformation universelle de niveau n de $(\bar{f}, \bar{\psi})$ et soit $(f_{\mathrm{Ker}\, g}, \psi_{\mathrm{Ker}\, g})$ le $\mathcal{O}$-module formel de la proposition ci-dessus, associé à $\mathrm{Ker}\, g$, muni de sa structure de niveau m, $\iota_{\mathrm{Ker}\, g,m}$

(ii) Soient $g \in M_d(\mathcal{O}) \cap GL_d(F)$ et $\delta \in D_{F,d}^{\times}$ tels que $\mathrm{val}(\det g) = \mathrm{val}(\mathrm{rn}(\delta))$. A l'élément $(g^{-1}, \delta^{-1}, 1)$ est associé une correspondance de Hecke comme suit. La quasi-isogénie $(\bar{f}, \bar{\psi}) \xrightarrow{\delta^{-1}} (\bar{f}, \bar{\psi}) \longrightarrow (\bar{f}_{\mathrm{Ker}\, g}, \bar{\psi}_{\mathrm{Ker}\, g})$ est un isomorphisme. En considérant $(f_{\mathrm{Ker}\, g}, \psi_{\mathrm{Ker}\, g}, \iota_{\mathrm{Ker}\, g,m})$ comme une déformation de niveau m de $(\bar{f}, \bar{\psi})$, définie sur Def_n^d, on obtient alors un morphisme $c_2 : \mathrm{Def}_m^d \longrightarrow \mathrm{Def}_n^d$. La correspondance

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Def}_n^d & \\
\mathrm{Def}_m^d \arrow[ur, "c_1"] & & \mathrm{Def}_m^d \arrow[ul, "c_2"'] \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

où c_1 est le morphisme de restriction du niveau, définit, pour tout i, un endomorphisme du $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\Psi_m^{d,i}(\xi')$ et donc un endomorphisme de $\Psi^{d,i}(\xi')$.

(iii) Soit $g \in M_d(\mathcal{O}) \cap GL_d(F)$ et $r = \mathrm{val}(\det g)$. A l'élément $(g^{-1}, 1, \tau^{-r})$ est associé une correspondance de Hecke comme suit. La quasi-isogénie $(\bar{f}, \bar{\psi})^{\tau^r} \xrightarrow{\tau^{-r}} (\bar{f}, \bar{\psi}) \longrightarrow (\bar{f}_{\mathrm{Ker}\, g}, \bar{\psi}_{\mathrm{Ker}\, g})$ est un isomorphisme. On obtient alors un morphisme $c_2' : \mathrm{Def}_m^d \longrightarrow \mathrm{Def}_n^{d,(r)}$, où $\mathrm{Def}_m^{d,(r)}$ est la $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre associée aux déformations de $(\bar{f}, \bar{\psi})^{\tau^r}$, c'est-à-dire le produit tensoriel $\mathrm{Def}_m^d \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}},\alpha} \hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ où α est la puissance r-ième de l'inverse du relèvement canonique $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ du Frobenius de κ. La correspondance

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Def}_n^d & & \\
\mathrm{Def}_m^d \arrow[ur, "c_1"] & & \mathrm{Def}_m^{d,(r)} \arrow[ul, "c_2'"] & \mathrm{Def}_m^d \arrow[ull, "c_2"'] \arrow[l, "\sim"'] \arrow[lll, dashed, bend left]
\end{tikzcd}$$

où c_1 est le morphisme de restriction du niveau, définit, pour tout i, un endomorphisme de $\Psi^{d,i}(\xi')$.

Proposition 2.3.2. *(Deligne, Carayol) Il existe une unique action de $\mathfrak{P}$ sur $\Psi^{d,i}(\xi')$ qui prolonge l'action de $GL_d(\mathcal{O}) \times \mathcal{D}_{F,d}^{\times} \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{nr})$, de (i), (ii) et (iii).*

Preuve : Les éléments de la forme (i), (ii) et (iii) formant un système générateur de $\mathfrak{P}$, une telle action si elle existe est forcément unique. La vérification des compatibilités est laissée au lecteur. Remarquons simplement que le $\mathcal{O}$-module formel $(\bar{f}, \bar{\psi})$ défini sur $\bar{\kappa}$ (dont Def_n^d représente les déformations) étant choisi normal, l'action de la puissance d-ième du Frobenius de κ sur $\bar{f}$ est égale à $\bar{\psi}_\pi$. L'action de $(\pi^{-1}, 1, \tau^{-d})$ sur Def_n^d est alors triviale. $\square$

Les groupes $GL_d(F) \times \{1\} \times \{1\}$ et $\{1\} \times D_{F,d}^\times \times \{1\}$ sont contenus dans $\mathfrak{P}$. Un élément z du centre $F^\times$ de $GL_d(F)$ (resp. de $D_{F,d}^\times$) agit sur $\Psi^{d,i}(\xi')$ par le scalaire $\xi(z)$ (resp. $\xi^{-1}(z)$). L'espace $\Psi^{d,i}(\xi')$ ainsi muni de l'action de $\mathfrak{P}$ sera noté $\Psi^{d,i}(\xi)$.

2.4 La représentation locale fondamentale

Le quotient $(GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F)/\mathfrak{P}$ étant fini, on pose pour tout entier i,

$$\mathcal{U}^{d,i}(\xi) \coloneqq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{P}}^{GL_d(F)\times D_{F,d}^\times \times W_F} \Psi^{d,i}(\xi).$$

Définition 2.4.1. *La représentation $\mathcal{U}^{d,d-1}(\xi)$ est appelée la représentation locale fondamentale associée au caractère d'ordre fini ξ; on la notera $\mathcal{U}_d(\xi)$.*

3 Enoncé du théorème principal

3.1 Notion de multiplicité

Soit G le groupe $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times$. On fixe une mesure de Haar rationnelle sur G et on note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke de G. Pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, on note $\mathcal{H}_K$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}$, formée des fonctions invariantes à droite et à gauche par K. Soit $e_K = \mathrm{vol}(K)^{-1}.1_K$, où 1_K est la fonction caractéristique de K.

Définition 3.1.1. *On appellera représentation admissible de $G \times W_F$ tout $(\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{H})$-module M muni d'une action de W_F, tel qu'il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ pour laquelle M, muni de l'action de W_F, est l'image, par le foncteur d'extension des scalaires de E à $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'un $(E \otimes \mathcal{H})$-module M_E vérifiant les propriétés suivantes:*

(i) M_E est un $(E \otimes \mathcal{H})$-module non dégénéré, c'est-à-dire que pour tout $m \in M_E$, il existe un élément $a \in E \otimes \mathcal{H}$ tel que $a.m = m$;

(ii) pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, $e_K.M_E$ est de dimension finie (M_E est admissible) et l'action de W_F y est continue.

Soit $C_{GL,H,W}$ la sous-catégorie pleine de celle des $\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes \mathcal{H}$-modules munis d'une action de W_F, dont les objets sont les représentations admissibles de $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F$. On introduit de même pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, la catégorie $C_{GL,H,W}^K$ en remplaçant $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H}_K$ dans la définition de $C_{GL,H,W}$.

Lemme 3.1.2. *Soient M et I des objets de la catégorie abélienne $C_{GL,H,W}$ avec I irréductible. Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G tel que $e_K.I$ est non nul, $e_K.I$ est un objet irréductible de $C_{GL,H,W}^K$. La multiplicité de $e_K.I$ dans $e_K.M$ est alors un entier indépendant de K, appelé la multiplicité de I dans M et noté $\lambda_I(M)$.*

Preuve : Soit J_K un sous-objet de $e_K.I$. Le module $J := \mathcal{H}.J_K$ est alors un sous-objet de I tel que $e_k.J = J_K$. D'après l'irréductibilité de I, J est soit nul soit égal à I, d'où $J_K = 0$ ou $J_K = e_K.I$. Les objets de $C_{GL,H,W}^K$ étant de dimension finie, la notion de multiplicité y a un sens. L'indépendance par rapport à K découle alors de l'exactitude du foncteur $C_{GL,H,W}^K \longrightarrow C_{GL,H,W}^{K'}$, $M_K \longmapsto e'_K.M_K$. □

Proposition 3.1.3. *Les objets irréductibles Π de $C_{GL,H,W}$ sont exactement les produits tensoriels $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$, où π (resp. ρ) est une représentation admissible irréductible de $GL_d(F)$ (resp. de $D_{F,d}^\times$) définie sur E et σ est une représentation l-adique de W_F, irréductible et définie sur E, où E est une extension finie (qui dépend de Π) de $\mathbb{Q}_l$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$.*

Preuve : Par admissibilité on est ramené en dimension finie où le résultat est connu (cf. Bourbaki *Eléments de mathématiques*). □

3.2 La conjecture de Deligne-Carayol en termes de multiplicités

Proposition 3.2.1. *Pour tout i, les représentations $\mathcal{U}^{d,i}(\xi)$ sont admissibles au sens de la définition 3.1.1 et constituent donc des objets de la catégorie $C_{GL,H,W}$.*

Preuve : Montrons la lissité de l'action de $D_{F,h}^\times$. Soit $v \in \mathcal{U}^{d,i}(\xi)$. Il existe un entier n assez grand tel que v appartienne à $(\mathcal{U}^{d,i}(\xi))^{K_{d,n}}$. On se ramène facilement au cas où v appartient à $\Psi_n^{d,i}$. On note H le groupe des automorphismes de la $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$-algèbre locale Def_n^d et pour tout entier m positif, H_m le sous-groupe de H constitué des automorphismes tangents à l'identité à l'ordre m. La lissité de l'action de $D_{F,h}^\times$ découle des deux résultats suivants.

Théorème 3.2.2. *(**Berkovich**) Il existe un entier m pour lequel tout élément de H_m agit trivialement sur $\Psi_n^{d,i}$.*

Une preuve d'après Berkovich de ce théorème est donnée à la fin du paragraphe 12. L'action de $D_{F,d}^\times$ sur Def_n^d fournit un morphisme de groupe $\rho : \mathcal{D}_{F,d}^\times \longrightarrow H$.

Lemme 3.2.3. *Pour tout entier m, $\rho^{-1}(H_m)$ est ouvert dans $\mathcal{D}_{F,d}^\times$.*

Preuve : La preuve est essentiellement donnée dans l'appendice de [3] (proposition 1). On en reprend brièvement les arguments. Comme $(H_m, H_{m'})$

est inclu dans $H_{m+m'}$, on se ramème à montrer que $\rho^{-1}(H_1)$ est ouvert dans $\mathcal{D}_{F,d}^\times$. On note K_1 le sous-groupe de $\mathcal{D}_{F,d}^\times$ formé des éléments congrus à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathcal{D}_{F,d}$: K_1 est un pro-p-groupe. L'image du morphisme composé $K_1 \xrightarrow[\rho]{} H \longrightarrow H/H_1$ (composé noté $\bar{\rho}$) est un p-groupe Λ (cf. loc. cit. lemme 5). Soient Λ^m les sous-groupes de Λ définis comme suit: $\Lambda^0 = \Lambda$, $\Lambda^m = (\Lambda^{m-1}, \Lambda^{m-1})$. Comme Λ est un p-groupe, Λ^k est trivial pour k assez grand. Par récurrence sur m, on voit que Λ^m est ouvert dans K_1 et donc que $\rho^{-1}(H_1) \cap K_1$ est ouvert dans K_1. □

La lissité de l'action de $GL_d(F)$ est évidente et l'admissibilité de l'action de $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times$ résulte du fait que $\Psi_n^{d,i}$ est de dimension finie. □

Théorème 3.2.4. *Soient ξ un caractère d'ordre fini de $F^\times$, π une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_d(F)$ de caractère central ξ, ρ une représentation irréductible admissible de $D_{F,d}^\times$ et σ une représentation irréductible l-adique de W_F. Alors la multiplicité $\lambda_{\pi\otimes\rho\otimes\sigma}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi))$ de la représentation irréductible $\pi \otimes \rho \otimes \sigma$ de $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F$ dans la représentation $\mathcal{U}^{d,i}(\xi)$, est non nulle si et seulement si $i = d-1$ et (ρ, σ) appartient à $\mathcal{A}_{H_d} \times \mathcal{G}^0(d)$ et est isomorphe au couple $(\mathfrak{J}_{F,d}(\check{\pi}), \mathfrak{L}_{F,d}(\pi) \otimes |-|^{\frac{1-d}{2}})$, où $\check{\pi}$ est la représentation contragrédiente de π. Dans ce cas, cette multiplicité est égale à* 1.

Remarque : D'après la définition de l'action de $GL_d(F) \times D_{F,d}^\times \times W_F$ sur $\mathcal{U}^{d,i}(\xi)$, si $\lambda_{\pi\otimes\rho\otimes\sigma}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi))$ est non nulle pour un triplet (π, ρ, σ) comme dans la théorème alors le caractère central de π (resp. de ρ) est ξ (resp. ξ^{-1}).

II Rappels et compléments sur les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques

Soient X une courbe projective, irréductible, lisse et géométriquement connexe, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et F son corps des fonctions. On fixe *deux places* ∞, *o de F* que l'on supposera, pour simplifier, *rationnelles sur le corps des constantes* $\mathbb{F}_q$ *de X*. Le complété F_o de F en o jouera le rôle du corps local de la première partie. Tous les schémas considérés sont des schémas sur $\mathbb{F}_q$. Si Y, Z sont de tels schémas, $Y \times Z$ désignera leur produit sur $\mathbb{F}_q$.

Fixons une algèbre à division centrale D sur F de dimension finie d^2, ramifiée seulement en deux places x_1 et x_2 distinctes des places ∞, o, telle que D_{x_i} $(i = 1, 2)$ est une algèbre à division, et $\mathcal{D}$ un faisceau d'ordres maximaux de D. On pose $X' = X \backslash \{\infty, x_1, x_2\}$ et on note $A = \Gamma(X \backslash \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$.

4 Rappels sur les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques

4.1 $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques et structures de niveau en dehors de la caractéristique

Un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ sur un schéma S est d'après [17] un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j_i"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook] & {}^{\tau}\mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "{}^{\tau}j_i"] \arrow[ur, hook, "t_i"] & {}^{\tau}\mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où:

- $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{D}_{X\times S}$-module à droite localement libre de rang 1, et donc un $\mathcal{O}_{X\times S}$-module localement libre de rang d^2;
- ${}^{\tau}\mathcal{E}_i$ est égal à $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E}_i$;
- j_i et t_i sont des injections $\mathcal{D}_{X\times S}$-linéaires;
- $\mathcal{E}_{i+d} \simeq \mathcal{E}_i(\infty) := \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\infty)$ et le composé $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i+1} \to \cdots \to \mathcal{E}_{i+d}$ est induit par l'injection canonique $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\infty)$;
- $(pr_S)_*(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang d où $pr_S : X\times S \to S$ est la projection canonique. De manière équivalente, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est isomorphe à l'image directe $(\widetilde{i_\infty})_*(\Gamma_{\infty,i})$ d'un $\mathcal{O}_S$-module $\Gamma_{\infty,i}$ localement libre de rang d, par la section ∞: $(\widetilde{i_\infty}) : S \longrightarrow X \times S \quad s \longmapsto (\infty, s)$;
- l'image directe de $\mathrm{Coker}\, t_i$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang d. Le support de $\mathrm{Coker}\, t_i$ est disjoint de $\{\infty, x_1, x_2\} \times S$. De manière équivalente, $\mathrm{Coker}\, t_i$ est isomorphe à l'image directe $(\widetilde{i_{0,i}})_*(\Gamma_{0,i})$ d'un $\mathcal{O}_S$-module $\Gamma_{0,i}$ localement libre de rang d, par la section $(\widetilde{i_{0,i}}) : S \xrightarrow{(i_{0,i}, id_S)} X \times S$ induite par un morphisme $i_{0,i} : S \to X$ tel que $i_{0,i}(S) \subset |X'|$.

Remarque : Les inclusions $\mathcal{E}_i \hookrightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ étant des isomorphismes sur $(X\backslash\{\infty\}) \times S$ et le support de $\mathrm{Coker}\, t_i$ étant disjoint de $\infty \times S$, on en déduit que la donnée des morphismes $(t_i)_i$ est équivalente à la donnée d'un seul t_i. Les morphismes $i_{0,i}$ sont indépendants de i; on le note i_0, le morphisme caractéristique du $\mathcal{D}$-faisceau elliptique.

Soient $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur S et I un idéal de A tel que $V(I) \cap i_0(S) = \emptyset$. *Une I-structure de niveau* sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{I\times S}$-modules à droite, $\tilde{\iota}_I : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{I\times S}$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}^{\tau}\mathcal{E}_{|I\times S} \arrow[rr, "t_{|I\times S}"] & & \mathcal{E}_{|I\times S} \\
& \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \arrow[ul, "{}^{\tau}\tilde{\iota}_I"] \arrow[ur, "\tilde{\iota}_I"'] &
\end{tikzcd}$$

4.2 Variétés de modules et correspondances de Hecke

On note $\mathfrak{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ la catégorie fibrée sur la catégorie des $\mathbb{F}_q$-schémas, dont les objets sont les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques munis d'une I-structure de niveau. Les morphismes de $\mathfrak{E}ll_{X,\mathcal{D},I}(S)$ sont les isomorphismes entre deux tels objets. Le morphisme caractéristique définit le morphisme *zéro* de catégorie fibrée: $\mathfrak{E}ll_{X,\mathcal{D},I} \longrightarrow X'\backslash V(I)$. Laumon Rapoport et Stuhler montrent (cf. [17] §4) que $\mathfrak{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ *est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford, lisse de dimension relative* $d-1$ *sur* $X'\backslash V(I)$ que l'on note $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ et qui est un schéma dès que I est différent de A. Le morphisme de restriction du niveau $r_{J,I} : \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J} \longrightarrow \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$, pour $J \subset I$ deux idéaux de A, est fini et étale au dessus de $X'\backslash V(J)$. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ par $[n](\mathcal{E}_i, j_i, t_i) = (\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ avec $\mathcal{E}'_i = \mathcal{E}_{i+n}$, $j'_i = j_{i+n}$, $t'_i = t_{i+n}$.

Proposition 4.2.1. *(cf. [17] §6) Le morphisme* $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \longrightarrow X'\backslash V(I)$ *est propre.*

Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $D^\times_{\mathbb{A}} := D^\times \otimes_F \mathbb{A}$. La fibre générique de la limite projective $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}} := \varprojlim_I \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$ est munie d'une action de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$. A niveau fini, pour $K^\infty_{\mathbb{A}}$ un sous-groupe compact ouvert de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$, l'action d'un élément g^∞ de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$ se décrit par la correspondance géométrique

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/(K^\infty_{\mathbb{A}} \cap (g^\infty)^{-1}K^\infty_{\mathbb{A}} g^\infty) \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\
\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/K^\infty_{\mathbb{A}} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/K^\infty_{\mathbb{A}} \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Spec}(F) &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme c_1 (resp c_2) est induit par l'inclusion $(K^\infty_{\mathbb{A}} \cap (g^\infty)^{-1}K^\infty_{\mathbb{A}} g^\infty) \subset K^\infty_{\mathbb{A}}$ (resp $(K^\infty_{\mathbb{A}} \cap (g^\infty)^{-1}K^\infty_{\mathbb{A}} g^\infty) \xrightarrow{Ad(g^\infty)} K^\infty_{\mathbb{A}}$) (cf. [17] §7). En particulier on note $K^\infty_{\mathbb{A},I}$ le noyau de $(\mathcal{D}^\infty_{\mathbb{A}})^\times \longrightarrow \prod_{x\neq\infty} \mathcal{D}^\times_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x/\mathcal{M}_x^{n_x}$, où n_x est la multiplicité de x dans I. On a $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D}}/K^\infty_{\mathbb{A},I} = \mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}$.

Dans la suite, on considère *la restriction* $\mathcal{M}_{I,o}$ *de* $(\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z})$ *à* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ de sorte que pour tout idéal I de A tel que $o \notin V(I)$, $\mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ est propre et lisse de dimension relative $d-1$. La limite projective sur tous les idéaux I de A des $\mathcal{M}_{I,o} \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o$ est alors munie d'une action de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$ définie via les correspondances de Hecke.

