

Modelado y control PD-Difuso en tiempo real para el sistema barra-esfera

Floriberto Ortiz R.¹, Wen Yu Liu²

CINVESTAV-IPN, Departamento de Control Automático.

AP 14-740. Av. IPN 2508. Col Zacatenco, CP07360, México D.F., México.

fortiz@ctrl.cinvestav.mx¹, yuw@ctrl.cinvestav.mx²

Abstract

Este trabajo presenta el modelado matemático de un sistema no lineal barra-esfera, la planta es linealizada sobre un punto de operación. Se presenta la implementación en tiempo real de un control PD-Difuso que logra estabilizar al sistema en lazo cerrado. El control PD-Difuso presenta un error de posición más pequeño que el control clásico PD; el control difuso se utiliza como término compensador.

1 Introducción

El sistema barra-esfera de la figura 1, se presenta en un número importante de aplicaciones académicas para probar diferentes algoritmos de control. Este sistema mecánico es subactuado y manifiesta algunas características no deseables tales como un alto grado relativo y comportamiento de fase no mínima, lo que hace más difícil su control [20], [19].

Para el control del sistema se han elegido controladores PD-Difusos, donde los controladores difusos funcionan como compensador de dinámicas no lineales [18]. Se implementó el control PD-Difuso en tiempo real logrando estabilizar al sistema en lazo cerrado, presentando niveles de error mínimos en la señal de salida de la posición de la esfera.

2 Modelado matemático del sistema barra-esfera

El sistema de posicionamiento barra-esfera se muestra en la figura 1.

2.1 Forma Lagrangiana

Se presenta la dinámica del actuador de un motor de corriente continua. Considere el diagrama de la figura 2.

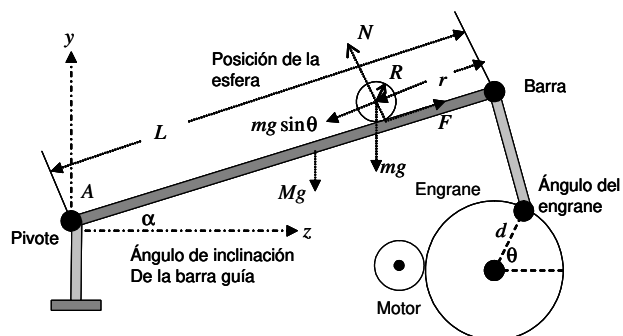


Figure 1: Sistema barra-esfera

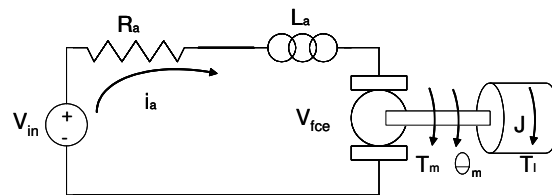


Figure 2: Motor de corriente continua

La ecuación diferencial del motor controlado por la corriente de armadura está dado por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + i_a R_a = V_{in} - V_{fce} \quad (1)$$

En donde V_{in} es el voltaje de entrada en *Volts*, i_a es la corriente de armadura en *Amps*, R_a es la resistencia de armadura en *Ohms*.

La constante de tiempo eléctrico $\frac{L_a}{R_a}$ es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica $\frac{J}{B_m}$, lo que permite reducir el orden del modelo en la dinámica del actuador. La ecuación diferencial del modelo del motor está dado por:

$$\frac{R_a J}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(\frac{R_a B_m}{K_m K_g} + K_m \right) \dot{\theta} = V_{in} \quad (2)$$

Para el modelo del prototipo [14], se tiene: $\frac{R_a J}{K_m K_g} = 0.01176$, $\frac{R_a B_m}{K_m K_g} + K_m = 0.58823$.

El momento de inercia de la esfera está dada por: $I_{esf} = \frac{2}{5}mR^2$

Donde: m es la masa de la esfera, I_{esf} es el momento de inercia de la esfera y R es el radio de la esfera.

