

## MÉTODO NUMÉRICO DE TIPO L1 PARA PROBLEMAS VARIACIONALES FRACCIONARIOS

### NUMERICAL METHOD OF TYPE L1 FOR FRACTIONAL VARIATIONAL PROBLEMS

Melani Barrios<sup>a,b</sup>, Ariel L. Lombardi<sup>a,b</sup> y Gabriela F. Reyero<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina, melani@fceia.unr.edu.ar, greyero@fceia.unr.edu.ar, ariel@fceia.unr.edu.ar, <http://web.fceia.unr.edu.ar/es/>*

<sup>b</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Avda. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar>*

**Palabras clave:** Diferencias finitas, Problemas variacionales, Ecuación de Euler-Lagrange, Cálculo fraccionario, Optimización.

**Resumen.** La complejidad intrínseca del cálculo fraccionario, causada parcialmente por propiedades no locales de las derivadas fraccionarias, hace que sea difícil encontrar métodos numéricos eficientes. Motivado por aplicaciones en diversas áreas científicas, el cálculo de variaciones fraccionario se encuentra en rápido desarrollo. En este trabajo consideramos problemas variacionales que consisten en minimizar una integral de un lagrangiano que depende de la variable independiente, la variable dependiente, su derivada primera y una derivada fraccionaria de Caputo. Se presenta un nuevo método numérico basado en el método L1 para obtener aproximaciones a las soluciones de este tipo de problemas y, aunque es más complicado que en el caso clásico, sigue heredando algún tipo de simplicidad y facilidad de implementación. Además, se consideraron dos ejemplos de prueba, resueltos mediante la implementación del software Matlab.

**Keywords:** Finite difference, Variational problems, Euler-Lagrange equation, Fractional calculus, Optimization.

**Abstract.** The intrinsic complexity of fractional calculus, caused partially by non-localized properties of fractional derivatives makes it difficult to find efficient numerical methods. Motivated by applications in several scientific areas, the fractional variational calculus is in development. In this paper we consider variational problems that consist in minimizing an integral of a lagrangian that depends on the independent variable, the dependent variable, its first derivative and one of its Caputo fractional derivative. Here is presented a new numerical method based on the L1 method to obtain approximations to the solutions of this type of problems and, although it is more complicated than in the classic case, it inherits some kind of simplicity and ease of implementation. In addition, test samples were considered, and solved through the implementation of the Matlab software.

## 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo variacional fraccionario es un campo reciente, iniciado en 1997, donde los problemas variacionales clásicos (Van Brunt, 2004) son considerados, pero en presencia de derivadas o integrales fraccionarias. Se han desarrollado numerosos trabajos tendientes a extender la teoría del cálculo variacional para poder ser aplicados a problemas del cálculo de variaciones fraccionario. Esto se debe fundamentalmente, por un lado, a un importante desarrollo del cálculo fraccionario tanto desde el punto de vista matemático como de sus aplicaciones en otras áreas (electricidad, magnetismo, mecánica, dinámica de fluidos, medicina, etc.) (Almeida et al., 2010; Goos y Reyero, 2017; Goos et al., 2015; Kilbas et al., 2006), lo que ha llevado a un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. Por otra parte, las ecuaciones diferenciales fraccionarias establecen modelos muy superiores a los que utilizan ecuaciones diferenciales con derivadas enteras porque incorporan en el modelo cuestiones de memoria o efectos posteriores que se descuidan en los modelos con derivada clásica (Diethelm, 2004; Kilbas et al., 2006).

Siguiendo (Malinowska et al., 2015; Odziejewicz y Torres, 2010), se considera aquí que la derivada de orden más alto en el lagrangiano es de orden entero. La principal ventaja de esta formulación, con respecto al enfoque fraccionario puro adoptado en la literatura, es que los resultados clásicos del cálculo variacional se pueden obtener ahora como casos particulares. Recordemos que la única posibilidad de obtener la derivada clásica  $y'$  de una derivada fraccionaria  $D^\alpha y$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , es tomar el límite cuando  $\alpha$  tiende a uno. Sin embargo, en general este límite no existe (Ross et al., 1994).

