DOV TAMARI

Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 53-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__53_0>

MONOIDES PRÉORDONNÉS ET CHAINES DE MALCEV;

PAR M. DOV TAMARI.

INTRODUCTION (¹).

On sait que l'immersion d'un domaine d'intégrité commutatif dans son corps des quotients est susceptible d'être généralisée. En 1931, O. Ore donne la première construction abstraite du corps des quotients pour une classe d'anneaux non nécessairement commutatifs. Presque en même temps, J. H. M. Wedderburn traite un problème semblable d'un point de vue un peu différent. En 1935, A. Suskewitsch croit démontrer que tout semi-groupe peut être plongé dans un groupe, mais sa démonstration est reconnue fausse par A. Malcev qui donne, en 1937, le premier exemple de semi-groupe non immersible dans un groupe et, en 1939, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'immersibilité.

Dans ce travail, nous nous proposons de généraliser le théorème de Malcev à deux points de vue : d'une part, nous n'imposons plus à l'opération définie dans le semi-groupe et dans le groupe d'être *partout définie*, c'est-à-dire que nous cherchons à immerger un *semi-groupoïde* dans un *groupoïde;* d'autre part, nous supposons que le semi-groupoïde et le groupoïde sont munis d'une *relation de préordre* (on retrouve le cas abstrait si l'on identifie cette relation avec l'égalité). Cette façon de concevoir le problème d'immersion permet de dégager les idées essentielles; tout en rendant les démontrations plus naturelles, elle conduit à des énoncés plus généraux dont plusieurs corollaires sont nouveaux.

La première partie (§ I et II) introduit des concepts qui sont à la base de nos généralisations. Dans le paragraphe I, nous définissons les *monoïdes* et les notions fondamentales qui s'y rattachent (*composabilité*, *rectangularité*, *associabilité*, *connexion*). Le paragraphe II étudie les notions de *compatibilité* (homogénéité, simplificabilité, caractères) liant l'opération du monoïde avec une relation ou une famille de relations et introduit les structures préuniformes.

La deuxième partie contient la généralisation indiquée ci-dessus du théorème de Malcev. Dans le paragraphe III, nous construisons le *groupoïde préordonné* engendré par un *semi-groupoïde préordonné* et nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes d'immersibilité d'un semi-groupoïde préordonné dans un groupoïde préordonné. La méthode utilisée est celle des *chaînes de mots* que

(¹) Que M. Croisot, qui a bien voulu revoir entièrement la rédaction de ce travail, veuille bien trouver ici l'expression de notre vive gratitude.

nous particularisons au paragraphe IV en n'utilisant que les chaînes dites *normales*, ce qui conduit au *théorème général d'immersibité*.

La troisième partie donne à ce théorème une forme plus maniable dans les applications. Le paragraphe V développe des images intuitives des chaînes de Malcev (*modèle des courants* et *modèle circulaire*) et la notion de *chaîne connexe*. Dans le paragraphe VI, nous déduisons de nombreux corollaires et appliquons, en particulier, le modèle circulaire à l'obtention des cas de O. Ore et R. Doss (généralisés aux points de vue signalés plus haut).

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Monoïdes abstraits.

1. **Définitions générales.** — Un *monoïde* M est un ensemble non vide muni d'une opération interne, binaire et uniforme, mais pas nécessairement partout définie, que l'on peut associer d'une façon classique à une application α d'une partie de $M \times M$ dans M.

Étant donné un monoïde M, nous appelons *relation de composabilité* la relation suivante $\mathcal{K}$:

$$a \mathcal{K} b \Longleftrightarrow ab \text{ est défini}$$

et nous notons $P_{\mathcal{K}}$ le sous-ensemble de $M \times M$ constitué par les couples (a, b) tels que l'on ait $a \mathcal{K} b$.

Une *monade* est un monoïde dans lequel l'opération est partout définie; α est alors une application de $M \times M$ dans M, c'est-à-dire qu'on a $P_{\mathcal{K}} = M \times M$.

