

# Aplikace matematiky

---

Jiří Kobza

Методы типа Адамса с вторыми производными

*Aplikace matematiky*, Vol. 20 (1975), No. 6, 389–405

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103607>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

МЕТОДЫ ТИПА АДАМСА С ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Иржи Кобза\*)

(Поступило в редакцию 21-ого августа 1972 г., переработаное 1-ого апреля 1974 г.)

В предлагаемой статье изучаются методы типа Адамса в форме (2) для численного решения задачи (1). В работах [4], [5], [6] изучались частные случаи, в работе [1] общая теория таких методов для случая  $r, s \leq 0$ . В работе [3] изучена конкретная формула, в короткой  $r = s = 1, m = n = 2$ . Исследуется разрешимость задачи (2)–(3) и сходимость её решений к решению задачи (1). Методика исследования примыкает к работе [2], в которой изучены только методы с первой производной.

1.

1.1 Пусть имеется задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(a) = b.$$

Предположим, что

1°  $f(x, y)$  обладает непрерывными частными производными первого порядка в прямоугольнике  $\Pi = \{|x - a| \leq A, |y - b| \leq B\}$ ; тогда решение  $y(x)$  задачи (1) существует и единственно по меньшей мере в промежутке  $\langle a - H, a + H \rangle$ ,  $H = \min(A, B/M_f)$ ,  $M_f = \max\{|f(x, y)|, (x, y) \in \Pi\}$ . Обозначим  $L_f$  постоянную Липшица функции  $f$  по отношению к  $y$ .

2° функция  $g(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot f(x, y)$ ,  $\{g[x, y(x)] = y''(x)\}$ , которая в силу 1° непрерывна и ограничена на  $\Pi$ ,  $|g(x, y)| \leq M_g$ , удовлетворяет здесь условию Липшица по отношению к  $y$  с постоянной  $L_g$ .

1.2 При численном решении задачи (1) будем искать значения  $y(x_k)$  в точках равномерной сетки  $x_k = a + kh$ ,  $h > 0$  при помощи разностного уравнения

$$(2) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v} = h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}$$

\*) Работа проведена во время стажировки в МГУ под руководством А. Д. Горбунова.

где  $f_j = f(x_j, y_j)$ ,  $g_j = g(x_j, y_j)$ ;  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$  — вещественные постоянные и  $\alpha_0 \neq 0$ ;  $r, s$  — целые,  $m$  — натуральное,  $n, l$  — неотрицательные целые числа. В формуле одновременно используются узлы

$$x_{k-q}, \dots, x_k, \dots, x_{k+t}; \quad q = \max(m, n - r, l - s), \quad t = \max(0, r, s).$$

Решением уравнения (2) в промежутке  $\langle a, a + \bar{x} \rangle$ ,  $0 < \bar{x} \leq a + A$  при заданной сетке  $\{x_k\}$  называем сеточную функцию  $\{y_k\}_{k=0}^{N_h}$ ,  $N_h = \lceil (\bar{x} - a)/h \rceil$ , для которой  $|y_k - b| \leq B$  и которая удовлетворяет соотношению (2) для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ ; для этого надо подходящим образом определить значения  $y_j$ ,  $j = -1, -2, \dots, -q + 1$  (начальные условия),  $y_{N_h+j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, t$  и соответствующие значения  $f_j, g_j$  в случае, когда  $(x_j, y_j) \notin \Pi$ .

Начальные условия для уравнения (2) заданы при помощи *начальной функции*  $\eta_h(x)$ , определенной для  $x \in \langle a - h(q - 1), a \rangle$ ;

$$y_k = \eta_h(x_k), \quad k = 0, -1, -2, \dots, -q + 1$$

и предполагаются выполненными условия

- а)  $\eta_h(a) = b$ , б)  $(x, \eta_h(x)) \in \Pi$ ,
- в)  $|\eta_h(x') - \eta_h(x'')| \leq \varphi(|x' - x''|)$  при  $|x' - x''| \leq h$  с непрерывной функцией  $\varphi(h)$  обладающей свойством:  $\varphi(h) \rightarrow 0$  монотонно при  $h \rightarrow 0$ .

**1.3** На коэффициенты  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$  и параметры  $m, n, l; r, s$  налагаются требования

I. *разрешимости задачи* (2)–(3); это значит возможность построения чисел  $h_0, \bar{x}$  ( $h_0 > 0, 0 < \bar{x} - a \leq H$ ) таких, что всякому  $h \in (0, h_0)$  сопоставляется определенное решение  $\{y_k\}_{k=0}^{N_h}$ ,  $N_h = \lceil \bar{x} - a/h \rceil$  задачи (2)–(3);

II. *сходимости*, которое для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$  требует равномерное по  $k$  выполнение соотношения

$$|y(x_k) - y_k| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0;$$

III. *максимальной аппроксимации*, состоящее в том, чтобы для всякого решения уравнения  $y' = f(x, y)$  имело место соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^m \alpha_v y(x_{k-v}) - \sum_{v=0}^n \beta_v f[x_{k+r-v}, y(x_{k+r-v})] - \\ & - h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g[x_{k+s-v}, y(x_{k+s-v})] = O(h^p), \quad k = 0, 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

с положительным числом  $p$  по возможности большим.

**1.4 Лемма 1.** Пусть  $L[y] \equiv \sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v}$  — устойчивый оператор, числа  $c_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  определены соотношением

$$(4) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v c_{k-v} = \begin{cases} 1 & \text{для } k = 0, \\ 0 & \text{для } k > 0 \end{cases} \quad c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-m} = 0.$$

Тогда 1° существует постоянная  $C > 0$  такая, что  $|c_k| \leq C$ ;

2° если  $\sum_{v=v}^m \alpha_v = 0$ , то для  $j \geq 0$  имеет место соотношение

$$(5) \quad S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{v=1}^{m-i} \alpha_{i+v} c_{j-v} = -1$$

Доказательство. 1° Определение устойчивости (по Дальквисту) приведено в [1], [2]; из него вытекает ограниченность  $c_k$ , так как они только членом  $c_{-m} = 0$  отличаются от ограниченного решения однородного уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^m \alpha_v c_{k-v} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad c_0 = 1/\alpha_0, \quad c_{-1} = c_{-2} = \\ &= \dots = c_{-m+1} = 0. \end{aligned}$$

2° В силу наших предположений имеет место

$$c_{j-k-1} \sum_{i=0}^m \alpha_i = 0 = \sum_{v=0}^m \alpha_v c_{j-k-v}, \quad k = 1, 2, \dots, j - m;$$

потому

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{v=1}^{m-i} \alpha_{i+v} c_{j-v} = \sum_{v=1}^m c_{j-v} \sum_{i=v}^m \alpha_i = \sum_{v=1}^m c_{j-1-v} \sum_{i=v}^m \alpha_i = \dots = \sum_{v=1}^m c_{m-v} \sum_{i=v}^m \alpha_i.$$

Так как

$$0 = \sum_{v=1}^m c_{m-v} \sum_{i=0}^m \alpha_i = S + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v=0}^m \alpha_v c_{k-v} = S + 1$$

в силу (4), то имеет место утверждение леммы.