Para estos problemas variacionales, se cuenta con una condición necesaria que consiste en una ecuación de Euler-Lagrange en donde intervienen las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo (Barrios y Reyero, 2017; Baleanu et al., 2012). Esto hace que resolver dicha ecuación sea, en muchos casos, algo imposible de realizar. Por este motivo, se ve la necesidad de crear métodos numéricos eficientes para obtener aproximaciones a las soluciones de este tipo de problemas.

En el presente trabajo se obtendrá un método numérico directo para problemas variacionales fraccionarios con derivada clásica. En estos métodos directos, se discretiza sobre una malla en el intervalo de tiempo interesado, se usan diferencias finitas para la derivada clásica, se utiliza el método L1 para las derivadas fraccionarias, y una regla de cuadratura para la integral (Li y Zeng, 2015). Este procedimiento reduce al problema variacional, un problema continuo de optimización dinámica, a la optimización estática de múltiples variables. Se logran mayores precisiones al refinar el tamaño de la malla subyacente. Además, en el artículo se mostrarán dos ejemplos de prueba, resueltos mediante la implementación del software Matlab.

### 1.1. Cálculo fraccionario

A continuación se presentan las definiciones y algunas propiedades de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo. Para más información sobre el tema referirse a (Diethelm, 2004; Kilbas et al., 2006).

**Definición:** Los operadores integrales fraccionarios de Riemann-Liouville de orden  $0 < \alpha$  a izquierda y a derecha, están definidos por

$${}_a I_x^\alpha [f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (1)$$

y

$${}_x I_b^\alpha [f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Para  $\alpha = 0$ , tenemos  ${}_a I_x^\alpha = {}_x I_b^\alpha = I$ , donde  $I$  es el operador identidad.

**Definición:** Los operadores diferenciales fraccionarios de Riemann-Liouville de orden  $0 < \alpha$  a izquierda y a derecha, están definidos por

$${}_a D_x^\alpha = \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_a I_x^{n-\alpha} \quad (3)$$

y

$${}_x D_b^\alpha = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_x I_b^{n-\alpha} \quad (4)$$

donde  $n = \lceil \alpha \rceil$ .

**Definición:** Los operadores diferenciales fraccionarios de Caputo de orden  $0 < \alpha$  a izquierda y a derecha, están definidos por

$${}_a^C D_x^\alpha = {}_a I_x^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dx^n} \quad (5)$$

y

$${}_x^C D_b^\alpha = {}_x I_b^{n-\alpha} \circ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \quad (6)$$

donde  $n = \lceil \alpha \rceil$ .

**Propiedad: Relación entre las derivadas de Riemann-Liouville y de Caputo**

Sea  $0 < \alpha < 1$ , entonces tenemos,

$${}_a^C D_x^\alpha [y](x) = {}_a D_x^\alpha [y](x) - y(a) \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (7)$$

y

$${}_x^C D_b^\alpha [y](x) = {}_x D_b^\alpha [y](x) - y(b) \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (8)$$

## 1.2. Problemas variacionales fraccionarios con derivada clásica

El siguiente tipo de problema variacional tiene una amplia clase de aplicaciones importantes a lo largo de los siglos, con numerosas implicaciones útiles en astronomía, geometría, álgebra e ingeniería.

El problema consiste en hallar  $y \in {}_a^{\alpha} E'$ , tal que minimice o maximice el funcional:

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha y) dx \quad (9)$$

donde

$${}_a^{\alpha} E' = \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : y \in C^1([a, b]), {}_a^C D_x^\alpha y \in C([a, b])\} \quad (10)$$

sujeto a las condiciones de contorno:  $y(a) = y_a$   $y(b) = y_b$ .

