TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 327, Number 2, October 1991

MODÈLE MINIMAL ÉQUIVARIANT ET FORMALITÉ

THIERRY LAMBRE

ABSTRACT. We study the rational equivariant homotopy type of a topological space X equipped with an action of the group of integers modulo n.

For $n = p^k$ (p prime, k a positive integer), we build an algebraic model which gives the rational equivariant homotopy type of X. The homotopical fixed-point set appears in the construction of a model of the fixed-points set. In general, this model is different from G. Triantafillou's model [T1].

For $n = p$ (p prime), we then give a notion of equivariant formality. We prove that this notion is equivalent to the formalizability of the inclusion of fixed-points set $i: X^{\mathbb{Z}_p} \to X$. Examples and counterexamples of $\mathbb{Z}_p$-formal spaces are given.

1. INTRODUCTION

G désigne un groupe fini. **Top** est la catégorie des ensembles simpliciaux 2-réduits, à nombres de Betti finis. Pour un ensemble X muni d'une action simpliciale du groupe G, X^H désigne l'ensemble des points de X fixés par le sous-groupe H de G.

Un G-espace est un ensemble X muni d'une action de G telle que $X^H \neq \varnothing$ et $X^H \in$ **Top** pour tout sous-groupe H de G. Une G-application $\varphi: X \to Y$ est une application simpliciale et équivariante; φ détermine $\varphi^H: X^H \to Y^H$.

Deux G-espaces X et Y ont le même G-type d'homotopie s'il existe un couple de G-applications $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\lambda} X$ tel que $\varphi \circ \lambda \sim_G \mathrm{id}_Y$ et $\lambda \circ \varphi \sim_G \mathrm{id}_X$. ($\sim_G$ signifie que les homotopies sont elles-mêmes des G-applications.)

Depuis G. Bredon, on sait que l'étude du G-type d'homotopie des G-espaces nécessite l'introduction des espaces de points fixes pour tous les sous-groupes de G; en effet:

Théorème [B, II.12]. *Soit $\varphi: X \to Y$ une G-application entre les G-espaces X et Y; φ est une G-équivalence d'homotopie si et seulement si, pour tout $q \geq 2$, pour tout sous-groupe H de G, $\pi_q(\varphi^H): \pi_q(X^H) \to \pi_q(Y^H)$ est un isomorphisme.*

Received by the editors August 8, 1989.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 57S17, 55Q91, 55P10.
Key words and phrases. G-space, differential algebra, minimal model.

Pour passer aux classes rationnelles, G. Triantafillou a posé:

Définition [T1, 1.1]. Une G-application $\varphi: X \to Y$ est une G-équivalence d'homotopie rationnelle si $H^*(\varphi^H; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme pour tout sous-groupe H de G.

Définition [T1, 1.2]. Les G-espaces X et Y ont le même G-type d'homotopie rationnelle s'il existe une chaîne de G-équivalences d'homotopie rationnelle reliant X à Y.

Ce cadre lui a permis de construire un modèle minimal équivariant fournissant le G-type d'homotopie rationnelle du G-espace X en procédant par analogie avec la construction de Sullivan [Su].

Le but de cet article est de construire, dans le cas particulier où G est le groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$ des entiers modulo p^k (p premier, k entier non nul), un autre modèle minimal équivariant, appelé ici modèle minimal cofibrant, décrivant le $\mathbb{Z}_{p^k}$-type d'homotopie rationnelle des $\mathbb{Z}_{p^k}$-espaces, et permettant, pour $k = 1$, d'étudier la notion de formalité équivariante.

Ce texte s'organise ainsi:

Le paragraphe 2 expose les résultats concernant la théorie équivariante "classique", c'est-à-dire en négligeant tous les espaces de points fixes X^H pour $H \neq \{e\}$. Nous nous plaçons dans la catégorie G-**ADGC**; les objets sont les $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives (en abrégé adgc) cohomologiquement 0-connexes et 1-connexes (A, d_A) munies d'un morphisme de groupe $\phi_A: G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{ADGC}}(A, d_A)$; les flèches sont les morphismes équivariants d'adgc. (Si le morphisme de groupe ϕ_A est égal à id, on retrouve la catégorie **ADGC**.)

Nous rappelons la construction d'un G-modèle minimal. Dans la catégorie G-**ADGC**, les G-homotopies se construisent à partir de G-KS-complexes (voir Définition 2.1); nous établissons le:

Théorème 2.6. *Soient f et g deux G-morphismes d'adgc, de source le G-KS-complexe $(\wedge V, d)$, de but la G-adgc (B, d_B); les propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) $f \sim g$;
(2) $f \sim_G g$.

Ce résultat montre la différence de comportement entre les catégories G-**Top** et G-**ADGC** (cf. 2.9).

Dans le paragraphe 3, nous construisons pour $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ un modèle minimal cofibrant; sa particularité réside dans le fait que les points fixes homotopiques servent de fondation à la construction du modèle des points fixes. La preuve s'effectue par récurrence sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$.

Introduisons les outils nécessaires à ce cadre: $\mathcal{O}_G$ est la catégorie dont les objets sont les espaces homogènes G/H et dont les flèches sont les G-applications entre ces objets. $\mathbb{Q}$-**EV** est la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel est un foncteur covariant de source $\mathcal{O}_G$, de but $\mathbb{Q}$-**EV**; une $\mathcal{O}_G$-adgc est un foncteur covariant de source $\mathcal{O}_G$, de but **ADGC**. Par exemple, désignons par A_{PL} le foncteur formes PL de Sullivan [Su]; la $\mathcal{O}_G$-adgc de de Rham $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ est définie par:

$$\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)(G/H) = A_{\mathrm{PL}}(X^H).$$

Un modèle équivariant d'une $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{A}$ est un couple $(\underline{M}, \underline{\rho})$, où $\underline{M}$ est une $\mathcal{O}_G$-adgc telle que $\underline{M}(G/H)$ soit une adgc, libre en tant qu'algèbre graduée commutative (en abrégé agc), et $\underline{\rho}: \underline{M} \to \underline{A}$ une transformation naturelle de foncteurs telle que $H^*(\underline{\rho}(G/H)): H^*(\underline{M}(G/H)) \to H^*(\underline{A}(G/H))$ soit un isomorphisme d'agc pour tout sous-groupe H de G. Un modèle équivariant du G-espace X est un modèle équivariant de $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$.

Les $\mathcal{O}_G$-espaces vectoriels constituent une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs [B]. Le modèle minimal construit par G. Triantafillou en [T1] est un modèle injectif d'une $\mathcal{O}_G$-adgc injective. Nous avons:

Théorème 3.6. *Pour $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, toute $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{A}$ admet un modèle $(\underline{K}, \rho)$, où $\underline{K}$ est un modèle équivariant cofibrant. Ce modèle est unique à isomorphisme près.*

Dans le paragraphe 4, nous étudions la formalité équivariante des $\mathbb{Z}_p$-espaces. Introduite par la théorie du modèle minimal [Su], la formalité d'un espace rationnel signifie que toute la structure homotopique de cet espace est contenue dans la donnée de son algèbre de cohomologie $H^*(X; \mathbb{Q})$; une application $\varphi: X \to Y$ entre les espaces formels X et Y est formalisable si φ et $H^*(\varphi; \mathbb{Q})$ ont un modèle de Sullivan en commun. Dans le cadre équivariant, on pose:

Définition. Le $\mathbb{Z}_p$-espace X est $\mathbb{Z}_p$-formel si $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ et $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$ ont un modèle minimal cofibrant en commun.

Nous montrons:

Théorème 4.4. *Le $\mathbb{Z}_p$-espace X est $\mathbb{Z}_p$-formel si et seulement si l'injection de l'ensemble des point fixes $i: X^{\mathbb{Z}_p} \to X$ est une application formalisable.*

Une propriété utilisant un caractère équivariant se réduit donc à une propriété n'utilisant pas de caractère équivariant.