5 Déformations des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques et de leurs $\mathcal{O}_o$-modules de Dieudonné

5.1 Déformation des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques

Soient S le spectre d'un anneau local R artinien et $\bar{S} = \operatorname{Spec} \bar{R}$ avec $\bar{R}$ le quotient de R par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. Soit $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur $\bar{S}$, de caractéristique $\bar{i}_0 : \bar{S} \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_o)$; R est donc une $\mathcal{O}_o$-algèbre telle que l'image de π_o est nilpotente. On note $\bar{\bar{i}}_o$ le morphisme $\bar{S} \xrightarrow{(\bar{i}_o, id)} X \times \bar{S}$. On a alors la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow {}^{\tau}\bar{\mathcal{E}}_0 \xrightarrow{\bar{t}_0} \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\bar{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \longrightarrow 0 \qquad (5.1.1)$$

où $\bar{\Gamma}_o$ est un $\bar{R}$-module libre de rang d. On cherche à relever $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ en un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ défini sur S. On montrera en fait que ce problème revient à relever la suite exacte (5.1.1).

Proposition 5.1.2. *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}}$-module à droite localement libre de rang* 1*, $\mathcal{E}_i$. L'ensemble des relèvements est un torseur sous* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$.

Preuve : D'après les résultats de [15], l'obstruction à relever le $\mathcal{D}_{X\times\bar{S}}$-module à droite localement libre de rang 1, $\mathcal{E}_i$, se trouve dans le groupe $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. Lorsque cette obstruction est nulle, l'ensemble des relèvements est alors un torseur sous le groupe $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. La proposition découle alors du lemme suivant. □

Lemme 5.1.3. *Le groupe* $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ *est trivial.*

Preuve : Le $(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{S}})$-module $\bar{\mathcal{E}}_i$ étant localement libre, les $\underline{Ext}^n_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{\mathcal{E}}_i \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ sont nuls pour $n \geq 1$. Le schéma $X \times \bar{S}$ étant de dimension 1, la suite spectrale locale-globale pour les Ext^n, donne la nullité de $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$. □

Proposition 5.1.4. *Il n'y a pas d'obstruction à relever le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ ci-dessus, en un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ defini sur* $\operatorname{Spec} R$*. L'ensemble des relèvements est un torseur sous le groupe* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o} \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$*, lequel, après équivalence de Morita, est isomorphe à* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_o\otimes\bar{R}}(\bar{R}, (\mathcal{O}_o \otimes \bar{R})^d \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$.

Preuve : (i) Comme $\mathfrak{m}^2=(0)$, l'image d'un élément r de R par le morphisme Frobenius ne dépend que de sa classe modulo $\mathfrak{m}$. En d'autres termes, le morphisme $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ se factorise par $\bar{S}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mathrm{Frob}_S"] \arrow[dr, "\mathrm{Frob}_{S,\bar{S}}"'] & S \\ & \bar{S} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Ainsi pour tout i, les ${}^\tau\mathcal{E}_i$ d'un éventuel relèvement $\mathcal{E}_i$ de $\bar{\mathcal{E}}_i$, sont donnés par les faisceaux $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_{S,\bar{S}})^*(\bar{\mathcal{E}}_i)$ et de même ${}^\tau j_i = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_{S,\bar{S}})^*(j_i)$.

(ii) Considérons la suite exacte longue associée au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bullet, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$ et à la suite exacte courte $0 \longrightarrow {}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \longrightarrow 0$;

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \to \\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big) \to \\ &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \to \\ &\to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big). \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & {}^\tau\mathcal{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & {}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] & \bar{\mathcal{E}}_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est qu'il existe une extension $\mathcal{E}_1$ de $\bar{\mathcal{E}}_1$ par $\bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}$ telle que l'extension $\mathcal{E}_1 * f_0$ de ${}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0$ par $\bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}$ est égale à $f_1 * {}^\tau\mathcal{E}_0$. L'obstruction à cette existence est liée à la non surjectivité de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})$$

et se situe donc dans le groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big)$. Le même argument que celui de la preuve du lemme 5.1.3 donne la nullité de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big)$ et montre que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big)$ est isomorphe à $H^0\Big(X \times \bar{S}, \underline{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big)\Big)$. Le faisceau

$(\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o)$ étant concentré au point o, on en déduit que ce dernier est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o}\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m})$.

(iii) On a donc construit $\mathcal{E}_1$ ainsi que l'application $t_0 : {}^\tau\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ qui relève l'application $\bar{t}_0$. En outre pour tout i, on connait les $\mathcal{D}_{X\times S}$-modules ${}^\tau\mathcal{E}_i$ et les applications ${}^\tau j_i$. Les places o et ∞ étant distinctes, il existe alors un unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j_i"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook] & {}^\tau\mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "{}^\tau j_i"] \arrow[ur, hook, "t_i"] & {}^\tau\mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui contienne la ligne $\cdots {}^\tau\mathcal{E}_i \xrightarrow{{}^\tau j_i} {}^\tau\mathcal{E}_{i+1} \cdots$ ainsi que la diagonale ${}^\tau\mathcal{E}_0 \xrightarrow{t_0} \mathcal{E}_1$. Clairement pour tout i, $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{D}_{X\times S}$-module à droite localement libre de rang 1 et j_i, t_i sont des injections $\mathcal{D}_{X\times S}$-linéaires. La condition de périodicité $\mathcal{E}_{i+d} \simeq \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\infty)$ découle de la périodicité des ${}^\tau\mathcal{E}_i$. Pour tout i, on a une suite exacte courte $0 \to {}^\tau\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i+1} \to \mathcal{F}_i \to 0$ et d'après le lemme de Nakayama, $(pr_S)_*(\mathcal{F}_i)$ est un R-module libre de rang d, soit $\mathcal{F}_i = (\tilde{i}_o)_*(\Gamma_{o,i})$ où $\Gamma_{o,i}$ est un R-module libre de rang d. De la même façon on a pour tout i, une suite exacte courte $0 \to \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i+1} \to \mathcal{G}_i \to 0$ où $(pr_S)_*(\mathcal{G}_i)$ est un R-module libre de rang d, soit $\mathcal{G}_i = (\tilde{i}_\infty)_*(\Gamma_{\infty,i})$, où $\Gamma_{\infty,i}$ est un R-module libre de rang d. Finalement, le diagramme $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique qui est une déformation de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$.

(iv) Calculons l'espace des relèvements. Tout d'abord l'ensemble des classes d'isomorphie des extensions $\mathcal{E}_1$ telles que $\mathcal{E}_1 * f_0 = f_1 * {}^\tau\mathcal{E}_0$ est un torseur sous

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\left((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m}\right) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m})\right).$$

L'extension $\mathcal{E}_1$ étant fixé, l'ensemble des classes d'isomorphie des $t_0 : {}^\tau\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ est

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m}) / \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\mathcal{E}}_1, \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m})\right).$$

Cet ensemble est isomorphe à $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}({}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m})\right)$. Ainsi l'ensemble des relèvements du $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\left((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m}\right)$, qui d'après ce qui précède est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_o\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{\Gamma}_o, \bar{\mathcal{E}}_{1,o}\otimes_{\bar{R}}\mathfrak{m})$. $\square$

Corollaire 5.1.5. *L'application tangente au morphisme $\mathcal{M}_{A,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ en un point fermé de sa fibre spéciale est donnée par le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o),\, \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o),\, (\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big). \tag{5.1.6}$$

Ce morphisme est surjectif et $\mathcal{M}_{A,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ est lisse de dimension relative $d-1$. L'anneau local de $\mathcal{M}_{A,o}$ en un point géométrique de la fibre spéciale est alors isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}[[t_2,\cdots,t_d]] \simeq \bar{\kappa}(o)[[t_1,\cdots,t_d]]$, où t_1 est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$.

Preuve : En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\otimes\bar{R}}\Big((\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bullet\Big)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}^{\tau}\bar{\mathcal{E}}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow (\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m} \longrightarrow 0,$$

on en déduit que le conoyau de (5.1.6) est un quotient de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\bar{\tilde{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), {}^{\tau}\mathcal{E}_0 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big)$. Par un argument identique à celui du point (ii) de la preuve de la proposition 5.1.4, on montre que ce dernier groupe est nul. □

5.2 Déformations des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné

Dans la suite $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers d'un corps local (la plupart du temps $\mathcal{O} = \mathcal{O}_o$), κ son corps résiduel de cardinal q et π une uniformisante. Soit B une $\mathcal{O}$-algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ nilpotent.

Définitions 5.2.1.
- *Un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné de rang d sur B est un $(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)$-module M, libre de rang d, muni d'un morphisme de Frobenius $F : (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_\kappa)^* M \longrightarrow M$ tel que* $\mathrm{Coker}\, F \simeq \Gamma_*(\omega)$ *où ω est un B-module libre de type fini.*
- *Le Frobenius F sera dit topologiquement nilpotent s'il existe un entier n pour lequel $F^n : (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_\kappa^n)^* M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$ est le morphisme nul.*
- *Soit* $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}(B)$ *la sous-catégorie pleine de celle des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné sur B, telle que* $\mathrm{Coker}\, F \simeq \Gamma_*(\omega)$ *où ω est un B-module libre ω de rang inférieur à* 1.

Soit $(\bar{M}, \bar{F})$ un objet de la catégorie $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}(\bar{\kappa})$; $\bar{M}$ est alors un $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-module libre, muni d'un Frobenius $\bar{F} : (\mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \mathrm{Frob}_\kappa)^* \bar{M} \longrightarrow \bar{M}$. Soit R une $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre locale complète noethérienne, de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$, telle que le morphisme structural $i : \hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \longrightarrow R$ est un homomorphisme local de $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbres. *Une déformation (M, F) sur R de $(\bar{M}, \bar{F})$*, est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}\hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} R)$-module libre M, muni d'un morphisme de Frobenius $F : (\mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \mathrm{Frob}_\kappa)^* M \longrightarrow M$, tel que la réduction de (M, F) modulo l'idéal maximal de R est égale à $(\bar{M}, \bar{F})$.

Proposition 5.2.2. *Soient B une $\mathcal{O}$-algèbre locale artinienne, $\bar{B}$ le quotient de B par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul et $(\bar{M}, \bar{F})$ un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné défini sur $\bar{B}$. Il n'y a pas d'obstruction à déformer $(\bar{M}, \bar{F})$ en un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné défini sur B. L'espace des relèvements est alors un torseur sous* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa \bar{B}}\left(\bar{N}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m}\right)$ *lequel est isomorphe à*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa \bar{B}}({}^\tau\bar{M}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m}) / \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa \bar{B}}(\bar{M}, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m})\right) \circ \bar{F}.$$

Preuve : On a la suite exacte courte $0 \longrightarrow {}^\tau\bar{M} \xrightarrow{\bar{F}} \bar{M} \longrightarrow \bar{N} \longrightarrow 0$ où $\bar{N}$ est de la forme $\bar{\Gamma}_*(\bar{\omega})$ avec $\bar{\omega}$ un $\bar{B}$-module libre de type fini. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa \bar{B}}(\bullet, \bar{M} \otimes_{\bar{B}} \mathfrak{m})$ à cette suite exacte. Le reste de la preuve est semblable à celle de la proposition 5.1.4. $\square$

5.3 $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné associé à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique et équivalence de leurs déformations

Soient S le spectre d'une $\mathcal{O}_o$-algèbre B locale artinienne et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur S de caractéristique donnée par le morphisme structural $\mathcal{O}_o \longrightarrow B$. Le $(\mathcal{O}_o \otimes B)$-module $\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{O}_o$ est indépendant de i; on le note $\mathcal{E}_o$. Un isomorphisme $\mathcal{D}_o \simeq \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ étant fixé, soit $\mathcal{F}_o$ le $(\mathcal{O}_o \otimes B)$-module libre de rang d défini par $E_{1,1}.\mathcal{E}_o$, où $E_{1,1}$ est l'idempotent de $\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$ associé au premier vecteur de la base canonique. Par équivalence de Morita, on a un isomophisme $\mathcal{D}_o$-équivariant $\mathcal{E}_o \simeq \mathcal{F}_o^d$. Les morphismes t_i induisent alors un morphisme $t'_o : {}^\tau\mathcal{F}_o \longrightarrow \mathcal{F}_o$. *Le $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné sur B associé à* $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est le couple (M_o, F_o) où M_o est le $(\mathcal{O}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}B)$-module libre de rang d, $\mathcal{F}_o \otimes_{(\mathcal{O}_o \otimes_{\kappa(o)} B)} (\mathcal{O}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}B)$ et $F_o : (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_o} \hat{\otimes}_{\kappa(o)} \mathrm{Frob}_{\kappa(o)})^* M_o \longrightarrow M_o$ est le morphisme de Frobenius induit par t'_o. L'image directe de $\mathrm{Coker}\, t'_o$ étant un B-module de rang 1, (M_o, F_o) *est un objet de* $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}(B)$.

Soient S le spectre d'une $\mathcal{O}_o$-algèbre R locale, artinienne, et $\bar{S} = \mathrm{Spec}\,\bar{R}$ avec $\bar{R}$ le quotient de R par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. Soit $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur $\bar{R}$, de caractéristique $i_o : \bar{S} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$. Notons $\mathrm{Def}_R(\bar{\mathcal{E}})$ l'ensemble des déformations définies sur R de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ et $\mathrm{Def}_R(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ l'ensemble des déformations définies sur R du $(\mathcal{O}_o\hat{\otimes}_{\kappa(o)}\bar{R})$-module de Dieudonné $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ associé à ce $\mathcal{D}$-faisceau elliptique.

Proposition 5.3.1. *L'application qui à un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique associe son $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné, induit une bijection* $\mathrm{Def}_R(\bar{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathrm{Def}_R(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$.

Preuve : On a la suite exacte $0 \to {}^\tau\bar{\mathcal{E}}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow (\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o) \to 0$. On fixe une déformation $(\mathcal{E}_i^0, j_i^0, t_i^0)$ et soit (M_o^0, F_o^0) la déformation de $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$ qui lui correspond. Par rapport à ces points bases, les déformations de $(\bar{\mathcal{E}}_i, \bar{j}_i, \bar{t}_i)$ (resp. de $(\bar{M}_o, \bar{F}_o)$) sont en bijection avec

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big) \qquad (\text{resp. } \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_o\otimes\bar{R}}(\mathrm{Coker}\, \bar{F}_o, \mathcal{F}_o \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m})).$$

L'application de la proposition induit alors le morphisme canonique (localisation, équivalence de Morita puis complétion)

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}\boxtimes\mathcal{O}_{\bar{S}}}\Big((\tilde{\bar{i}}_o)_*(\bar{\Gamma}_o), \bar{\mathcal{E}}_1 \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}\Big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_o\otimes\bar{R}}(\mathrm{Coker}\, \bar{F}_o, \mathcal{F}_o \otimes_{\bar{R}} \mathfrak{m}),$$

qui est un isomorphisme. □

6 Théorème de Serre-Tate sans niveau

6.1 Rappels sur le module de coordonnées d'un $\mathcal{O}$-module formel

Dans ce paragraphe, B est une *$\mathcal{O}$-algèbre dans laquelle l'image de π est nilpotente*. Tous les groupes formels considérés sont lisses **de dimension** 1 (cf. 2.1). On reprend les résultats de ([10] I) dans ce cadre. Pour X un $\mathcal{O}$-module formel sur B, on considère le B-module $M_X = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{G}_{a,B})$ lequel est muni par fonctorialité d'une action de $\mathcal{O}$. Soit $\mathrm{Frob}_q : B \longrightarrow B$ le morphisme de Frobenius de la κ-algèbre B ($x \longmapsto x^q$), et τ_q l'isogénie de Frobenius $\mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \mathrm{Frob}_{q,*}\, \mathbb{G}_{a,B}$. La multiplication à gauche par τ_q sur M_X est Frob_q-semi-linéaire et induit donc un morphisme $F : \mathrm{Frob}_q^* M_X \longrightarrow M_X$. Via F, on peut considérer M_X comme un $B[[\tau_q]]$-module localement libre de rang 1 ($= \dim X$). Le $B[[\tau_q]]$-module M_X est de plus localement libre de rang 1, et s'identifie à la limite projective des B-modules $\mathrm{Coker}\, F_{q^m} \simeq B[[\tau_q]]/B[[\tau_q]].\tau_q^m$. Il résulte du fait que l'image de $\pi \in \mathcal{O}$ dans B est nilpotente, que l'action de $\pi \otimes 1 \in \mathcal{O} \otimes_\kappa B$ sur $\mathrm{Coker}\, F_{q^m}$ est nilpotente. Le séparé complété $\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B$ de $\mathcal{O} \otimes_\kappa B$ pour la topologie $(\pi \otimes 1)$-adique, agit donc encore sur M_X.

Définition 6.1.1. *Le foncteur module des coordonnées sur B est le foncteur M_B qui à un $\mathcal{O}$-module formel X sur B, associe le $(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)$-module $M_X \otimes_{(\mathcal{O}\otimes_\kappa B)} (\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)$ muni du Frobenius F.*

On note i le morphisme structural de la $\mathcal{O}$-algèbre B et $\Gamma : \mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B \longrightarrow B$ le morphisme défini par $\Gamma(a\hat{\otimes}b) = i(a).b$. Soit $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}(B)$ la sous-catégorie pleine de celle des $(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)$-modules localement libres munis d'un Frobenius $F : (\mathrm{Id}_\mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_q)^* M \longrightarrow M$, formée des objets tels que:

- il existe un B-module localement libre de rang 1, ω tel que $\mathrm{Coker}\, F = \Gamma_*(\omega)$;
- il existe un entier n tel que le morphisme $F^n : (\mathrm{Id}_\mathcal{O} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_q^n)^* M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$ est le morphisme nul.

Théorème 6.1.2. *(cf. [10] théorème 2.2.6) Le foncteur module des coordonnées M_B, de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels* ($\dim X = 1$) *sur B, dans la catégorie* $\operatorname{Mod} \mathcal{C}(B)$, *est une anti-équivalence de catégories.*

Remarque : La preuve est la même que dans loc. cit. dans le cas particulier où $\dim X = 1$. Il suffit simplement de remarquer que dans [10], M_X est un $B[[\tau_q]]$-module localement libre de rang celui de Coker F. Le B-module ω est donné par $(\operatorname{Lie} X)^\vee$.

Proposition 6.1.3. *(changement de base cf. [10] 2.2.10) Soient X un $\mathcal{O}$-module formel sur B, C une B-algèbre et $X \otimes_B C$, le $\mathcal{O}$-module formel sur C obtenu par extension des scalaires, on a alors l'isomorphisme $M_C(X \otimes_B C) \simeq (\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa C) \otimes_{(\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa B)} M_B(X)$.*

Remarque : Le foncteur quasi-inverse est G_B tel que pour tout B-algèbre R:

$$G_B(M, F)(R) = \{g \in \operatorname{Hom}_B(M, R) \;/\; g(F(m)) = g(m)^q,\ \forall m \in M\}.$$

6.2 $\mathcal{O}$-module de Dieudonné associé à un $\mathcal{O}$-module divisible

Définition 6.2.1. *(cf [7] §4 C) Un $\mathcal{O}$-module divisible sur une $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre locale R, complète noethérienne de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$, est un couple (G, ψ) où G est un schéma formel en groupe sur R, muni d'un homomorphisme $\psi : \mathcal{O} \longrightarrow \operatorname{End} G$, tel que G^c est un $\mathcal{O}$-module formel sur R de hauteur h et $G/G^c \simeq \operatorname{Spf} R \times (F/\mathcal{O})^j$.*

Sur $\bar{\kappa}$, un $\mathcal{O}$-module divisible est caractérisé à isomorphisme près par le couple (h, j); on le notera $\Sigma^{h,j}$.

Proposition 6.2.2. *Le foncteur M_B induit une anti-équivalence de catégorie, de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules divisibles sur B, dans la catégorie* $\operatorname{Mod} \mathcal{B}(B)$ *qui prolonge l'équivalence du théorème 6.1.2.*

Preuve : Cette proposition est une généralisation simple du théorème 6.1.2 de Genestier qui s'obtient par dévissage des parties étales et connexes.

Lemme 6.2.3. *Soit (M, F) un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné sur B. Il existe des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné sur B, (M^{et}, F^{et}), (M^c, F^c) et une suite exacte:*

$$0 \longrightarrow (M^{et}, F^{et}) \longrightarrow (M, F) \longrightarrow (M^c, F^c) \longrightarrow 0$$

tels que $F^{et} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_\kappa)^* M^{et} \longrightarrow M^{et}$ est bijectif, et $F^c : (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_\kappa \mathrm{Frob}_\kappa)^* M^c \longrightarrow M^c$ est topologiquement nilpotent.