**Teorema (Agrawal, 2002)**

Si  $y$  es un mínimo o máximo de  $J$  en  ${}_a^{\alpha} E'$ , entonces  $y$  verifica la siguiente ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + {}_x D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha y} = 0. \quad (11)$$

### 1.3. Método L1

El siguiente algoritmo es un método eficiente para aproximar las derivadas de Caputo por izquierda y derecha de orden  $0 < \alpha < 1$  (Li y Zeng, 2015).

Se considera un mallado sobre  $[a, b]$  como:  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b, x_k = x_0 + kh, h > 0$ .

$$\begin{aligned}
 {}^C D_x^\alpha [f](x_i) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x_0}^{x_i} (x_i - s)^{-\alpha} f'(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_i - s)^{-\alpha} f'(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_i - s)^{-\alpha} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} ds \\
 &= \sum_{k=0}^{i-1} b_{n-k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $b_k = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}]$ .

Análogamente,

$${}^C D_b^\alpha [f](x_i) = \sum_{k=i}^{n-1} (-b_{k-i}) (f(x_{k+1}) - f(x_k)). \tag{13}$$

## 2. RESULTADOS

### 2.1. Método de tipo L1 para problemas variacionales fraccionarios

A continuación se discretizará el funcional  $J$  dado en ec. (9) usando una regla de cuadratura en un mallado  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  y  $h = \frac{b-a}{n}$ .

El objetivo es hallar los valores  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  de la función desconocida  $y$  en los puntos  $x_i$  con  $i = 1, \dots, n-1$ . Los valores  $y_0$  e  $y_n$  están dados por las condiciones de contorno. Aplicando la regla de cuadratura tenemos,

$$J(y) = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} L(x_i, y_i, y'_i, {}^C D_x^\alpha y_i) dx \cong \tag{14}$$

$$\cong \sum_{i=0}^n hL(x_i, y_i, y'_i, {}^C D_x^\alpha y_i). \tag{15}$$

Aproximando la derivada clásica usando diferencia finita hacia atrás, y la derivada fraccionaria de Caputo utilizando el método L1 se obtiene,

$$J(y) \cong \sum_{i=0}^n hL \left( x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1} (y(x_{k+1}) - y(x_k)) \right). \tag{16}$$

El lado derecho de ec. (16) puede ser considerado como una función  $\psi$  de  $n-1$  valores desconocidos  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ,

$$\Psi(y_1, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^n hL \left( x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1} (y(x_{k+1}) - y(x_k)) \right). \tag{17}$$

Para hallar un extremo de  $\Psi$ , debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraico,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (18)$$

### Teorema

El método de tipo L1 para un problema variacional fraccionario de la forma ec. (9) es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + {}_x D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha y} = 0 \quad (19)$$

cuando el paso del mallado  $h$  tiende a cero.

**Observación** Cuando se escribe equivalente en el teorema anterior, se refiere en sentido del Teorema 3.6 de (Pooseh et al., 2014).

### 2.2. Ejemplo 1

$$J(y) = \int_0^1 [{}_0^C D_x^\alpha [y](x) - (y'(x))^2] dx \quad (20)$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 1. \quad (21)$$

La solución exacta es

$$y(x) = -\frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}(1-x)^{2-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}\right)x + \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}. \quad (22)$$

Así,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} y(x) = x \quad (23)$$

que es la solución del problema clásico asociado

$$\int_0^1 [y'(x) - (y'(x))^2] dx \quad (24)$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 1. \quad (25)$$