La energía cinética del sistema está dada por:

$$T = T_1 + T_2$$

Donde: T_1 y T_2 son energías cinéticas de la barra y de la esfera, las energías cinéticas incluyen los movimientos radiales y circulares, la energía cinética rotacional de la barra es:

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\dot{\alpha}^2$$

Donde J_1 es el momento de inercia de la barra, $\dot{\alpha}$ es la velocidad angular de la barra, la energía cinética de la esfera está dada por:

$$T_2 = \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

Donde J_2 es el momento de inercia de la esfera, \dot{r} y ω_2 son velocidades radiales y rotacionales de la esfera, m es la masa de la esfera, donde: $J_2 = \frac{2}{5}mR^2$, $\dot{r} = R\omega_2$, la energía cinética rotacional de la esfera es $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m\dot{r}^2\right)$, así que:

$$T = \frac{1}{2}\left[(J_1 + mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}m\dot{r}^2\right]$$

La energía potencial del sistema está dado por la ecuación:

$$P = mgr \sin \alpha + Mg \frac{L}{2} \sin \alpha$$

Donde M es la masa de la barra, L es la longitud de la barra, r es la posición de la esfera. La ecuación del Lagrangiano es:

$$L = T - P$$

$$L = \frac{1}{2}\left[(J_1 + mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}m\dot{r}^2\right] - \left(mgr + \frac{L}{2}Mg\right) \sin \alpha$$

Puesto que no hay fuerzas externas que actúan sobre la esfera en dirección radial, la ecuación Lagrangiana del movimiento está dado por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

Dado que $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -(mgr + \frac{L}{2}Mg) \cos \alpha$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (J_1 + mr^2)\dot{\alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{7}{5}m\dot{r}$. Se tiene que:

$$(J_1 + mr^2)\ddot{\alpha} + 2m\dot{r}\dot{\alpha} + (mgr + \frac{L}{2}Mg) \cos \alpha = \tau$$

$$\frac{7}{5}\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g \sin \alpha = 0$$
(3)

Que es similar al modelo obtenido en [11]. En este artículo sólo se considera que únicamente la gravedad afecta a la barra. Este modelo será utilizado en la etapa de simulación y para el análisis de estabilidad del sistema barra-esfera en lazo cerrado se empleará la forma simplificada.

2.2 Forma simplificada

La ecuación diferencial del sistema mecánico está dado por:

$$0.0117\ddot{\theta} + 0.588\dot{\theta} = u$$
(4)

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{0.58823s + 0.01176s^2}$$
(5)

La aceleración de la esfera está dada por la ecuación:

$$\ddot{r} = mg\alpha$$
(6)

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\frac{r(s)}{\alpha(s)} = \frac{7}{s^2}$$
(7)

Donde m es la masa y g la gravedad, los valores de $m = 5/7$, $g = 9.8m/s^2$. El modelo en forma simplificada se utiliza para el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado [14].

3 Control PD-Difuso

3.1 Análisis de estabilidad del control PD basado en el modelo simplificado

La configuración en cascada del control PD se muestra en la figura 3.

Sea el control PD para la esfera y el motor:

$$u = k_{pm}(\theta^* - \theta) + k_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta})$$
(8)

$$\theta = k_{pe}(r^* - r) + k_{de}(\dot{r}^* - \dot{r})$$
(9)

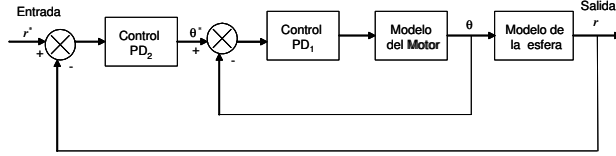


Figure 3: Control PD en configuración cascada

Definiendo: $\tilde{\theta} = (\theta^* - \theta)$, y $\dot{\tilde{\theta}} = (\dot{\theta}^* - \dot{\theta})$, el control para el motor (8), se reescribe como:

$$u = k_{pm}\tilde{\theta} + k_{dm}\dot{\tilde{\theta}} \quad (10)$$

Para la ecuación (9) de control de posición de la esfera es:

$$\theta = k_{pe}\tilde{r} + k_{de}\dot{\tilde{r}} \quad (11)$$

Donde: $\tilde{r} = r^* - r$, y $\dot{\tilde{r}} = \dot{r}^* - \dot{r}$

La función de transferencia del sistema (10) es:

$$\frac{U(s)}{\tilde{\theta}(s)} = k_{pm} + k_{dm}s \quad (12)$$

La función de transferencia del sistema (11) es:

$$\frac{\theta(s)}{\tilde{r}(s)} = k_{pe} + k_{de}s \quad (13)$$

La función de transferencia para el motor, utilizando el modelo simplificado es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.01176s^2 + 0.58823s}$$