Étant donné, dans un monoïde, un *monôme*, c'est-à-dire un produit d'éléments de M ayant un sens, nous désignons par longueur du monôme le nombre d'éléments de M dont il se compose.

A chaque monoïde M, nous associons son *monoïde libre* L_M dont les éléments sont les monômes composés d'éléments de M. Le monoïde M est image homomorphe du monoïde L_M.

Soit C un *complexe* d'un monoïde M. Nous appelons *monoïde de trace* M_C le monoïde obtenu en munissant C d'une opération définie par

$$xy = z \text{ dans } C \Longleftrightarrow xy = z \text{ dans } M$$

pour trois éléments quelconques x, y, z de C. D'autre part, nous désignons par M(C) le *sous-monoïde* de M engendré par les éléments de C : les éléments de M(C) sont les éléments de C et les éléments de M égaux à un produit d'éléments de C. On a $M(C) = M_C$ si et seulement si C est un sous-monoïde de M.

2. **Relations canoniques dans un monoïde. Condition du rectangle.** — Soit un monoïde M. Pour tout $x \in M$, premier facteur de $M \times M$, nous notons la *coupe* de l'ensemble $P_{\mathcal{K}}$ suivant x par $\mathcal{K}(x)$. Pour tout $y \in M$, deuxième facteur de $M \times M$, nous notons la coupe de $P_{\mathcal{K}}$ suivant y par $\mathcal{K}^{-1}(y)$.

Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{K}(x)$ et $\mathcal{K}^{-1}(y)$ sont toujours non vides ce que nous exprimons en disant que M est *sans élément isolé.*

Les deux familles de sous-ensembles $\{\mathcal{K}(x)\}_{x\in M}$ et $\{\mathcal{K}^{-1}(y)\}_{y\in M}$ constituent des *recouvrements* de M.

Définition. — On appelle *relation de composabilité commune à gauche* la relation suivante γ_g :

$a\gamma_g b \Leftrightarrow$ il existe $x\in M$ tel que l'on ait $x\mathcal{K}a$ et $x\mathcal{K}b$. Autrement dit, on a $\gamma_g = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{K}$.

On appelle *relation de composabilité égale à gauche* la relation suivante Γ_g :

$a\Gamma_g b \Leftrightarrow x\mathcal{K}a$ est équivalent à $x\mathcal{K}b$, c'est-à-dire $a\in\mathcal{K}(x)$ est équivalent à $b\in\mathcal{K}(x)$ ou encore $\mathcal{K}^{-1}(a)=\mathcal{K}^{-1}(b)$.

On définit de même la relation de composabilité commune à droite γ_d et la relation de composabilité égale à droite Γ_d.

Les relations Γ_g et Γ_d (1) sont des relations d'équivalence et l'on a toujours $\Gamma_g \leqq \gamma_g$ et $\Gamma_d \leqq \gamma_d$.

Les propositions suivantes résultent immédiatement des définitions.

Proposition 1. — Γ_g *est la relation d'équivalence canoniquement associée au recouvrement* $\{\mathcal{K}(x)\}_{x\in M}$, *c'est-à-dire la relation d'équivalence la moins fine parmi celles qui sont plus fines que ce recouvrement.*

Proposition 2. — Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1° *Le recouvrement* $\{\mathcal{K}(x)\}_{x\in M}$ *est une partition;*
2° *Le recouvrement* $\{\mathcal{K}(y)\}_{y\in M}$ *est une partition;*
3° *On a* $\gamma_g = \Gamma_g$;
4° *On a* $\gamma_d = \Gamma_d$;
5° *La condition du rectangle est vérifiée :*

$$a\mathcal{K}x,\quad a\mathcal{K}y,\quad b\mathcal{K}x \Rightarrow b\mathcal{K}y.$$

Définition. — On appelle *monoïde rectangulaire* un monoïde vérifiant les propriétés de la proposition 2.