## 2.

**2.1 Лемма 2.** Пусть  $L[y] \equiv \sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v}$  — устойчивый оператор,  $\sum_{v=0}^m \alpha_v = 0$ ,  $c_k$  определены по (4).

Если  $\{z_k\}_{k=1}^{N_h}$  является решением задачи

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_{v=0}^m \alpha_v z_{k-v} &= hF_k, \quad z_i = \eta_h(x_i) \quad \text{для } i = 0, -1, \dots, -m + 1; \\ k &= 1, 2, \dots, N_h, \end{aligned}$$

в которой  $\eta_k(x)$  обладает свойствами а), б), в) из 1.2 и  $|F_k| \leq F$ ,  
то  $|z_j - z_0| \leq M\varphi(h) + jhCF$  для  $j = 1, 2, \dots, N_h$ ,  
где  $M = \frac{1}{6}Cm(m^2 - 1) \cdot \max_v |\alpha_v|$  и  $C$  определено в лемме 1.

Доказательство. Умножим (6) на  $c_{j-k}$  и просуммируем по  $k = 1, 2, \dots, j$ :

$$(7) \quad \sum_{k=1}^j c_{j-k} \sum_{v=0}^m \alpha_v z_{k-v} = h \sum_{k=1}^j c_{j-k} F_k.$$

Преобразованием суммы на левой стороне (7) в силу (4), (5) получается

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j c_{j-k} \sum_{v=0}^m \alpha_v z_{k-v} &= \sum_{i=0}^{m-1} z_{-i} \sum_{v=1}^{m-i} \alpha_{i+v} c_{j-v} + \sum_{i=1}^j z_i \sum_{v=0}^m \alpha_v c_{j-i-v} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (z_{-i} - z_0) \sum_{v=1}^{m-i} \alpha_{i+v} c_{j-v} + z_j - z_0. \end{aligned}$$

По свойствам начальной функции  $|z_0 - z_{-i}| \leq i\varphi(h)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . После подстановки этих выражений в (7) и перехода к оценке модулей получаем утверждение леммы.

В 2.2–2.4 будем предполагать что  $L[y]$  устойчив и уравнение (2) пронормировано так, что  $\alpha_0 = 1$ .

**2.2** Пусть в (2) имеет место  $r < 0, s < 0$  (явные методы); тогда для разрешимости задачи (2)–(3) достаточно выбрать числа  $h_0, \bar{x}$  так, чтобы имело место  $0 < h_0 \leq h_1$ ,

$$(8) \quad 0 < \bar{x} - a \leq H, \quad 0 < h_1 < \min(\bar{x} - a, H/(q-1)),$$

$$M\varphi(h_1) + (\bar{x} - a) C[M_f \sum |\beta_v| + h_1 M_g \sum |\gamma_v|] \leq B$$

[и это всегда возможно в силу свойств функции  $\varphi(h)$ ].

Доказательство. Пусть для  $h_1, \bar{x}$  имеет место (8); положим

$$F_k = \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v} + h \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}, \quad k = 1, 2, \dots, N_h.$$

Следовательно,  $|F_k| \leq M_f \sum |\beta_v| + h_1 M_g \sum |\gamma_v| = F$ .

В силу леммы 2 можно осуществить вычисление  $y_k$  по рекуррентной формуле

$$y_k = - \sum_{v=1}^m \alpha_v y_{k-v} + h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}$$

с шагом  $h \in (0, h_1)$  по меньшей мере для  $k = 1$ . Если мы уже вычислили  $y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, j-1$  и имеет место  $jh \leq \bar{x} - a$ ,  $(x_k, y_k) \in \Pi$  для  $k = 1, 2, \dots, j-1$ , то по лемме 2, в силу (8), имеем  $|y_j - y_0| \leq M\varphi(h) + jhCF \leq B$ . Поэтому  $|y_k - y_0| \leq B$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ .

**2.3** Когда в уравнении (2) одно из чисел  $r, s$  равно нулю и второе неположительное (*неявные методы*), то (2) можно писать в форме

$$(9) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v} = h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k-v}, \quad \alpha_0 = 1, \quad |\beta_0| + |\gamma_0| > 0;$$

начальный отрезок определяется при помощи начальной функции  $\eta_h(x)$ . При известных уже  $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-q}$  получается неявное уравнение относительно  $y_k$ , которое можно решить методом последовательных приближений:

1° Пусть числа  $h_1, \bar{x}$  определены при помощи (8) и  $h \in (0, h_1)$ ; тогда для  $x_k \leq \bar{x}$  выбирается  $y_k^0$  так, чтобы  $(x_k, y_k^0) \in \Pi$  (по явной формуле, или просто  $y_k^0 = y_{k-1}$ ).