Por lo que el control para el motor queda de la siguiente manera:

$$G_{o1} = \frac{U(s)\theta(s)}{\tilde{\theta}(s)U(s)} = \frac{k_{pm} + k_{dm}s}{0.01176s^2 + 0.58823s}$$

El sistema en lazo cerrado está dado por:

$$G_m = \frac{G_{o1}}{1 + G_{o1}}$$

Sustituyendo los valores del controlador PD del motor $k_{pm} = 5.79$, $k_{dm} = 0$, se tiene:

$$G_m = \frac{5.79}{0.01176s^2 + 0.58823s + 5.79} \quad (14)$$

La función de transferencia para el modelo de la esfera, en su forma simplificada es:

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{7}{s^2}$$

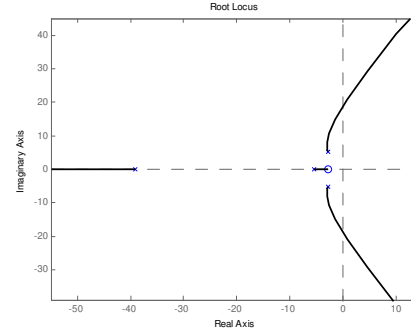


Figure 4: Lugar geométrico de las raíces

Su control PD es:

$$\frac{\theta(s)}{\tilde{r}(s)} = k_{pe} + k_{de}s$$

Entonces se tiene:

$$G_{o2} = \frac{\theta(s)r(s)}{\tilde{r}(s)\theta(s)}G_m$$

$$G_{o2} = \frac{(k_{pe} + k_{de}s)7}{s^2} \left(\frac{5.79}{0.01176s^2 + 0.58823s + 5.79} \right)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$G_{o2} = \frac{40.53(k_{pe} + k_{de}s)}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2}$$

El sistema en lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{G_{o2}}{1 + G_{o2}}$$

Sustituyendo los valores del controlador PD para los datos de la esfera $k_{pe} = 2.2$, $k_{de} = 0.8$, la función de transferencia del sistema en configuración cascada está dado por:

$$G_s(s) = \frac{32.424s + 89.166}{0.0117s^4 + 0.588s^3 + 5.79s^2 + 32.42s + 89.16} \quad (15)$$

Utilizando el Matlab para obtener las raíces del polinomio del denominador:

$$x_1 = -39.1055, x_2 = -2.7468 + 5.3127i, x_3 = -2.7468 - 5.3127i, x_4 = -5.4206$$

En la figura 4 se muestra el lugar geométrico de las raíces, de la función de transferencia (15).

Donde la parte real de las raíces obtenidas del polinomio del denominador se encuentran en la parte

negativa del semiplano complejo, por lo que el sistema en lazo cerrado es estable, como se observa en la figura 4.

Sustituyendo nuevos valores al controlador PD del motor, con $k_{pm} = 5.79$, $k_{dm} = 0$, y para la esfera $k_{pe} = 3$, $k_{de} = 10$. Se obtiene la función de transferencia del sistema dado por (16).

$$G_s(s) = \frac{405.3s + 121.59}{0.0117s^4 + 0.588s^3 + 5.79s^2 + 405.3s + 121.59} \quad (16)$$

Donde el lugar geométrico de las raíces se muestra en la figura 5.