Preuve : Dans le cas où B est un corps, le résultat est connu et la suite exacte est alors scindée (cf. [18] proposition 2.4.6). Soient donc $\kappa' \coloneqq B/\mathfrak{m}$ et $(\bar{M}, \bar{F}) \coloneqq (M, F) \otimes_B B/\mathfrak{m}$ qui est alors un $\mathcal{O}$-module de Dieudonné sur κ'. On a $\bar{M} = \bar{M}^{et} \oplus \bar{M}^c$, le morphisme de Frobenius $\bar{F}$ étant donné dans une certaine base, par une matrice $\bar{Q}$ de la forme $\begin{pmatrix} \bar{A}^c & 0 \\ 0 & \bar{A}^{et} \end{pmatrix}$, où $\bar{A}^{et}$ est inversible et $\bar{A}^c$ topologiquement nilpotente. Si P est une matrice de passage, la matrice de F dans la nouvelle base est alors donnée par $P^{-1}Q({}^\tau P)$. Le résultat découle alors, par récurrence sur l'indice de nilpotence r de $\mathfrak{m}$ ($\bar{R} = R/\mathfrak{m}^{r-1}$), du lemme suivant. □

Lemme 6.2.4. *Soient R une $\mathcal{O}$-algèbre locale artinienne et $\bar{R}$ le quotient de R par un idéal $\mathfrak{m}$ de carré nul. On suppose qu'il existe une base de M telle que la matrice $Q \otimes_R \bar{R}$ de $F \otimes_R \bar{R}$ dans $M \otimes_R \bar{R}$, est de la forme $\begin{pmatrix} \bar{A}^c & 0 \\ \bar{A}^{ext} & \bar{A}^{et} \end{pmatrix}$, où $\bar{A}^{et}$ est inversible et $\bar{A}^c$ topologiquement nilpotente. Il existe alors une matrice de passage P de la forme $\mathrm{Id} + P'$ où P' est une matrice à coefficients dans $\mathfrak{m}$, telle que $P^{-1}Q({}^\tau P)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A^c & 0 \\ A^{ext} & A^{et} \end{pmatrix}$, avec A^{et} inversible et A^c topologiquement nilpotente.*

Preuve : Comme $\mathfrak{m}$ est de carré nul, pour toute matrice P' à coefficient dans $\mathfrak{m}$, la matrice ${}^\tau(I_d + P')$ est la matrice identité. On écrit Q sous la forme $\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$, où la matrice Q_4 est inversible. En prenant $P' = \begin{pmatrix} 1 & -Q_2Q_4^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = I_d + P'$, la matrice $P^{-1}Q({}^\tau P) = P^{-1}Q$ est de la forme désirée. □

Lemme 6.2.5. *(cf. [10] 2.1.5) Soient G_1, G_2, G_3 des* Spec B*-schémas en groupes finis, plats, de présentation finie, qui, localement pour la topologie $f.p.q.c.$ sur* Spec B*, se plongent dans $\mathbb{G}_{a,B}^N$, pour un certain entier N. On suppose que l'on a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{u} G_2 \xrightarrow{v} G_3 \longrightarrow 1$$

(ce qui signifie que u est un noyau de v dans la catégorie des schémas en groupes affines commutatifs et que v est plat surjectif). On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{G_3} \longrightarrow M_{G_2} \longrightarrow M_{G_1} \longrightarrow 0.$$

Ainsi d'après le théorème 6.1.2, pour montrer la proposition, il suffit de montrer que M_B établit une équivalence de catégorie des $\mathcal{O}$-modules divisibles étales sur Spec B ($G^c = 0$), dans la catégorie des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné (M, F) tels que $M^c = 0$. Le résultat découle alors de la proposition suivante. □

Proposition 6.2.6. *(cf. [18] proposition (2.4.11)) Les foncteurs contravariants $G_{\kappa'}$ et $M_{\kappa'}$ entre la catégorie des $\mathcal{O}$-modules de Dieudonné (M, F) sur κ' tels que* Coker F *est de dimension inférieure* 1 *(en tant que κ'-espace vectoriel), et la catégorie des $\mathcal{O}$-modules divisibles G sur κ', sont quasi-inverses l'un de l'autre. De plus $G_{\kappa'}(M, F)$ est étale (resp. connexe) si et seulement si $M^c = 0$ (resp. $M^{et} = 0$).*

Remarque : Un $\mathcal{O}$-module divisible sur $\bar{\kappa}'$ est ici un $\mathcal{O}$-module divisible G sur κ' au sens de [18], tel que si G^c est non nul alors il est de dimension 1; ce qui explique la condition supplémentaire sur la dimension de Coker F par rapport à l'énoncé tel que l'on peut le trouver dans [18].

6.3 Théorème de Serre-Tate

On note ST l'application qui à tout $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur une $\mathcal{O}_o$-algèbre locale artinienne, fait correspondre le $\mathcal{O}_o$-module divisible associé par la proposition 6.2.2 au $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné de la proposition 5.3.1. Des résultats de 6.2.2, de 5.3.1 et du fait que $\mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \mathcal{M}_{A,o}$ est étale si $o \notin V(I)$, on a le théorème suivant dit de Serre-Tate.

Théorème 6.3.1. *(Serre-Tate en dehors de la caractéristique) Soit z un point géométrique de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$, pour I un idéal de A tel que o n'appartienne pas à $V(I)$. On note $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o})}_z$ le complété formel de $\mathcal{M}_{I,o}$ en z. L'application ST ci-dessus induit un isomorphisme $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o})}_z \xrightarrow{\sim}$* $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_0^{h,j})$, *où* $\mathrm{Def}_0^{h,j}$ *représente les déformations du $\mathcal{O}_o$-module divisible $\Sigma^{h,j}$ (cf. [7] § 4 C).*

On rappelle (cf. loc. cit.) que $\mathrm{Def}_0^{h,0}$ est l'anneau Def_0^h de la première partie et que pour $j \geq 1$, $\mathrm{Def}_0^{h,j}$ est isomorphe à $\mathrm{Def}_0^h[[d_1^0, \cdots, d_j^0]]$.

7 Etude de la mauvaise réduction

Le but de ce paragraphe est de définir des $\mathfrak{m}_o^n$-structures de niveau sur les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques de $\mathcal{M}_{I,o}$ ($o \notin V(I)$) et de prolonger les résultats des paragraphes précédents.

7.1 $\mathfrak{m}_o^n$-structures de niveau: bases de Drinfeld

Soient S un schéma et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ un S-point de $\mathcal{M}_{I,o}$ pour I un idéal de A tel que $o \notin V(I)$. Soient $(\mathcal{F}_o, t'_o)$ le couple construit au paragraphe 5.3 et pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_{o,n}$ l'image directe de $\mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} (\mathcal{O}_o/(\pi_o^n)$ relativement à la projection $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o/(\pi_o^n)) \times S \longrightarrow S$. *On note $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ le fibré vectoriel associé à l'ensemble des éléments u de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ tels que $u(t'_{o,n}(x)) = u(x)^q$ $\forall x \in \mathcal{F}_{o,n}$,* où $t'_{o,n}$ est le Frobenius induit par t'_o.

Lemme 7.1.1. *Pour tout entier n, $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ est un S-schéma fini d'ordre q^{nd}, en $\mathcal{O}_o$-modules et on a la suite exacte de S-schémas en $\mathcal{O}_o$-modules*

$$0 \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \xrightarrow{i_n} Gr(\mathcal{F}_{o,n+1}) \xrightarrow{\pi_o^n} Gr(\mathcal{F}_{o,n+1}).$$

Si P est un R-point d'un schéma Y, on note $[P]$ le sous-R-schéma de Y qu'il définit. Pour (P_i) une famille finie de tels points, on note $\sum [P_i]$ le sous-schéma de Y défini par le faisceau d'idéaux produit des faisceaux d'idéaux définissant les $[P_i]$.

Définition 7.1.2. *Une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)/S$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_o$-modules $\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ tel que le sous-schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)]$ de $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ coïncide avec $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$.*

Pour tout élément z de $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d$, $\iota'_{o,n}(z)$ est un élément de $\mathcal{F}^*_{o,n}$ tel que $\varphi^*_{o,n}(\iota'_{o,n}(z)) = \iota'_{o,n}(z)^q$. Le morphisme $\iota'_{o,n}$ fournit alors un homomorphisme de $\mathcal{O}_o$-modules $(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow \mathcal{F}^*_{o,n}$ qui après équivalence de Morita, donne un homomorphisme de $\mathcal{D}_o$-modules $\iota_{o,n} : \mathcal{D}_{o,n} \longrightarrow \mathcal{E}^*_{o,n}$ tel que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_{o,n} \arrow[rr, "\iota_{o,n}"] \arrow[dr, "{}^\tau\iota_{o,n}"'] & & \mathcal{E}^*_{o,n} \arrow[dl, "\varphi^*_{o,n}"] \\ & {}^\tau\mathcal{E}^*_{o,n} & \end{tikzcd}$$

Soit S^o est l'ouvert complémentaire de $i_0^{-1}(\operatorname{Spec} \kappa(o))$.

Proposition 7.1.3. *Si le morphisme $\iota'_{o,n}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau, alors $\iota'_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_o$-modules*

$$(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \longrightarrow \left(\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o)\right)^*.$$

Preuve : Le morphisme $\iota'_{o,n}$ étant une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau définie sur S, le sous-schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)] \times_S S^o$ de $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$ coïncide avec $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$. Le schéma $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \times_S S^o$ étant fini étale sur S^o, on en déduit que les $(\iota'_{o,n}(z) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d}$ forment une base de $(\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*$, d'où la proposition. □

Proposition 7.1.4. *On suppose que S est un schéma intègre et que S^o est un ouvert non vide de S. Si l'homomorphisme de $\mathcal{O}_o$-modules $\iota'_{o,n} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow Gr(\mathcal{F}_{o,n})(S)$ induit un isomorphisme $\iota'_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o) : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \boxtimes \mathcal{O}_S(S^o) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_{o,n} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(S^o))^*$, alors $\iota'_{o,n}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau.*

Preuve : On note $\mathfrak{A}$ le faisceau d'anneaux de $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$ et $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathfrak{A}$ sous-jacent au S-schéma $\sum_{z \in (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d} [\iota'_{o,n}(z)]$. Par hypothèse $\mathfrak{I} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$ est le sous-faisceau nul de $\mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S^o}$ et comme S est intègre on en déduit que $\mathfrak{I}$ est le sous-faisceau nul de $\mathfrak{A}$. □

7.2 Variétés de modules $\mathcal{M}_{I,o}$ pour I arbitraire

Lemme 7.2.1. *Soient S un schéma, Z/S un S-schéma fini et $P_1, \cdots, P_N$ des S-points de Z. Il existe un sous-schéma fermé S_0 de S vérifiant la condition suivante: pour tout morphisme $S' \to S$, le sous-schéma $\sum_{i=1}^N [P_i \times_S S']$ de $Z \times_S S'$ coïncide avec $Z \times_S S'$, si et seulement si le morphisme de S' dans S se factorise par S_0.*

Preuve : Pour $S' \to S$ un S-schéma, l'ensemble des familles de sections $P_1, \cdots, P_N$ de $Z(S')$ telles que $\sum_{i=1}^N [P_i]$ en tant que sous-schéma de Z coïncide avec Z, forme un faisceau sur le gros site étale $(Sch/S)_{et}$. On se ramène donc à supposer $S = \operatorname{Spec} R$ affine et Z libre sur $\operatorname{Spec} R$ et à ne considérer que des $S' = \operatorname{Spec} R'$ affines. On choisit un isomorphisme $\mathcal{O}_Z \simeq R^m$ et on note J l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ définissant le sous-schéma $\sum_{i=1}^N [P_i]$ de Z. On choisit un système de générateurs (f_i) du sous-R-module de R^m sous-jacent à J. Pour R' une R-algèbre, le sous-schéma $\sum_{i=1}^N [P_i \times_R R']$ coïncide avec $Z \times_R R'$ si et seulement si l'idéal $J \otimes_R R'$ de $\mathcal{O}_Z \otimes_R R'$ est nul. Cela équivaut au fait que toutes les composantes des f_i aient une image nulle dans R'. La conclusion du lemme est donc satisfaite par le sous-schéma S_0 de S défini par l'idéal engendré par les composantes des f_i. □

Proposition 7.2.2. *Pour tout n et pour tout idéal I tel que $o \notin V(I)$, le morphisme $\mathfrak{Ell}_{X,\mathcal{D},\mathfrak{m}_o^n I} \longrightarrow \mathfrak{Ell}_{X,\mathcal{D},I}$ est relativement représentable et même affine.*

Ainsi d'après le paragraphe 4.2, pour tout idéal I de A, $\mathfrak{Ell}_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}$ est un champ de Deligne-Mumford sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_o)$ que l'on note encore $\mathcal{M}_{I,o}$.

7.3 Prolongement des correspondances géométriques de Hecke

Au paragraphe 4.2, nous avons rappelé comment Laumon Rapoport et Stuhler associaient à tout élément g^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$, des correspondances géométriques c_1 et c_2 sur les variétés $\mathcal{M}_{I,o}$, définies au dessus de $\operatorname{Spec}(F_o)$. L'objet de ce paragraphe est de montrer que ces correspondances peuvent être prolongées sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_o)$. On pose $S = \mathcal{M}_o = \varprojlim_I \mathcal{M}_{I,o}$ et $S^o := S \otimes_{\mathcal{O}_o} F_o$. L'élément g^∞ définit d'après loc. cit., un morphisme $S^o \longrightarrow S^o$ et donc un morphisme $S^o \longrightarrow S$. On veut montrer que ce morphisme que l'on note $[g^\infty]^o$ se prolonge en un morphisme $[g^\infty] : S \longrightarrow S$.

Le schéma S^o étant ouvert dans S régulier, il y est dense et un tel prolongement est forcément unique. Il suffit alors de montrer que pour tout recouvrement ouvert $S = \cup U_i$, le morphisme $[g^\infty]^o \times_{S^o} U_i^o : U_i^o \longrightarrow U_i$ se prolonge en un morphisme $[g^\infty]_i : U_i \longrightarrow U_i$, la condition de recollement étant automatique d'après l'unicité du prolongement. Soit donc $U = \mathrm{Spec}\, R$ un ouvert de S et R^o le localisé de R correspondant à U^o. Le schéma S étant régulier, R est intègre et s'injecte dans R^o. On note $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota^\infty)$ le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel sur R. On reprend ce qui est fait dans [17] en veillant à ce que les morphismes que l'on construit, soient définis sur R.

- L'action naturelle de $(\mathcal{D}^\infty)^\times$ sur $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota^\infty)$ est définie sur R.
- L'image de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota^\infty)$ par un élément de Pic_X^∞ est le couple $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota^{\infty;1})$ où $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$ et $\iota^{\infty,o;1}$ sont comme dans loc. cit. et ι_o^1 est donnée par équivalence de Morita par $\iota_o^{1,'} = \varinjlim_n \iota_{o,n}^{1,'}$, lequel est défini comme suit. L'isomorphisme $\mathcal{E}_{o,n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{o,n}^1$ définit pour tout n positif un isomorphisme de S-schémas $Gr(\mathcal{F}_{o,n}) \xrightarrow{\sim} Gr(\mathcal{F}_{o,n}^1)$ et $\iota_{o,n}^{1,'}$ est alors définie par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & Gr(\mathcal{F}_{o,n})(U) \\ (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \arrow[ur, "\iota'_{o,n}"] \arrow[r, "\iota_{o,n}^{1,'}"] & Gr(\mathcal{F}_{o,n}^1)(U) \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}$$

  D'après la proposition 7.1.3, $\iota'_{o,n} \otimes_R R^o$ est un isomorphisme; il en est donc de même pour $\iota_{o,n}^{1,'} \otimes_R R^o$ et d'après la proposition 7.1.4 (R étant régulier), $\iota_{o,n}^{1,'}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$.
- Si g^∞ est un élément de $(D^\infty)^\times$ tel que g_o est trivial, les morphismes c_1 et c_2 de loc. cit. sont alors définis sur R. Soit donc $g_o \in D_o^\times \cap \mathcal{D}_o$. Le morphisme $\iota_o = \varinjlim_n \iota_{o,n}$ fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_o \boxtimes R \arrow[r, "\iota_o"] \arrow[dr, "{}^\tau\iota_o"'] & \mathcal{E}_o^* \arrow[d, "t_o^*"] \\ & {}^\tau\mathcal{E}_o^* \end{tikzcd}$$

tel que d'après la proposition 7.1.3, $\iota_o \otimes_R R^o : \mathcal{D}_o \boxtimes R^o \longrightarrow \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o$ est un isomorphisme. Comme dans loc. cit., on définit l'endomorphisme $[g_o]^*$ de $\mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_o \boxtimes R^o \arrow[r, "\iota_o^d \otimes_R R^o", "\sim"'] \arrow[d, "\times g_o"] & \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o \arrow[d, "{[g_o]^*}"] \\ \mathcal{D}_o \boxtimes R^o \arrow[r, "\iota_o^d \otimes_R R^o", "\sim"'] & \mathcal{E}_o^* \otimes_R R^o. \end{tikzcd}$$

Soit r un élément de R tel que $[g_o \otimes r]^*$ est défini sur $\mathcal{E}_o^*$. On définit **l'image** $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota^{\infty;1})$ de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota^\infty)$ **par** g_o^{-1} par les produits

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{E}_i^1)^* \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] & \mathcal{E}_o^* \arrow[d, "{[g_o\otimes r]^*}"] \\ \mathcal{E}_i^* \arrow[r] & \mathcal{E}_o^*. \end{tikzcd}$$

Le morphisme α_i induit un isomorphisme $(\mathcal{F}_o^1)^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_o^*$ et pour tout n, on définit $\iota_{o,n}^{1,'} : (\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)^d \longrightarrow (\mathcal{F}_{o,n}^1)^*$ comme l'application induite par le composé $(\alpha_i \otimes \mathrm{Id})^{-1} \circ \iota_{o,n}$. Le morphisme $\iota'_{o,n} \times_R R^o$ étant un isomorphisme, il en est de même de $\iota_{o,n}^{1,'} \times_R R^o$. Ainsi d'après la proposition 7.1.4, $\iota_{o,n}^{1,'}$ est une $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau sur $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1)$. Le fait que $\mathcal{E}_i^1 \otimes_R R^o$ est isomorphe à celui donné dans loc. cit., découle du lemme suivant.

Lemme 7.3.1. *Soient $\mathcal{E}'_i$ et $\tilde{\mathcal{E}}'_i$ donnés par les diagrammes suivants*

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{E}}'_i \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}'"] & \mathcal{E}_{i,o} \arrow[d, "r.g"] \\ \mathcal{E}_i \arrow[r] & \mathcal{E}_{i,o} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}'_i \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & \mathcal{E}_{i,o} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{E}_i \arrow[r] & \mathcal{E}_{i,o} \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{O}_{X\times \mathrm{Spec}\, R}$-module localement libre de rang fini et où g est un morphisme de $\mathcal{O}_{X\times \mathrm{Spec}\, R}$-modules. Alors $\mathcal{E}'_i$ et $\tilde{\mathcal{E}}'_i$ sont isomorphes.

Preuve : On a $\mathcal{E}'_i \simeq \mathrm{Im}\, g' \subset \mathcal{E}_i$, $\tilde{\mathcal{E}}'_i \simeq \mathrm{Im}\, \tilde{g}' \subset \mathcal{E}_i$ et $\mathrm{Im}\, \tilde{g}' \simeq r.\mathrm{Im}\, g'$. L'anneau R étant intègre, pour tout $\mathcal{O}_{X\times \mathrm{Spec}\, R}$-module localement libre de rang fini $\mathcal{F}$, le morphisme $\mathcal{F} \longrightarrow r.\mathcal{F}$, $\quad m \longmapsto r.m$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $r.\mathcal{F}$, d'où le lemme. □

7.4 Théorème de Serre-Tate et structures de niveaux

On reprend les résultats de Drinfeld donnés dans [7] §4, dont on pourra trouver une présentation dans [2]. Soient R une $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre locale complète, noethérienne, de corps résiduel isomorphe à $\bar{\kappa}$ et G un $\mathcal{O}$-module divisible (G^c est de dimension 1) sur R de hauteur $d = h + j$ (i.e. le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné associé (M, F) est de rang d et (M^c, F^c) est de rang h (cf. 6.2.2)). On note G_n, le Spec R-schéma en groupe des points de $\mathfrak{m}^n$-torsion.