Une sphère $\mathbf{S}^n$ munie d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p$ est toujours un espace $\mathbb{Z}_p$-formel; une variété kählérienne compacte sur laquelle le groupe $\mathbb{Z}_p$ agit de manière holomorphe est un espace $\mathbb{Z}_p$-formel. D'autres exemples sont proposés à la fin du paragraphe 4.

Cet article expose les résultats réunis dans ma thèse réalisée sous la direction de D. Tanré, à qui j'exprime ma sincère gratitude; je remercie Y. Félix et S. Halperin pour les fructueuses conversations qu'ils m'ont accordées ainsi que le *referee* pour ses remarques qui ont contribué à clarifier ce texte.

2. G-HOMOTOPIE DANS ADGC

2.1. Définition. Soit $f: (B, d_B) \to (A, d_A)$ un G-morphisme d'adgc entre les G-adgc (B, d_B) et (A, d_A). Le diagramme commutatif ci-dessous de la catégorie G-**ADGC** est un G-modèle (minimal) de f si $(\wedge V, d)$ est une G-adgc, libre et engendrée par le G-espace vectoriel gradué V, si toutes les flèches sont des G-morphismes d'adgc, si $(\mathscr{E})$ est une KS-extension (minimale) au sens de [H] et si φ induit un isomorphisme en cohomologie:

$$\text{(E)} \qquad \begin{tikzcd} & & (A, d_A) \\ (B, d_B) \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "\imath"] & (B \otimes \wedge V, d) \arrow[ur, phantom] \arrow[r, "\rho"] & (\wedge V, \bar{d}) \end{tikzcd}$$

$$(B\otimes\wedge V, d) \xrightarrow{\varphi} (A, d_A)$$

Par la suite, nous dirons pour abréger que $(\mathscr{E})$ est une G-KS-extension (minimale).

Lorsque φ est un morphisme d'adgc, on désigne par φ^* l'application induite en homologie; si φ^* est un isomorphisme, on dit que φ est un équivalence faible.

2.2. Si $(B, d_B) = \mathbb{Q}$, le diagramme ci-dessus s'appelle un G-modèle (minimal) de Sullivan de (A, d_A) et $(\wedge V, d)$ un G-KS-complexe (minimal).

Notations. V_α désigne l'espace vectoriel des indécomposables de degré α: $V_{\leq\alpha} = V_{<\alpha} \oplus V_\alpha$; la condition KS sur la différentielle d s'écrit: pour tout $v \in V_{\leq\alpha}$, $dv \in \wedge(V_{<\alpha})$. Enfin, l'ordre de la KS-base est choisi tel que $GV_\alpha \subset V_\alpha$.

2.3. Dans G-**ADGC**, tout G-morphisme de G-adgc admet un G-modèle minimal. Ce résultat se trouve dans [GHVP]. Pour de plus énoncer un théorème d'unicité du G-modèle minimal, il faut une théorie de l'homotopie équivariante dans la catégorie G-**ADGC**; cette théorie se construit sans difficulté (voir 2.4 et 2.5). Le G-modèle minimal satisfait à des propriétés d'unicité analogues à celles du cas classique [H, 6.2 et 6.3]. Des preuves détaillées se trouvent en [L] et en [G].

Nous allons considérer des homotopies de deux types: équivariantes et relatives. Nous précisons pour cela les cylindres utilisés.

2.4. Sur les homotopies équivariantes. V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué muni d'une action de G. L'application $s\colon V \to sV$ est l'isomorphisme de degré -1 défini par $(sV)^n = V^{n+1}$; $I(V)$ est le G-espace vectoriel gradué $V \oplus sV \oplus DsV$; l'action de G sur $I(V)$ est $t(sv) = s(tv)$, $t(Dsv) = Ds(tv)$ pour $t \in G$ et $v \in V$. Si $(\wedge V, d)$ est un G-KS-complexe, le cylindre de base $(\wedge V, d)$ est $I(\wedge V, d) = (\wedge I(V), D)$, où D est définie par $D(v) = dv$, $D(sv) = Dsv$, $D(Dsv) = 0$. La G-dérivation i de degré -1 est définie sur $I(\wedge V, d)$ par $i(v) = sv$, $i(sv) = i(Dsv) = 0$; la G-dérivation $\theta = iD + Di$ est de degré 0 et commute à D; les applications $\lambda_j\colon (\wedge V, d) \to I(\wedge V, d)$ $(j = 0, 1)$ sont respectivement l'inclusion canonique et l'application $\exp\theta \circ \lambda_0$, c'est-à-dire

$$\lambda_1(v) = \lambda_0(v) + \sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v).$$

La relation d'homotopie obtenue de cette façon s'appelle G-homotopie et est notée $f \sim_G g$; nous la noterons parfois $f \sim_G g$. La notion usuelle d'homotopie dans **ADGC** correspond au cas où toutes les actions sont triviales; on écrit alors $f \sim g$.

2.5. Sur les homotopies relatives. Nous n'allons utiliser que des homotopies relatives d'un type particulier; pour la notion générale d'homotopie relative, nous renvoyons le lecteur à [H, 5]. Le cylindre relatif $I((\wedge V, \wedge V_{<n}), d)$ est le G-KS-complexe dont un système de générateurs est $V \oplus s(V_{\geq n}) \oplus Ds(V_{\geq n})$; $\overline{D}$ est défini par $\overline{D}(v) = dv$ pour $v \in V$, $\overline{D}(sv) = Dsv$, $\overline{D}(Dsv) = 0$ pour $v \in V_{\geq n}$. La G-dérivation $\bar{i}$ de degré -1 est définie par $\bar{i}(V_{<n} \oplus s(V_{\geq n}) \oplus Ds(V_{\geq n})) = 0$ et $\bar{i}(v) = sv$ pour $v \in V_{\geq n}$. Les applications $\bar{\theta}$, $\bar{\lambda}_j$ $(j = 0, 1)$ sont définies de manière analogue au cas précédent. La notion d'homotopie obtenue s'appelle G-homotopie relative à $\wedge V_{<n}$; elle est notée $f \sim_G g$ (rel. $\wedge V_{<n}$).

Remarques. (a) Pour $w \in V_{<n}$, on a $\bar{\theta}^p(w) = 0$ dès que $p \geq 1$ et donc $\bar{\lambda}_1(w) = \bar{\lambda}_0(w)$.

(b) Pour $v \in V_n$, on a $\bar{\theta}^p(v) = 0$ pour $p \geq 2$ et $\bar{\theta}(v) = Dsv$; on en déduit $\bar{\lambda}_1(v) = \bar{\lambda}_0(v) + Dsv$.

La fin de ce paragraphe est consacrée au résultat suivant:

2.6. Théorème. *Soient f et g deux G-morphismes d'adgc, de source le G-KS-complexe $(\wedge V, d)$, de but la G-adgc (B, d_B); les propositions suivantes sont équivalentes:*

(1) $f \sim g$;
(2) $f \sim_G g$.

2.6(1). Lemme. *Désignons par $\mathcal{I}_\alpha$ l'idéal de $I(\wedge V_{\leq\alpha}, d)$ engendré par $\theta(V_{<\alpha})$; on a $\theta^p(V_{\leq\alpha}) \subset \mathcal{I}_\alpha$ pour $p \geq 2$.*

Preuve. Soit $v \in V_{\leq\alpha}$; remarquons que $\theta^2(v) = \theta(sdv)$. J_q désigne le multi-indice $(j_1, \ldots, j_q)$; $\theta(sdv)$ se calcule en décomposant dv en mots homogènes de longueur q: $dv = \sum_{q\geq 1} d_q v$, où $d_q v = \sum_{J_q} w_{j_1} \cdots w_{j_q}$ et $w_{j_k} \in V_{<\alpha}$. Un mot homogène de longueur q $(q \geq 1)$ de sdv est une somme d'éléments du type $s(w_1)w_2 \cdots w_q$ avec $w_i \in V_{<\alpha}$. Par ailleurs, $\theta(sw) = 0$ pour $w \in V_{<\alpha}$.