2° Для  $i = 0, 1, 2, \dots$  определяем последовательность  $\{y_k^i\}_{i=0}^\infty$  соотношением  $\alpha_0 y_k^{i+1} + \sum_{v=1}^m \alpha_v y_{k-v} = h[\beta_0 f(x_k, y_k^i) + h\gamma_0 g(x_k, y_k^i) + \sum_{v=1}^n \beta_v f_{k-v} + h \sum_{v=1}^l \gamma_v g_{k-v}]$ . Если обозначить  $F_k^i = \beta_0 f(x_k, y_k^i) + h\gamma_0 g(x_k, y_k^i) + \sum_{v=1}^n \beta_v f_{k-v} + h \sum_{v=1}^l \gamma_v g_{k-v}$ , то имеем  $|F_k^0| \leq M_f \sum |\beta_v| + h_1 M_g \sum |\gamma_v| = F$ ; из леммы 2 и (8) следует  $(x_k, y_k^1) \in \Pi$ . Поэтому тоже  $|F_k^1| \leq F, (x_k, y_k^2) \in \Pi$  и т. д. Значит,  $(x_k, y_k^i) \in \Pi$  для всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Далее,

$$(10) \quad |y_k^{i+1} - y_k| \leq h|\beta_0| |f(x_k, y_k^i) - f(x_k, y_k)| + h^2|\gamma_0| |g(x_k, y_k^i) - g(x_k, y_k)| \leq h[|\beta_0| L_f + h|\gamma_0| L_g] |y_k^i - y_k|;$$

если  $h \in (0, h_2)$ , где  $h_2[|\beta_0| L_f + h_2|\gamma_0| L_g] < 1$ , то  $y_k^i \rightarrow y_k, (x_k, y_k) \in \Pi$  и  $y_k$  удовлетворяет (2). Описанный процесс можно последовательно осуществить для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h = [(\bar{x} - a)/h]$ . Таким образом мы для неявных методов доказали разрешимость задачи (2)–(3) с числами  $h_0 = \min(h_1, h_2), \bar{x}$ , где  $h_1, \bar{x}$  определены соотношением (8) и  $h_2$  при помощи (10).

**2.4** Пусть в уравнении (2) по меньшей мере одно из чисел  $r, s$  положительно (*строго неявные методы, методы с забеганием вперед*). Решение задачи (2)–(3) будем искать при помощи „метода горизонтальных аппроксимаций“ (см. [2]), состоящего в следующем:

1° Пусть  $h \in (0, h_1)$  и для чисел  $h_1, \bar{x}$  имеет место (8); полагаем  $y_k^i = y_k$  для  $k = 0, -1, \dots, -q + 1; i = 0, 1, 2, \dots$

2° Определим  $y_k^0, k = 1, 2, \dots, N_h$  так, чтобы  $(x, y_k^0) \in \Pi$  (при помощи явного метода, или просто положим  $y_k^0 = b$ ).

3° Для  $i = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, N_h = [(\bar{x} - a)/h]$  пусть

$$(11) \quad y_k^{i+1} = - \sum_{v=1}^m \alpha_v y_{k-v}^{i+1} + h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v}^i + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}^i;$$

здесь  $f_j^i = f(x_j, y_j^i)$ ,  $g_j^i = g(x_j, y_j^i)$  и полагаем  $y_{N_h+j}^i = y_{N_h}^i$  для  $j = 1, 2, \dots, t$ ;  $f_j^i = f_{j-1}^i$ ,  $g_j^i = g_{j-1}^i$  для  $j > [A/h]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $0 < h_3 < 1/t A_0^t B_0 (1 + 1/t)^{t+1}$ , где  $A_0 = \sum_{v=1}^m |\alpha_v| > 1$ ,  $t = \max(r, s)$ ,  $B_0 = L_f \sum |\beta_v| + h_3 L_g \sum |\gamma_v|$ . Тогда задача (2)–(3) для строго неявных методов разрешима методом горизонтальных аппроксимаций с числами  $h_0, \bar{x}$ , для которых имеет место:  $h_0 = \min(h_1, h_3)$ ;  $h_1, \bar{x}$  выполняют условия (8).

Доказательство. 1° Пусть  $h \in (0, h_0)$  и величины  $y_j^{i+1}$  удовлетворяют соотношению (11) (этого можно добиться по крайней мере для  $i = 0$ ). Если обозначить  $F_k^i = \sum \beta_v f_{k+r-v}^i + h \sum \gamma_v g_{k+r-v}^i$ , то  $|F_k^0| \leq M_f \sum |\beta_v| + h_0 M_g \sum |\gamma_v| \leq F$ . По лемме 2 и в силу (8),  $(x_k, y_k^1) \in \Pi$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ ; но тогда  $|F_k^1| \leq F$ , и следовательно  $(x, y_k^2) \in \Pi$  и т. д.. Значит,  $(x_k, y_k^i) \in \Pi$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$

2° Обозначим  $\Delta_j^i = y_j^{i+1} - y_j^i$ ,  $F_j = G_j = 0$  в случае  $\Delta_j^{i-1} = 0$ ,  $F_j = (f_j^i - f_j^{i-1})/\Delta_j^{i-1}$  и  $G_j = (g_j^i - g_j^{i-1})/\Delta_j^{i-1}$  при  $\Delta_j^{i-1} \neq 0$ ; тогда имеет место  $|F_j| \leq L_f$ ,  $|G_j| \leq L_g$ . Из (11) следует

$$(12) \quad \Delta_k^i = - \sum_{v=1}^m \alpha_v \Delta_{k-v}^{i-1} + h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} \Delta_{k+r-v}^{i-1} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} \Delta_{k+s-v}^{i-1},$$

$\Delta_k^i = 0$  при  $k = 0, -1, \dots, -q + 1$ ;  $\Delta_k^0$  при  $k = 1, 2, \dots, N_h$  ограничены в силу доказанного в 1°.

Для величин  $d_k^i = \max_{j \leq k} |\Delta_j^i|$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, N_h$  имеют место соотношения

$$(13) \quad d_0^i = 0, \quad d_k^i \geq 0, \quad d_{k-1}^i \leq d_k^i, \quad d_k^0 = \max_{j \leq k} |\Delta_j^0| \geq 0, \\ d_k^i \leq A_0 d_{k-1}^{i-1} + h B_0 d_{k+t}^{i-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, N_h$$

Решение задачи (13) мажорируется каждым решением задачи

$$(14) \quad D_k^i = A_0 D_{k-1}^{i-1} + h B_0 D_{k+t}^{i-1}, \\ D_k^i \geq 0, \quad D_k^0 \geq d_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, N_h; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$D_k^i = \alpha^i D_k, \quad \alpha = \tau h B_0 > 0 \quad (\tau - \text{параметр}).$$

После подстановки в (14) получим для  $D_k$  разностную задачу

$$(15) \quad D_{k+t} - \tau D_k + \tau A_0 D_{k-1} = 0, \quad D_0 \geq 0, \quad D_k \geq d_k^0;$$