Si M est un monoïde rectangulaire, on peut établir une correspondance biunivoque entre les classes Y module Γ_g et les classes X module Γ_d : on fait correspondre à chaque classe Y la classe X telle qu'il existe $x\in X$ et $y\in Y$ pour lesquels on ait $x\mathcal{K}y$. Indexons alors les classes Y et les classes X à l'aide d'un même ensemble I d'indices ι de telle façon qu'une classe Y ait même indice qu'une classe X si et seulement si X correspond à Y dans l'application précédente. On a alors

$$P_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\iota\in I} (X_\iota \times Y_\iota).$$

(1) Dans la terminologie de J. Riguet [1], p. 131, on a $\Gamma_g = \text{noy}^{-1}\mathcal{K}$, $\Gamma_d = \text{noy}\,\mathcal{K}$.

Adjoignons à M, monoïde rectangulaire, un ensemble $E = \{e_\iota\}_{\iota \in I}$ en imposant dans l'ensemble $M^* = M \cup E$ la loi de composition suivante :

1° $x \in M, y \in M, z \in M, xy = z$ dans $M \Rightarrow xy = z$ dans M^*;
2° $x \in X_\iota \Rightarrow xe_\iota = x$;
3° $y \in Y_\iota \Rightarrow e_\iota y = y$;
4° On a $e_\iota e_\iota = e_\iota$;
5° En dehors des cas précédents, deux éléments de M^* ne sont pas composables.

On voit immédiatement que M^* est un monoïde rectangulaire dont M est sous-monoïde. Chaque élément e_ι est élément unité à droite pour tout élément de X_ι et élément unité à gauche pour tout élément de Y_ι. Deux éléments x et y de M^* sont composables si et si seulement il existe un élément e_ι qui soit élément unité à droite de x et élément unité à gauche de y.

3. **Associativité.** — L'associativité ordinaire n'ayant de sens que dans une monade, on la remplace par la conjonction de :

1° un *axiome d'égalité*
(A o) $a(bc)$ et $(ab)c$ ont un sens $\Rightarrow a(bc) = (ab)c$, ou, plus généralement, un *axiome de substitution :*

soit $(\overrightarrow{\mathrm{A\,o}})$ $a(bc)$ et $(ab)c$ ont un sens $\Rightarrow a(bc) \rightarrow (ab)c$ (²);
soit $(\overleftarrow{\mathrm{A\,o}})$ $a(bc)$ et $(ab)c$ ont un sens $\Rightarrow (ab)c \rightarrow a(bc)$;
soit $(\overline{\mathrm{A\,o}})$ équivalent à $(\overrightarrow{\mathrm{A\,o}})$ et $(\overleftarrow{\mathrm{A\,o}})$ ensemble.

2° deux *axiomes d'associabilité :*

(A 1) ab et bc ont un sens $\Rightarrow a(bc)$ et $(ab)c$ ont un sens;
(A 2) $a(bc)$ a un sens $\Leftrightarrow (ab)c$ a un sens.

Un monoïde vérifiant (A o), (A 1) et (A 2) est appelé un *associatif*. Un monoïde vérifiant $(\overleftarrow{\mathrm{A\,o}})$ [ou $(\overrightarrow{\mathrm{A\,o}})$], (A 1) et (A 2) est appelé un *demi-associatif pour la relation de préordre* $\rightarrow$ [ou $\leftarrow$].

Nous appelons un associatif rectangulaire *demi-groupoïde* et, s'il est simplifiable des deux côtés, *semi-groupoïde*. On peut adjoindre des éléments unités à un demi-groupoïde sans perdre l'associativité (³).

Proposition. — *Un associatif commutatif est rectangulaire* (⁴) *et sa relation de composabilité est une relation d'équivalence. Il est une réunion de demi-groupes commutatifs disjoints bien déterminés.*

(²) Le symbole $\rightarrow$ représente une relation de préordre quelconque (c'est-à-dire une relation réflexive et transitive).