De ceci, il résulte que $\theta(sdv)$ admet une décomposition en mots homogènes de longueur q $(q \geq 2)$ du type $s(w_1)\theta(w_2 \cdots w_q)$.

$\theta^2(v) = \theta(sdv)$ s'écrit sous la forme $\sum_r \theta(w_r)z_r$ avec $w_r \in V_{<\alpha}$ et $z_r \in I(\wedge V_{<\alpha})$, ce qui montre que $\theta^2(v)$ appartient à $\mathcal{I}_\alpha$.

Par récurrence sur p, on en déduit que $\theta^p(v) \in \mathcal{I}_\alpha$ pour $v \in V_{\leq\alpha}$ et $p \geq 2$.

2.6(2). Lemme. *Soient g_0 et g_1 deux morphismes d'adgc, de source le KS-complexe $(\wedge V, d)$, de but l'adgc (B, d_B); on suppose que ces applications satisfont la relation $g_0(w) = g_1(w)$ pour tout $w \in V_{<\alpha}$ et qu'il existe une homotopie*

$F: I(\wedge V, d) \to (B, d_B)$ *de source* g_0, *de but* g_1; *alors*:

$$F\left(\sum_{n\geq 2} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = 0, \quad \textit{pour tout } v \in V_{\leq\alpha}.$$

Preuve. (1) Remarquons que, pour $w \in V_{<\alpha}$, la quantité $F(\sum_{n\geq 1} \theta^n(w)/n!)$ est nulle; en effet, $F \circ \lambda_1(v) = F \circ \lambda_0(v) + F(\sum_{n\geq 1} \theta^n(v)/n!)$; or $F \circ \lambda_1$ et $F \circ \lambda_0$ coincident sur $\wedge V_{<\alpha}$.

(2) Montrons que pour $w \in V_{<\alpha}$, on a l'égalité $F(\theta(w)) = 0$; la preuve se fait par récurrence; désignons par α_0 le plus petit élément de l'ensemble bien ordonné indexant la KS-base de $(\wedge V, d)$. Pour $v \in V_{\alpha_0}$, on a évidemment:

$$F(\theta(v)) = F\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = g_1(v) - g_0(v) = 0.$$

Soit $\gamma < \alpha$ et supposons que pour tout $w \in V_{<\gamma}$, $F(\theta(w)) = 0$. Désignons par u un élément de V_γ; d'après le lemme 2.6(1), pour $p \geq 2$ nous avons $\theta^p(u) \in \mathcal{I}_\gamma$, c'est-à-dire $\theta^p(u) = \sum_r \theta(w_r) z_r$ avec $w_r \in V_{<\gamma}$ et $z_r \in I(\wedge(V_{<\gamma}), d)$. Ceci nous donne, grâce à l'hypothèse de récurrence, $F(\theta^p(u)) = F(\sum_r \theta(w_r) z_r) = 0$.

(3) Désignons maintenant par v un élément de V_α; on a en vertu de ce qui précède et du lemme 2.6(1),

$$F\left(\sum_{n\geq 2} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = F\left(\sum_r \theta(w_r) z_r\right) = 0.$$

2.7. Passons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe une famille $(f_i)_{\alpha_0 \leq i \leq \alpha+1}$ de G-morphismes d'adgc de source $(\wedge V, d)$, de but (B, d_B) telle que:

(i) $f_{\alpha_0} = f$;
(ii) $f_i(v) = g(v)$ pour $v \in V_{<i}$;
(iii) il existe une G-homotopie F_i, relative à $\wedge V_{<i}$, de source f_i, de but f_{i+1}, pour $\alpha_0 \leq i \leq \alpha$.

Construisons des applications $F_{\alpha+1}$ et $f_{\alpha+2}$ satisfaisant ces conditions. Le G-morphisme $K'_\alpha = \sum_{\beta\leq\alpha} F_\beta$ est une G-homotopie de source $f = f_{\alpha_0}$, de but $f_{\alpha+1}$. Rappelons que, par hypothèse, il existe une homotopie F (non équivariante a priori) de source f, de but g; désignons par K_α l'homotopie composée à partir de F et de K'_α, de source $f_{\alpha+1}$, de but g.

D'après le lemme 2.6(2), nous avons $K_\alpha(\theta(v)) = 0$ pour $v \in V_{<\alpha+1}$ et $K_\alpha(\theta(v)) = K_\alpha(\sum_{n\geq 1} \theta^n(v)/n!)$ pour $v \in V_{\alpha+1}$.

Définissons le G-morphisme d'adgc $F_{\alpha+1}: I((\wedge V, \wedge V_{<\alpha+1}), d) \to (B, d_B)$

par $F_{\alpha+1|V} = f_{\alpha+1}$,

$$F_{\alpha+1}(sv) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}K_\alpha(tsv) \quad \text{pour } v \in V_{\alpha+1},$$

$$F_{\alpha+1}(Dsv) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}K_\alpha(\theta tv) \quad \text{pour } v \in V_{\alpha+1},$$

$$F_{\alpha+1} = 0 \text{ sur les autres générateurs de } I((\wedge V_{\alpha+1}, \wedge V), d).$$

Soit $f_{\alpha+2} = F_{\alpha+1} \circ \bar{\lambda}_1$; on a $f_{\alpha+1} \sim_G f_{\alpha+2}$ (rel. $\wedge V_{<\alpha+1}$) par construction.

Calculons $f_{\alpha+2}(v)$ pour $v \in V_{\leq\alpha+1}$: Si v appartient à $V_{<\alpha+1}$, il est clair que $f_{\alpha+2}(v) = f_{\alpha+1}(v)$ et donc $f_{\alpha+2}(v) = g(v)$. Si v appartient à $V_{\alpha+1}$, nous avons

$$\begin{aligned}
f_{\alpha+2}(v) &= F_{\alpha+1} \circ \bar{\lambda}_1(v) = F_{\alpha+1}(v + Dsv) \\
&= f_{\alpha+1}(v) + \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}K_\alpha(\theta tv) \\
&= f_{\alpha+1}(v) + \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}K_\alpha\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\theta^n}{n!}(tv)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}\left[f_{\alpha+1}(tv) + K_\alpha\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\theta^n}{n!}(tv)\right)\right] \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}K_\alpha \circ \lambda_1(tv) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} t^{-1}g(tv) \\
&= g(v).
\end{aligned}$$

Considérons $F' = \sum_\alpha F_\alpha$; parce que les homotopies sont relatives, cette somme est finie en chaque degré $(F'(x) = \sum_{\alpha\leq|x|} F_\alpha(x))$; F' est une G-homotopie de source f, de but g. □

2.8. *Remarque.* Le théorème 2.6 possède le cousin suivant: **LDG** est la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées 1-réduites, de type fini et **ADG** est la catégorie des algèbres associatives différentielles graduées. $\mathcal{U}$ est le foncteur algèbre enveloppante de source **LDG**, de but **ADG**.

Théorème [AL]. *Deux morphismes f_0 et f_1 de* **LDG** *sont homotopes dans* **LDG** *si et seulement si les morphismes $\mathcal{U}(f_0)$ et $\mathcal{U}(f_1)$ sont homotopes dans* **ADG**.

L'analogie est la suivante: l'homotopie peut se lire en oubliant une structure. Dans notre cas, une homotopie est suffisante (au lieu d'une homotopie équivariante); dans [AL], une homotopie d'algèbres suffit (au lieu d'une homotopie d'algèbres de Hopf).

Interprétation géométrique du théorème 2.6.

2.9. Dans la catégorie **Top**, un énoncé analogue au théorème 2.6 est faux: Soient, par exemple, $X = (\mathbf{S}^1, *)$ identifié à l'équateur de $Y = (\mathbf{S}^2, *)$; munissons Y

de l'action de $\mathbb{Z}_2$ définie par la symétrie par rapport au plan équatorial. Les applications $\varphi_i\colon X \to Y$ $(i = 1, 2)$ définies par $\varphi_0(x) = *$ et $\varphi_1(x) = x$ satisfont $\varphi_0 \sim \varphi_1$ et $\varphi_0 \nsim_{\mathbb{Z}_2} \varphi_1$.