Définition 7.4.1. *Une base de Drinfeld de niveau n sur G est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules*

$$\iota_n : (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d \longrightarrow G_n(R)$$

tel que le sous-schéma $\displaystyle\sum_{\alpha\in(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d} [\iota_n(\alpha)]$ *de G_n coïncide avec G_n ($\mathfrak{m} = (\pi)$).*

– Dans le cas où $G=(f,\psi)$ est un $\mathcal{O}$-module formel sur R (de dimension 1) de hauteur h, la donnée d'une base de Drinfeld de niveau n sur G est la donnée d'un homomorphisme $\iota_n : (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h \longrightarrow \mathfrak{N}=G(R)$ où $\mathfrak{N}$ est l'idéal maximal de R muni de la structure de $\mathcal{O}$-module déduite de G, tel que les séries formelles $\psi_\pi(X)$ et $\prod_{\alpha\in(\mathfrak{m}^{-1}/\mathcal{O})^h}(X-\iota_n(\alpha))$ se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une unité de $R[[X]]$. En particulier si $R=\bar{\kappa}$, un tel homomorphisme est forcément trivial.
– Dans le cas général, G est une extension de $(F/\mathcal{O})^j$ par G^c. On a ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow G_n^c(R) \longrightarrow G_n(R) \longrightarrow (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^j.$$

Le morphisme ι_n est alors une base de Drinfeld si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

– le composé $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{j+h} \xrightarrow{\iota_n} G_n(R) \longrightarrow (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^j$ est surjectif; son noyau K est alors un facteur direct dans $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^d$, isomorphe à $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^h$;
– la restricition de ι_n à K est une base de Drinfeld sur G_n^c.

Soit C la catégorie dont les objets sont les $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbres locales complètes noethériennes dont le corps résiduel est isomorphe à $\bar{\kappa}$. Les morphismes de C sont les homomorphismes locaux de $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algèbres.

Théorème 7.4.2. *(cf. [7] 4.5) Soit G un $\mathcal{O}$-module divisible sur $\bar{\kappa}$, de hauteur $h+j$ ($h\geq 1$ étant la hauteur de G^c), muni d'une base de Drinfeld de niveau n, ι_n. Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des déformations sur R du couple (G,ι_n) est représentable par l'anneau* $\mathrm{Def}_n^G=\mathrm{Def}_n^{h,j}$. *L'anneau* $\mathrm{Def}_n^{h,j}$ *est régulier et pour $m\leq n$, le morphisme naturel* $\mathrm{Def}_m^{h,j}\to\mathrm{Def}_n^{h,j}$ *est fini et plat.*

Dans la proposition 2.1.3, on donne Def_n^G dans le cas où G est un $\mathcal{O}_o$-module formel. Dans ce cas on note cet anneau Def_n^h où h est la hauteur de G^c. L'anneau Def_n^h est régulier et les morphismes $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^h)\to\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_m^h)$ ($m\leq n$) sont finis et plats. Drinfeld montre alors que $\mathrm{Def}_n^{h,j}$ est isomorphe à $\mathrm{Def}_n^h[[d_1^n,\cdots,d_j^n]]$.

Lemme 7.4.3. *Soient S le spectre d'une $\mathcal{O}_o$ algèbre artinienne et $((\mathcal{E}_i,j_i,t_i),\iota_I)$ un S-point de $\mathcal{M}_{I,o}$. Le morphisme $\iota'_{o,n} : (\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \longrightarrow Gr_{o,n}(\mathcal{F}_o)$, où n est la multiplicité de o dans I, est alors une structure de niveau n sur le $\mathcal{O}_o$-module divisible $Gr_o(\mathcal{F}_o)$.*

Preuve : Il suffit de remarquer que $Gr_o(\mathcal{F}_o)$ est donné par la limite inductive sur n des S-schémas $Gr(\mathcal{F}_{o,n})$. □

L'application ST du paragraphe 6.3 se prolonge donc avec les $\mathfrak{m}_o^n$-structures de niveau et le théorème 6.3.1 se généralise.

Théorème 7.4.4. *(Serre-Tate) Soit z un point géométrique de la fibre en o de $\mathcal{M}_{I,o}$, pour I un idéal quelconque de A. On note n la multiplicité de o dans I et $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o})}_z$ le complété formel de $\mathcal{M}_{I,o}$ en z. L'application ST induit alors un isomorphisme $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o})}_z \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{h,j})$.*

7.5 Propriétés locales des $\mathcal{M}_{I,o}$

Soit I' un idéal de A tel que o n'appartient pas à $V(I')$. Soient x un point géométrique de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I',o}$ et y un point de la fibre spéciale $\mathcal{M}_{I'.\mathfrak{m}_o^n,o}$ tels que $r_{I'.\mathfrak{m}_o^n,I'}(y) = (x)$. On note $\widehat{(\mathcal{M}_{I',o})}_{(x)}$ (resp. $\widehat{(\mathcal{M}_{I'.\mathfrak{m}_o^n,o})}_{(y)}$) le complété formel de $\mathcal{M}_{I',o}$ en x (resp. de $\mathcal{M}_{I'.\mathfrak{m}_o^n,o}$ en y). D'après le théorème de Serre-Tate ci-dessus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{(\mathcal{M}_{I'.\mathfrak{m}_o^n,o})}_{(y)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{h,d-h}) \\
\downarrow{\scriptstyle r_{I'.\mathfrak{m}_o^n,I'}} & & \downarrow \\
\widehat{(\mathcal{M}_{I',o})}_{(x)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_0^{h,d-h})
\end{array}$$

où h est la hauteur de $Gr_o^c(\mathcal{F}_o)$.

Proposition 7.5.1. *Pour tout idéal I de A, $\mathcal{M}_{I,o}$ est régulier et $\mathcal{M}_{I,o} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ est propre. Pour tous les idéaux $I \subset J$ de A, le morphisme de restriction du niveau $r_{J,I} : \mathcal{M}_{J,o} \longrightarrow \mathcal{M}_{I,o}$ est fini et plat.*

Preuve : La régularité de $\mathcal{M}_{I,o}$ découle du théorème 7.4.2 et du théorème de Serre-Tate. Le morphisme de restriction du niveau $\mathcal{M}_{I,o} \to \mathcal{M}_{A,o}$ étant fini, la propreté de $\mathcal{M}_{I,o} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ résulte de celle de $\mathcal{M}_{A,o} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$. En ce qui concerne $r_{J,I}$, le résultat se déduit du théorème de Serre-Tate et du fait qu'un morphisme d'anneau $A \to B$ est plat si et seulement si pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A et tout idéal premier P de B au dessus de $\mathcal{P}$, $\hat{B}_P$ est un $\hat{A}_{\mathcal{P}}$-module plat. □

III Stratification de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$

8 φ-faisceaux sur une base S et stratification de S

Soit (V, φ) un φ-faisceau sur un schéma S, c'est-à-dire que V est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang fini n, muni d'une application $\mathcal{O}_S$-linéaire $\varphi : \mathrm{Frob}_S^* V \longrightarrow V$. Soit $S = \cup_k \mathrm{Spec}\, R_k$ un recouvrement affine de S tel que $V \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$ est libre. Soient $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $V \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$ et $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $\varphi \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$ dans cette base,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i \otimes v_i\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} r_i^q v_j, \quad \forall i\ r_i \in R_k$$

Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, on définit $M^{!h} := M({}^{\tau}M)\cdots({}^{\tau^{h-1}}M)$. Pour $q \leq n$, on note $\mathcal{F}_n^q$ l'ensemble des parties à q éléments de $\{1, \cdots, n\}$. Pour I et J deux éléments de $\mathcal{F}_n^q$ et M une matrice carré d'ordre n, on note M_{IJ} la matrice carré d'ordre q extraite de M, constituée des éléments $m_{i,j}$ pour $i \in I$ et $j \in J$.

Proposition 8.1. *Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, soit $R_k^{\geq h}$ le quotient de R_k par l'idéal engendré par tous les mineures $\det(M^{!i})_{I,J}$ d'ordre $(n - i + 1)$ des matrices $M^{!i}$, pour tous les i tels que $1 \leq i \leq h$. Cette définition est indépendante du choix de la base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $V \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$. Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq n$, on peut donc définir le sous-schéma fermé $S^{\geq h}$ de S, par recollement des $\mathrm{Spec}(R_k^{\geq h})$. Le schéma $S^{\geq h}$ est un sous-schéma fermé de $S^{\geq h-1}$ ($S^{\geq 0} = S$) et on pose $S^{=h} = S^{\geq h} \backslash S^{\geq h+1}$.*

Preuve : Soient deux bases $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $V \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$ et M, M' les matrices de $\varphi \otimes_{\mathcal{O}_S} R_k$ relativement à ces bases. On note P la matrice de passage de $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ à $(v'_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a alors $M' = P^{-1} M({}^{\tau}P)$. On note $\mathfrak{I}$ (resp. $\mathfrak{I}'$) les idéaux de R_k engendrés par les éléments $\det(M^{!i})_{I,J}$ (resp. $\det(M'^{!i})_{I,J}$) pour $1 \leq i \leq n$ et $I, J \in \mathcal{F}_n^{n-i+1}$. Le lemme suivant montre alors que $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}'$. $\square$

Lemme 8.2. *(formule de Cauchy-Binet) Soit A un anneau commutatif. Pour tous $X, Y \in \mathbb{M}_n(A)$, pour tout entier $q \leq n$ et pour tous $L, H \in \mathcal{F}_n^q$, on a l'égalité*

$$\det(YX)_{LH} = \sum_{K \in \mathcal{F}_n^q} \det Y_{LK} . \det X_{KH}.$$

Remarque : On notera que $S^{\geq h}$ est le lieu où pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq h$, $\varphi^{!i} : (\mathrm{Frob}_S^i)^* V \longrightarrow V$ est de rang inférieur ou égal à $n - i$. En particulier en tout point fermé $\mathrm{Spec}\,\kappa \to S^{\geq h}$, $\varphi^{!n} \times_S \mathrm{Spec}\,\kappa$ est de rang inférieur au égal à $n - h$.

9 Application à l'anneau universel des déformations d'un $\mathcal{O}$-module divisible

9.1 Le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné du $\mathcal{O}$-module divisible universel

Soit $(\bar{M}, \bar{F})$ un objet de la catégorie $\mathrm{Mod}\,\mathcal{B}(\bar{\kappa})$, de rang $h + j$ où $h \geq 1$ est le rang de $\bar{M}^c$. D'après la proposition 6.2.2 et les résultats de Drinfeld (cf. [7], la déformation universelle de $(\bar{M}, \bar{F})$ est définie sur $\mathrm{Def}_0^{h,j} \simeq \mathrm{Def}_0^h[[d_1^0, \cdots, d_j^0]]$, où $\mathrm{Def}_0^h \simeq \hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}[[a_2, \cdots, a_h]]$ représente les déformations de $(\bar{M}^c, \bar{F}^c)$.

Proposition 9.1.1. *La déformation universelle de $(\bar{M}, \bar{F})$ sur la $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-algèbre $\mathrm{Def}_0^{h,j}$, est le couple $(M_{\mathrm{univ}}, F_{\mathrm{univ}})$, où M_{univ} est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}[[a_2, \cdots,$*

a_{h+j}]])-module libre de rang $h+j$ ($a_{h+i}=d_i^0$ pour $1\leq i\leq j$), muni du Frobenius $F_{\text{univ}}:(\mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}}\hat{\otimes}_{\bar{\kappa}}\mathrm{Frob}_\kappa)^*M_{\text{univ}}\longrightarrow M_{\text{univ}}$, dont la matrice dans une certaine base est

$$\begin{pmatrix} 0\cdots & \pi'\otimes 1-1\otimes\pi' & 0 & \cdots & 0\\ 1\ \ddots & a_2 & \vdots & & \vdots\\ 0\ \ddots & a_h & 0 & \cdots & 0\\ 0\cdots & a_{h+1} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0\cdots & a_{j+h} & b_{j,1} & \cdots & b_{j,j}\end{pmatrix},$$

où π' est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ et où la matrice des $(b_{k,l})_{1\leq k,l\leq j}$ est un relèvement de la matrice inversible de $\bar{F}^{et}$.

Preuve : Le morphisme structural $i:\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}\longrightarrow R$ étant un homomorphisme local de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$-algèbres, par continuité on peut supposer que R est artinienne et on raisonne par récurence sur l'indice de nilpotence r de son idéal maximal $\mathcal{M}$. Pour $r=0$ (i.e. $R=\bar{\kappa}$), la proposition est exacte car le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné $(\bar{M}^c,\bar{F}^c)$ étant cyclique, on peut choisir une base de $\bar{M}$ telle que la matrice de $\bar{F}$ dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} A^c & 0\\ 0 & A^{et}\end{pmatrix}$ avec A^{et} inversible et $A^c=\begin{pmatrix} 0\cdots & \pi'\\ 1\ \ddots & 0\\ 0\ \ddots & 0\end{pmatrix}$, où π' est une uniformisante de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$. Par hypothèse de récurence, pour $\bar{R}=R/\mathcal{M}^{r-1}$, il existe une base $\bar{b}$ de $M\otimes_R\bar{R}$ dans laquelle la matrice de $F\otimes_R\bar{R}$ est de la forme désirée. Le résultat découle alors de la proposition 5.2.2 et du fait suivant. L'ensemble des matrices associées aux éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\hat{\otimes}_\kappa\bar{R}}(M\otimes_R\bar{R},M\otimes_{\bar{R}}\mathcal{M})\circ(F\otimes_R\bar{R})$ dans la base $\bar{b}$, est l'ensemble des matrices telles que toutes les composantes de la h-ième colonne sont divisibles par $\pi'\otimes 1$, c'est-à-dire que dans l'écriture $\sum_{k\geq 0}\pi^k\otimes\alpha_k$, le terme α_0 est nul.

Il ne reste plus qu'à justifier le terme $\pi'\otimes 1-1\otimes\pi'$. Celui-ci peut s'écrire sous la forme $\pi'\otimes 1-1\otimes\alpha$ où α est un élément de $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2,\cdots,a_{h+j}]]$ de sorte que Coker F est isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}\hat{\otimes}_{\bar{\kappa}}\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2,\cdots,a_{h+j}]]/(\pi'\otimes 1-1\otimes\alpha)$. Par hypothèse Coker F est isomorphe à $\Gamma_*(\omega)$ où $\Gamma:\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}\hat{\otimes}_{\bar{\kappa}}\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2,\cdots,a_{h+j}]]\longrightarrow\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2,\cdots,a_{h+j}]]$ est donné par $\Gamma(a\hat{\otimes}b)=a.b$ (cf. la définition 5.2.1). Le $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}\hat{\otimes}_{\bar{\kappa}}\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}[[a_2,\cdots,a_{h+j}]]$-module, Coker F étant tué par $\pi'\otimes 1-1\otimes\alpha$, on a donc $\alpha=\pi'$. □

9.2 Définition des anneaux quotients $\mathrm{Def}_0^{h,j;\geq h'}$

Soit $(M,F)=(M_{h,1},F_{h,1})\oplus(M_{j,0},F_{j,0})$ le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné sur $\bar\kappa$ tel que la matrice de F dans la base canonique de $M=(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})^d$, s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \pi & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La déformation universelle $(M^c_{\mathrm{univ}},F^c_{\mathrm{univ}})$ de $(M_{h,1},F_{h,1})$, définie sur $\mathrm{Def}_0^h\simeq\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}[[a_2,\cdots,a_h]]$, est telle que M^c_{univ} est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^h)$-module libre de rang h, muni d'un morphisme de Frobenius $F^c_{\mathrm{univ}}:(\mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}}\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Frob}_\kappa)^*M^c_{\mathrm{univ}}\longrightarrow M^c_{\mathrm{univ}}$ dont la matrice dans une certaine base (que l'on notera $(e_i)_{1\leq i\leq h}$), est

$$A^c_{\mathrm{univ}}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \pi\otimes 1-1\otimes\pi \\ 1 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_h \end{pmatrix}.$$

La déformation universelle $(M_{\mathrm{univ}},F_{\mathrm{univ}})$ de (M,F), définie sur la Def_0^h-algèbre $\mathrm{Def}_0^{h,j}\simeq\mathrm{Def}_0^h[[d_1^0,\cdots,d_j^0]]$, est telle que M_{univ} est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^{h,j})$-module libre de rang $d-h$, muni d'un morphisme de Frobenius F_{univ} dont la matrice A_{univ} dans une certaine base (que l'on notera $(e_i)_{1\leq i\leq h+j}$) est $\begin{pmatrix} A^c_{\mathrm{univ}} & 0 \\ A_{\mathrm{ext}} & I_j\end{pmatrix}$, où A_{ext} a toutes ses colonnes nulles sauf la h-ème qui est égale à $\begin{pmatrix} a_{h+1} \\ \vdots \\ a_{j+h}\end{pmatrix}$, $(a_{i+h}:=d_i^0\quad 1\leq i\leq j)$. Pour tout entier n, on pose

$$(M_{\mathrm{univ},n},F_{\mathrm{univ},n})\coloneqq(M_{\mathrm{univ}},F_{\mathrm{univ}})\otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^{h,j})}\left(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}/(\pi^n)\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^{h,j}\right)$$

$$(M^c_{\mathrm{univ},n},F^c_{\mathrm{univ},n})\coloneqq(M^c_{\mathrm{univ}},F^c_{\mathrm{univ}})\otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^{h})}\left(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}/(\pi^n)\hat\otimes_{\bar\kappa}\mathrm{Def}_0^{h}\right).$$

On considère alors $(M_{\mathrm{univ},1},F_{\mathrm{univ},1})$ *(resp.* $(M^c_{\mathrm{univ},1},F^c_{\mathrm{univ},1})$*) comme un* φ*-faisceau sur* $\mathrm{Def}_0^{h,j}$ *(resp. sur* Def_0^h*) de rang* $h+j$ *(resp.* h*)*. Pour tout entier h' tel que $0\leq h'\leq h$, on notera $\mathrm{Def}_0^{h,j;\geq h'}$ *(resp.* $\mathrm{Def}_0^{h;\geq h'}$*) l'anneau* $(\mathrm{Def}_0^{h,j})^{\geq h'}$ *(resp.* $(\mathrm{Def}_0^h)^{\geq h'}$*) défini au paragraphe précédent*.