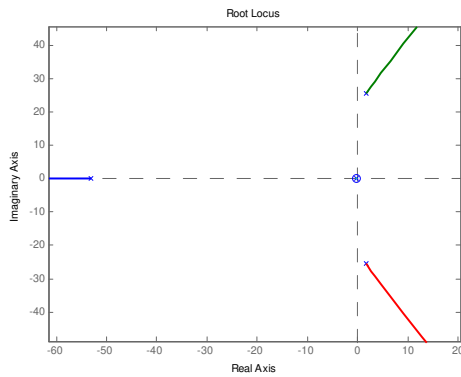


Figure 5: Raíces del polinomio del denominador

Donde las raíces del polinomio del denominador son: $x_1 = -53.1414$, $x_2 = 1.5931 + 25.4285i$, $x_3 = 1.5931 - 25.4285i$, $x_4 = -0.3013$

El sistema tiene dos polos en la parte positiva del semiplano complejo, por lo que el sistema en lazo cerrado no es estable, como se observa en la figura 5.

3.2 Control Difuso

El control difuso se agrega a los controladores PD convencionales como un término compensador de dinámicas no lineales tales como: fricción, "offset", saturación etc., y otras dinámicas no modeladas. El control PD más el control difuso será entonces:

$$u = k_{pm}(\theta^* - \theta) + k_{dm} \left(\dot{\theta}^* - \dot{\theta} \right) + \pi$$

$$\theta = k_{pe}(r^* - r) + k_{de} \left(\dot{r}^* - \dot{r} \right) + \pi$$

Donde: π es el control difuso que cumple la función de un compensador.

Las entradas al sistema son: la posición de la esfera en la barra r , su velocidad \dot{r} , la posición angular θ

del motor, y su velocidad angular $\dot{\theta}$. La salida del sistema será la nueva posición de la esfera, en donde $r = x_1$, $\dot{r} = x_2$, $\theta = x_3$, $\dot{\theta} = x_4$ [15].

Las reglas establecidas para el control difuso del sistema barra-esfera son las siguientes:

R_1^L : SI x_1 es positivo y x_2 está cerca de cero y x_3 es positivo y x_4 está cerca de cero, *ENTONCES* u es negativo

R_2^L : SI x_1 es positivo y x_2 está cerca de cero y x_3 es negativo y x_4 está cerca de cero, *ENTONCES* u es mayormente positivo

R_3^L : SI x_1 es negativo y x_2 está cerca de cero y x_3 es positivo y x_4 está cerca de cero, *ENTONCES* u es mayormente negativo

R_4^L : SI x_1 es negativo y x_2 está cerca de cero y x_3 es negativo y x_4 está cerca de cero, *ENTONCES* u es positivo

En el presente trabajo se utilizan funciones de pertenencia gaussianas. Por lo tanto el control PD-difuso para el sistema está dado por:

$$u_T(x) = (0.1) * u_{PD}(x) + (0.9) * \pi$$

$$u_{PD}(x) = u_{PDmotor}(x) + u_{PDesfera}(x) \quad (17)$$

$$\pi = u_{DIFmotor}(x) + u_{DIFesfera}(x)$$

Donde el sistema difuso es:

$$\pi = \frac{\Gamma_\mu}{\mu_1(R_1) + \mu_2(R_2) + \mu_3(R_3) + \mu_4(R_4)} \quad (18)$$

donde:

$$\Gamma_\mu = \mu_1(R_1)\mu_{Nu}(u) + \mu_2(R_2)\mu_{PBu}(u) + \mu_3(R_3)\mu_{NBu}(u) + \mu_4(R_4)\mu_{Pu}(u)$$

Por lo que la estructura del controlador difuso queda de la forma (18), donde el fuzzificador es de tipo singleton, el motor de inferencia es de tipo producto y el defuzzificador es de tipo centro promedio.

4 Aplicación en tiempo real

En este trabajo se propone implementar un control PD-Difuso en tiempo real para el sistema barra-esfera mostrado en la figura 6, prototipo ubicado en el Centro de Servicios Experimentales (CSE) del Departamento de Control Automático (DCA) del CINVESTAV-IPN. La tarjeta de adquisición de datos de la figura 7 es la *RT-DAC4/PCI*, es compatible con diversos softwares en tiempo real como son: RT-CON, Real Time Workshop, Real Time Windows Target y los programas Matlab Ver. 6.5 y Simulink Ver. 5.0.2, que se ejecutan en una computadora personal con Windows XP. La frecuencia de muestreo es de aproximadamente 10 ms.