2.10. Si X est un G-espace, $A_{\mathrm{PL}}(X)$ est une G-adgc. Un G-modèle minimal de X est un G-modèle minimal de la G-adgc $A_{\mathrm{PL}}(X)$. La catégorie G-**ADGC** s'avérera insuffisante pour obtenir le G-type d'homotopie rationnelle de l'espace X ; c'est pourquoi dans les paragraphes suivants, nous introduirons la catégorie $\mathcal{O}_G$-**ADGC**.

2.11. Soit $f\colon (B, d_B) \to (A, d_A)$ un G-morphisme d'adgc. Un G-modèle de Sullivan de f est un diagramme:

$$\begin{tikzcd} (B, d_B) \arrow[r, "f"] & (A, d_A) \\ (\wedge V, d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "\hat{f}"] & (\wedge V', d') \arrow[u, "\rho'"] \end{tikzcd}$$

où $((\wedge V, d), \rho)$ est un G-modèle de (B, d_B), $((\wedge V', d'), \rho')$ est un G-modèle de (A, d_A), et $\hat{f}$ est un G-morphisme d'adgc satisfaisant $\rho' \circ \hat{f} \sim_G f \circ \rho$. Remarquons que l'on peut choisir le G-modèle $((\wedge V, d), \rho)$ de sorte que le morphisme $\hat{f}$ soit surjectif.

On a vu en 2.9 qu'un énoncé analogue au théorème 2.6 est faux dans **Top**. Sa traduction exacte est:

2.12. Proposition. *Soient X et Y deux G-espaces, φ_0 et φ_1 deux G-applications de source X, de but Y ; on suppose que φ_0 et φ_1 sont homotopes. Alors, il existe des G-espaces $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, des G-applications $\bar{\varphi}_0$ et $\bar{\varphi}_1$ de source $\overline{X}$, de but $\overline{Y}$ et satisfaisant les propriétés suivantes*:

(1) $\overline{X}$ *(resp. $\overline{Y}$) a le même G-modèle minimal que X (resp. Y)*;
(2) $\bar{\varphi}_0 \sim_G \bar{\varphi}_1$;
(3) $\bar{\varphi}_i$ *a le même G-modèle de Sullivan que* φ_i.

Preuve. (1) Désignons par $\langle\ \rangle$ le foncteur réalisation géométrique, de source la catégorie des G-adgc, de but la catégorie des G-espaces. On pose:

$$\overline{X} = \langle A_{\mathrm{PL}}(X)\rangle, \qquad \overline{Y} = \langle A_{\mathrm{PL}}(Y)\rangle.$$

Que $\overline{X}$ ait même G-modèle minimal que X résulte de l'application naturelle $i_X\colon X \to \langle A_{\mathrm{PL}}(X)\rangle$; i_X est une G-application et $H^*(i_X; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme (mais i_X n'est pas une G-équivalence d'homotopie rationnelle).

(2) Soient $f_i = A_{\mathrm{PL}}(\varphi_i)$, $\bar{\varphi}_i = \langle f_i\rangle$, $\bar{f}_i = A_{\mathrm{PL}}(\bar{\varphi}_i)$. $\hat{f}_i$ est un G-modèle de Sullivan de f_i: $\rho_X \circ \hat{f}_i \sim_G f_i \circ \rho_Y$. De $\varphi_0 \sim \varphi_1$, on tire $f_0 \sim f_1$ d'où, d'après le théorème 2.6, $f_0 \sim_G f_1$ et donc $\langle f_0\rangle \sim_G \langle f_1\rangle$, c'est-à-dire $\bar{\varphi}_0 \sim_G \bar{\varphi}_1$.

(3) Avec les notations ci-dessus, nous avons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
A_{\mathrm{PL}}(X) & & A_{\mathrm{PL}}(\bar{X}) \arrow[ll, "A_{\mathrm{PL}}(i_X)"'] \\
& (\wedge V_X, d_X) \arrow[ul, "\rho_X"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{\rho}_X"] & \\
& (\wedge V_Y, d_Y) \arrow[u, "\hat{f}_i"'] \arrow[dl, "\rho_Y"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\rho}_Y"'] & \\
A_{\mathrm{PL}}(Y) \arrow[uuu, "f_i"] & & A_{\mathrm{PL}}(\bar{Y}) \arrow[ll, "A_{\mathrm{PL}}(i_Y)"'] \arrow[uuu, "\bar{f}_i"']
\end{tikzcd}$$

Par G-relèvement, on détermine $\bar{\rho}_X$ et $\bar{\rho}_Y$ tels que $A_{\mathrm{PL}}(i_X) \circ \bar{\rho}_X \sim_G \rho_X$ et $A_{\mathrm{PL}}(i_Y) \circ \bar{\rho}_Y \sim_G \rho_Y$. Par naturalité, on a les diagrammes commutatifs $A_{\mathrm{PL}}(i_X) \circ \bar{f}_i = f_i \circ A_{\mathrm{PL}}(i_Y)$. Par chasse dans les diagrammes, on obtient $A_{\mathrm{PL}}(i_X) \circ \bar{\rho}_X \circ \hat{f}_i \sim_G A_{\mathrm{PL}}(i_X) \circ \bar{f}_i \circ \bar{\rho}_Y$ donc, puisque i_X^* est une isomorphisme, $\bar{\rho}_X \circ \hat{f}_i \sim_G \bar{f}_i \circ \rho_Y$, ce qui montre que $\hat{f}_i$ est un G-modèle de Sullivan de $\bar{f}_i$.

2.13. Soient (A, d_A) une G-adgc et $\mathcal{J}$ l'idéal de (A, d_A) engendré par $\{a - ta, a \in A, t \in G\}$. $\mathcal{J}$ est un idéal différentiel de (A, d_A). On désigne par $(A_G, \bar{d}_A)$ l'adgc $A/\mathcal{J}$ munie de la différentielle induite et par $p : (A, d_A) \to (A_G, \bar{d}_A)$ la projection.

Si $f: (A, d_A) \to (B, d_B)$ est une G-morphisme d'adgc entre la G-adgc (A, d_A) et l'adgc (B, d_B), on a la factorisation $\bar{f} \circ p = f$ suivante:

$$\begin{tikzcd}
(A, d_A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (B, d_B) \\
(A_G, \bar{d}_A) \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $f: (A, d_A) \to (B, d_B)$ est un G-morphisme d'adgc, nous notons $f_G: (A_G, \bar{d}_A) \to (B_G, \bar{d}_B)$ l'application induite.

2.14. Sur une algèbre non libre (A, d_A), le quotient $(A_G, \bar{d}_A)$ n'est pas en général un invariant homotopique. En effet, soit (A, d_A) la $\mathbb{Z}_2$-adgc $\mathbb{Q}(x, y, y^2, w)$ munie de la différentielle $dx = y^2$, $dy = w$ et de l'action $tx = x$, $ty = y$, $tw = -w$. (A, d_A) est une adgc acyclique ce qui n'est pas le cas de $(A_G, \bar{d}_A)$.

2.15. Lemme [GHVP, 3.11]. *Soit $(\wedge V, d)$ un G-KS-complexe; désignons par V^G l'ensemble des points de V fixés par G. Alors, il existe un supplémentaire $\widehat{V}$ de V^G dans V tel que l'idéal engendré par $\widehat{V}$ soit stable par G. La projection* *naturelle est notée* $p: (\wedge V, d) \to (\wedge V^G, \bar{d})$. *Remarquons que si* $F: (\wedge V, d) \to (A, d_A)$ *est une* G*-homotopie entre* f *et* g, *alors* $F_G: (\wedge V^G, \bar{d}) \to (A_G, \bar{d}_A)$ *est une homotopie entre* f_G *et* g_G.

2.16. Soit E_G l'espace total contractile de la fibration universelle $G \to E_G \to B_G$. Pour un G-espace X, $\mathrm{Hom}_G(E_G, X)$ s'appelle l'ensemble des points fixes homotopiques de X pour l'action de G; cet ensemble est noté $X^{(G)}$. Dans le cas général d'un groupe fini, J. Goyo a montré [G], qui si $(\wedge V, d)$ est un G-modèle du G-espace X, alors $(\wedge V^G, \bar{d})$ est un modèle de $X^{(G)}$.