её характеристическое уравнение  $\lambda^{t+1} - \tau\lambda + \tau A_0 = 0$  имеет при  $\tau = tA_0^t(1 + 1/t)^{t+1} > 1$  корень  $\lambda = A_0(1 + 1/t)$ . Частное решение уравнения (15)

$$D_k = \Delta^0 [A_0(1 + 1/t)]^{k-1}, \quad \Delta^0 = \max_k |\Delta_k^0| = d_{N_h}^0$$

удовлетворяет начальным условиям задачи (15),  $\alpha = \tau h B_0 < 1$  в силу определения  $h_3$ . При  $k$  фиксированном  $D_k^i = \alpha^i D_k$  стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии; то же имеет место для  $|\Delta_k^i| = |y_k^{i+1} - y_k^i|$  и потому  $y_k^i \rightarrow y_k$  при всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ . Так как  $(x_k, y_k^i) \in \Pi$  при  $k = 0, 1, \dots, N_h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , то и  $(x_k, y_k) \in \Pi$ ;  $y_k$  удовлетворяют уравнению (2).

### 3. Необходимые условия сходимости

**3.1 Лемма 3.** Если при  $h \rightarrow 0$  имеет место  $y_k \rightarrow y(x_k)$  равномерно для всех  $x_k \in \langle a, \bar{x} \rangle$ , то  $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} \rightarrow 0$  тоже равномерно по всем  $k = 1, 2, \dots, N_h$ .

Доказательство. В силу предложения и равномерной непрерывности  $y(x)$  имеем  $\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} = y_k - y(x_k) + y(x_k) - y(x_{k-1}) + y(x_{k-1}) - y_{k-1} \rightarrow 0$  равномерно по  $k$ .

Используя обозначения  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ ,  $A_v = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_v$ ,  $v = 0, 1, \dots, m-1$ , напомним уравнение (2) в форме

$$(16) \quad \sum_{v=0}^{m-1} A_v \Delta y_{k-v-1} + y_{k-m} \sum_{v=0}^m \alpha_v = h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}.$$

Если теперь  $h \rightarrow 0$ , то в силу леммы 3 и ограниченности слагаемых получим необходимое условие сходимости

$$(h_0) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v = 0.$$

**3.2** При решении задачи (2)–(3)  $x_k, y_k$  зависят от параметра  $h$ . Обозначим через  $\tilde{y}_h(x)$  кусочно-линейную функцию — полигон Эйлера с вершинами  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_h$ . При фиксированном  $h$  каждое  $x$  однозначно определяет индекс  $k = k(x, h)$  такой, что  $x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ ; для производной (правой производной в узле  $x_k$ ) функции  $\tilde{y}_h(x)$  имеет место соотношение

$$\tilde{y}'_h(x - vh) = \Delta y_{k-v-1} / h, \quad k - v - 1 = 0, 1, \dots, N_h - 1.$$

Определим еще две кусочно-постоянные функции: для  $x \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$  пусть  $X_h(x) = x_k$ ,  $Y_h(x) = y_k$ . Из определения вытекает, что  $X_h(x + jh) = x_{k+j}$ ,  $Y_h(x + jh) = y_{k+j}$ .



3.3 С помощью обозначений из 3.2 преобразуем (16) к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{m-1} A_v \tilde{y}'_h(x - vh) = \\ & = \sum_{v=0}^n \beta_v f[X_h(x + (r - v)h), Y_h(x + (r - v)h)] + \\ & + h \sum_{v=0}^l \gamma_v g[X_h(x + (s - v)h), Y_h(x + (s - v)h)], \end{aligned}$$

где справа и слева интегрируемые функции от  $x$ ; интегрируя в пределах  $\langle a, x \rangle$ , получим

$$\begin{aligned} (17) \quad & \sum_{v=0}^{m-1} A_v \int_a^x \tilde{y}'_h(\xi - vh) d\xi = \\ & = \sum_{v=0}^n \beta_v \int_a^x f[X_h(\xi + (r - v)h), Y_h(\xi + (r - v)h)] d\xi + \\ & + h \sum_{v=0}^l \gamma_v \int_a^x g[X_h(\xi + (s - v)h), Y_h(\xi + (s - v)h)] d\xi. \end{aligned}$$

Если выполнено требование сходимости, то при  $h \rightarrow 0$   $\tilde{y}(x) \rightarrow y(x)$ ,  $Y_h(x) \rightarrow y(x)$ ,  $X_h(x) \rightarrow x$  равномерно для всех  $x \in \langle a, \bar{x} \rangle$ . Совершив предельный переход в (17) и учитывая, что  $\int_a^x y'(\xi) d\xi = y(x) - y(a)$ , получим

$$[y(x) - y(a)] \sum_{v=0}^{m-1} A_v = (\sum \beta_v) \int_a^x f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

В силу уравнения (1) для выполнения этого необходимо, чтобы

$$(H_1) \quad \sum_{v=0}^{m-1} A_v = \sum_{v=0}^n \beta_v$$

(эквивалентные формы:  $-\sum_{v=0}^m v\alpha_v = \sum_{v=0}^n \beta_v$ , или  $\sum_{v=0}^m (m - v)\alpha_v = \sum_{v=0}^n \beta_v$ ).

Из требования сходимости при  $f(x, y) \equiv 1$  (или из устойчивости  $L[y]$ ) вытекает, что должно быть  $\sum_{v=0}^n \beta_v \neq 0$  (см. [1], [2]). Тем самым мы доказали, что имеет место

**Теорема 2.** Для сходимости  $y_k \rightarrow y(x_k)$  равномерной по  $k = 1, 2, \dots, N_h$  необходимо выполнение условий  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ .

#### 4. Аппроксимация

**4.1 Определение** (см. [2]). Обозначим через  $\Psi$  семейство функций  $\psi(h)$ , определенных для  $h \in (0, h_0)$  и таких, что  $\psi(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Символом  $O(\psi(h))$  обозначим функцию или семейство сеточных функций  $z_h(x)$ , определенных в точках

$$x_k = a + kh, \quad k = -q + 1, \dots, N_h; \quad h \in (0, h_0),$$

которые во всех этих точках удовлетворяют условию  $|z_h(x_k)| = |z_k(h)| \leq \leq A|\psi(h)|$  ( $A$  независит от  $k, h$ ) и говорим, что семейство  $z_h(x)$  имеет порядок  $\psi(h)$  по отношению к  $h$ . Если не существует функции  $\bar{\psi}(h) \in \Psi$  такой, чтобы  $|z_k(h)| \leq \bar{A}|\bar{\psi}(h)\psi(h)|$ , то говорим, что  $z_h(x)$  имеет по  $h$  неулучшаемый порядок  $\psi(h)$ .

**Определение.** Скажем, что аппроксимация уравнения (1) уравнением (2) имеет порядок  $\psi(h)$  по  $h$ , если для каждого решения  $y(x)$  уравнения (1) имеет при фиксированной  $\psi(h) \in \Psi$  место

$$(18) \quad L_h[y] \equiv \sum_{v=0}^m \alpha_v y(x_{k-v}) - \\ - h \sum_{v=0}^n \beta_v f(x_{k+r-v}, y(x_{k+r-v})) - h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g(x_{k+s-v}, y(x_{k+s-v})) = O(h\psi(h)).$$

Говорят, что оператор  $L_h[y]$  имеет степень  $p$ , если для всех  $(p+1)$ -раз непрерывно дифференцируемых на  $\langle a-H, a+H \rangle$  функций имеет  $L_h[y]$  неулучшаемый порядок  $h^p \{т. е. L_h[y] = O(h^{p+1})\}$ .

**Замечание.** Если  $y(x)$  является решением задачи (1), то функции

$$\psi_i(h) = \max \{|y^{(i)}(x_1) - y^{(i)}(x_2)|; |x_1 - x_2| \leq h \leq h_0; \\ x_1, x_2 \in \langle x_{-q+1}, x_{N_h} \rangle\} \quad i = 1, 0$$

принадлежат семейству  $\Psi$ , так как  $|\psi_0(h)| \leq M_f h, |\psi_1(h)| \leq L_f M_f h$ . В общем случае, если  $y(x) \in C^{(p)} \langle x_{-q+1}, x_{N_h} \rangle$ , то

$$\psi_p(h) = \max \{|y^{(p)}(x_1) - y^{(p)}(x_2)|; |x_1 - x_2| \leq h \leq h_0\}, \quad p = 2, 3, \dots$$

принадлежит  $\Psi$  (функции типа модуля непрерывности).

**Теорема 3.** Для того, чтобы порядок аппроксимации уравнения (1) уравнением (2) был по меньшей мере  $\psi_1(h)$  необходимо и достаточно выполнение условий  $(H_0), (H_1)$ .

Доказательство следует из разложений

$$y(x_{k-v}) = y(x_k) - vhy'(x_k) + O(h\psi_1(h)), \quad hy'(x_{k+r-v}) = hy'(x_k) + O(h\psi_1(h)),$$

если их подставить в  $L_h[y]$  и сравнить коэффициенты при  $h^j$ ,  $j = 0, 1$ . Более высокой степени аппроксимации можно добиться, если функция  $f(x, y)$  обладает частными производными высших порядков.

**Теорема 4.** Если  $f(x, y)$  обладает непрерывными частными производными порядка  $p - 1$ ,  $p \geq 2$ , то для того, чтобы порядок аппроксимации уравнения (1) уравнением (2) был по меньшей мере  $h^{p-1} \psi_p(h)$ , необходимо и достаточно выполнение условий

$$(a_0) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v = 0$$

$$(a_1) \quad - \sum_{v=0}^m v\alpha_v = \sum_{v=0}^n \beta_v$$

$$(a_2) \quad \sum_{v=0}^m v^2\alpha_v = 2 \sum_{v=0}^n (r-v)\beta_v + 2 \cdot 1 \sum_{v=0}^l \gamma_v$$

.....

$$(a_p) \quad (-1)^p \sum_{v=0}^m v^p\alpha_v = p \sum_{v=0}^n (r-v)^{p-1} \beta_v + p(p-1) \sum_{v=0}^l (s-v)^{p-2} \gamma_v$$

Доказательство получится путем подстановки в  $L_h[y]$  разложений

$$y(x_{k-v}) = \sum_{j=0}^p (-1)^j (vh)^j y^{(j)}(x_k)/j! + O(h^p \psi_p(h)),$$

$$hy'(x_{k+r-v}) = \sum_{j=0}^{p-1} h^{j+1} (r-v)^j y^{(j+1)}(x_k)/j! + O(h^p \psi_p(h)),$$

$$h^2 y''(x_{k+s-v}) = \sum_{j=0}^{p-2} h^{j+2} (s-v)^j y^{(j+2)}(x_k)/j! + O(h^p \psi_p(h))$$

и сравнения коэффициентов при  $h^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, p$ .

Замечание. 1° Условия  $(n_0)$ ,  $(n_1)$  и  $(a_0)$ ,  $(a_1)$  совпадают. 2° При заданных параметрах  $m, n, l$  соотношения  $(a_0), \dots, (a_p)$  являются системой линейных уравнений относительно  $m + n + l + 3$  искомым параметрам  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$  (решение зависит от  $r, s$ ). Параметры  $\alpha_v$  обыкновенно выбирают так, чтобы  $L[y]$  был устойчивым и чтобы выполнялось  $(a_0)$ . При достаточной гладкости  $f(x, y)$  можно определить  $\beta_v, \gamma_v$  так, чтобы  $p \geq n + l + 2$ .

## 5. Сходимость

**5.1 Основная лемма.** Пусть

$$1^\circ L[y] \equiv \sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v} - \text{устойчивый оператор};$$

$$2^\circ |F_j| \leq F, |G_j| \leq G \quad \text{для } j = -q + 1, \dots, N_h + t, \quad t = \max(0, r, s);$$

$$3^\circ \sum_{v=0}^m \alpha_v z_{k-v} - h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} z_{k+r-v} - h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} z_{k+s-v} = O(\psi(h)), \quad \psi(h) \in \Psi, \\ k = 1, \dots, N_h.$$

Тогда а) если  $\tilde{z}_k$  является решением (неоднородного) уравнения (19), соответствующим начальным условиям  $\tilde{z}_k = 0, k = -q + 1, \dots, 0$ , и в случае  $t > 0$  равномерно ограниченным по отношению к  $h$ , то  $\tilde{z}_k = O(\psi(h)/h), k = 1, 2, \dots, N_h$ ;

б) если  $\hat{z}_k$  является решением уравнения однородного по отношению к (19), удовлетворяет начальным условиям  $\hat{z}_k = O(\varphi(h)), k = -q + 1, \dots, 0, \varphi(h) \in \Psi$ , и в случае  $t > 0$  значения  $\hat{z}_k$  равномерно ограничены по  $h$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N_h$ , то  $\hat{z}_k = O(\varphi(h)), k = 1, 2, \dots, N_h$ .