Proposition 9.2.1. *Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, on a*

$$\mathrm{Def}_0^{h;\geq h'} := \begin{cases} \mathrm{Def}_0^h & h'=0 \\ \mathrm{Def}_0^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \bar{\kappa} & h'=1 \\ (\mathrm{Def}_0^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \bar{\kappa})/(a_2, \cdots, a_{h'}) & 2 \leq h' \leq h \\ 0 & h' > h. \end{cases}$$

Preuve : La matrice $(A^c_{\mathrm{univ},1})^{!h'}$ associée à $F^c_{\mathrm{univ},1}$, dans la base $(e_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \bar{\kappa})_{1\leq i\leq h}$, est de la forme $\begin{pmatrix} 0_{h',h-h'} & * \\ 1_{h-h'} & * \end{pmatrix}$. De plus la $(h-h'+1)$-ème colonne de $(A^c_{\mathrm{univ},1})^{!h'}$ est la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix}$ $(a_1 = -1 \otimes \pi)$. Il suffit alors de remarquer que pour tous les entiers i, j tels que $1 \leq i \leq h' \leq j \leq h$, le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de $(A^c_{\mathrm{univ},1})^{!h'}$ appartient à l'idéal de Def_0^h engendré par $a_1, \cdots, a_i$. □

Proposition 9.2.2. *Pour tout entier $h' > h$, $\mathrm{Def}_n^{h,j;\geq h'}$ est nul et pour $0 \leq h' \leq h$, $\mathrm{Def}_0^{h,j;\geq h'}$ est isomorphe à $\mathrm{Def}_0^{h,j} \otimes_{\mathrm{Def}_0^h} \mathrm{Def}_0^{h;\geq h'} \simeq \mathrm{Def}_0^{h;\geq h'}[[d_1^0, \cdots, d_j^0]]$. En particulier $\mathrm{Def}_n^{h,j;\geq 1}$ est égal à $\mathrm{Def}_n^{h,j} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \bar{\kappa}$.*

Preuve : Pour tout h', la matrice $(A_{\mathrm{univ},1})^{!h'}$, dans la base $(e_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}} \bar{\kappa})_{1\leq i\leq h+j}$, est de la forme $\begin{pmatrix} (A^c_{\mathrm{univ},1})^{!h'} & 0 \\ A_{\mathrm{ext,h'}} & I_j \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{Def}_0^{h,j;\geq h'}$ est nul pour $h' > h$ et pour $i \leq h' \leq h$, demander la nullité de tous les mineures d'ordre $h+j-i+1$ de $(A_{\mathrm{univ},1})^{!i}$ est équivalent à demander la nullité de tous les mineures d'ordre $h-i+1$ de $(A^c_{\mathrm{univ},1})^{!i}$, d'où la proposition. □

Pour tout h' tel que $0 \leq h' \leq h$, on pose

$$\left(M_{\mathrm{univ}}^{=h'}, F_{\mathrm{univ}}^{=h'}\right) \coloneqq (M_{\mathrm{univ}}, F_{\mathrm{univ}}) \otimes_{(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \mathrm{Def}_0^{h,j})} (\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \mathrm{Def}_0^{h,j;=h'}).$$

Corollaire 9.2.3. *Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, $(M_{\mathrm{univ}}^{=h'}, F_{\mathrm{univ}}^{=h'})$ admet le dévissage*

$$0 \longrightarrow (M_{\mathrm{univ}}^{=h',et}, F_{\mathrm{univ}}^{=h',et}) \longrightarrow (M_{\mathrm{univ}}^{=h'}, F_{\mathrm{univ}}^{=h'}) \longrightarrow (M_{\mathrm{univ}}^{=h',c}, F_{\mathrm{univ}}^{=h',c}) \longrightarrow 0$$

où $M_{\mathrm{univ}}^{=h',et}$ (resp. $M_{\mathrm{univ}}^{=h',c}$) est un $(\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}} \mathrm{Def}_0^{h,j;=h'})$-module libre de rang constant égal à $j+h-h'$ (resp. h') et $F_{\mathrm{univ}}^{=h',et}$ est bijectif (resp. $F_{\mathrm{univ}}^{=h',c}$ est topologiquement nilpotent).

Preuve : Le résultat découle de la forme de la matrice $A_{\text{univ}} \otimes_{\text{Def}_0^{h,j}} \text{Def}_0^{h,j;=h'}$ donnée ci-dessus et du fait que l'élément $a_{h'+1}$ de $\text{Def}_0^{h,j;=h'}$ est inversible. Il suffit en fait de montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme $I_{j+h} + \pi \otimes P_1 + \cdots$ telle que $P^{-1} A_{\text{univ}}^{h,j:=h'} ({}^\tau P)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, où A_2 est nulle, A_1 est topologiquement nilpotente et A_4 est inversible. On calcule les P_i de proche en proche. Pour P_1, montrons que si on pose $P = \begin{pmatrix} I_h & \pi P_1 \\ 0 & I_j \end{pmatrix}$, la matrice $P^{-1} A_{\text{univ}}^{h,j:=h'} ({}^\tau P)$ est de la forme désirée modulo π^2. Cela revient à montrer qu'il existe une matrice P_1 à coefficients dans $\text{Def}_0^{h,j;=h'}$ telle que $A_2 + A_1({}^\tau P_1) - P_1 A_4$ est nulle. La matrice A_1 étant cyclique nilpotente modulo π, et la matrice A_4 étant inversible, on calcule les lignes de P_1 de proche en proche. $\square$

En termes de $\mathcal{O}$-modules divisibles, la situation se décrit comme suit. Soit $G^{h,j}$ le $\mathcal{O}$-module divisible universel sur $\text{Spec}\,\text{Def}_0^{h,j}$. Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, soit $G^{h,j;\geq h'}$ la restriction de $G^{h,j}$ au fermé $\text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j;\geq h'}) \hookrightarrow \text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j})$. Sur l'ouvert $\text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j;=h'}) \hookrightarrow \text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j;\geq h'})$, $G^{h,j;=h'} = G^{h,j,h'} \times_{\text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j,h'})} \text{Spec}(\text{Def}_0^{h,j;=h'})$ admet le dévissage

$$0 \longrightarrow (G^{h,j;=h'})^c \longrightarrow G^{h,j;=h'} \longrightarrow (G^{h,j;=h'})^{et} \longrightarrow 0$$

où $(G^{h,j;=h'})^{et}$ est étale et $(G^{h,j;=h'})^c$ est, en tout point fermé de Spec $(\text{Def}_0^{h,j;=h'})$, un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur h'.

9.3 Les composantes $\text{Spec}(\text{Def}_n^{h,j;=h'})_A$ *pour* $n > 0$

Pour tout entier n positif, on définit $\text{Def}_n^{h;\geq h'}$ et $\text{Def}_n^{h,j;\geq h'}$ par changement de base

$$\text{Def}_n^{h;\geq h'} := \text{Def}_0^{h;\geq h'} \otimes_{\text{Def}_0^h} \text{Def}_n^h, \quad \text{Def}_n^{h,j;\geq h'} := \text{Def}_0^{h,j;\geq h'} \otimes_{\text{Def}_0^{h,j}} \text{Def}_n^{h,j}.$$

Pour tout n, $\text{Def}_n^{h,j}$, en tant que Def_n^h-algèbre, est isomorphe à $\text{Def}_n^h[[d_1^n, \cdots, d_j^n]]$ et donc $\text{Def}_n^{h,j;\geq h'}$ est isomorphe à $\text{Def}_n^{h;\geq h'}[[d_1^n, \cdots, d_j^n]]$.

Remarque : Avec ces notations on a $\text{Def}_n^{h,j;\geq 1} = \text{Def}_n^{h,j} \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\kappa} \simeq (\text{Def}_n^h \otimes_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}} \bar{\kappa})[[d_1^n, \cdots, d_j^n]]$.

Lemme 9.3.1. *Pour tous les entiers positifs m, n tels que $m \leq n$, le morphisme de restriction du niveau* $\text{Spec}(\text{Def}_n^{h,j;\geq h'}) \longrightarrow \text{Spec}(\text{Def}_m^{h,j;\geq h'})$ *est fini et plat.*

On munit (M, F) d'une structure de niveau n, ι_n tel que le noyau $A_{1\to h} \subset (\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ de ι_n est engendré par les h-premiers vecteurs de la base canonique. Après le changement de base $\mathrm{Def}_0^{h,j} \longrightarrow \mathrm{Def}_n^{h,j}$, $(M_{\mathrm{univ}}, F_{\mathrm{univ}})$ est muni d'une structure de niveau n universelle, $\iota_{n,\mathrm{univ}}$ qui relève ι_n. Pour tout élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$, $\iota_{n,\mathrm{univ}}(z)$ est un élément m^* de $(M_{\mathrm{univ},n})^*$ tel que $m^* \circ F_{\mathrm{univ}} = (m^*)^q$ (la condition de Drinfel'd s'exprime sur le $\mathcal{O}$-module divisible universel associé). On considère alors le morphisme $\iota_{n,\mathrm{univ}}^{=h',et}$:

$$(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j} \times \mathrm{Spec}\,\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'} \longrightarrow \{m^* \in (M_{\mathrm{univ},n}^{=h',et})^* \mid m^* \circ F_{\mathrm{univ}}^{=h',et} = (m^*)^q\},$$

qui à un élément z de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ associe la restriction de $\iota_{n,\mathrm{univ}}(z)$ à $M_{\mathrm{univ},n}^{=h',et}$. D'après le corollaire 9.2.3, $\{m^* \in (M_{\mathrm{univ},n}^{=h',et})^* \mid m^* \circ F_{\mathrm{univ}}^{=h',et} = (m^*)^q\}$ est un faisceau en $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'}$, de fibre $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j-h'}$. La condition sur $\iota_{n,\mathrm{univ}}$ d'être une structure de niveau n, entraine que $\iota_{n,\mathrm{univ}}^{=h',et}$ est surjectif (cf. le paragraphe 7.4) et que le noyau K de $\iota_{n,\mathrm{univ}}^{=h',et}$ est un sous-$(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$-module facteur direct de rang h' dans $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j} \times \mathrm{Spec}\,\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'}$ contenu dans $A_{1\to h}$. Si $h' \geq 1$, K est donc de la forme

$$\coprod_{A \in \mathfrak{P}(h+j,h',n,A_{1\to h})} \{A\} \times \mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'})_A$$

où $\mathfrak{P}(h+j, h', n A_{1\to h})$ est l'ensemble des facteurs directs de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{h+j}$ de rang h' contenu dans $A_{1\to h}$. On rappelle que pour tous les $s \leq t$, l'ensemble des facteurs directs de $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^t$ de rang s est en bijection avec l'ensemble quotient $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{t,s,n}$ où $P_{t,s,n}$ est le sous-groupe parabolique de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ associé aux s premiers vecteurs $e_1, \cdots, e_s$ de la base canonique. Cette bijection associe à un élément $\bar{g}$ de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{t,s,n}$, le $(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$-module engendré par les $e_i.g^{-1}$ pour $1 \leq i \leq s$, où g est un élément quelconque de $GL_t(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ dans la classe de $\bar{g}$. *En ce qui concerne* $\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'}$*, un élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}$ est considéré comme un sous-module de $A_{1\to h}$*

Proposition 9.3.2. *Pour tous les entiers n, j et h' tel que* $1 \leq h' \leq h$, *on a*

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'}) = \coprod_{A \in GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}} \mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'})_A.$$

De plus tous les $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'})_A$ *sont isomorphes et sont permutés sous l'action naturelle de $P_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$.*

Proposition 9.3.3. *Pour tout élément z de* $(\mathfrak{m}^{-n}/\mathcal{O})^{j+h}$, *dans* $\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'}$ *on a*

$$\iota_{n,\mathrm{univ}}^{=h',et}(z) = 0 \Longleftrightarrow (\iota_{n,\mathrm{univ}}^{=h'}(z))^{(q)^{nh'}} = 0.$$

Preuve : Pour $0 \leq k \leq n-1$, soit $f_{ni+k} = (\pi^k \otimes 1)e_i$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq j+h}$ est la base de M_{univ} adaptée à F_{univ} (cf. le début du paragraphe précédent). La matrice $A^{=h'}_{\mathrm{univ},n}$ de $F^{=h'}_{\mathrm{univ}}$, dans la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n(j+h)}$ de $M^{=h'}_{\mathrm{univ},n}$, est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ où B est inversible de rang $n(j+h-h')$ et $A^{!nh'}$ est nulle (cf. le corollaire 9.2.3). De même on écrit $\iota^{=h'}_{n,\mathrm{univ}}(z)$ sous la forme $(\alpha \mid \beta)$. La matrice ligne associée à $(\iota^{=h'}_{n,\mathrm{univ}})^{(q)^{nh'}}$ est alors égale à $(\alpha \mid \beta)(A^{=h'}_{\mathrm{univ}})^{!nh'} = (\beta C' \mid \beta B^{!nh'})$. □

Lemme 9.3.4. *Soient $h'_1 \leq h'_2$ des entiers et A_1 un élément de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h'_1,n}$. Pour $A_2 \in GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h'_2,n}$,* $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'_2})_{A_2}$ *est dans l'adhérence de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'_1})_{A_1}$ *si et seulement si $A_1 \subset A_2$.*

Pour $j=0$, en accord avec les notations précédentes, on pose $(\mathrm{Def}_n^{h;=h'})_A = (\mathrm{Def}_n^{h,0;=h'})_A$. L'isomorphisme $\mathrm{Def}_n^{h,j;\geq h'} \simeq \mathrm{Def}_n^{h;\geq h'}[[d_1^n, \cdots, d_j^n]]$ et la décomposition de la proposition 9.3.2, donnent la proposition suivante.

Proposition 9.3.5. *Pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)/P_{h,h',n}$, on a*

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h,j;=h'})_A = \mathrm{Spec}\Big((\mathrm{Def}_n^{h;=h'})_A \hat{\times}_{\bar{\kappa}} \bar{\kappa}[[d_1^n, \cdots, d_j^n]]\Big).$$

10 Application à $\mathcal{M}_{I,o}$

On applique ce qui précède au cas des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques. Pour éviter les problèmes de champs, on supposera dans la suite que l'idéal I de A est tel que $V(I)$ contienne au moins un point fermé distinct de o. On note $\mathcal{M}_{I,s_o}$ la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$.

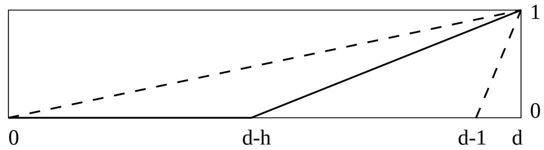
10.1 Définition des strates $\mathcal{M}^{=h}_{I,o}$

Soient S le schéma $\mathcal{M}_{I,o}$ et $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel défini sur S, muni de sa I-structure de niveau ι_I. Pour tout i, les fibres $\mathcal{E}_{i,o}$ sont isomorphes et après équivalence de Morita, l'application $t'_o : {}^\tau\mathcal{F}_o \longrightarrow \mathcal{F}_o$ permet de considérer $\mathcal{F}_o \otimes_{\mathcal{O}_o} \kappa(o)$ comme un φ-faisceau sur S de rang d.

Définition 10.1.1. *Pour tout $0 \leq h \leq d$, on définit $\mathcal{M}^{\geq h}_{I,o}$ et $\mathcal{M}^{=h}_{I,o}$ comme respectivement le sous-schéma fermé $S^{\geq h}$ et $S^{=h}$ introduit dans la proposition 8.1.*

Avec les notations introduites, on a $\mathcal{M}^{\geq d}_{I,o} = \mathcal{M}^{=d}_{I,o}$ et $\mathcal{M}^{\geq 1}_{I,o} = \mathcal{M}_{I,s_o}$.

Proposition 10.1.2. *Pour tout $1 \leq i \leq d$, l'ensemble des points géométriques de $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq i}$ est le sous-ensemble des points géométriques de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{I,o}$ pour lesquels le polygône de Newton est de la forme suivante*



c'est-à-dire tels que la partie étale (resp. connexe) du $\mathcal{O}_o$-module de Dieudonné est de rang $d-h$ (resp. h).

Preuve : D'après la remarque de la fin du paragraphe 8, si $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i, \iota_I)$ est le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel sur $\mathcal{M}_{I,o}$ muni de sa I-structure de niveau universelle ι_I alors pour tout $1 \leq h \leq d$, $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ est le lieu où pour tout $1 \leq i \leq h$, $(t'_o)^{!i} : {}^{\tau^i}\mathcal{F}_o \longrightarrow \mathcal{F}_o$ est de rang inférieur ou égal à $d-i$. En particulier pour tout point fermé $\operatorname{Spec}\kappa(o) \to \mathcal{M}_{I,o}^{=h}$, $(t'_o)^{!d} \times_{\mathcal{M}_{I,o}} \operatorname{Spec}\kappa(o)$ est de rang $d-h$. Le noyau de t'_o étant de dimension 1, on obtient que le sous-espace propre associé à 0 est cyclique de dimension h. $\square$

10.2 Etude des points supersinguliers

Soit $\bar{\kappa}(o)$ une clôture algébrique de $\kappa(o)$. Dans cette section, on étudie les points géométriques de $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}$. On montre que de tels points, dits supersinguliers, existent et on en donne une description adélique compatible aux correspondances de Hecke.

On note $\bar{D}$, «l»'algèbre à division centrale sur F dont les invariants sont

$$\operatorname{inv}_x(\bar{D}) = \begin{cases} -1/d & \text{si } x = \infty \\ 1/d & \text{si } x = o \\ \operatorname{inv}_x(D) & \text{pour } x \neq \infty, o \end{cases}$$

Proposition 10.2.1. *Pour tout idéal I, $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}(\bar{\kappa}(o))$ est non vide et correspond à une unique classe d'isogénie.*

Preuve :

– D'après [17] §9, pour montrer l'existence de points supersinguliers il suffit de montrer qu'il existe une φ-paire $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ telle que $\tilde{F} \otimes_F F_\infty$ et $\tilde{F} \otimes_F F_o$ soient des corps, que $\deg(\tilde{\infty})\tilde{\infty}(\tilde{\Pi}) = -[\tilde{F} : F]/d$, où $\tilde{\infty}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant ∞ et que $\tilde{x}(\tilde{\Pi}) = 0$, pour tout $\tilde{x} \neq \tilde{\infty}, \tilde{o}$, où $\tilde{o}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant o (cf. loc. cit. proposition 9.9 avec $h = d$ dans (iv)). Les points de la jacobienne de X, à valeurs dans un corps fini, étant tous d'ordre fini, soit m un entier strictement positif tel que $m.[o - \deg(o)\infty] = 0$ ($\deg\infty = 1$). Il existe alors un élément f de

F tel que $\infty(f) = -\deg(o)m$, $o(f) = m$ et $x(f) = 0$ pour toute place x de F distincte des places o et ∞. On pose $\tilde{\Pi}_F = f \otimes 1/\deg(o)md$ de sorte que le couple $(F, \tilde{\Pi})$ convient.

– D'après loc. cit. proposition 9.13, pour montrer l'unicité de la classe d'isogénie, il suffit de montrer que le couple (F, Π) ci-dessus est le seul qui convienne. Soit donc $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ un tel couple. $F_o \otimes_F \tilde{F}$ est un corps et si $\tilde{o}$ est l'unique place de $\tilde{F}$ divisant o, on a $\deg(\tilde{o})\tilde{o}(\tilde{\Pi}) = [\tilde{F} : F]/d$ et $\tilde{o}$ est l'unique place $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ telle que $\tilde{x}(\tilde{\Pi}) \neq 0$. Ainsi on peut considérer $\tilde{F}$ comme une F-sous-algèbre de $\bar{D}$. L'algèbre Δ de loc. cit. associée à $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$, est une algèbre à division centrale sur $\tilde{F}$ de dimension $(d/[\tilde{F} : F])^2$ dont les invariants sont donnés dans loc. cit. On identifie alors Δ au centralisateur de $\tilde{F}$ dans $\bar{D}$. Montrons que $\tilde{F} = F$ et donc que $\Delta = \bar{D}$. Soit σ un F-automorphisme de $\tilde{F}$ et soit N un entier tel que $\tilde{\Pi}^N$ appartient à $\tilde{F}^\times$. Comme $\tilde{o}$ et $\tilde{\infty}$ sont les seules places $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$ telles que $\tilde{x}(\tilde{\Pi}^N) \neq 0$ et comme $\sigma(\tilde{\infty}) = \tilde{\infty}$ et $\sigma(\tilde{o}) = \tilde{o}$, les éléments $\tilde{\Pi}^N$ et $\sigma(\tilde{\Pi}^N)$ de $\tilde{F}^\times$ ont les mêmes valuations en toutes les places $\tilde{x}$ de $\tilde{F}$. Ainsi $\tilde{\Pi}^N/\sigma(\tilde{\Pi}^N)$ appartient à $\mathbb{F}_q^\times$ et est une racine de l'unité. Il existe donc un entier $N' \geq N$ tel que $\tilde{\Pi}^{N'} = \sigma(\tilde{\Pi}^{N'})$ et donc $\tilde{F} = F[\tilde{\Pi}^N] = F[\tilde{\Pi}^{N'}]$ et σ est l'identité. L'extension $\tilde{F}/F$ étant séparable, on en déduit $\tilde{F} = F$. $\square$

Proposition 10.2.2. *Il existe pour tout idéal I de A, une bijection de $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}(\bar{\kappa}(o))$ avec le quotient $\bar{D}^\times \backslash \Big[(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times \mathbb{Z} \Big]$, le Frobenius géométrique en o agissant par la translation de valeur 1 sur la composante $\mathbb{Z}$. De plus si $(\mathcal{M}_{J,o}, c_1, c_2)$ est une correspondance de Hecke sur $\mathcal{M}_{I,o}$ associée à un élément g^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ (J est donc tel que $K_J^{\infty,o} \subset K_I^{\infty,o} \cap (g^{\infty,o})^{-1} K_I^{\infty,o} g^{\infty,o}$), la correspondance induite par ces bijections est*

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},J}^{\infty,o} \times \mathbb{Z}] \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\
\bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times \mathbb{Z}] \arrow[rr, dashed] & & \bar{D}^\times \backslash [(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times \mathbb{Z}]
\end{tikzcd}$$

où c_1 est induit par l'inclusion $K_{\mathbb{A},J}^{\infty,o} \subset K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o}$ et où c_2 est induit par la multiplication à droite de $(g^{\infty,o})^{-1}$ sur $(D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times$ et la translation de valeur $-\operatorname{val}(\det(g_o))$ sur la composante $\mathbb{Z}$.