3. Le modèle équivariant cofibrant

Dans ce paragraphe, $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ et l est un entier tel que $0 \leq l \leq k$; on désigne par G_l le sous-groupe $\mathbb{Z}_{p^l}$ de G avec la convention $G_0 = \{e\}$. Pour le G-espace X, nous posons $X^l = X^{G_l}$; pour la G-adgc (A, d_A), nous posons $(A^l, \bar{d}_A) = (A_{G_l}, \bar{d}_A)$, la projection est notée $p_l: (A, d_A) \to (A^l, \bar{d}_A)$; si (A, d_A) est un G-KS-complexe $(\wedge V, d)$ cette projection s'écrit: $p_l: (\wedge V, d) \to (\wedge V^l, \bar{d})$ avec $V^l = V^{G_l}$.

3.1. Un $\mathscr{O}_G$-module $\underline{M}$ est un diagramme $M_0 \xrightarrow{m_0} \cdots \xrightarrow{m_{k-1}} M_k$, où M_l est un $\mathbb{Z}[G/G_l]$-module et m_l un morphisme équivariant de modules. Les $\mathscr{O}_G$-modules constituent une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs [B, I.10].

3.2. Une $\mathscr{O}_G$-adgc $\underline{A}$ est un diagramme $(A_0, d_0) \xrightarrow{a_0} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} (A_k, d_k)$, où (A_l, d_l) est une G/G_l-adgc et a_l un morphisme équivariant d'adgc. Si le $\mathscr{O}_G$-module obtenu à partir de $\underline{A}$ par oubli de structure est injectif, on dit que $\underline{A}$ est une $\mathscr{O}_G$-adgc injective. D'après [T2, 5.1], $\underline{A}$ est une $\mathscr{O}_G$-adgc injective si et seulement si a_l est une flèche surjective $(0 \leq l < k)$. Les $\mathscr{O}_G$-adgc s'organisent en une catégorie notée $\mathscr{O}_G$**-ADGC**.

3.3. La $\mathscr{O}_G$-adgc de de Rham $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ du G-espace X est le diagramme

$$A_{\mathrm{PL}}(X^0) \to \cdots \to A_{\mathrm{PL}}(X^k);$$

$\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ est une $\mathscr{O}_G$-adgc injective [T1, 4.3]. Un modèle de X est un modèle de $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$.

G. Triantafillou a défini pour tout groupe fini, un modèle, appelé ici minimal injectif et a établi un théorème d'existence et d'unicité:

3.4. Théorème [T1, 5.3, 5.7 et 6.2]. *Soit* G *un groupe fini. Pour toute* $\mathscr{O}_G$*-adgc injective* $\underline{A}$, *il existe un modèle minimal injectif* $\underline{\rho}: \underline{M} \to \underline{A}$, *unique à isomorphisme près.*

La correspondance $X \to \underline{M}_X$ *induit une bijection entre les* G*-types d'homotopie rationnelle de* G*-espaces et les classes d'isomorphisme de* $\mathscr{O}_G$*-adgc minimales injectives.*

La construction d'un modèle minimal cofibrant s'appuie sur la notion de complexe minimal cofibrant:

3.5. Définition. Un complexe minimal cofibrant $\underline{K} = ((\wedge V_l, d_l), m_l)$ est une $\mathcal{O}_G$-adgc telle que $(\wedge V_0, d_0)$ soit un G-KS-complexe minimal et telle que pour tout l, avec $0 \leq l \leq k$, la factorisation $\bar{m}_{l-1}$ de m_{l-1} soit une G/G_l-KS-extension minimale:

$$\begin{tikzcd}
(\wedge(V_{l-1}), d_{l-1}) \arrow[r, "m_{l-1}"] \arrow[d, "p_l"] & (\wedge(V_l), d_l) \\
(\wedge(V^l_{l-1}), \bar{d}_{l-1}) \arrow[ur, "\bar{m}_{l-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

3.6. Théorème. (1) *Toute $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{A}$ admet un modèle $(\underline{K}, \underline{\rho})$, où $\underline{K}$ est un complexe minimal cofibrant.*

(2) *Si $(\underline{K}, \underline{\rho})$ et $(\underline{K}', \underline{\rho}')$ sont deux modèles de $\underline{A}$ où $\underline{K}$ et $\underline{K}'$ sont des complexes minimaux cofibrants, alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{\theta}\colon \underline{K}' \to \underline{K}$ tel que $\rho_l \circ \theta_l \sim_{\text{éq}} \rho'_l$ pour $0 \leq l \leq k$.*

(3) *Si $\underline{\hat{\theta}}\colon \underline{K}' \to \underline{K}$ satisfait la relation $\underline{\rho} \circ \underline{\hat{\theta}} \sim \underline{\rho}'$, alors $\underline{\hat{\theta}}$ est un isomorphisme et $\hat{\theta}_l \sim_{\text{éq}} \theta_l$ pour $0 \leq l \leq k$.*

Preuve. (1) Construisons $\underline{K} = (\wedge V_l, m_l)$ et $\underline{\rho} = (\rho_l)$ par récurrence croissante sur l. Soit $\rho_0\colon (\wedge V_0, d_0) \to (A_0, d_{A_0})$ le G-modèle minimal de A_0. Supposons construits $(\wedge V_j, d_j)$ et ρ_j pour $0 \leq j < l$. $(\wedge V_l, d_l)$ et ρ_l sont determinés en construisant le G/G_l-modèle minimal (cf. 2.1) de $\overline{a_{l-1} \circ \rho_{l-1}}$.

(2) Posons $\underline{K}' = ((\wedge T_l, \delta_l), t_l)$; $\underline{\theta} = (\theta_l)_{0 \leq l \leq k}$ se construit par récurrence croissante sur l. Par relèvement équivariant, il existe

$$\theta_0\colon (\wedge T_0, \delta_0) \to (\wedge V_0, d_0)$$

tel que $\rho_0 \circ \theta_0 \sim_{\text{éq}} \rho'_0$. θ_0 induisant un isomorphisme en cohomologie entre deux KS-complexes minimaux, on en déduit que θ_0 est un isomorphisme (cf. [H, 4.6]). Supposons construit θ_j pour $0 \leq j < l$ et explicitons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\wedge(T_{l-1}), \delta_{l-1}) \arrow[rr, "p'_l"] \arrow[dr, "\rho'_{l-1}"] \arrow[dd, "\theta_{l-1}"'] & & (\wedge(T^l_{l-1}), \hat{\delta}_{l-1}) \arrow[rrr, "\overline{t_{l-1}}"] \arrow[dr, "\overline{\rho'_{l-1}}"] \arrow[dd, "\overline{\theta_{l-1}}"'] & & & (\wedge(T_l), \delta_l) \arrow[dl, "\rho'_l"'] \arrow[dd, dashed, "\theta_l"] \\
& A_{l-1} \arrow[rr, "q_l"'] & & A^l_{l-1} \arrow[r, "\overline{a_{l-1}}"'] & A_l & \\
(\wedge(V_{l-1}), d_{l-1}) \arrow[rr, "p_l"'] \arrow[ur, "\rho_{l-1}"'] & & (\wedge(V^l_{l-1}), \hat{d}_{l-1}) \arrow[rrr, "\overline{m_{l-1}}"'] \arrow[ur, "\overline{\rho_{l-1}}"'] & & & (\wedge(V_l), d_l) \arrow[ul, "\rho_l"]
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme p_l, p'_l désignent les projections canoniques; $\overline{a_{l-1}}$, $\overline{m_{l-1}}$, et $\overline{t_{l-1}}$ sont les factorisations respectives de a_{l-1}, m_{l-1}, et t_{l-1}. Les G/G_{l-1}-morphismes d'adgc ρ_{l-1}, ρ'_{l-1}, et θ_{l-1} déterminent les G/G_l-morphismes $\overline{\rho_{l-1}}$, $\overline{\rho'_{l-1}}$, et $\overline{\theta_{l-1}}$. De $\rho_{l-1} \circ \theta_{l-1} \sim_{\text{éq}} \rho'_{l-1}$, on tire $\overline{\rho_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \rho_{l-1}$; par relèvement équivariant, on construit $\theta'_l : (\wedge T_l, \delta_l) \to (\wedge V_l, d_l)$ tel que $\rho_l \circ \theta'_l \sim_{\text{éq}} \rho'_l$; par chasse dans les diagrammes, on a

$$\rho_l \circ \theta'_l \circ \overline{t_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \rho_l \circ \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}}$$

d'où $\theta'_l \circ \overline{t_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta'_{l-1}}$, puisque ρ_l induit un isomorphisme en cohomologie.