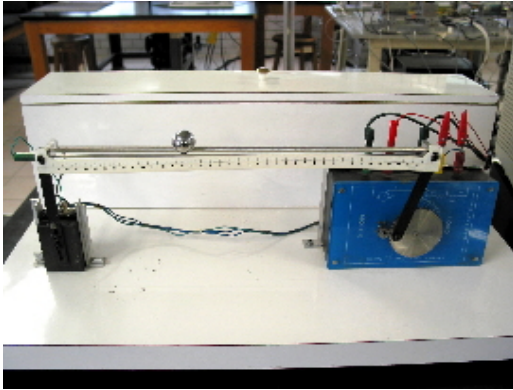


Figure 6: Fotografía del sistema barra-esfera

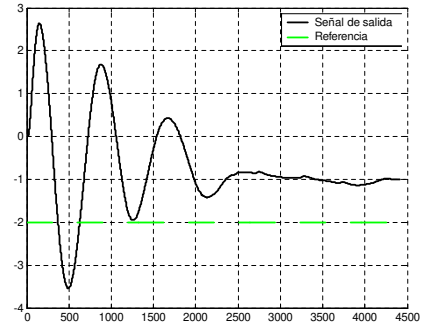


Figure 8: Control PD

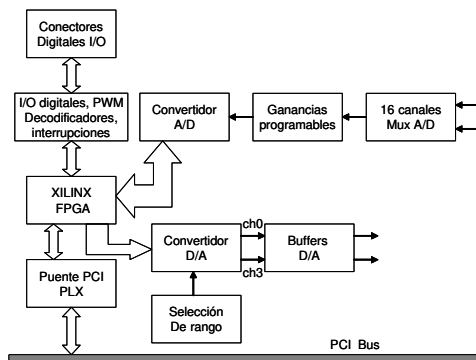


Figure 7: Diagrama a bloques de la tarjeta RT-DAC4/PCI

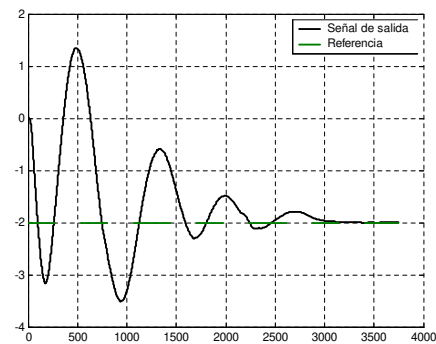


Figure 9: Control PD-Difuso

4.1 Control PD

La figura 8 muestra la salida del control PD que logra estabilizar el sistema en lazo cerrado de la figura 3. Sin embargo como puede observarse presenta un error de posición en estado estacionario de aproximadamente 1 unidad; esto es debido a términos gravitacionales y otras dinámicas no lineales que no se consideraron.

4.2 Control PD-Difuso

Cuando se realizan los experimentos en tiempo real, se presenta el efecto de la fuerza de gravedad y de algunos efectos no lineales, sin embargo al añadir el control difuso como un término compensador de estas dinámicas no lineales, el control PD-Difuso logra estabilizar al sistema en lazo cerrado con un error de aproximadamente 0.1, que es mucho menor que el error obtenido con el control PD sin término compensador. El tiempo en que logran estabilizar al sistema es similar en ambos casos, así como la magnitud en

el sobretiro que presentan.

Estas dinámicas no lineales afectan el desempeño del sistema haciendo necesario añadir un término compensador que minimice sus efectos, estas dinámicas pueden ser: la gravedad, "offset" en la señal, saturación, fricción, etc. La figura 9 muestra un nivel de error mínimo, 10 veces menos que el control PD.

5 Conclusion

Se realizó el modelo matemático del sistema no lineal que fue empleado únicamente para simulación. Se obtuvo el modelo linealizado que fue utilizado para hacer la prueba de estabilidad del sistema barra-esfera en lazo cerrado, utilizando las herramientas de Sistemas Lineales.