Доказательство. а) Пусть  $\tilde{z}_k$  имеет предполагаемые свойства; подставим его в (19) и получим тождество

$$(20) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v \tilde{z}_{k-v} = \tilde{H}_k,$$

$$(21) \quad \tilde{H}_k = h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} \tilde{z}_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} \tilde{z}_{k+s-v} + O(\psi(h)).$$

Соотношение (20) можно рассматривать как разностное уравнение относительно  $\tilde{z}_k$  с вполне определенной правой частью  $\tilde{H}_k$ . По принципу Дюамеля (или умножая (20) на  $c_{k-v}$  и суммируя по  $k$ )

$$(22) \quad \tilde{z}_k = \sum_{v=0}^{k-1} c_v H_{k-v}, \quad c_v \text{ определены в (4)}.$$

Подстановкой (21) в (22) и переходом к модулям, учитывая  $k \leq (\bar{x} - a)/h$ , получим

$$(23) \quad |\tilde{z}_k| \leq C \sum_{j=1}^k |\tilde{H}_j| \leq hC \sum_{j=1}^k \left\{ F \sum_{v=0}^n |\beta_v| |\tilde{z}_{j+r-v}| + hG \sum_{v=0}^l |\gamma_v| |\tilde{z}_{j+s-v}| \right\} + \\ + O(\psi(h)/h).$$

Для величин  $Z_j = \max_{i \leq j} |\tilde{z}_i|, Z_{-m+1} = \dots = Z_0 = 0$  из (23) следует

$$(24) \quad Z_k \leq hC \left\{ F \sum |\beta_v| + hG \sum |\gamma_v| \right\} \sum_{j=1}^k Z_{j+t} + O(\psi(h)/h)$$

Если обозначить

$$(25) \quad P' = \begin{cases} P = hC\{F \sum |\beta_v| + hG \sum |\gamma_v|\} & \text{при } t \neq 0 \\ P/(1-P), \quad 0 < P < 1 & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

$$Q' = \begin{cases} Q = O(\psi(h)/h) & \text{при } t < 0 \\ Q/(1-P) = O(\psi(h)/h) & \text{при } t = 0, \\ Q + P \sum_{i=k}^{k+t} Z_i & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

то (24) можно писать в форме

$$Z_k \leq P' \sum_{i=0}^{k-1} Z_i + Q',$$

из которой применением индукции следует

$$(26) \quad Z_k \leq Q'(1 + P')^{k-1} \leq Q' \exp\{(k-1)P'\} \leq Q'E_k,$$

где

$$E_k = \exp\{(x_{k-1} - x_0)S\},$$

$$S = \begin{cases} P/h & \text{при } t \neq 0 \\ P/h\{1 - h_0C[F \sum |\beta_v| + h_0G \sum |\gamma_v|]\}, \quad h \leq h_0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

В силу (25) следует из (26) что утверждение а) имеет место в случае  $t \leq 0$ , так как  $|\tilde{z}_k| \leq Z_k \leq Q'E_k = O(\psi(h)/h)$ . В случае  $t > 0$  используем предположение ограниченности  $\tilde{z}_k$ ; из  $|\tilde{z}_k| \leq B, k = -q + 1, \dots, N_h$  следует  $Z_k \leq \max_{i \leq k} |\tilde{z}_i| \leq$

$\leq B$  и  $Q' = Q + P \sum_{i=k}^{k+t} Z_i \leq Q + (t+1)PB$ . Повторяя оценку  $Z_k, Q'$ , получим

$$Z_k \leq Q'E_k = [Q + (t+1)PB]E_k, \quad Q' \leq Q + (t+1)P[Q + (t+1)PB]E_k.$$

После  $n$  повторений, с  $T = (t+1)PE_k = O(h)$ , имеем

$$Z_k \leq QE_k(1 + T + T^2 + \dots + T^{n-1}) + T^n B,$$

$$Q' \leq Q(1 + T + T^2 + \dots + T^n) + T^{n+1}B/E_k.$$

Поэтому в силу (25) и (26)  $|\tilde{z}_k| \leq Z_k = O(\psi(h)/h)$ .

б) После подстановки  $\hat{z}_k$  в уравнение однородное по отношению к (19) получим тождество

$$(27) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v \hat{z}_{k-v} = \hat{H}_k,$$

где

$$(28) \quad \hat{H}_k = h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} \hat{z}_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} \hat{z}_{k+s-v}.$$

Соотношение (27) является разностным уравнением относительно  $\hat{z}_k$ ; если через  $u_k$  обозначить решение однородного уравнения  $\sum_{v=0}^m \alpha_v u_{k-v} = 0$ , соответствующее начальным условиям  $u_k = \hat{z}_k = O(\varphi(h))$ ,  $k = -m + 1, \dots, 0$ , то с помощью фундаментальных решений  $\zeta_k^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  этого уравнения (см. [2]) и решением  $u_k$  вполне определенных постоянных  $c_{ij}$  можно писать

$$u_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \hat{z}_{-j} \zeta_k^{(i)}.$$

Из последнего и начальных условий для  $\hat{z}_k$  следует

$$u_k = O(\varphi(h)).$$

Для величин  $v_k$ , определенных соотношением  $v_k = \hat{z}_k - u_k$  имеем

$$(29) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v v_{k-v} = \sum_{v=0}^m \alpha_v \hat{z}_{k-v} - \sum_{v=0}^m \alpha_v u_{k-v} = \hat{H}_k, \\ v_k = 0 \quad \text{для } k = -m + 1, \dots, 0.$$

Если подставить вместо  $\hat{H}_k$  из (28), то из (29) получим

$$\sum_{v=0}^m \alpha_v v_{k-v} = h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} (u_{k+r-v} + v_{k+r-v}) + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} (u_{k+s-v} + v_{k+s-v}) = \\ = h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} v_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} v_{k+s-v} + O(h \varphi(h)).$$

Используя уже доказанную часть а) нашей леммы, получим  $v_k = O(\varphi(h))$ ; из этого вытекает  $\hat{z}_k = u_k + v_k = O(\varphi(h))$ .