De $\overline{t_{l-1}}$ cofibration de la catégorie G-**ADGC**, on déduit l'existence de θ_l satisfaisant $\theta_l \sim_{\text{éq}} \theta'_l$ et $\theta_l \circ \overline{t_{l-1}} = \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}}$. De θ_{l-1} isomorphisme, on déduit $\overline{\theta_{l-1}}$ isomorphisme; $(\overline{\theta_{l-1}}, \theta_l)$ est un morphisme entre KS-extensions minimales; le théorème [H, 4.6] s'applique et nous donne l'isomorphisme θ_l; la récurrence se poursuit.

(3) Soit $\underline{\theta}' : \underline{K}' \to \underline{K}$ un morphisme de $\mathscr{O}_G$-adgc tel que $\underline{\rho} \circ \underline{\theta}' \sim \underline{\rho}'$. Par le théorème d'unicité du KS-modèle minimal, on a: $\theta'_0 \sim_{\text{éq}} \theta_0$ et θ'_0 est un isomorphisme. Supposons que $\theta'_j \sim_{\text{éq}} \theta_j$ et que θ'_j soit un isomorphisme pour $0 \le j < l$. Le diagramme suivant satisfait les hypothèses du théorème [H, 10.4]:

$$\begin{array}{ccc}
(\wedge(T^l_{l-1}), \bar{\delta}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{t_{l-1}}} & (\wedge(T_l), \delta_l) \\
\Big\downarrow \theta'_{l-1} & & \Big\downarrow \theta'_l \\
(\wedge(V^l_{l-1}), \bar{d}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{m_{l-1}}} & (\wedge(V_l), d_l)
\end{array}$$

On conclut que $\theta'_l \sim_{\text{éq}} \theta_l$ et que θ'_l est un isomorphisme.

3.7. Proposition. *La correspondance $X \to \underline{K}_X$ induit une bijection entre les $\mathbb{Z}_{p^k}$-types d'homotopie rationnelle de $\mathbb{Z}_{p^k}$-espaces et les classes d'isomorphismes de complexes minimaux cofibrants.*

Preuve. Ce résultat se déduit de l'équivalence de catégories homotopiques établie par G. Triantafillou [T1, 6.2]. Nous donnons la démonstration pour $G = \mathbb{Z}_p$; le cas général s'obtient par récurrence croissante sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$.

Supposons d'abord que X et Y soient deux $\mathbb{Z}_p$-espaces ayant le même $\mathbb{Z}_p$-type d'homotopie rationnelle; ils ont alors même modèle minimal injectif donc même modèle minimal cofibrant. Réciproquement, supposons que X et Y soient deux $\mathbb{Z}_p$-espaces ayant même modèle cofibrant; il suffit de montrer qu'ils ont même modèle minimal injectif. Pour cela, considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{i} & K' \\
{\scriptstyle\lambda_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\lambda'_1} \\
(\wedge V, \delta) & \xrightarrow{i_1} & (\wedge V', \delta') \\
{\scriptstyle\lambda_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\lambda'_2} \\
(\wedge T, d) & \xrightarrow[t]{} & (\wedge T', d')
\end{array}$$

où i est le modèle minimal cofibrant commun à X et Y, i_1 est un $\mathbb{Z}_p$-modèle surjectif de i [L, IV.2.(6)], et t le modèle minimal injectif de i_1 ; nous avons $i\lambda_1 \sim \lambda'_1 i_1$ et $i_1\lambda_2 = \lambda'_2 t$. Par une argumentation classique, on vérifie que t est un modèle minimal injectif commun à X et Y.

4. $\mathbb{Z}_p$-FORMALITÉ

Dans ce paragraphe, G désigne le groupe $\mathbb{Z}_p$ (p premier).

4.1. Rappelons qu'une adgc (A, d_A) est formelle si (A, d_A) et $(H(A), 0)$ ont un modèle de Sullivan commun. Un morphisme d'adgc $a: (A, d_A) \to (A', d_{A'})$ est formalisable si le diagramme suivant est commutatif à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc}
(A, d_A) & \xrightarrow{a} & (A', d_{A'}) \\
\uparrow{\scriptstyle\lambda} & & \uparrow{\scriptstyle\lambda'} \\
(\wedge V, d) & \xrightarrow{\hat{a}} & (\wedge V', d') \\
\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\
(H(A), 0) & \xrightarrow{a^*} & (H(A'), 0)
\end{array}$$

(Dans ce diagramme, â est un modèle de Sullivan commun aux flèches a et a^* ; les flèches verticales sont des équivalences faibles.) Rappelons que a est formalisable si et seulement si le modèle bigradué de a^* est un modèle filtré de a ([VP, 2.3.4]; les définitions ne sont pas rappelées ici).

Le but de ce paragraphe est de donner, pour $G = \mathbb{Z}_p$, une notion de formalité équivariante.

Une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc $\underline{A}$ est un diagramme $(A, d_A) \xrightarrow{a} (A', D_{A'})$ où (A, d_A) est une $\mathbb{Z}_p$-adgc, $(A', d_{A'})$ une adgc munie de l'action triviale de $\mathbb{Z}_p$, et a un morphisme équivariant d'adgc.

4.2. Définition. La $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc $\underline{A}$ est $\mathbb{Z}_p$-formelle si le diagramme suivant, constitué d'applications équivariantes, commute à homotopie équivariante près:

$$\begin{array}{ccc}
(A, d_A) & \xrightarrow{\;a\;} & (A', d_{A'}) \\
\uparrow{\scriptstyle\lambda} & & \uparrow{\scriptstyle\lambda'} \\
(\wedge V, d) & \xrightarrow{\;\hat{a}\;} & (\wedge V', d') \\
\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\
(H(A), 0) & \xrightarrow{\;a^*\;} & (H(A'), 0)
\end{array}$$

(Dans ce diagramme, les flèches verticales sont des équivalences faibles.)

4.3. On dit que le $\mathbb{Z}_p$-espace X est $\mathbb{Z}_p$-formel si $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ est $\mathbb{Z}_p$-formelle.

4.4. Théorème. *Soit X un $\mathbb{Z}_p$-espace; les énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *Le $\mathbb{Z}_p$-espace X est $\mathbb{Z}_p$-formel.*
(2) *L'injection $i: X^{\mathbb{Z}_p} \to X$ de l'ensemble des points fixes est une application formalisable.*

La preuve est un corollaire du théorème 2.6 et du lemme suivant:

4.5. Lemme. *Soit G un groupe fini; on suppose que G agit sur (A, d_A), que l'action de G sur $(A', d_{A'})$ est triviale et que $a: (A, d_A) \to (A', d_{A'})$ est un morphisme d'adgc équivariant et formalisable. Alors les applications λ, λ', μ, et μ' ainsi que les homotopies $a\lambda \sim \lambda'\hat{a}$ et $a^*\mu \sim \mu'\hat{a}$ de* 4.1 *peuvent être choisies équivariantes.*

Preuve. Pour éviter des confusions, au cours de cette démonstration (et seulement durant cette démonstration), les applications équivariantes seront désignées par le symbole $\mapsto$.