(³) On peut aussi adjoindre des éléments unité à un semi-groupoïde sans perdre la simplifiabilité moyennant certaines précautions : emploi maximal d'éléments unité déjà existants et adjonction minimale d'éléments unité nouveaux.

(⁴) Un associatif non commutatif n'est pas nécessairement rectangulaire.

Un semi-groupoïde G (avec éléments unité) est appelé un *groupoïde* si chaque élément $g \in G$ possède un élément inverse $\bar{g}$ tel que $g\bar{g} = \gamma_g$, élément unité à gauche de g et $\bar{g}g = \delta_g$, élément unité à droite de g.

4. **Composantes connexes.** — Nous définissons dans un monoïde M la relation $\rfloor$ par

$a \rfloor b \Leftrightarrow$ il existe $m \in M$ tel que am et mb aient un sens.

Autrement dit, on a $\rfloor = \mathcal{K}^2$.

Proposition. — *Dans un associatif, la relation* $\rfloor$ *est transitive. Dans un monoïde rectangulaire à éléments unité, on a* $\mathcal{K} \leqq \rfloor$. *Dans un demi-groupoïde à éléments unité, on a* $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K}^3 = \mathcal{K}^4 = \ldots$. *Si* $\mathcal{K}$ *est symétrique,* $\rfloor$ *est réflexive et symétrique. La trace de la relation* $\rfloor$ *dans l'ensemble des éléments unité d'un demi-groupoïde à éléments unité est un préordre.*

On définit, dans un monoïde M, la *relation de connexion* $\sqcup$ comme étant la fermeture transitive de la fermeture symétrique de $\rfloor$. Si l'on a $a \sqcup b$, on dit que a et b sont *connexes*. Les classes module $\sqcup$ sont appelées les *composantes connexes de* M.

Les composantes connexes d'un demi-groupoïde sont des demi-groupoïdes connexes. Les composantes connexes d'un groupoïde sont des groupoïdes connexes. Les groupoïdes connexes sont des groupoïdes de Brandt.

II. — Monoïdes reliés.

1. **Compatibilité simple.** — Une relation $\mathcal{R}$ définie dans un monoïde M est dite *homogène à droite* si elle vérifie la propriété suivante :

(H_d) $a\mathcal{R}b \Rightarrow ay$ et by ont un sens simultanément et, dans ce cas, $ay\mathcal{R}by$.

De la même façon, on parle de relations homogènes à gauche [vérifiant la propriété symétrique (H_g)] et de relations homogènes [vérifiant la propriété (H), conjonction des propriétés (H_d) et (H_g)].

La relation $\mathcal{R}$ est dite *régulière* si elle vérifie la propriété suivante :

(R) $a\mathcal{R}b$ et $a'\mathcal{R}b' \Rightarrow aa'$ et bb' ont un sens simultanément et, dans ce cas, $aa'\mathcal{R}bb'$.

Proposition. — *Si* $\mathcal{R}$ *est transitive,* (H) *entraîne* (R). *Si* $\mathcal{R}$ *est réflexive,* (R) *entraîne* (H). *Si* $\mathcal{R}$ *est un préordre,* (H) *est équivalent à* (R).

Nous appelons *monoïde préordonné* un monoïde muni d'une relation de préordre, notée en général $\rightarrow$, régulière ([5]).

([5]) Au lieu de dire qu'un préordre est homogène à droite (par exemple), on dira aussi qu'il est invariant par rapport aux translations droites du monoïde.

Une relation $\mathcal{R}$ est dite *simplifiable à droite* si elle vérifie la propriété suivante :

$$(S_\alpha) \quad ay\mathcal{R}by \Rightarrow a\mathcal{R}b.$$

De la même façon, on parle de relations simplifiables à gauche [vérifiant la propriété symétrique (S_g)] et de relations simplifiables [vérifiant la propriété (S), conjonction des propriétés (S_α) et (S_g)].