**5.2 Теорема 5.** (о сходимости). Пусть для  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  выполнены условия из 1.1 и

1°  $L[y]$  — устойчивый оператор, задача (2)–(3) разрешима для всех  $h \in (0, h_0)$ ,  $x_k \in \langle a, \bar{x} \rangle$ ;

2° выполнены необходимые условия сходимости  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ .

Тогда при  $h \rightarrow 0$  имеет место  $|y(x_k) - y_k| \rightarrow 0$  равномерно для  $k = 1, 2, \dots, N_h = \lceil (\bar{x} - a)/h \rceil$ .

Доказательство. Из условия 2° в силу теоремы 3 вытекает, что  $L_h[y] = O(h \psi_1(h))$ . Вычитая это соотношение из (2), получим для  $\delta_k = y(x_k) - y_k$  уравнение

$$\sum_{v=0}^m \alpha_v \delta_{k-v} - h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} \delta_{k+r-v} - h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} \delta_{k+s-v} = O(h \psi_1(h)),$$

где величины  $F_j, G_j$  равны нулю, если  $\delta_j = 0$ , и для  $\delta_j \neq 0$

$$F_j = [f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)]/\delta_j, \quad G_j = [g(x_j, y(x_j)) - g(x_j, y_j)]/\delta_j;$$

в силу наших предположений они ограничены постоянными  $L_f, L_g$ . Для начальных значений  $\delta_k, k = -q + 1, \dots, 0$  имеет место  $|\delta_k| \leq |y(x_k) - b| + |b - \eta_k(x_k)| \leq (q - 1)[\psi_0(h) + \varphi(h)], \delta_0 = 0$ . Значит,

$$(31) \quad \delta_k = O(\psi(h)), \quad \psi(h) = \psi_0(h) + \varphi(h) \in \Psi \quad \text{при } k = -q + 1, \dots, 0.$$

Задача (30)–(31) разрешима в силу разрешимости задач (1), (2)–(3) и определения  $\delta_k$ ; её решение будем искать в виде  $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k$ , где  $\tilde{\delta}_k$  ограниченное по  $h$  решение уравнения (30), соответствующее начальным условиям  $\tilde{\delta}_k = 0, k = -q + 1, \dots, 0$ . По основной лемме имеет место  $\tilde{\delta}_k = O(\psi_1(h)), k = 1, 2, \dots, N_h$ . Функция  $\hat{\delta}_k = \delta_k - \tilde{\delta}_k$ , ограниченная по  $h$  в силу ограниченности  $\delta_k, \tilde{\delta}_k$ , удовлетворяет уравнению однородному по отношению к (30) и начальным условиям  $\hat{\delta}_k = \delta_k, k = -q + 1, \dots, 0$ . Из основной леммы и (31) вытекает, что  $\hat{\delta}_k = O(\psi(h))$  при  $k = 1, 2, \dots, N_h$ . Тогда  $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k = O(\bar{\psi}(h)), \bar{\psi}(h) = \psi_0(h) + \psi_1(h) + \varphi(h) \in \Psi, k = 1, 2, \dots, N_h$ . Это и значит, что при  $h \rightarrow 0$  имеет место  $\delta_k \rightarrow 0, y_k \rightarrow y(x_k)$  равномерно относительно  $k$ .

Замечание. В силу свойств функций  $\psi_0(h), \psi_1(h)$  видно, что целесообразно выбирать  $\eta_k(x)$  порядка по меньшей мере  $h$ .

### 5.3 Теорема 6. (мажорантная оценка погрешности метода). Пусть

$$1^\circ \quad f(x, y) \in C^{(p)}(\Pi), \quad p \geq 2;$$

2° задача (2)–(3) разрешима;

$$3^\circ \quad L_h[y] = O(h^{p+1});$$

$$4^\circ \quad \delta_k = y(x_k) - y_k = O(h^p) \quad \text{при } k = -q + 1, \dots, 0.$$

Тогда  $\delta_k = O(h^p)$  при  $k = 1, 2, \dots, N_h$ .

Доказательство. Вычитая (2) из  $L_h[y] = O(h^{p+1})$ , получим для  $\delta_k$  уравнение

$$(32) \quad \sum_{v=0}^m \alpha_v \delta_{k-v} - h \sum_{v=0}^n \beta_v F_{k+r-v} \delta_{k+r-v} - h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v G_{k+s-v} \delta_{k+s-v} = O(h^{p+1})$$

( $F_j, G_j$  определены в (30)), с начальными значениями из условия 4°. Эта задача разрешима; её решение представим в виде  $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k$ , где  $\tilde{\delta}_k$  является решением уравнения (32) с начальными условиями  $\tilde{\delta}_k = 0, k = -q + 1, \dots, 0$ .

По основной лемме имеем  $\tilde{\delta}_k = O(h^p), k = 1, 2, \dots, N_h$ .  $\hat{\delta}_k$  — это решение однородного уравнения с начальными условиями  $\hat{\delta}_k = \delta_k = O(h^p)$  при  $k = -q + 1, \dots, 0$  и по основной лемме  $\hat{\delta}_k = O(h^p)$  при  $k = 1, 2, \dots, N_h$ . Поэтому  $\delta_k = \tilde{\delta}_k + \hat{\delta}_k = O(h^p)$ .

**Теорема 7.** (асимптотическое разложение погрешности метода). Пусть

1°  $L[y]$  – устойчивый оператор,

2°  $f(x, y) \in C^{(2p+1)}(D)$ .

3°  $\delta_k = y(x_k) - y_k = y(x_k) - \eta_h(x_k) = O(h^{p+1})$  при  $k = -q + 1, \dots, 0$ .