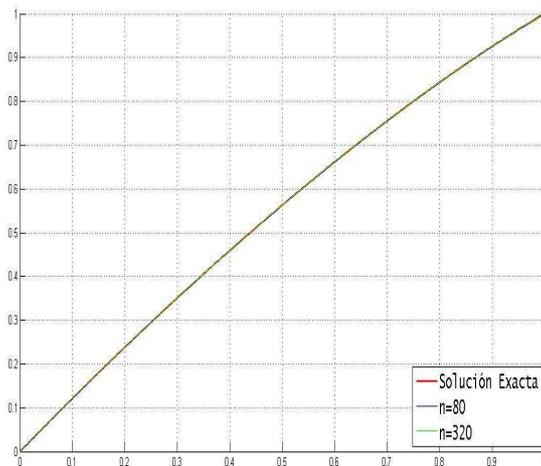
Este problema se reduce numéricamente a resolver  $Ay = B$ , donde  $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{n-1}$  y  $B = (B_i)_{i=1}^{n-1}$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & j < i - 1 \text{ o } j > i + 1 \\ 2 & j = i - 1 \text{ o } j = i + 1 \\ -4 & j = i \end{cases} \quad (26)$$

$$B_i = -h^2 b_{n-i-2}. \quad (27)$$

### 2.2.1. Gráficas y tablas con los resultados obtenidos

A continuación se presentan gráficas y tablas donde se muestra la aplicación del método en el ejemplo dado para diferentes valores de  $\alpha$ . En las gráficas se observan aproximaciones para diferentes cantidades de pasos y la solución exacta, en las tablas se observa cantidad de pasos utilizados, errores calculados mediante la norma infinito, orden de convergencia numérico y tiempo de procesamiento utilizado.



Pasos	Error	Orden	Tiempo de Proces.
20	$1,2596e^{-03}$		$3,838865e^{-03}$ seg
40	$6,6113e^{-04}$	$9,2996e^{-01}$	$2,422537e^{-03}$ seg
80	$3,4089e^{-04}$	$9,5563e^{-01}$	$4,625030e^{-03}$ seg
160	$1,7377e^{-04}$	$9,7213e^{-01}$	$1,302488e^{-02}$ seg
320	$8,7942e^{-05}$	$9,8255e^{-01}$	$3,164898e^{-02}$ seg
640	$4,4302e^{-05}$	$9,8918e^{-01}$	$1,189970e^{-01}$ seg

Figura 1:  $\alpha = 0,25$



Pasos	Error	Orden	Tiempo de Proces.
20	$3,2433e^{-03}$		$7,791845e^{-04}$ seg
40	$1,8561e^{-03}$	$8,0519e^{-01}$	$1,735718e^{-03}$ seg
80	$1,0317e^{-03}$	$8,4725e^{-01}$	$2,455375e^{-03}$ seg
160	$5,6097e^{-04}$	$8,7903e^{-01}$	$8,938453e^{-03}$ seg
320	$2,9991e^{-04}$	$9,0339e^{-01}$	$2,107657e^{-02}$ seg
640	$1,5826e^{-04}$	$9,2223e^{-01}$	$1,088128e^{-01}$ seg