PROPOSITION. — *La réunion et l'intersection d'une famille de relations homogènes à droite (ou simplifiables à droite) possèdent la même propriété. Dans une monade, pour une famille totale et exclusive de relations, l'homogénéité à droite et la simplifiabilité à droite sont équivalentes. Dans une monade, une relation est homogène à droite si et seulement si sa relation complémentaire est simplifiable à droite.*

2. Compatibilité collective. — Afin de laisser entrevoir des généralisations ultérieures, donnons quelques indications sur des familles de relations jouissant de propriétés *collectives* au lieu de propriétés *individuelles*. Un exemple de compatibilité collective est celui des *caractères*. Soit $a\mathcal{R}b$, $\mathcal{R} \in \Pi$, où Π est une famille totale et exclusive de relation sur M, et $c \in \mathcal{K}^{-1}(a) \cap \mathcal{K}^{-1}(b)$; il existe nécessairement une relation $\mathcal{R}' \in \Pi$, et une seule, telle que $ca\mathcal{R}'cb$. Si la substitution $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ est invariante quels que soient les éléments a et b tels que $a\mathcal{R}b$, on dit que *c a le $\mathcal{R}$-caractère gauche $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$*. Si c a un caractère gauche par rapport à chaque relation $\mathcal{R} \in \Pi$ pour laquelle cette notion a un sens, c'est-à-dire si

$$a\mathcal{R}_j b \Rightarrow ca\mathcal{R}_{j'}cb,$$

où $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{R}_{j'} \in \Pi$, $j' = j_c$ étant une fonction de j, $\chi_c(j)$ ne dépendant que de c, *c a le Π-caractère gauche $\chi_c = \chi_c(j)$*. Un Π-caractère est donc une application d'une partie de Π dans Π ; si M est une monade, les Π-caractères sont des applications de Π dans Π, et, éventuellement, des permutations (par exemple, si M est un groupe). Si chaque élément de M a un Π-caractère gauche, M est dit Π-*monoïde caractérisé à gauche*. L'ensemble des caractères gauche d'un monoïde, ou des classes convenablement définies de tels caractères forme par la composition naturelle des substitutions un *monoïde caractéristique*, χ_g^M ou *caractéroïde* associé à M.

L'homogénéité est le cas d'un seul caractère trivial, la substitution identique formant le caractéroïde trivial qui est le groupe réduit à son élément-unité.

χ_g^M est un exemple d'un monoïde de relations sur Π. Il y a d'autres manières d'associer à un monoïde M, relié ou non, des monoïdes de relations et, en particulier, de relations sur M. M, ses *monoïdes inverses* (organisés par l'opération inverse à droite ou à gauche) et ses monoïdes de relations ou de caractères associés donnent lieu à divers théorèmes d'homomophisme, d'anti-homomorphisme et d'isomorphisme caractérisant les divers associatifs dans lesquels on a, par exemple, la proposition suivante :

Proposition. — *Un caractère droit et un caractère gauche sont permutables (s'ils sont composables).*

3. **Structures préuniformes.** — Une famille non vide Φ de relations *réflexives* sur un ensemble E est appelée *base préuniforme* (d'une structure préuniforme sur E) si

1° Φ est une *base de filtre*

$$\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \Phi \Rightarrow \exists\, \mathcal{T} \in \Phi \quad \text{tel que} \quad \mathcal{T} \leqq \mathcal{R} \cap \mathcal{S};$$

2° Φ possède la propriété de *transitivité collective*

$$\mathcal{R} \in \Phi \Rightarrow \exists\, \mathcal{R}' \in \Phi \quad \text{tel que} \quad \mathcal{R}'\mathcal{R}' \leqq \mathcal{R}.$$

Comme nous l'avons déjà fait dans [3] ([6]), nous considérons toujours des *bases de filtre*. Ceci dit, nous n'excluons pas la notion de filtre uniquement déterminé par une base, mais nous modifions sa signification en celle de *classe d'équivalence* de bases. L'équivalence est la suivante :

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A},$$

avec $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ est plus fine que $\mathcal{B}$) $\Leftrightarrow$ ($B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists\, A \in \mathcal{A}$ tel que $A \leqq B$).