Тогда имеет место разложение

$$\delta_k = \frac{C_{p+1}}{\sum \beta_v} h^p \exp[\Phi(x)] \cdot \int_{x_0}^x y^{(p+1)}(\xi) \exp[-\Phi(\xi)] d\xi + O(h^{p+1}),$$

$$\Phi(x) = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]_{y=y(x)}.$$

Доказательство использует основную лемму и вспомогательное дифференциальное уравнение  $(du/dx) = \Phi(x)u + \kappa h^p y^{(p+1)}(x)$ ,  $u(x_0) = 0$  с решением  $u(x) = \kappa h^p \exp[\Phi(x)] \cdot \int_{x_0}^x y^{(p+1)}(\xi) \exp[-\Phi(\xi)] d\xi$ ; проводится оно аналогично доказательству в [2], стр. 166.

## 6. Примеры формул

(см. тоже лит. [5]; в скобках остаточный член).

$p = 3$ :

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{3}(2f_{k-1} + f_{k-2}) + \frac{5}{6}h^2g_{k-1}; \left[ \frac{h^4}{72}y^{(4)} \right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{3}(f_k + 2f_{k-1}) + \frac{1}{6}h^2g_{k-1}; \left[ -\frac{h^4}{72}y^{(4)} \right]$$

$p = 4$ :

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}(-f_{k-1} + 3f_{k-2}) + \frac{h^2}{12}(17g_{k-1} + 7g_{k-2}); \left[ \frac{31}{720}h^5y^{(5)} \right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}(f_k + f_{k-1}) + \frac{h^2}{12}(-g_k + g_{k-1}); \left[ \frac{h^5}{720}y^{(5)} \right] - \text{см. лит. [4], [6];}$$

$$y_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{h}{4}(-f_{k-1} + 7f_{k-2}) + \frac{h^2}{8}(11g_{k-1} + 2g_{k-1}); \left[ \frac{7}{160}h^5y^{(5)} \right]$$

$$y_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_{k-2}) + \frac{h}{16}(5f_k + 16f_{k-1} + 3f_{k-2}) + \frac{h^2}{8}g_{k-1}; \left[ -\frac{h^5}{120}y^{(5)} \right]$$



$p = 5:$

$$y_k - y_{k-2} = \frac{2h}{15}(32f_{k-1} - 73f_{k-2} + 56f_{k-3}) + \frac{2h^2}{5}(7g_{k-2} + 6g_{k-3}); \left[ \frac{7}{450} h^6 y^{(6)} \right]$$

$$y_k - y_{k-2} = \frac{2h}{15}(2f_k + 8f_{k-1} + 5f_{k-2}) + \frac{2h^2}{15}(2g_{k-1} + g_{k-2}); \left[ -\frac{h^6}{900} y^{(6)} \right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{12}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{9} \left( \frac{127}{32} f_k + \frac{22}{5} f_{k-1} - \frac{19}{60} f_{k-2} \right) + \\ + \frac{h^2}{15} \left( -11g_k + \frac{107}{48} g_{k-1} \right); \left[ \frac{23h^6}{86400} y^{(6)} \right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{6}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{144}(61f_k + 192f_{k-1} - 5f_{k-2}) + \\ + \frac{h^2}{72}(-4g_k + 13g_{k-1}); \left[ \frac{h^6}{8640} y^{(6)} \right]$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{4}(y_{k-1} - y_{k-2}) + h \left( \frac{13}{32} f_k + \frac{2}{5} f_{k-1} - \frac{9}{160} f_{k-2} \right) + \\ + \frac{h^2}{80}(-4g_k + 17g_{k-1}); \left[ \frac{-h^6}{28800} y^{(6)} \right]$$

$p = 6$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{240}(11f_{k+1} + 128f_k + 101f_{k-1}) + \frac{h^2}{240}(-3g_{k+1} - 40g_k + 13g_{k-1});$$

$$\left[ \frac{h^7}{9450} y^{(7)} \right] - \text{см. ЛИТ. [3];}$$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{120}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{28800}(1901f_{k+1} + 14725f_k + 11907f_{k-1}) + \\ + \frac{h^2}{28800}(-187g_{k+1} - 6044g_k + 2197g_{k-1}); \left[ \sim 3 \cdot 10^{-6} h^7 y^{(7)} \right]$$

$p = 8:$

$$y_k - y_{k-1} = \frac{1}{12}(y_{k-1} - y_{k-2}) + \frac{h}{362880}(-8939f_{k+1} + 184599f_k + \\ + 168507f_{k-1} - 11527f_{k-2}) + \\ + \frac{h^2}{362880}(1241g_{k+1} - 7389g_k + 12753g_{k-1} - 501g_{k-2}); \left[ \sim 10^{-5} h^9 y^{(9)} \right]$$

- [1] *Dahlquist G.*, Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Trans. Royal. Inst. Technology, Stockholm, 1959, Nr 130.
- [2] *Горбунов А. Л.*, Разностные уравнения и разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ротапринт ВЦ МГУ, Москва 1967.
- [3] *Urabe M.*, An implicit high-order method for numerical solution of initial-value problem for ordinary diff. equations. Numerische Mathematik, Bd 15 (1970), 151—164.
- [4] *Milne W. E.*, Numerical solution of ordinary diff. equations. J. Wiley, New York 1953.
- [5] *Jankovič V.*, Vzorcie pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice  $y' = f(t, x)$ , ktoré obsahujú vyššie derivácie. Aplikace matematiky 10 (1965), 469—482.
- [6] *Ralston A.*, A first course in numerical analysis. McGraw-Hill, New York 1965.

## Souhrn

### METODY ADAMSOVA TYPU S DRUHÝMI DERIVACEMI

Jiří KOBZA

K numerickému řešení úlohy  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = b$  se používají metody Adamsova typu

$$\sum_{v=0}^m \alpha_v y_{k-v} = h \sum_{v=0}^n \beta_v f_{k+r-v} + h^2 \sum_{v=0}^l \gamma_v g_{k+s-v}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

kde

$$y_k = \eta_h(x_k), \quad k = -q + 1, \dots, -1, 0; \quad q = \max(m, n - r, l - s);$$

$$[g = f_x + f \cdot f_y; f_j = f(x_j, y_j), g_j = g(x_j, y_j)].$$

Jsou odvozeny podmínky řešitelnosti diferenční úlohy, aproximace a konvergence studovaných metod.

*Адрес автора:* Jiří Kobza, I. P. Pavlova 85, 775 00 Olomouc.