Preuve : Par rapport à [17] §9 et §10, le seul point à vérifier est l'action d'un élément g_o de $GL_d(F_o)$. Clairement g_o n'agit que sur la composante $\mathbb{Z}$. Le groupe $PSL_d(F_o)$ étant simple, l'endomorphisme de $\mathbb{Z}$ associé à g_o est la translation de valeur $-k.\operatorname{val}(\det(g_o))$, pour un certain entier k. De plus si

g_o est l'élément du centre π_o, alors d'après la $\mathcal{O}_o$-linéarité de la structure de niveau et d'après la proposition B.10 de [17], on obtient $k = 1$. □

10.3 Preuve d'une conjecture de Rapoport

Proposition 10.3.1. *Soit z un point géométrique de $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$. L'entier h est alors la hauteur du $\mathcal{O}_o$-module formel $Gr^c(\mathcal{F}_o)$ associé et pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$, l'isomorphisme du théorème de Serre-Tate $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o})_z} \xrightarrow{\sim}$ $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{h,d-h})$ où n est la multiplicité de o dans I, induit un isomorphisme $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h'})_z} \simeq \mathrm{Spf}\,\mathrm{Def}_n^{h,j;\geq h'}$.*

D'après le lemme 9.3.1, on a le corollaire suivant.

Corollaire 10.3.2. *Pour tous les idéaux I, J de A tels que $J \subset I$, le morphisme de restriction du niveau sur la h-ième strate $r_{J,I} : \mathcal{M}_{J,o}^{\geq h} \longrightarrow \mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ est fini et plat.*

Théorème 10.3.3. ***(Conjecture de Rapoport)*** *Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d$, les strates $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ sont non vides, purement de dimension $d - h$ et lisses sur $\kappa(o)$ si $o \notin V(I)$.*

Preuve : Pour tout h, $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ contient $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq d}$ qui est non vide d'après la proposition 10.2.1. Soient alors z un point géométrique de $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ et $h' \geq h$ tel que z appartient à $\mathcal{M}_{I,o}^{=h'}$. D'après la proposition 10.3.1, l'anneau local $\widehat{(\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h})_z}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{h',d-h';\geq h})$ où n est la multiplicité de x dans I, et $\mathrm{Def}_n^{h',d-h';\geq h}$ est de dimension $d - h$. □

10.4 Les composantes $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A$ pour $o \in V(I)$

Soient n la multiplicité de o dans I et $\iota'_{o,n}$ la $\mathfrak{m}_o^n$-structure de niveau universelle sur $S \coloneqq \mathcal{M}_{I,o}$. Pour tout $z \in (\mathfrak{m}_o^n/\mathcal{O}_o)^d$, $\iota'_{o,n}(z)$ est un élément m^* de $\mathcal{F}_{o,n}^*$ tel que $m^* \circ F_o = (m^*)^q$. La proposition 9.3.3 motive la définition suivante.

Définition 10.4.1. *Soit A un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$. On définit le sous-schéma fermé $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A$ de $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$, comme le lieu d'annulation des sections $\iota'_{o,n}(a)^{q^{nh}}$ de $\mathcal{F}_{o,n}^* \times_S S^{=h}$, pour a décrivant A.*

La proposition 9.3.3 et le théorème de Serre-Tate donnent la proposition suivante.

Proposition 10.4.2. *Soient A_h un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$ et z un point géométrique de $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{A_h}$. Pour tout entier h' tel que $0 \leq h' \leq h$ et pour tout élément A de $GL_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{h,h',n}$ (on considère A comme un sous-module de A_h), l'isomorphisme de la proposition 10.3.1 induit l'isomorphisme $(\widehat{(\mathcal{M}_{I,o}^{=h'})_A})_z \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{h,d-h;=h'})_A$. On a alors la décomposition de la h-ème strate*

$$\mathcal{M}_{I,o}^{=h} = \coprod_{A \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}} (\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A.$$

Ces définitions sont compatibles aux morphismes de restriction du niveau, c'est-à-dire que pour $n \geq n'$ et $A_0 \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^{n'})/P_{d,h',n}$, on a

$$r^{-1}_{I'\mathfrak{m}_o^n, I'\mathfrak{m}_o^{n'}} \left((\mathcal{M}^{=h'}_{I'\mathfrak{m}_o^{n'},o})_{A_0} \right) = \coprod_{A \in \mathfrak{G}(A_0,n)} (\mathcal{M}^{=h'}_{I'\mathfrak{m}_o^n,o})_A,$$

où $\mathfrak{G}(A_0, n)$ est l'ensemble des éléments A de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h',n}$ qui ont pour image A_0 modulo $\mathfrak{m}_o^{n'}$.

Lemme 10.4.3. *Soient $h_1 \leq h_2$ des entiers et A_1 un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h_1,n}$. Pour A_2 un élément de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h_2,n}$, le schéma $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h_2})_{A_2}$ est dans l'adhérence de $(\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h_1})_{A_1}$ si et seulement si $A_1 \subset A_2$.*

IV Preuve de la conjecture de Deligne-Carayol

Rappelons les hypothèses faites sur F et D au début de la deuxième partie. Les places ∞, o de F sont rationnelles sur le corps des constantes $\mathbb{F}_q$ de X, et F_o est le corps local de la première partie. L'algèbre à division D est ramifiée seulement en deux places x_1 et x_2 distinctes des places ∞, o, telle que D_{x_i} $(i = 1, 2)$ est une algèbre à division. Dans la suite I est un idéal de A tel que $V(I)$ contienne une place de F autre que o de sorte que les $\mathcal{M}_{I,o}$ sont des schémas.

Nous allons dans un premier temps rappeler les résultats de [17] (15-12, 15-13, 15-17) qui décrivent la cohomologie de la fibre générique des schémas de modules $\mathcal{M}_{I,o}$. A partir de ces résultats de nature globale, nous étudierons la cohomologie des cycles proches associée à la spécialisation de $\mathcal{M}_{I,o}$, notamment lorsque $o \in V(I)$. Nous montrerons que la représentation locale fondamentale intervient dans ces cycles proches et que le résultat global de [17] permet de décrire sa partie cuspidale.

De manière analogue à 3.1, on considère la catégorie $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$ des représentations admissibles de $(D^\infty)^\times \times W_{F_o}$ où W_{F_o} désigne le groupe de weil de F_o. La notion de multiplicité y est alors définie selon un processus similaire.

11 Cohomologie globale de la fibre générique d'après Laumon-Rapoport-Stuhler

Soient $\eta = \operatorname{Spec} F$ le point générique de X et $\bar{F}$ une clôture algébrique de F. On considère les groupes de cohomologie l-adique

$$H^n_{\eta,I} = H^n((\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \operatorname{Spec} \bar{F}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Pour tout $n \geq 0$, $H^n_{\eta,I}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie, nulle pour $n > 2d-2$, et qui possède une $\mathbb{Q}_l$-structure. On a une action de $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ sur $H^n_{\eta,I}$ définie sur $\mathbb{Q}_l$ et continue pour la topologie de Krull sur $\operatorname{Gal}(\bar{F}/F)$ et la topologie l-adique sur $H^n_{\eta,I}$. On choisit une clôture algébrique $\bar{F}_o$ de F_o contenant $\bar{F}$ et on considère un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{F} & \subset & \bar{F}_o & \supset & \bar{\mathcal{O}}_o & \to & \bar{\kappa}(o) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ F & \subset & F_o & \supset & \mathcal{O}_o & \to & \kappa(o) \end{array}$$

où $\bar{\mathcal{O}}_o$ est la normalisation de $\mathcal{O}_o$ dans $\bar{F}_o$ et $\bar{\kappa}(o)$ est le corps résiduel de $\bar{\mathcal{O}}_o$. On notera $H^n_{\eta_o,I}$ la représentation du groupe de Weil W_{F_o} de $\bar{F}_o/F_o$ sur $H^n_{\eta,I}$. Soit $H^n_{\eta_o}$ la limite inductive sur tous les idéaux I de A des $H^n_{\eta_o,I}$. Les correspondances géométriques de Hecke du paragraphe 7.3 induisent une action de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$ sur $H^n_{\eta_o}$, définie sur $\mathbb{Q}_l$ et commutant à l'action de W_{F_o}. Pour tout I, $H^n_{\eta_o,I} = (H^n_{\eta_o})^{K^\infty_{\mathbb{A},I}}$ est muni de l'action de $\mathcal{H}^\infty_I$ induite par celle de $\mathcal{H}^\infty$ sur $H^n_{\eta_o}$. Comme $H^n_{\eta_o,I}$ est de dimension finie, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 11.1. *La représentation $H^n_{\eta_o}$ de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times \times W_{F_o}$ est un objet de $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$.*

Pour τ^∞ une représentation admissible irréductible de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$ et σ_o représentation l-adique irréductible de W_{F_o}, on note $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^n_{\eta_o})$ la multiplicité de $\tau^\infty \otimes \sigma_o$ dans $H^n_{\eta_o}$. Soit St_∞ la représentation de Steinberg de $D^\times_\infty$.

Théorème 11.2. *([17] théorème 14.12) Si τ^∞ est une représentation admissible, irréductible de $(D^\infty_{\mathbb{A}})^\times$, de dimension infinie, pour laquelle il existe un entier n et une représentation l-adique irréductible σ_o de W_{F_o} telle que $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^n_{\eta_o}) \neq (0)$ alors $n = d-1$ et $St_\infty \otimes \tau^\infty$ est une représentation automorphe de $D^\times_{\mathbb{A}}/\pi^{\mathbb{Z}}_\infty$.*

Soit π_o une représentation irréductible, cuspidale de $GL_d(F_o)$, de caractère central d'ordre fini.

Lemme 11.3. *(cf. [17] lemme 15.10) Il existe une sous-représentation cuspidale Π de $L_{cusp}(GL_d(F)F_\infty^\times\backslash GL_d(\mathbb{A}))$, telle que $\Pi_\infty \simeq St_\infty$, $\Pi_o \simeq \pi_o$, et Π_{x_i} est cuspidale, irréductible, admissible pour $i = 1, \cdots, 4$, où x_3, x_4 sont deux places distinctes des places ∞, o, x_1, x_2.*

Proposition 11.4. *(cf. [12]) Soit Π un élément de $L_{cusp}(GL_d(F)F_\infty^\times\backslash GL_d(\mathbb{A}))$ vérifiant les hypothèses du lemme ci-dessus. Il existe alors un et un seul à isomorphisme près, élément τ de $L(D^\times F_\infty^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times)$ tel que pour toute place $y \neq x_1, x_2$, τ_y est isomorphe à Π_y. De plus la multiplicité $m(\tau)$ de τ dans $L(D^\times F_\infty^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times)$ est égale à 1.*

Théorème 11.5. *(cf. [17] 15.14) Soit τ comme dans la proposition ci-dessus. La multiplicité $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H_{\eta_o}^{d-1})$ est non nulle si et seulement si σ_o est isomorphe à $\mathfrak{L}_{F_o,d}(\pi_o)\otimes|-|^{\frac{1-d}{2}}$, où $\mathfrak{L}_{F_o,d}$ désigne la correspondance locale de Langlands (cf. le paragraphe 1.2). Dans ce cas, elle est égale à 1.*

12 Les cycles proches pour $\mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$

On reprend les notations $\mathcal{M}_{I,o} = (\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},I}/\mathbb{Z}) \times_{X'} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$ et $\mathcal{M}_{I,s_o}$ sa fibre spéciale. On pose $\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}} := \mathcal{M}_{I,s_o} \otimes_{\kappa(o)} \bar{\kappa}(o)$. D'après le théorème de changement de base propre, $H^n_{\eta_o,I}$ est canoniquement isomorphe en tant que $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation de W_{F_o} à $H^n(\mathcal{M}_{I,o} \otimes_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)} \mathrm{Spec}(\bar{F}_o), \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Pour tout ce qui concerne les rappels suivants, on se réfèrera à [23].

Les schémas $\mathcal{M}_{I,o}$ sont de type fini et propres sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$. On considère le complexe des cycles proches $R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l) \in D_c^b(\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ sur $\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}$, muni de son action de W_{F_o} qui relève l'action du Frobenius en o sur $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}$. Pour tout point géométrique $\bar{z}$ de $\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}$, on notera $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)_{\bar{z}}$ la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ en ce point. On rappelle que pour tout $0 \leq i \leq d$, la dimension du support de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ est inférieure ou égale à $d-1-i$. On pose $EV^i_{o,I} := \mathbb{H}^i(\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}, R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$. Le morphisme de schéma $\mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_o$ étant propre, on en déduit un isomorphisme W_{F_o}-équivariant

$$H^i_{\eta_o,I} \simeq EV^i_{o,I}\,. \tag{12.1}$$

Les $EV^i_{o,I}$ sont munis d'une action de $\mathcal{H}_I^\infty$ que l'on définit comme suit. Si $(\mathcal{M}_{J,o}, c_1, c_2)$ est une correspondance géométrique sur $\mathcal{M}_{I,o}$ associée à un élément de $\mathcal{H}_I^\infty$, c_1 et c_2 sont finis et la correspondance cohomologique associée est définie par la composée des trois applications ci-dessous obtenues d'après les propriétés de fonctorialité de $R\Psi_{\eta_o}$:

- $c_1^* R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l) \longrightarrow R\Psi_{\eta_o}(c_1^*(\overline{\mathbb{Q}}_l))$, par changement de base;
- $R\Psi_{\eta_o}(c_1^*(\overline{\mathbb{Q}}_l)) \longrightarrow R\Psi_{\eta_o}(c_2^!(\overline{\mathbb{Q}}_l))$, que l'on obtient par fonctorialité de $R\Psi_{\eta_o}$ à partir de l'adjointe de la flèche

$$\overline{\mathbb{Q}}_l \longrightarrow c_{1,*}c_1^!(\overline{\mathbb{Q}}_l) = c_{1,*}c_2^!(\overline{\mathbb{Q}}_l).$$

En effet, comme $\mathcal{M}_{I,o}$ est lisse de dimension d sur Spec $\mathbb{F}_q$, son complexe dualisant $\varepsilon^!\overline{\mathbb{Q}}_l$, où $\varepsilon : \mathcal{M}_{I,o} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ est le morphisme structural, est canoniquement isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}}_l(d)[2d]$ (cf. [20] exposé XVIII). Comme on a trivialement $\varepsilon \circ c_1 = \varepsilon \circ c_2$, on obtient un isomorphisme canonique entre $c_1^!(\overline{\mathbb{Q}}_l) = c_1^!\varepsilon^!(\overline{\mathbb{Q}}_l(-d)[-2d])$ et $c_2^!(\overline{\mathbb{Q}}_l) = c_2^!\varepsilon^!(\overline{\mathbb{Q}}_l(-d)[-2d])$;

– $R\Psi_{\eta_o}(c_2^!(\overline{\mathbb{Q}}_l)) \longrightarrow c_2^! R\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, par changement de base.

Cette action est définie sur $\mathbb{Q}_l$ et commute à l'action de W_{F_o}. L'isomorphisme 12.1 est alors $\mathcal{H}_I^\infty \times W_{F_o}$-équivariant. La limite directe $EV_o^i = \varinjlim_I EV_{o,I}^i$ sur le système inductif paramétré par les idéaux I de A, les morphismes de transition étant induits par les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I}$, est alors munie d'une action de $\mathcal{H}^\infty$, définie sur $\mathbb{Q}_l$ et commutant à l'action de W_{F_o}. Les morphismes de transition étant injectifs, pour tout idéal I de A, on considère $EV_{o,I}^i$ comme un sous-espace vectoriel de EV_o^i et on a $EV_{o,I}^i = (EV_o^i)^{K_{\mathbb{A},I}^\infty}$, où l'action de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur $EV_{o,I}^i$, correspond à l'action induite de $\mathcal{H}_I^\infty$ sur les vecteurs de EV_o^i invariants sous $K_{\mathbb{A},I}^\infty$. L'isomorphisme 12.1 fournit un isomorphisme $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \times W_{F_o}$-équivariant $H_{\eta_o}^i \simeq EV_o^i$. Pour tout idéal I, les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espaces vectoriels $EV_{o,I}^i$ étant de dimension finie, on a le

Lemme 12.2. *Pour tout entier i, EV_o^i est isomorphe à $H_{\eta_o}^i$, en tant qu'objet de la catégorie $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$.*

Le complété formel $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}}$ de $\mathcal{M}_{I,o}$ en un point géométrique $\bar{z}$ de sa fibre spéciale est un schéma formel sur $\operatorname{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}})$ qui est spécial au sens de [1]. Pour tout k positif, le faisceau $R^k\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, construit par Berkovich dans loc. cit., sur la fibre spéciale de $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}}$ (réduite à un point), sera noté $R^k\Psi_{\eta_o}(\widehat{\overline{\mathbb{Q}}_l})$: c'est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 12.3. *(**Berkovich** cf. [1] théorème 3.1) Pour tout entier k positif, il existe un isomorphisme canonique $R^k\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)_{\bar{z}} \xrightarrow{\sim} R^k\Psi_{\eta_o}(\widehat{\overline{\mathbb{Q}}_l})$.*

Proposition 12.4. *Le support de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ est contenu dans la $i+1$-ème strate $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq i+1}$ de $\mathcal{M}_{I,s_o}$. De plus si $\bar{z}$ est un point géométrique de $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$ pour $i < h \leq d$, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ en $\bar{z}$ est $(GL_d(\mathcal{O}_o) \times W_o)$-isomorphe au $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie $\Psi_n^{h,i}$ défini au paragraphe 2.2 pour la $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$-algèbre* Def_n^h*, où n est la multiplicité de o dans I.*

Preuve : Pour tout entier i, on a $\dim \operatorname{Supp}(R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) \leq d-1-i$. D'après le théorème de Berkovich ci-dessus, pour tout point géométrique $\bar{z}$ de $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$, la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ en $\bar{z}$ ne dépend que du complété formel $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{z})}}$. D'après le théorème de Serre-Tate, ce dernier est isomorphe au spectre formel de

$\mathrm{Def}_n^h \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}(o)} \bar{\kappa}(o)[[t_1, \cdots, t_{d-h}]]$. Cette fibre ne dépend ainsi que de la strate à laquelle $\bar{z}$ appartient. Les strates $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h}$ étant de dimension $d-h$, on en déduit que le support de $R^i\Psi_{\eta_o}$ est inclu dans $\mathcal{M}_{I,o}^{\geq i+1}$. En outre d'après [1], les cycles évanescents de $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^h \hat{\otimes}_{\bar{\kappa}(o)} \bar{\kappa}(o)[[t_1, \cdots, t_{d-h}]])$ sont égaux à ceux de $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^h)$. □

Preuve du théorème 3.2.2: Soit I un idéal de A tel que n est la multiplicité de o dans I. D'après la proposition ci-dessus $\mathcal{M}_{I,o}$ est un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_o)$ tel que la fibre de $R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ en un point supersingulier, est isomorphe à $\Psi_n^{d,i}$. Le théorème découle alors de [1] théorème 4.1. □

13 Calcul des multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(H^n_{\eta_o})$, pour τ_o cuspidale

Soit M une représentation admissible de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times \times W_{F_o}$. Pour toute représentation admissible irréductible π_o de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l-adique irréductible σ_o de W_{F_o}, on notera $\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M)$, la multiplicité de $\pi_o \otimes \sigma_o$ dans la restriction de M à $GL_d(F_o) \times W_{F_o}$. On a alors l'égalité numérique

$$\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M) = \sum_{\Pi^\infty \in \mathcal{A}^\infty_{glob}(\pi_o)} \lambda_{\Pi^\infty \otimes \sigma_o}(M), \tag{13.1}$$

où $\mathcal{A}^\infty_{glob}(\pi_o)$ est l'ensemble des représentations admissibles irréductibles Π^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ telles que $(\Pi^\infty)_o \simeq \pi_o$. En particulier si $\lambda_{\pi_o \otimes \sigma_o}(M)$ est nul alors $\lambda_{\Pi^\infty \otimes \sigma_o}(M)$ est nul pour tout élément Π^∞ de $\mathcal{A}^\infty_{glob}(\pi_o)$.