Figura 2:  $\alpha = 0,75$

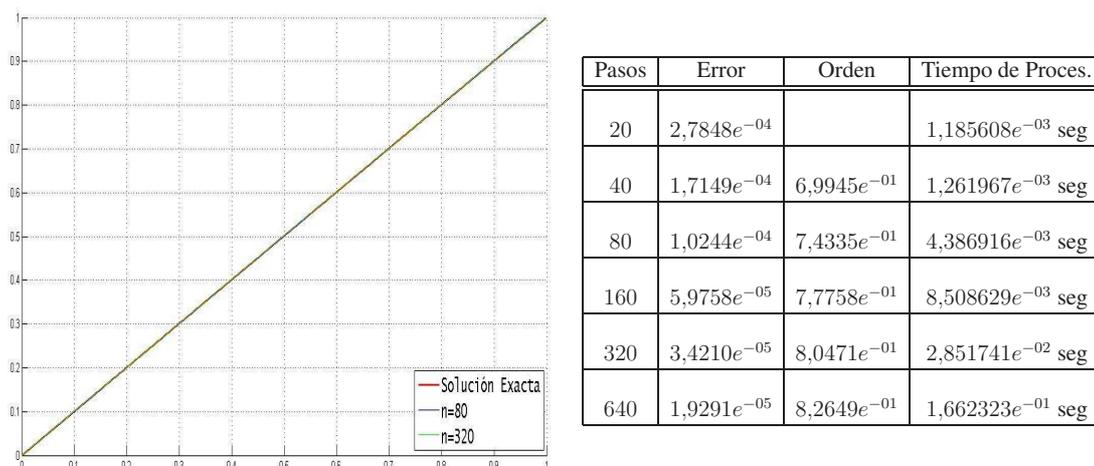


Figura 3:  $\alpha = 0,99$

En Fig. 1, Fig. 2 y Fig. 3, se observa que a medida que la cantidad de pasos aumenta, el error de la aproximación disminuye. También se puede ver que cuando  $\alpha$  se aproxima a 1, las gráficas son más similares a la gráfica de la solución exacta.

### 2.3. Ejemplo 2

$$J(y) = \int_0^1 [y(x)(y'(x) + 1) + {}^C D_x^\alpha [y]^2(x)] dx \tag{28}$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0. \tag{29}$$

La solución exacta para  $\alpha > 0,5$  es

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)^2} {}_2F_1(1, -\alpha, 1 + \alpha, x) + \frac{(2\alpha - 1)x^\alpha}{4\Gamma(\alpha + 1)^3} {}_2F_1(1, -\alpha + 1, 1 + \alpha, x), \tag{30}$$

donde  ${}_2F_1()$  es la función hipergeométrica de 3 parámetros. Luego,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \tag{31}$$

que es la solución del problema clásico asociado,

$$\int_0^1 [y(x)(y'(x) + 1) + (y')^2(x)] dx \tag{32}$$

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0. \tag{33}$$

Este problema se reduce numéricamente a resolver  $Ay = B$  donde  $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{n-1}$  y  $B = (B_i)_{i=1}^{n-1}$

$$A_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=d}^{N-i+d} (b_k - b_{k-1})(b_{k-d} - b_{k-d-1}) & j = i - d \\ -\frac{1}{2h} + \sum_{k=1}^{n-i+1} (b_k - b_{k-1})(b_{k-1} - b_{k-2}) & j = i - 1 \\ \frac{1}{h} + \sum_{k=0}^{n-i} (b_k - b_{k-1})^2 & j = i \\ -\frac{1}{2h} + \sum_{k=0}^{n-i+1} (b_k - b_{k-1})(b_{k+1} - b_k) & j = i + 1 \\ \sum_{k=0}^{N-i+d} (b_k - b_{k-1})(b_{k+d} - b_{k+d-1}) & j = i + d \end{cases} \quad (34)$$

$$B_i = -\frac{1}{2}. \quad (35)$$

### 2.3.1. Gráficas y tablas con los resultados obtenidos

A continuación se presentan gráficas y tablas donde se muestra la aplicación del método en el ejemplo dado para diferentes valores de  $\alpha$ . Nuevamente en las gráficas se observan aproximaciones para diferentes cantidades de pasos y la solución exacta, en las tablas se observa cantidad de pasos utilizados, errores calculados mediante la norma infinito, orden de convergencia numérico y tiempo de procesamiento utilizado.

