



TITLE:

Minimal algebraic surfaces of general type with $c_1^2=3$, $p_g=1$ and $q=0$, which have non-trivial 3-torsion divisors(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Murakami, Masaaki

CITATION:

Murakami, Masaaki. Minimal algebraic surfaces of general type with $c_1^2=3$, $p_g=1$ and $q=0$, which have non-trivial 3-torsion divisors. 京都大学, 2002, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2002-03-25

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/149951>

RIGHT:

氏 名	むら 村 かみ 上 まさ 雅 あき 亮
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学位記番号	理 博 第 2420 号
学位授与の日付	平成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Minimal algebraic surfaces of general type with $c_1^2=3$, $p_g=1$ and $q=0$, which have non-trivial 3-torsion divisors (1次 Chern 数 3, 幾何種数 1, 不正則数 0 で非自明な 3-捻じれ因子をもつ一般型極小曲面について) (主 査)
論文調査委員	教授 上野 健爾 教授 吉田 敬之 教授 丸山 正樹

論 文 内 容 の 要 旨

一般型代数曲面は、代数曲面の分類のうちで一番困難なものであり、特別な不変量を持つ場合にのみ、その構造が分かっている。本申請論文は、1次 Chern 数 $c_1^2=3$ 、幾何種数 $p_g=1$ 、不正則数 $q=0$ の一般型曲面のうち、Picard 群の捻れ部分群に 3 次巡回群を含むものを具体的に記述したものである。

$c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ である一般型代数曲面 X の Picard 群の捻れ部分群の位数は 6 以下であることが Deligne によって示されている。特に、捻れ部分群が 3 次巡回群を含む場合は、3 次巡回群をガロア群として持つ X の 3 次の不分岐被覆 Y が存在する。このとき、 Y の 1 次 Chern 数 $c_1^2=9$ 、幾何種数 $p_g(Y)=5$ であることが分かり、 Y の標準写像は 4 次元複素射影空間 P^4 への写像であることが分かる。また、標準写像の像は P^4 の曲面であることも分かる。さらに、標準写像の次数は 1, 2, 3 のいずれがでなければならない。

この事実に基づき、申請者は申請論文において、標準写像の次数が 2, 3 の場合を考察して、このような場合は実際には起こらないことを示した。一方、標準写像の次数が 1 の場合は P^4 の 2 個の 3 次斉次 F_1, F_2 の共通零点にその像が含まれることが示される。申請者は、さらに F_1, F_2 は共通の因子を持ち得ないことを示し、 Y の標準写像の像は P^4 の (3, 3) 型の完全交叉形であり、かつ Y の標準モデルであることを示した。さらに、 Y は 3 次巡回群をガロア群として持つことより、 P^4 の (3, 3) 型の完全交叉形へも 3 次巡回群が固定点を持たずに作用する。このことから、申請者は F_1, F_2 は

$$F_i = a_0^{(i)} X_0^3 + a_1^{(i)} X_0 X_1 X_3 + a_2^{(i)} X_0 X_1 X_4 + a_3^{(i)} X_0 X_2 X_3 + a_4^{(i)} X_0 X_2 X_4 \\ + a_5^{(i)} X_1^3 + a_6^{(i)} X_1^2 X_2 + a_7^{(i)} X_1 X_2^2 + a_8^{(i)} X_2^3 \\ + a_9^{(i)} X_3^3 + a_{10}^{(i)} X_3^2 X_4 + a_{11}^{(i)} X_3 X_4^2 + a_{12}^{(i)} X_4^3, \quad i=1, 2$$

の形をとること、3 次巡回群は $\epsilon = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ とおくと

$$\tau_0 : (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow (X_0, \epsilon X_1, \epsilon X_2, \epsilon^{-1} X_3, \epsilon^{-1} X_4)$$

で生成される $F_1=0, F_2=0$ が定める曲面 S の自己同型群であることを示した。

これによって、問題の曲面 X は $S/\langle \tau_0 \rangle$ の極小非特異モデルであり、かつ X の捻れ部分群は 3 次巡回群と一致すること、また X の基本群は 3 次巡回群であることも示される。従って $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面の捻れ部分群の位数は 5 以下であることが確定されたことになるが、申請者はさらに捻れ部分群が 5 次の巡回群であるような $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面は存在しないことを申請論文中に示している。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

一般型代数曲面は、代数曲面の分類のうちで一番困難なものであり、特別な不変量を持つ場合にのみ、その構造が分かっている。本申請論文は、1次 Chern 数 $c_1^2=3$ 、幾何種数 $p_g=1$ 、不正則数 $q=0$ の一般型曲面のうち、Picard 群の捻れ部分群に 3 次巡回群を含むものを具体的に記述したものである。

$c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ である一般型代数曲面 X の Picard 群の捻れ部分群の位数は 6 以下であることが Deligne によって示されている。特に、捻れ部分群が 3 次巡回群を含む場合は、3 次巡回群をガロア群として持つ X の 3 次の不分岐被覆 Y が存在する。このとき、 Y の 1 次 Chern 数 $c_1^2=9$ 、幾何種数 $p_g(Y)=5$ であることが分かり、 Y の標準写像は 4 次元複素射影空間 P^4 への写像であることが分かる。また、標準写像の像は P^4 の曲面であることも分かる。

申請者は申請論文において、標準写像とその像を詳しく解析し、 Y の標準写像は双有理写像であり、その像は P^4 の (3, 3) 型の完全交叉形であり、かつ Y の標準モデルであることを示した。さらに、申請者は (3, 3) 型の完全交叉形 S を与える 3 次斉次式 F_1, F_2 は

$$F_i = a_0^{(i)} X_0^3 + a_1^{(i)} X_0 X_1 X_3 + a_2^{(i)} X_0 X_1 X_4 + a_3^{(i)} X_0 X_2 X_3 + a_4^{(i)} X_0 X_2 X_4 \\ + a_5^{(i)} X_1^3 + a_6^{(i)} X_1^2 X_2 + a_7^{(i)} X_1 X_2^2 + a_8^{(i)} X_2^3 \\ + a_9^{(i)} X_3^3 + a_{10}^{(i)} X_3^2 X_4 + a_{11}^{(i)} X_3 X_4^2 + a_{12}^{(i)} X_4^3, \quad i=1, 2$$

の形をとること、3 次巡回群は $\epsilon = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ とおくと

$$\tau_0 : (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow (X_0, \epsilon X_1, \epsilon X_2, \epsilon^{-1} X_3, \epsilon^{-1} X_4)$$

で生成される S の自己同型群であることを示した。

これによって、問題の曲面 X は $S/\langle \tau_0 \rangle$ の極小非特異モデルであり、かつ X の捻れ部分群は 3 次巡回群と一致すること、また X の基本群は 3 次巡回群であることも示される。従って $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面の捻れ部分群の位数は 5 以下であることが確定されたことになるが、申請者はさらに捻れ部分群が 5 次の巡回群であるような $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面は存在しないことを申請論文中に示している。

これによって $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面の捻れ部分群の位数は 4 以下であることが確定し、捻れ部分群が非自明である $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面の考察には、さらに捻れ部分群が 2 次の巡回群を含む場合を考察すれば充分であることが確定した。このように、本論文は $c_1^2=3$, $p_g=1$, $q=0$ の一般型代数曲面の構造の決定に大きく寄与したものである。

また申請者は参考論文において、ある種の数値的 Godeaux 曲面について、その構造を精密に決定している。このように、申請者の研究は一般に困難とされている一般型代数曲面の構造の研究に大きく資するものである。

よって、本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として、これに関連した研究分野について口頭試問した結果、合格と認めた。