Puisque a est formalisable, en particulier (A, d_A) est une adgc formelle; cette adgc est munie d'une action de G. Soit $\mu: (\wedge V, d) \mapsto (H(A), 0)$ un modèle bigradué équivariant de $(H(A), 0)$. Puisque (A, d_A) est formelle, il existe une équivalence faible $\tilde{\lambda}: (\wedge V, d) \to (A, d_A)$; la construction de $\tilde{\lambda}$ est entièrement déterminée par le choix de sections (cf. [HS]); un tel choix de sections peut toujours être fait de façon équivariante (cf. [P, 2.10] pour une démonstration détaillée); ce choix détermine l'équivalence faible équivariante $\lambda: (\wedge V, d) \mapsto (A, d_A)$; on obtient ainsi la formalisation équivariante: $(A, d_A) \xleftarrow{\lambda} (\wedge V, d) \overset{\mu}{\mapsto} (H(A), 0)$.

Dans le diagramme ci-dessous, i est simultanément modèle bigradué de a^* et modèle filtré de a construit à partir de la formalisation équivariante ci-dessus de (A, d_A);

$$\begin{tikzcd}
(A, d_A) \arrow[rr, mapsto, "a"] & & (A', d_{A'}) \\
& (\wedge V', d') \arrow[ur, mapsto, "\lambda'"] \arrow[dr, mapsto, "\theta'"] & \\
(\wedge V, d) \arrow[uu, mapsto, "\lambda"] \arrow[ur, mapsto, "\hat{a}"] \arrow[rr, mapsto, "i"] \arrow[d, mapsto, "\mu"] & & (\wedge(V+W), d) \arrow[uu, mapsto, "\lambda_1"'] \arrow[ul, mapsto, "\theta"] \arrow[d, mapsto, "\mu_1"'] \\
(H(A), 0) \arrow[rr, mapsto, "a^*"] & & (H(A'), 0)
\end{tikzcd}$$

Nous avons $\lambda_1 i = a\lambda$ et $\mu_1 i = a^* \mu$. Désignons par $\lambda' \colon (\wedge V', d') \mapsto (A', d_{A'})$ un modèle de $(A', d_{A'})$; par relèvements, il existe θ' et θ tels que $\lambda_1 \theta' \sim \lambda'$ et $\theta' \theta \sim \mathrm{id}$. Remarquons que puisque l'action de G sur $(A', d_{A'})$ est triviale, les flèches λ_1, μ_1, λ', θ, et θ' sont évidemment équivariantes; désignons par â un modèle équivariant de a: $\lambda' \hat{a} \sim a\lambda$. Par chasse dans le diagramme, on obtient $\theta i \sim \hat{a}$ et donc $\mu_1 \theta' \hat{a} \sim a^* \mu$. Posons $\mu' = \mu_1 \theta'$, la formalisation recherchée est:

$$\begin{tikzcd}
(A, d_A) \arrow[r, mapsto, "a"] & (A', d_{A'}) \\
(\wedge V, d) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, mapsto, "\hat{a}"] \arrow[d, "\mu"'] & (\wedge V', d') \arrow[u, "\lambda'"'] \arrow[d, "\mu'"] \\
(H(A), 0) \arrow[r, mapsto, "a^*"'] & (H(A'), 0)
\end{tikzcd}$$

Les homotopies $a\lambda \sim \lambda' \hat{a}$ et $a^* \mu \sim \mu' \hat{a}$ sont de source et de but des applications équivariantes; d'après le théorème 2.6, ces homotopies peuvent être remplacées par des homotopies équivariantes.

Pour achever ce paragraphe, montrons à l'aide du modèle cofibrant que le $\mathbb{Z}_p$-type d'homotopie rationnelle d'un espace $\mathbb{Z}_p$-formel X est une conséquence formelle de $i^* \colon H^*(X\,; \mathbb{Q}) \to H^*(X^{\mathbb{Z}_p}\,; \mathbb{Q})$.

4.6. Théorème. *Soit $\underline{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc; les propositions suivantes sont équivalentes:*

(1) *$\underline{A}$ est $\mathbb{Z}_p$-formelle.*

(2) *$\underline{A}$ et $\underline{H}(A)$ ont un modèle minimal cofibrant en commun:*

$$\underline{A} \xleftarrow{\lambda} \underline{K} \xrightarrow{\mu} \underline{H}(A).$$

Preuve. (2) $\Rightarrow$ (1) est évident. Supposons (1) vérifiée. Dans le diagramme suivant, toutes les flèches sont équivariantes:

$$\begin{tikzcd}
(A, d_A) \arrow[rrrr, "a"] & & & & (A', d_{A'}) \\
& & (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + U), \bar{d}) \arrow[urr, "\lambda''"] \arrow[drr, dashed, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] & & \\
(\wedge V, d) \arrow[uu, "\lambda"] \arrow[r, "p"] \arrow[ddr, "\mu"] \arrow[rrrr, bend right=60, "\hat{a}"'] & (\wedge(V\ \ ), \bar{d}) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"] & & & (\wedge V', d') \arrow[uu, "\lambda'"'] \arrow[dd, "\mu'"] \\
& & (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + W), \delta) \arrow[urr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, "\mu''"] & & \\
& (H(A), 0) \arrow[rrr, "a^*"] & & & (H(A'), 0)
\end{tikzcd}$$

Puisque $\underline{A}$ est $\mathbb{Z}_p$-formelle, on a $a\lambda \sim \lambda'\hat{a}$ et $a^*\mu \sim \mu'\hat{a}$; les applications ip et jp sont respectivement les modèles minimaux cofibrants $\underline{K}$ et $\underline{K}'$ de $\underline{A}$ et de $\underline{H}(A)$; nous avons $\lambda''ip = a\lambda$ et $\mu''jp = a^*\mu$. Il nous faut construire un isomorphisme $\underline{\varphi}: \underline{K} \to \underline{K}'$ ce qui se réduit à construire un isomorphisme $\varphi: (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + U), \bar{d}) \to (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + W), \delta)$ tel que $\varphi \circ i = j$; les applications α et β sont construites par relèvement: $\lambda'\alpha \sim \lambda''$ et $\mu'\beta \sim \mu''$. Il est aisé de vérifier par chasse dans le diagramme qu'on a également $\alpha ip \sim \hat{a} \sim \beta jp$; par relèvement, il existe φ' tel que $\beta\varphi' \sim \alpha$; de ces homotopies, on déduit $\varphi' ip \sim jp$. Ces deux applications sont équivariantes; d'après le théorème 2.6, il existe une homotopie équivariante F de source $\varphi' ip$, de but jp; l'application induite F_G est une homotopie de source $\varphi' i$, de but j; puisque i est une cofibration, il existe $\varphi \sim \varphi'$ tel que $\varphi i = j$; enfin φ est un isomorphisme, ce qui achève la preuve.

4.7. Corollaire. *Le $\mathbb{Z}_p$-type d'homotopie rationnelle d'un $\mathbb{Z}_p$-espace $\mathbb{Z}_p$-formel X est une conséquence formelle de $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$.*

Preuve. Si X est $\mathbb{Z}_p$-formel alors d'après le théorème précédent $\underline{A}_{\mathrm{PL}}(X)$ et $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$ ont un modèle minimal cofibrant en commun; d'après (3.8), ce modèle minimal cofibrant caractérise le $\mathbb{Z}_p$-type d'homotopie rationnelle de X.

4.8. *Remarques.* (1) Il résulte du théorème 4.4 que les obstructions à la formalisabilité d'une applicaton [FT, Th, VP] fournissent des obstructions à la $\mathbb{Z}_p$-formalité des $\mathbb{Z}_p$-espaces.

(2) La classe des applications formalisables n'est pas stable par composition [FT]; en conséquence, les résultats de ce paragraphe ne peuvent s'étendre de manière immédiate au cas plus général d'une action de $\mathbb{Z}_{p^k}$ $(k > 1)$.