13.1 Les strates non supersingulières sont induites

On a vu que la stratification de la fibre spéciale $\mathcal{M}_{I,s_o}$ introduite dans les deux paragraphes précédents, est compatible aux morphismes de restriction du niveau $r_{J,I}$. En ce qui concerne les correspondances de Hecke, on a les deux propositions suivantes.

Proposition 13.1.1. *Pour toute correspondance géométrique de Hecke $(\mathcal{M}_{J,o}, c_1, c_2)$ sur $\mathcal{M}_{I,o}$, les sous-schémas fermés de $\mathcal{M}_{J,o}$, $c_2^{-1}(\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h})$ et $c_1^{-1}(\mathcal{M}_{I,o}^{\geq h})$ sont égaux à $\mathcal{M}_{J,o}^{\geq h}$.*

Preuve : Soient g^∞ un élément de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ et $(\mathcal{M}_{J,o}, c_1, c_2)$ la correspondance géometrique qui lui est associée pour un certain idéal J de A (cf. le paragraphe 7.3). On rappelle que c_1 est le morphisme de restriction du niveau et que si $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$ est le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel sur $\mathcal{E}ll_{X,\mathcal{D},J}$, alors $(\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1) = c_2((\mathcal{E}_i, j_i, t_i))$ est isomorphe à $(\mathcal{E}_i, j_i, t_i)$. La proposition découle alors du lemme 10.1.2. □

On note P_h le parabolique de GL_d associé aux h-premiers vecteurs. Avec les notations précédentes, on a $P_{d,h,n} = P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$.

Proposition 13.1.2. *Pour tout élément A de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_{d,h,n}$, les correspondances de Hecke associées aux éléments de $A^{-1}P_h(F_o)A$ agissent sur $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A$ ($I = \mathfrak{m}_o^n I'$ avec $o \notin V(I')$), c'est-à-dire*

$$c_2^{-1}((\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A) = c_1^{-1}((\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_A) = \coprod_{A' \in \mathfrak{G}(A,m)} (\mathcal{M}_{J,o}^{=h})_{A'},$$

où $J = I'\mathfrak{m}_o^m$ avec m assez grand (cf. la preuve) et où $\mathfrak{G}(A, m)$ est l'ensemble des éléments A' de $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^m)/P_{d,h,m}$ qui ont pour image A modulo $\mathfrak{m}_o^n$.

Preuve : Soit g_o un élément de $GL_d(F_o) \cap \mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. Le morphisme c_2 du paragraphe 7.3, qui correspond à l'action de g_o^{-1}, est défini comme suit. Les idéaux I et J sont tels que $I = I'\mathfrak{m}_o^n$ et $J = I'\mathfrak{m}_o^m$ avec $o \notin V(I')$, où m est tel que le noyau de l'application $g_o : (F_o/\mathcal{O}_o)^d \longrightarrow (F_o/\mathcal{O}_o)^d$ est contenu dans $(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d$ et l'image de $(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d$ par g_o contient $(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d$. Soit $(\mathcal{E}_{i,\mathrm{univ}}, j_{i,\mathrm{univ}}, t_{i,\mathrm{univ}})$ le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique universel sur $S \coloneqq \mathcal{M}_{J,o}$ muni de sa $\mathfrak{m}_o^m$-structure de niveau universelle $\iota'_{o,m,\mathrm{univ}}$. Il existe alors un recouvrement ouvert de S par des ouverts affines $\operatorname{Spec} R_i$ et des éléments r_i de R_i tels que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d & \xrightarrow{\iota'_{o,m,\mathrm{univ}}} & \mathcal{F}_{o,m,\mathrm{univ}} \otimes R_i \\
\big\downarrow{\scriptstyle g_o} & & \big\downarrow{\scriptstyle [g_o \otimes r_i]} \\
(\mathfrak{m}_o^{-m}/\mathcal{O}_o)^d & \xrightarrow{\iota'_{o,m,\mathrm{univ}}} & \mathcal{F}_{o,m,\mathrm{univ}} \otimes R_i.
\end{array}$$

Le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ défini par le morphisme c_2 (cf. le paragraphe 7.3) est tel que $\mathcal{F}'_o \times_S \operatorname{Spec} R_i$ est isomorphe à l'image $[g_o \otimes r_i](\mathcal{F}_{o,\mathrm{univ}} \times_S \operatorname{Spec} R_i)$ et la structure de niveau n sur $(\mathcal{E}'_i, j'_i, t'_i)$ est définie sur chaque ouvert $\operatorname{Spec} R_i$, par la composée

$$(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \times R_i \longrightarrow (\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \times \operatorname{Spec} R_i \longrightarrow \mathcal{F}'_{o,n} \otimes R_i$$

où la première application est donnée par $g_o \otimes r_i$ et la deuxième application, par la restriction de $\iota_{o,m,\mathrm{univ}} \times_S \operatorname{Spec} R_i$ à $(\mathfrak{m}_o^{-n}/\mathcal{O}_o)^d \times \operatorname{Spec} R_i$. La proposition se déduit alors immédiatement de cette description et de la proposition 10.4.2. □

Proposition 13.1.3. *Soient o une place de X'. Pour tout $1 \leq h \leq d$, l'action de $GL_d(F_o)$ sur $\mathcal{M}_o^{=h}$ se décrit à partir de celle de $P_h(F_o)$ sur $(\mathcal{M}_o^{=h})_{\bar{1}} = \varprojlim_I (\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{\bar{1}}$ comme l'induite $\mathcal{M}_o^{=h} = (\mathcal{M}_o^{=h})_{\bar{1}} \times_{P_h(F_o)} GL_d(F_o)$ que l'on notera par la suite $\operatorname{Ind}_{P_h(F_o)}^{GL_d(F_o)} (\mathcal{M}_o^{=h})_{\bar{1}}$.*

Preuve : Le sous-espace $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{\bar{1}}$ est stable sous l'action de $P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$, où n est la multiplicité de o dans I. D'après les propositions 10.4.2 et 13.1.2, $\mathcal{M}_{I,o}^{=h}$

est isomorphe au produit $(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{\bar{1}} \times_{P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)} GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$. La stratification étant compatible aux morphismes de restriction du niveau, en passant à la limite on obtient $\mathcal{M}_o^{=h} = (\mathcal{M}_o^{=h})_{\bar{1}} \times_{P_h(\mathcal{O}_o)} GL_d(\mathcal{O}_o)$. L'action de $P_h(F_o)$ sur $(\mathcal{M}_o^{=h})_{\bar{1}}$ et la décomposition d'Iwasawa $GL_d(F_o) = P_h(F_o)GL_d(\mathcal{O}_o)$, donnent alors le résultat. $\square$

13.2 Les strates non supersingulières ont une contribution cuspidale nulle

Proposition 13.2.1. *Pour tout* $1 \leq h \leq d-1$*, on a une bijection* $GL_d(F_o)$*-équivariante*

$$\lim_{\overrightarrow{I}} H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) = \mathrm{Ind}_{P_h(F_o)}^{GL_d(F_o)} \lim_{\overrightarrow{I}} H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\bar{1}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

Preuve : On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 13.2. *Soient* V *un* κ*-espace vectoriel muni d'une action d'un groupe* G *et* P *un sous-groupe d'indice fini dans* G*. On suppose que* V *se décompose comme une somme directe de sous-espaces vectoriels* $V = \bigoplus_{\bar{g}\in G/P} V_{\bar{g}}$ *telle que pour tout élément* g' *de* G*, on a* $g'(V_{\bar{g}}) \subset V_{\overline{g'g}}$ $\forall \bar{g} \in G/P$*. On a alors une bijection* G*-équivariante* $V = \mathrm{Ind}_P^G(V_{\bar{1}})$*.*

Preuve du lemme: A un élément $(v_{\bar{g}})_{\bar{g}\in G/P}$ on associe l'application $f : G \longrightarrow V_{\bar{1}}$ telle que $f(g) = g.v_{\overline{g^{-1}}}$. L'espace vectoriel V est alors isomorphe à l'ensemble des applications $f : G \longrightarrow V_{\bar{1}}$ telles que $\forall g \in G$, $\forall p \in P$, $f(pg) = p.f(g)$. $\square$

D'après la proposition 13.1.3, n étant la multiplicité de o dans un idéal I de A, on a $\mathcal{M}_{I,o}^{=h} = \mathrm{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}^{GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)}(\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{\bar{1}}$. Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$ se décompose en une somme directe

$$\bigoplus_{\bar{g}\in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)/P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)} H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\bar{g}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

Pour tout $g' \in GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$, $g'(H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\bar{g}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$ est inclu dans $H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\overline{g'g}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$. D'après le lemme ci-dessus, $H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$ est alors l'induite de $P_h(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ à $GL_d(\mathcal{O}_o/\mathfrak{m}_o^n)$ de $H_c^p((\mathcal{M}_{I,o}^{=h})_{\bar{1}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$. On obtient ainsi une bijection $GL_d(\mathcal{O}_o)$-équivariante

$$\lim_{\overrightarrow{I}} H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) = \mathrm{Ind}_{P_h(\mathcal{O}_o)}^{GL_d(\mathcal{O}_o)} \lim_{\overrightarrow{I}} H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\bar{1}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

On a de plus une action de $P_h(F_o)$ sur $\lim_{\overrightarrow{I}} H_c^p((\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h})_{\bar{1}}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))$. Le résultat découle alors de la décomposition d'Iwasawa $GL_d(F_o) = P_h(F_o).GL_d(\mathcal{O}_o)$. $\square$

Corollaire 13.2.2. *Pour tout entier h tel que $1 \leq h \leq d-1$, pour toute représentation irréductible admissible τ^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est une représentation cuspidale de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l-adique irréductible σ_o de W_{F_o}, les multiplicités* $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}\left(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} H_c^p(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=h}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right)$, *sont nulles, quels que soient les entiers p et i.*

Preuve : Le résultat découle du lemme suivant dont une démonstration m'a été indiquée par Henniart, et du fait qu'une cuspidale ne peut pas être le sous-quotient d'une induite parabolique. □

Lemme 13.2.3. *Soit (π, V) une représentation admissible de P alors la restriction de π au radical unipotent U de P est triviale.*

Preuve : Soit L un sous-groupe de Levi de P ($P = LU$). Soient v un élément de V et $K_P = K_L K_U$ un sous-groupe compact ouvert de P tel que v appartienne à V^{K_P}. On choisit un élément z dans le centre de L tel que

$$z^{-n}K_Pz^n \subset \cdots \subset z^{-1}K_Pz \subset K_P \subset zK_Pz^{-1} \subset \cdots z^nK_Pz^{-n} \subset \cdots$$

et $\bigcup_{n\geq 0} z^nK_Pz^{-n} = K_LU$. Pour tout n et m, $V^{z^{-n}K_Pz^n}$ et $V^{z^{-m}K_Pz^m}$ sont des espaces vectoriels de même dimension (ils sont isomorphes, un isomorphisme étant donné par $\pi(z^{n-m})$). Ainsi on a $x \in V^{K_P} = V^{z^nK_Pz^{-n}} = V^{K_LU}$ lequel est inclu dans V^U. □

13.3 Les contributions cuspidales se calculent aux points supersinguliers

Proposition 13.3.1. *Pour toute représentation irréductible admissible τ^∞ de $(D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ telle que $(\tau^\infty)_o$ est cuspidale et pour toute représentation l-adique irréductible σ_o de W_{F_o}, on a*

(i) les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}\left(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} H^n(\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right)$ *sont, pour tout v, égales à*

$$\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}\left(\lim_{\overrightarrow{I}} H^n(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right).$$

En particulier elles sont nulles pour n strictement positif.

(ii) les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^n_{\eta_o})$ sont, pour tout n, égales à

$$\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}\left(H^0(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}, R^n\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right).$$

Preuve : (i) A la filtration $\emptyset \neq \mathcal{M}_{I,o}^{=d} = \mathcal{M}_{I,o}^{\geq d} \subset \mathcal{M}_{I,o}^{\geq d-1} \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{I,o}^{\geq 1} = \mathcal{M}_{I,s_o}$ est associée la suite spectrale

$$E_{1,I}^{v;p,q} = H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=p-1}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

D'après le corollaire 13.2.2, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{1,I}^{v;p,q})$ sont nulles pour $(p,q) \neq (d+1, -d-1)$. On rappelle que $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}$ est additive sur les suites exactes courtes et est positive sur les représentations effectives de sorte que, si pour un objet V de $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$, $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(V)$ est nulle, alors il en est de même pour tout sous-quotient de V. Par récurrence sur r, $E_{r,I}^{v;p,q}$ étant un sous-quotient de $E_{r-1,I}^{v;p,q}$, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{r,I}^{v;p,q})$ sont nulles pour $(p,q) \neq (d+1, -d-1)$. La suite $(E_{r,I}^{v;p,q})_r$ étant stationnaire pour r assez grand, on a donc $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^{v;p,q}) = 0$. $E_{\infty,I}^{v;n}$ étant filtré par les $E_{\infty,I}^{v;p,q}$ pour $p+q=n$, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^{v;n})$ sont alors nulles pour n strictement positif. On a aussi l'égalité

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim_{\overrightarrow{I}} E_{1,I}^{v;p,q}) = \sum_n (-1)^n \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^{v;n}).$$

On en déduit donc que $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^{v;0})$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{1,I}^{v;d+1,-d-1})$.

(ii) On a la suite exacte des cycles évanescents d'objets de $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$ (cf. 12.2)

$$E_{2,I}^{u,v} = H_c^u(\mathcal{M}_{I,s_{\bar{o}}}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l)) \Longrightarrow H_{\eta_o,I}^{u+v}.$$

D'après (i), les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{2,I}^{u,v})$ sont nulles pour $u \neq 0$ et pour $u=0$, elles sont égales à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}\left(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} H_c^0(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}, R^v\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right)$. Par récurrence sur r, $E_{r,I}^{u,v}$ étant isomorphe à $\mathrm{Ker}\, d_{r,I}^{u,v} / \mathrm{Im}\, d_{r,I}^{u-r,v-r+1}$, le lemme suivant montre que pour tout u, v, la multiplicité $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{r,I}^{u,v})$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{2,I}^{u,v})$. La suite $(E_{r,I}^{u,v})_r$ étant stationnaire pour r assez grand, on a $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^{u,v}) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{2,I}^{u,v})$. Ces multiplicités étant nulles pour $u \neq 0$, et $E_{\infty,I}^n$ étant filtré par les $E_{\infty,I}^{u,v}$ pour $u+v=n$, on a alors $\lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{\infty,I}^n) = \lambda_{\tau^\infty \otimes \sigma_o}(\lim\limits_{\overrightarrow{I}} E_{2,I}^{0,n})$. □

Lemme 13.3.2. *Soient U, V, W des objets de $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$ et $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ des flèches de $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$. Si les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(U)$ et $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(W)$ sont nulles, on a alors l'égalité numérique*

$$\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(\operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f) = \lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(V).$$

Preuve : La multiplicité $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}$ est additive sur les suites exactes courtes et est positive sur les objets effectifs. Ainsi pour tout sous-quotient V' de U ou de W, on a $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(V') = 0$. Comme $V/\operatorname{Ker} g$ est isomorphe à un sous-espace de W, alors $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(V/\operatorname{Ker} g)$ est nulle, soit $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(\operatorname{Ker} g) = \lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(V)$. On a de plus une surjection de U sur $\operatorname{Im} f$, d'où $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(\operatorname{Im} f) = 0$ et finalement l'égalité $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(\operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f) = \lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(V)$. □

14 Uniformisation du complété formel le long de l'ensemble des points supersinguliers

Le but de ce paragraphe est de décrire le complété formel $\widehat{\mathcal{M}_{I,\mathrm{Sing}}}$ de $\mathcal{M}_{I,o}$ le long des points supersinguliers. De manière équivalente, cela revient à décrire le complété formel de $\mathcal{M}_{I,o} \otimes_{\mathcal{O}_o} \mathcal{O}_o^{\mathrm{nr}}$ le long de $\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}$ muni de l'action du Frobenius en o.

Soit G_o un $\mathcal{O}_o$-module formel normal sur $\bar{\kappa}(o)$, de hauteur d. On note Def_n^d son anneau des déformations universelles. Pour tout entier r, on pose $\mathrm{Def}_n^{d,(r)} = \mathrm{Def}_n^d \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}},\alpha} \hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$ où α est la puissance r-ième de l'inverse du relèvement canonique $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$ du Frobenius de $\kappa(o)$. On rappelle (cf. le paragraphe 2.3) que $\mathrm{Def}_n^{d,(r)}$ est l'anneau des déformations universelles de $\mathrm{Frob}_o^r(G_o)$. L'action du sous-groupe $\mathfrak{P}$ de $GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times W_{F_o}$ sur $\varprojlim_n \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^d)$, donnée au paragraphe 2.3, peut s'interpréter en disant que $\coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{d,(r)})$ est munie d'une action de $\mathrm{Frob}_o^{\mathbb{Z}}$ ainsi que de correspondances de Hecke pour les éléments de $GL_d(F_o)$, définies comme suit. L'action de Frob_o est donnée par les isomorphismes canoniques d'anneaux (et non de $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$-algèbre)

$$\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{d,(r)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{d,(r+1)}) \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

A tout élément g_o de $GL_d(F_o)$ et pour tout $m \geq 0$ est associé une correspondance

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Def}_n^d & \\ \mathrm{Def}_m^d \arrow[ur, "c_1"] & & \mathrm{Def}_m^{d,(r)} \arrow[ul, "c_2'"'] \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

où $r = -\operatorname{val}(\det g_o)$ et n est tel que le noyau de $\times g_o^{-1} : (F_o/\mathcal{O}_o)^d \longrightarrow (F_o/\mathcal{O}_o)^d$ est contenu dans $(\pi_o^{-n}\mathcal{O}_o/\mathcal{O}_o)^d$ et l'image de $\times g_o^{-1}$ contienne

$(\pi_o^{-m}\mathcal{O}_o/\mathcal{O}_o)$ (cf. le paragraphe 2.3). Le $\mathcal{O}_o$-module formel G_o étant choisi normal, $(\pi_o^{-1}, 1, \mathrm{Frob}_o^{-d})$ agit trivialement.

Proposition 14.1. *Pour tout idéal I de A, on a un isomorphisme*

$$\widehat{\mathcal{M}_{I,\mathrm{Sing}}} \xrightarrow{\sim} \bar{D}^\times \backslash \left[(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}) \right], \qquad (14.2)$$

où m est la multiplicité de o dans I. Cette famille d'isomorphismes est de plus compatible à l'action de Frob_o *et aux morphismes de restriction du niveau. En outre pour $g^\infty \in (D_{\mathbb{A}}^\infty)^\times$ et pour J un idéal de A tel que $K_{\mathbb{A},J}^\infty \subset K_{\mathbb{A},I}^\infty \cap (g^\infty)^{-1} K_{\mathbb{A},I}^\infty g^\infty$, la correspondance géométrique de Hecke sur $\widehat{\mathcal{M}_{I,\mathrm{Sing}}}$ qui leur est associée, fournit via les isomorphismes (14.2) pour I et J, la correspondance de Hecke suivante*

$$\begin{tikzcd}
\bar{D}^\times \backslash \left[\begin{array}{c} (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},J}^{\infty,o} \\ \times \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{d,(r)}) \end{array} \right] \arrow[d, "c_1"] \arrow[dr, "c_2"] & \\
\bar{D}^\times \backslash \left[\begin{array}{c} (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \\ \times \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}) \end{array} \right] \arrow[r, dashed] & \bar{D}^\times \backslash \left[\begin{array}{c} (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \\ \times \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}) \end{array} \right]
\end{tikzcd}$$

où n est la multiplicité de o dans J, où c_1 est induit par $K_{\mathbb{A},J}^{\infty,o} \subset K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o}$ et $\mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^{d,(r)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)})$*, et où c_2 est induit par $K_{\mathbb{A},J}^{\infty,o} \subset K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \cap (g^{\infty,o})^{-1} K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} g^{\infty,o} \xrightarrow{Ad(g^{\infty,o})} K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o}$ et le morphisme $c_2' : \mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_n^d) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)})$ donné par g_o (cf. ci-dessus).*

Preuve : D'après le paragraphe 10.2, il existe un seul couple $(\tilde{F}, \tilde{\Pi})$ pour les points supersinguliers, $(F, \tilde{\Pi}_F)$ (cf. le proposition 10.2.1). Soit alors (V, φ, λ), un φ-espace muni d'une action de D qui a $(F, \tilde{\Pi}_F)$ pour φ-paire. On note $\mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty = \mathcal{Y}_I^{\infty,o} \times \mathcal{Y}_o$ (cf loc. cit.), l'ensemble, pour toutes les places x de F, des $\mathcal{D}_x$-réseaux M_x de V_x muni d'une structure de niveau α_{x,n_x} $(I = \prod_x \mathfrak{m}_x^{n_x})$, qui vérifient les conditions (i)-(iv) de la proposition (9.3) de [17]. L'ensemble $\mathcal{M}_{I,o}^{=d}(\bar{\kappa}(o))$ des points supersinguliers est alors isomorphe à $\bar{D}^\times \backslash \mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty$.