Se realizó un control difuso con únicamente cuatro reglas lingüísticas y que al implementarlo al modelo, no logra estabilizarlo. Se construyó un control híbrido PD-Difuso teniendo el controlador difuso como término compensador de efectos gravitacionales y otras no linealidades.

Se implementarán los controladores PD-Difuso en tiempo real y se comparó su respuesta con las entregadas por el prototipo del CSE, del Depto. de Control Automático. Observando que el control PD-Difuso presenta un mínimo de error en el objetivo de control, estabilizar la esfera en una posición dada, con respecto al control PD sin compensador. El control PD-Difuso que logra el objetivo de estabilizar al sistema en lazo cerrado es:

$$u_T(x) = 0.1u_{PD} + 0.9\pi$$

Se muestra el diagrama de control del sistema en la figura 10.

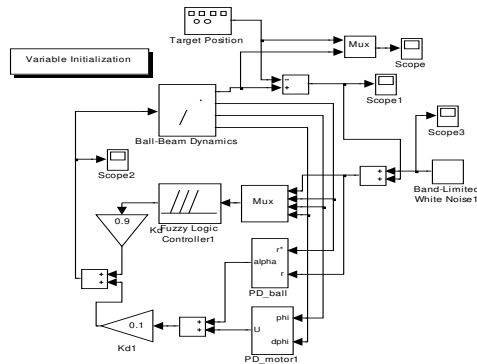


Figure 10: Sistema de control barra-esfera

References

[1] Black, D., *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge: Cambridge University Press, 1958.

[2] Blyth C., *Some probability paradoxes in choice from among random alternatives*, J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 67, pp. 366-373, 1972.

[3] Li-chien C., *On the maximin probability of cyclic random inequalities*, Scientia Sinica, Vol. 10 pp. 499-504, 1961.

[4] Marquis, S., *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Prentice-Hall, Paris, 1785.

[5] Dunford N. and J. Schwartz, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1963.

[6] Gardner M., *On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations*, Scientific American, No. 231, pp. 120-125, 1974.

[7] Funkenbusch W., *Preferences among preferences or nested cyclic stochastic inequalities*, American Control Conference Vol 2, pp. 419-432, 2000.

[8] Struwe M, *Semilinear wave equations*, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 26, pp. 53-85, 1992.

[9] Thurston W. P. *Geometry and topology of three manifolds*, Lecture notes, Princeton Univ., NJ, 1979.

[10] P.H. Eaton, D.V. Prokhorov, and D.C. Wunsch II, *Neurocontroller Alternatives for "Fuzzy" Ball-and-Beam Systems with Nonuniform Nonlinear Friction*, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.11, No.2, 423-435, 2000.

[11] J.Hauser, S.Sastry and P.Kokotovic, *Nonlinear control via approximate input-output linearization: ball and beam example*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.37, No.3,392-398., 1992.

[12] N. Jo and J.H. Seo, *A State Observer for Nonlinear Systems and its Application to Ball and Beam System*, *IEEE Trans. on Automatic Control*, VOL. 45, NO. 5, 968-973, 2000.

[13] E.H.Mamdani, *Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant*, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol.121, No.12, 1585-1588, 1976.

[14] *Ball and Beam: Experiment and Solution*, Quanser Consulting, 1991.

[15] L.X.Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1994.

[16] W.Yu and X. Li, *Some new results on system identification with dynamic neural networks*, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.12, No.2, 412-417, 2001.

[17] Kevin M. Passino/ Stephen Yurkovich, "Fuzzy control", Edit. Addison Wesley, 1997

[18] Witold Pedrycz "Fuzzy control and Fuzzy systems", second edition, Edit. John Wiley & Sons Inc.

[19] Mark W. Spong *The control of underactuated Mechanical systems*. In first international conference on mecatronics, Mexico city, 1994.

[20] Mark W/M Viyasagar. *Spong Robots dynamics and control* Edit. John Wiley & sons, 1989. ISBN 88-22724