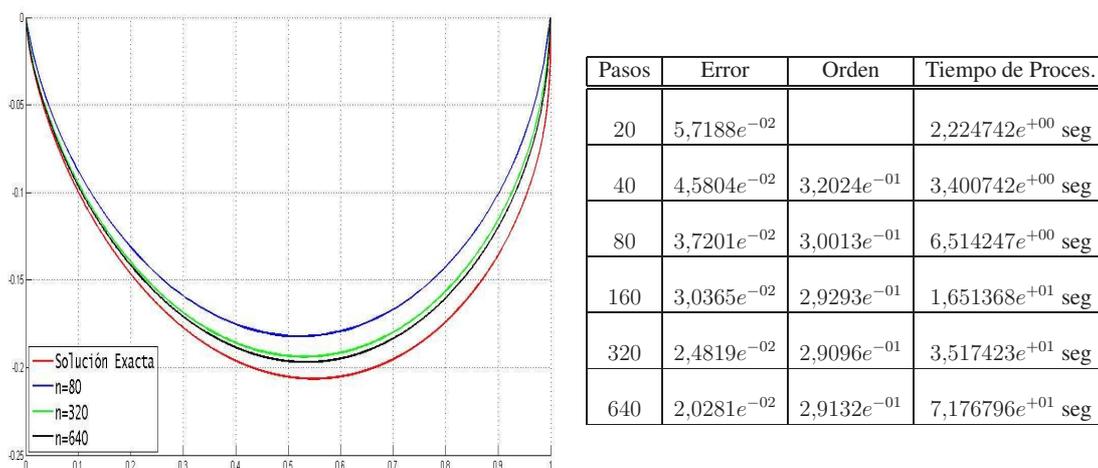
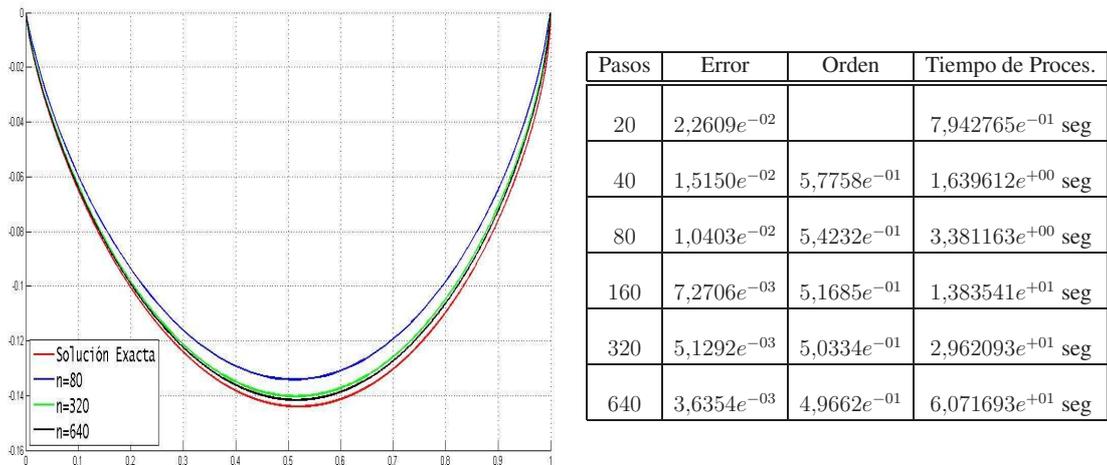
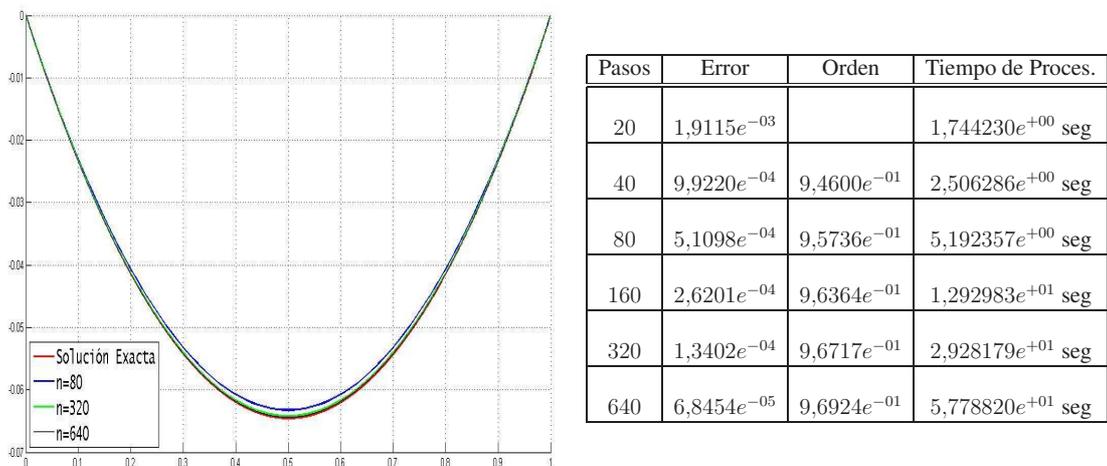