On fixe un point base $s_0 = (M_x(s_0), \alpha_x(s_0))_{x\in|X|}$ de $\mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty$ tel que le $\mathcal{O}_o$-module formel G_o associé au $\mathcal{D}_o$-réseau $M_o(s_0)$ est normal. Le choix de ce point base donne un isomorphisme

$$\mathcal{Y}_{\mathbb{A},I}^\infty \simeq \left((D_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \right) \times \mathbb{Z}.$$

On note $(\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0))$ le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique défini sur $\bar{\kappa}(o)$, muni d'une I-structure de niveau $\bar{\iota}_I(s_0)$, tel que pour toute place x de F, $\mathcal{E}_{0,x}(s_0) = M_x(s_0)$ et $\iota_x(s_0) = \alpha_x(s_0)$. Pour un point supersingulier $\bar{s}$ et $s = (\bar{d}^{\infty,o}, r)$ un élément de $\mathcal{Y}^{\infty}_{\mathbb{A},I}$ dans la classe de $\bar{s}$, on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{s})}} \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}),$$

donné par le théorème de Serre-Tate en considérant $\widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{s})}}$ comme représentant les déformations de $(\bar{d}^{\infty,o}, \mathrm{Frob}_o^r)((\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0)), \iota_I(s_0))$. On obtient alors un isomorphisme

$$\coprod_{s\in\mathcal{Y}^{\infty}_{\mathbb{A},I}} \widehat{\mathcal{M}_{I,(\bar{s})}} \longrightarrow \Big((D^{\infty,o}_{\mathbb{A}})^{\times}/K^{\infty,o}_{\mathbb{A},I}\Big) \times \coprod_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}), \qquad (14.3)$$

compatible à l'action de Frob_o et aux morphismes de restriction du niveau. L'action de $\bar{D}_o^{\times}$ sur le membre de droite de 14.3 permet de définir une action de $\bar{D}_o^{\times}$ sur le membre de gauche de 14.3 de sorte que l'action de $\bar{D}^{\times} \subset \bar{D}_o^{\times}$ ainsi définie, relève l'action de $\bar{D}^{\times}$ sur $\mathcal{Y}^{\infty}_{\mathbb{A},I}$. L'isomorphisme 14.2 découle alors de l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}_{I,\mathrm{Sing}}} \simeq \coprod_{x\in\mathrm{Sing}_I(\bar{\kappa}(o))} \widehat{\mathcal{M}_{I,(x)}}$.

Vérifions la compatibilité de cette famille d'isomorphismes aux correspondances géométriques de Hecke (cf. le paragraphe 7.3). Le résultat est immédiat en ce qui concerne les correspondances associées aux éléments de $(D^{\infty,o}_{\mathbb{A}})^{\times}$ (cf. le paragraphe 10.2). Soit g_o un élément de $GL_d(F_o)\cap\mathbb{M}_d(\mathcal{O}_o)$. La correspondance de Hecke qui lui est associée sur le membre de droite de 14.2 (resp. sur le membre de gauche de 14.2) donne pour tout r des morphismes $g_o^{drt}(r)$ (resp. $g_o^{gch}(r)$) $\mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_n^{d,(r)}) \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r+r')})$ avec $r' = -\mathrm{val}(\det g_o)$. Il faut vérifier que pour tout r, $g_o^{gch}(r) = g_o^{drt}(r)$. Un point base s_0 de $\mathcal{Y}^{\infty}_{\mathbb{A},I}$ étant fixé comme dans la preuve de la proposition précédente, soit $s = (\bar{d}^{\infty,o}, r)$ l'élément de $\mathcal{Y}^{\infty}_{\mathbb{A},I}$, image du point base s_0 par $(\bar{d}^{\infty,o}, r)$. Soit $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ la déformation universelle, définie sur $S = \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)})$, de $(\bar{d}^{\infty,o}, \mathrm{Frob}_o^r)((\bar{\mathcal{E}}_i(s_0), \bar{j}_i(s_0), \bar{t}_i(s_0)), \bar{\iota}_I(s_0))$. On note $((\mathcal{E}_i^1, j_i^1, t_i^1), \iota_J^1)$ le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique du paragraphe 7.3, image de $((\mathcal{E}_i, j_i, t_i), \iota_I)$ par g_o^{-1}. Sur le point générique η de S, $(\mathcal{F}_o^1)^* \times_S \eta$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}[g_o]^* \times_S \eta \subset \mathcal{F}_o^* \times_S \eta$ et le $\mathcal{O}_o$-module formel $Gr_o(\mathcal{F}_o^1) \times_S \eta$ est alors isomorphe au $\mathcal{O}_o$-module formel $Gr_o(\mathcal{F}_o)_{\mathrm{Ker}\, g_o} \times_S \eta$ (cf. les notations du paragraphe 2.3). On a alors, pour tout r, $g_o^{gch}(r) \times_S \eta = g_o^{drt}(r) \times_S \eta$, d'où $g_o^{gch}(r) = g_o^{drt}(r)$. □

15 La représentation locale fondamentale revisitée

On reprend le caractère d'ordre fini ξ_o de $F_o^{\times}$ et ξ_o' sa restriction à $\mathcal{O}_o^{\times}$. Pour un objet V de $C_{(D^{\infty})^{\times},W_o}$, on a $V = \varinjlim_{K\in\mathcal{I}} V^K$, où $\mathcal{I}$ est un ensemble de sous-groupes compacts ouverts de $D_o^\times \simeq GL_d(F_o)$, qui est un système fondamental de voisinages de l'élément neutre et V^K est de dimension finie. On pose $V(\xi'_o) = \varinjlim_{K \in \mathcal{I}} V^K(\xi'_o)$, et on définit $V(\xi_o)$ comme le quotient $V(\xi'_o)/(\pi_o - \xi_o(\pi_o).\mathrm{Id})V(\xi'_o)$.

On rappelle que la représentation locale fondamentale $\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ (cf. 2.4) est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{r=0}^{d-1} \varinjlim_n \Psi_n^{d,i,(r)}(\xi'_o)$ où $\Psi_n^{d,i,(r)}$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension finie du paragraphe 2.2 pour la $\hat{\mathcal{O}}_o^{\mathrm{nr}}$-algèbre $\mathrm{Def}_n^{d,(r)}$. L'action de $GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times W_{F_o}$ se décrit comme suit. Pour tout r, la limite $\varinjlim_n \Psi_n^{d,i,(r)}(\xi'_o)$ est munie d'une action du sous-groupe $\mathfrak{P}$ défini comme le noyau de l'application qui au triplet $(g_o, \delta_o, \sigma_o) \in GL_d(F_o) \times \bar{D}_o^\times \times W_{F_o}$ associe la classe modulo $d\mathbb{Z}$ de $-\mathrm{val}(\det(g_o) + \mathrm{val}(\mathrm{rn}(\delta_o)) + \deg(\sigma_o)$. Soit $\tau_o \in W_{F_o}$ tel que son image dans $F_o^\times$ par le morphisme de la théorie du corps de classe, est π_o. L'élément τ_o induit des isomorphismes $\mathrm{Def}_n^{d,(r+1)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_n^{d,(r)}$, pour $0 \leq r \leq d-2$, de sorte que l'endomorphisme associé à τ_o^d est égal à $\xi_o(\pi_o)^{-1}\,\mathrm{Id}$.

Proposition 15.1. *Pour tout entier i positif,* $\left(\varinjlim_I H^0(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right)(\xi_o)$ *est isomorphe, en tant qu'objet de* $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$, *à l'espace vectoriel des applications* $f' : (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ *telles qu'il existe un idéal I de A (qui dépend de f') pour lequel*

$$\forall \gamma \in (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times,\ \forall k \in K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o},\ \forall \delta \in \bar{D}^\times,\ \ f'(d\gamma k) = d_o f'(\gamma),$$

où d_o désigne l'image de d dans $\bar{D}_o^\times$.

Preuve : D'après la proposition 14.1, pour tout idéal I de A, on a

$$\widehat{\mathcal{M}_{I,\mathrm{Sing}}} \simeq \bar{D}^\times \backslash \left[(\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty,o})^\times / K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o} \times \coprod_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\mathrm{Def}_m^{d,(r)}) \right],$$

où m est la multiplicité de o dans I. La proposition découle alors du théorème de Berkovich (cf. le théorème 12.3), en passant à la limite sur I. $\square$

On pose $\mathcal{C}_{\bar{D}}^\infty := C^\infty(\bar{D}^\times \backslash (\bar{D}_{\mathbb{A}}^\infty)^\times)$.

Proposition 15.2. *Pour tout entier i positif,* $\left(\varinjlim_I H^0(\mathcal{M}_{I,\bar{o}}^{=d}, R^i\Psi_{\eta_o}(\overline{\mathbb{Q}}_l))\right)(\xi_o)$ *est isomorphe, en tant qu'objet de* $C_{(D^\infty)^\times, W_o}$, *à* $\left[\mathcal{C}_{\bar{D}}^\infty \otimes \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)\right]^{\bar{D}_o^\times}$.

Preuve : Soit f' une fonction comme dans la proposition précédente. On définit une fonction $f : (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ par la formule $f(\gamma) = \gamma_o^{-1} f'(\gamma^o)$. On vérifie alors que pour tout élément d de $\bar{D}^{\times}$ et tout élément δ_o de $\bar{D}_o^{\times}$, on a

$$f(d\gamma\delta_o) = \delta_o^{-1}\gamma_o^{-1}d_o^{-1} f'((d\gamma)^o) = \delta_o^{-1}\gamma_o^{-1} f'((d\gamma)^o) = \delta_o^{-1} f(\gamma).$$

L'ensemble de fonctions de l'énoncé de la proposition précédente est alors en bijection $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \times W_{F_o}$-équivariante avec l'ensemble des fonctions $f : (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times} \longrightarrow \mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)$ telles qu'il existe un idéal I de A (qui dépend de f) pour lequel

$$\forall \delta_o \in \bar{D}_o^{\times},\ \forall k \in K_{\mathbb{A},I}^{\infty,o},\ \forall d \in \bar{D}^{\times}\ \forall \gamma \in (\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}\ \ f(d\gamma k\delta_o) = \delta_o^{-1} f(\gamma). \ \square$$

Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel $\mathcal{C}_{\bar{D}}^{\infty}$ se décompose comme la somme directe $\bigoplus_{\bar{\tau}\ \bar{\tau}_\infty = 1_\infty} m(\bar{\tau})\bar{\tau}$, où $m(\bar{\tau})$ est la multiplicité de $\bar{\tau}$ dans $\mathcal{C}_{\bar{D}}^{\infty}$.

Proposition 15.3. *Pour toute représentation τ^{∞} irréductible de $(D_{\mathbb{A}}^{\infty})^{\times}$ telle que $(\tau^{\infty})_o$ est une représentation cuspidale de $GL_d(F_o)$ et pour toute représentation l-adique irréductible σ_o de W_{F_o}, les multiplicités $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H_{\eta_o}^i)$ sont, pour tout n, données par la somme*

$$\sum_{\bar{\tau}\in\mathcal{A}(\tau^{\infty,o})} m(\bar{\tau})\lambda_{\tau_o\otimes\check{\bar{\tau}}_o\otimes\sigma_o}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)),$$

où $\mathcal{A}(\tau^{\infty,o})$ désigne l'ensemble des sous-représentations $\bar{\tau}$ irréductibles de $\mathcal{C}_{\bar{D}}^{\infty}$ telles que $\bar{\tau}^o = \tau^{\infty,o} \otimes 1_\infty$.

Preuve : D'après la proposition 13.3.1 (ii) et la proposition précédente, $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H_{\eta_o}^i)$ est égale à $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}\left([\mathcal{C}_{\bar{D}}^{\infty}\otimes\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)]^{\bar{D}_o^{\times}}\right)$. La proposition découle alors du lemme de Schur. $\square$

Preuve du théorème principal 3.2.4 Le corps local est F_o et on indexe par o toutes les notations de 3.2.4. Soit π_o une représentation irréductible cuspidale de $GL_d(F_o)$ de caractère central ξ_o (d'ordre fini). La proposition qui suit se trouve essentiellement dans [12] Appendice (A-4). La preuve m'en a été indiquée par Ioan Badulescu.

Proposition 15.4. *(cf. [12] Appendice (A-4)) Soit Π une représentation automorphe cuspidale de $GL_d(\mathbb{A})$ qui vérifie les hypothèses du lemme 11.3, c'est-à-dire telle que $\Pi_o \simeq \pi_o$, $\Pi_\infty \simeq St_\infty$, et Π_{x_i} est cuspidale pour $i = 1, \cdots, 4$. Il existe alors une unique représentation automorphe, à isomorphisme près, $\bar{\tau}$ de $\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\times}$ telle que pour toute place v n'appartenant pas à S, Π_v est isomorphe à $\bar{\tau}_v$. On a alors $\bar{\tau}_\infty \simeq 1_\infty$ et pour toute place x de S, en particulier pour $x = o$, $\bar{\tau}_x$ est isomorphe à $\mathfrak{J}_{F_x,d}(\Pi_x)$. En outre la multiplicité $m(\bar{\tau})$ de $\bar{\tau}$ dans $L(\bar{D}^{\times}\backslash\bar{D}_{\mathbb{A}}^{\times})$ est égale à 1.*

Preuve : En utilisant la formule des traces simples de Deligne-Kazhdan, exactement comme dans [12], on arrive à l'égalité

$$\prod_{x\in S} \Theta_{\Pi_x} = \sum_{\bar{\tau}\in\mathcal{A}(\Pi)} m(\bar{\tau}) \prod_{x\in S} \Theta_{\bar{\tau}_x},$$

où $\mathcal{A}(\Pi)$ est l'ensemble des représentations automorphes $\bar{\tau}$ de $\bar{D}^\times_{\mathbb{A}}$ telles que $\bar{\tau}^S \simeq \Pi^S$. Pour tout $x \in S\backslash\{\infty\}$, Π_x est cuspidale, et d'après loc. cit., la correspondance de Jacquet-Langlands locale donne l'égalité $\Theta_{\Pi_x} = (-1)^{d-1}\Theta_{\mathfrak{J}_{F_x,d}(\Pi_x)}$. Le caractère Θ_{St_∞} étant égal à $(-1)^{d-1}\Theta_{1_\infty}$, on obtient alors l'égalité suivante

$$\prod_{x\in S} \Theta_{\mathfrak{J}_{F_x,d}(\Pi_x)} = \sum_{\bar{\tau}\in\mathcal{A}(\Pi)} m(\bar{\tau}) \prod_{x\in S} \Theta_{\bar{\tau}_x},$$

où désormais toutes les représentations qui interviennent sont des représentations du produit $\prod_{x\in S} \bar{D}^\times_x$. La proposition découle alors de l'indépendance des caractères sur $\prod_{x\in S} \bar{D}^\times_x$. □

Soient donc Π une telle représentation de $GL_d(\mathbb{A})$ et $\tau \in L(D^\times F^\times_\infty\backslash D^\times_{\mathbb{A}})$, la représentation donnée par la proposition 11.4 qui vérifie donc $\tau^{x_1,x_2} \simeq \Pi^{x_1,x_2}$ $(m(\tau) = 1)$. D'après la proposition ci-dessus, l'ensemble $A(\tau^{\infty,o})$ est alors réduit à un seul élément $\bar{\tau}$ tel que $m(\bar{\tau}) = 1$. Pour σ_o une représentation l-adique de W_{F_o}, la proposition 15.3 s'écrit

$$\lambda_{\pi_o\otimes\check{\bar{\tau}}_o\otimes\sigma_o}(\mathcal{U}^{d,i}(\xi_o)) = \begin{cases} \lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^i_{\eta_o}) & \text{si } \tau_o = \mathfrak{J}_{F_o,d}(\pi_o) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $i = d-1$, le théorème 11.5 de Laumon, Rapoport et Stuhler, montre que la multiplicité $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^{d-1}_{\eta_o})$ est non nulle si et seulement si σ_o est isomorphe à $\mathfrak{L}_{F_o,d}(\tau_o^\infty) \otimes |-|^{\frac{1-d}{2}}$. Elle est alors égale à 1.
- Pour $i \neq d-1$, le théorème 11.2 de Laumon, Rapoport et Stuhler, montre que la multiplicité $\lambda_{\tau^\infty\otimes\sigma_o}(H^i_{\eta_o})$ est nulle si $i \neq d-1$. □

Bibliographie

1. Berkovich, V.G.: Vanishing cycles for formal schemes II. Invent. math. **125**(3), 367-390 (1996)
2. Carayol, H.: Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. Composition Mathematica **59**, 151-236 (1986)
3. Carayol, H.: Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e séries **19**, 409-468 (1986)
4. Carayol, H.: Non-abelian Lubin-Tate Theory. In: Clozel, L., Milne, J.S. (eds) Automorphics Forms, Shimura Varieties and L-Functions, II. Perspect. Math. **11**, pp. 15-39. Boston: Academic Press 1990
5. Deligne, P.: Sur les représentations l-adiques liées aux formes modulaires. Lettre à Piatetski-shapiro, 1973

6. Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. In: Deligne, P., Kuyk, W. (eds) Modular functions of one variable II, Antwerpen conference 1972. (Lect. Notes Math. **349**, 501-597) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
7. Drinfel'd, V.G.: Elliptic modules. Math. USSR, Sb. **23**, 561-592 (1974)
8. Drinfel'd, V.G.: Varieties of modules of F-sheaves. Funct. Anal. Appl. **21**, 107-122 (1987)
9. Drinfel'd, V.G.: Letter to H. Carayol (January 12th, 1980)
10. Genestier, A.: Espaces symétriques de Drinfel'd, le cas de GL_d sur un corps local d'égale caractéristique. Prébublications Université de Paris-Sud.
11. Harris, M., Taylor, R.: On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. A paraitre.
12. Henniart, G.: On the local Langlands conjecture for $GL(n)$: The cyclic cas. Ann. Math. **123**, 145-203 (1986)
13. Henniart, G.: Les conjectures de Langlands locales pour $GL(3)$. Mémoires S.M.F. nouvelle série, **11/12** (1984)
14. Henniart, G.: Le point sur la conjecture de Langlands pour $GL(N)$ sur un corps local. In: Goldstein, C. (ed). Séminaire de théorie des nombres de Paris 1983-1984. (Prog. Math., **59**, pp. 115–131) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1985
15. Illusie, L.: Complexe cotangent et déformations. I, II. (Lect. Notes Math. **239**, **283**) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1971, 1973
16. Katz, N., Mazur, B.: Arithmetic moduli of elliptic curves. In: Annals of Math. Studies **108**. Princeton University Press
17. Laumon, G., Rapoport, M., Stuhler, U.: $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence. Invent. Math. **113**, 217–238 (1993)
18. Laumon, G.: Cohomology with compact supports of Drinfel'd modular varieties. In: Garling, Dieck, Walters (eds.), Cambridge Studies in Advanced Mathematics.
19. Rapoport, M.: On the bad reduction of Shimura varieties. In: Clozel, L., Milne, J.S. (eds.), Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions II. Perspect. Math. **11**, pp 253-321. Boston: Academic Press 1990
20. SGA 4 tome 3, Deligne, P.: (Lect. Notes Math. **305**) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
21. SGA $4\frac{1}{2}$, Deligne, P.: (Lect. Notes Math. **569**) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
22. SGA 7 I, Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique. (Lect. Notes Math. **288**) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973
23. SGA 7 II, Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique. (Lect. Notes Math. **340**) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1973