4.9. Exemples. 1. La sphère $\mathbf{S}^n$ munie d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p$ est un espace $\mathbb{Z}_p$-formel. Cela résulte de la théorie de Smith [Sm, 4]: l'ensemble des points fixes $(\mathbf{S}^n)^{\mathbb{Z}_p}$ possède le type d'homotopie rationnelle d'une sphère $\mathbf{S}^m$ avec $m < n$; pour des raisons de degré, l'application $(\mathbf{S}^n)^{\mathbb{Z}_p} \to \mathbf{S}^n$ est formalisable.

2. Une variété kählérienne compacte M sur laquelle de groupe $\mathbb{Z}_p$ agit de manière holomorphe est un $\mathbb{Z}_p$-espace $\mathbb{Z}_p$-formel; cela résulte de la conjonction des remarques suivantes: t désigne le générateur de $\mathbb{Z}_p$; plaçons-nous en $x_0 \in M^{\mathbb{Z}_p}$; d'après [BM, Théorème 5, Chapitre III], il existe un système de coordonnées locales U en x_0 tel que $t: M \to M$ soit une application $\mathbb{C}$-linéaire sur U. $M^{\mathbb{Z}_p} \cap U$ est donc constitué des points fixes de cette application $\mathbb{C}$-linéaire. $M^{\mathbb{Z}_p}$ est une sous-variété kählérienne compacte de M et $i: M^{\mathbb{Z}_p} \to M$ est holomorphe; d'après [DGMS] i est formalisable.

3. Un $\mathbb{Z}_p$-espace de Hopf au sens de [B] est un espace $\mathbb{Z}_p$-formel. Cela résulte de [T2, 1.2]: le $\mathbb{Z}_p$-rationalisé d'un $\mathbb{Z}_p$-espace de Hopf est $\mathbb{Z}_p$-homotopiquement équivalent à un produit de $\mathbb{Z}_p$-espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

4. Munissons $X = \mathbf{S}_1^3 \times \mathbf{S}_2^3 \times \mathbf{S}_3^3$ de l'action de $\mathbb{Z}_3$ définie par $t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2, \xi_3, \xi_1)$; on a $X^{\mathbb{Z}_3} \cong \mathbf{S}^3$; le calcul du modèle minimal de Quillen de $i: X^{\mathbb{Z}} \to X$ montre que i est formalisable (cf. [FT, 2.2]) et donc X est un $\mathbb{Z}_3$-espace $\mathbb{Z}_3$-formel. Remarquons que, sur cet exemple, le modèle minimal injectif et le modèle cofibrant coïncident:

$$(\wedge(a_1, a_2, a_3), d) \xrightarrow{f} (\wedge(v), 0)$$

avec $|a_i| = |v| = 3$, $da_i = 0$, $ta_1 = a_2$, $ta_2 = a_3$, $ta_3 = a_1$, $f(a_i) = v$.

5. Construisons un CW-complexe de dimension infinie qui n'est pas $\mathbb{Z}_2$-formel: considérons pour cela la $\mathscr{O}_{\mathbb{Z}_2}$-adgc suivante:

$$(\wedge(u, v), d) \xrightarrow{q} (\wedge(y), 0)$$

avec $|x| = 2$, $|v| = |y| = 3$, $du = 0$, $dv = u^2$, $tu = -u$, $tv = v$, $q(u) = 0$, $q(v) = y$; rationnellement, on reconnaît la fibration de Hopf. A l'aide du foncteur $\mathbf{C}$ de A. Elmendorf [E, 1], on déduit de cette $\mathscr{O}_{\mathbb{Z}_2}$-adgc l'existence d'un $\mathbb{Z}_2$-espace rationnel X tel que $X^{\mathbb{Z}_2}$ ait le type d'homotopie rationnelle de $\mathbf{S}^3$ et X le type d'homotopie rationnelle de $\mathbf{S}^2$. Cela n'est pas en contradiction avec la théorie de Smith car, ainsi que le remarque A. Elmendorf, l'espace X

est un CW-complexe de dimension infinie. L'application de Hopf q n'est pas formalisable donc X n'est pas un $\mathbb{Z}_2$-espace $\mathbb{Z}_2$-formel.

6. Construisons un CW-complexe fini qui n'est pas $\mathbb{Z}_2$-formel: X est l'espace $\mathbf{S}_a^4 \vee \mathbf{S}_b^4 \vee \mathbf{S}_c^4 \vee \mathbf{S}_d^4 \vee \mathbf{S}_e^7 \cup_{w_1} e_1^8 \cup_{w_2} e_2^8$ avec $w_1 = 2[a, b]_W - e$, $w_2 = 2[c, d]_W - e$ (où $[\ ,\ ]_W$ désigne le crochet de Whitehead). Munissons X de l'action de $\mathbb{Z}_2$ définie par $ta = c$, $tb = d$, $te = e$, $te_1^8 = e_2^8$. On a $X^{\mathbb{Z}_2} = \mathbf{S}^7$. Le calcul du modèle minimal de Quillen de $i: X^{\mathbb{Z}_2} \to X$ montre qui i n'est pas formalisable et donc X n'est pas $\mathbb{Z}_p$-formel. Décrivons sur cet exemple les adgc-modèles: $(\wedge(v), 0)$ est le modèle de Sullivan de $X^{\mathbb{Z}_2}$ avec $|v| = 7$. Le $\mathbb{Z}_2$-modèle minimal de X, $(\wedge U, d)$, obtenu à partir du foncteur cochaînes [Ta, I.1(3)] contient en particulier les éléments $r_i \in U_0^4$, $1 \leq i \leq 4$, $dr_i = 0$, $tr_1 = r_3$, $tr_2 = r_4$ ainsi que $s \in U_1^7$, $ds = r_1 r_2 + r_3 r_4$, $ts = s$. Le modèle minimal injectif du $\mathbb{Z}_2$-espace X est: $f: (\wedge U, d) \to (\wedge(v), 0)$ avec $f(s) = v$. Le modèle minimal cofibrant du $\mathbb{Z}_2$-espace X est: $(\wedge U, d) \to (\wedge(U^{\mathbb{Z}_2} \oplus W), d')$. Celui-ci ne coïncide pas avec le modèle minimal injectif car $U^{\mathbb{Z}_2}$ contient en particulier les éléments $r_1 + r_3$ et $r_2 + r_4$ en degré 4.

Bibliographie

[AL] M. Aubry and J.-M. Lemaire, *Homotopie d'algèbres de Lie et de leurs algèbres enveloppantes*, Lecture Notes in Math., vol. 1318, Springer, 1986, pp. 26–31.

[B] G. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Math., vol. 34, Springer, 1967.

[BM] S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1948.

[DGMS] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, *The real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245–254.

[E] A. D. Elmendorf, *Systems of fixed-pointed-sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 275–284.

[FT] Y. Félix and D. Tanré, *Formalité d'une application et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Lecture Notes in Math., vol. 1318, Springer, 1986, pp. 99–123.

[G] J. Goyo, Ph.D. Thesis, Toronto, 1989.

[GHVP] K. Grove, S. Halperin, and M. Vigué-Poirrier, *The rational homotopy theory of certain path-spaces with applications to geodesics*, Acta Math. **140** (1978), 277–303.

[H] S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **9-10** (1983).

[HS] S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. **32** (1979), 233–279.

[L] Th. Lambre, *Opus* 1, Thèse, Lille, 1987.

[P] S. Papadima, *On the formality of maps*, An. Univ. Timisoara Ser. Şt. Mat. **20** (1982), 30–40.

[Sm] P. A. Smith, *New results and old problems in finite transformations groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 401–415.

[Su] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **47** (1977), 269–331.

[Ta] D. Tanré, *Homotopie rationnelle: modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Math., vol. 1025, Springer, 1983.

[Th] J.-C. Thomas, *Eilenberg-Moore models for fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 203–225.

[T1] G. Triantafillou, *Equivariant minimal model*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 509–532.

[T2] ——, *Rationalization of Hopf-G-spaces*, Math. Z. **182** (1983), 485–500.

[VP] M. Vigué-Poirrier, *Réalisations de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 447–484.

62, rue Doudeauville, 75018 Paris, France
E-mail address: LAMBRE at FRMAP711 (Bitnet)