Figura 4:  $\alpha = 0,65$

Figura 5:  $\alpha = 0,75$ Figura 6:  $\alpha = 0,99$ 

En Fig. 4, Fig. 5 y Fig. 6, también se observa que a medida que la cantidad de pasos aumenta, el error de la aproximación disminuye. Se puede ver que cuando  $\alpha$  se aproxima a 1, las gráficas son más similares a la gráfica de la solución exacta. Por último cabe destacar que mientras  $\alpha$  se acerca a 0,5, el orden de convergencia decrece, esto se relaciona con el hecho de que la solución tiene una pendiente cada vez más pronunciada en  $x = 1$ , cuando  $\alpha$  es menor a 0,5 la pendiente de la solución en  $x = 1$  se acerca a infinito.

### 3. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo un método numérico para problemas variacionales fraccionarios con derivada clásica. En dicho método se utilizó con éxito el método L1 para las aproximaciones de las derivadas fraccionarias tanto de Caputo como de Riemann-Liouville. Se han obtenido buenos resultados como se muestra en los ejemplos 1 y 2. En el ejemplo 2, notamos que a medida que  $\alpha$  se acerca a  $1/2$  el orden de convergencia disminuye. Creemos que esto se debe a que la solución se hace cada vez más singular en  $x = 1$ . Como trabajo a futuro se planea estudiar técnicas que permitan mejorar la convergencia que se pierde para valores de  $\alpha$  cercanos a  $0,5$  en este último ejemplo, como el uso de mallas adaptadas a la solución.

### 4. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por el proyecto ING568 'Problemas de control óptimo fraccionario' de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario y beca doctoral CONICET.

### REFERENCIAS

- Agrawal O. Formulation of euler-lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272(1):368–379, 2002.
- Almeida R., Malinowska A., y Torres D. A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string. *Journal of Mathematical Physics*, 51(3), 2010.
- Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., y Trujillo J. Fractional calculus. models and numerical methods. *World Scientific*, 2012.
- Barrios M. y Reyero G. Ecuaciones de euler-lagrange para un problema isoperimétrico fraccionario. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6, 2017.
- Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations*. Springer, 2004.
- Goos D. y Reyero G. Mathematical analysis of a cauchy problem for the time-fractional diffusion-wave equation with alfa in  $(0; 2)$ . *Journal Fourier Analysis Applications, Springer-Birkhuser*, 2017.
- Goos D., Reyero G., Roscani S., y Santillán Marcus E. On the initial-boundary-value problem for the time-fractional diffusion equation on the real positive semiaxis. *Hindawi Pub. Corp., International Journal of Differential Equations*, 2015.
- Kilbas A., Srivastava H., y Trujillo J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- Li C. y Zeng F. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Advisory Board, 2015.
- Malinowska A., Odziejewicz T., y Torres D. Fractional variational calculus with classical and combined caputo derivatives. *Springer*, 2015.
- Odziejewicz T. y Torres D. Calculus of variations with fractional and classical derivatives. *Proceedings of FDA'10, The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications Badajoz*, 2010.
- Pooseh S., Almeida R., y Torres D. *Numerical Approximations to Fractional Problems of the Calculus of Variations and Optimal Control, Fractional Calculus in Analysis, Dynamics and Optimal Control*. Nova Science Pub, 2014.
- Ross B., Samko S., y Love E. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one. *Real Analysis Exchange*, 1:140–157, 1994.
- Van Brunt B. *The calculus of variations*. Springer Verlag, 2004.