Si Φ se réduit à une seule relation $\mathcal{R}$, le postulat 1° est trivialement vérifié; $\mathcal{R}$ est réflexive par hypothèse et transitive d'après 2°, donc est un préordre. Les systèmes fondamentaux d'entourages d'une structure uniforme U ([7]) sont des bases préuniformes vérifiant plus l'axiome de symétrie

$$(\mathrm{U}'_{\mathrm{II}})\, \mathcal{R} \in \Phi \Rightarrow \exists\, \mathcal{R}' \in \Phi \quad \text{tel que} \quad \mathcal{R}'^{-1} \leqq \mathcal{R}.$$

Les structures uniformes réduites à une seule relation sont des équivalences. On peut donc dire que la structure préuniforme généralise la structure uniforme comme le préordre généralise l'équivalence, et aussi que la structure préuniforme généralise le préordre comme la structure uniforme généralise l'équivalence (*fig.* 1).

Posons $\mathcal{D}_\Phi = \bigcap\limits_{\mathcal{R} \in \Phi} \mathcal{R}$. On a évidemment $\mathcal{D}_\Phi \geqq \Delta$; $\mathcal{D}_\Phi$ est donc une relation réflexive. *$\mathcal{D}_\Phi$ est même un préordre.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathcal{D}_\Phi$ est transitive, c'est-à-dire $\mathcal{D}_\Phi^2 \leqq \mathcal{D}_\Phi$. En fait, quel que soit $\mathcal{R} \in \Phi$, il existe une relation $\mathcal{R}' \in \Phi$ avec $\mathcal{R}'^2 \leqq \mathcal{R}$. Parce qu'aussi $\mathcal{D}_\Phi \leqq \mathcal{R}'$, on a $\mathcal{D}_\Phi^2 \leqq \mathcal{R}'^2 \leqq \mathcal{R}$ quel que soit $\mathcal{R}$, donc aussi $\mathcal{D}_\Phi^2 \leqq \mathcal{D}_\Phi$. En fait $\mathcal{D}_\Phi^2 = \mathcal{D}_\Phi$.

Dans le cas d'une structure uniforme, $\mathcal{D}_\Phi$ est une équivalence. Ceci justifie complètement ce que nous venons de dire sur la structure préuniforme généra-

---

([6]) § 5, p. 219, notamment la remarque 12.

([7]) Bourbaki [2], chap. II.

lisant le préordre et la structure uniforme. En continuant l'analogie, nous définissons :

Si $\mathcal{D}_\Phi = \Delta$, Φ *détermine une structure préuniforme* SÉPARÉE.
Si $\mathcal{D}_\Phi \in \Phi$, Φ *détermine une structure préuniforme* TRIVIALE.

Ces définitions sont justifiées parce que

$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \Rightarrow \mathcal{D}_{\Phi_1} = \mathcal{D}_{\Phi_2} = \mathcal{D},$$
$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \Rightarrow (\mathcal{D} \in \Phi_1 \Leftrightarrow \mathcal{D} \in \Phi_2),$$

Dans le cas d'une structure préuniforme triviale, on a $\Phi \sim \{\mathcal{D}\}$. C'est donc, au fond, le cas de familles réduites à une seule relation.

Entre les structures uniformes séparées et les structures préuniformes, on peut intercaler les structures « ordoformes » Ω correspondant à l'ordre (intercalé entre l'égalité et le préordre). On remplace (U'_{II}) par un axiome d'antisymétrie :

$$\mathcal{R},\ \mathcal{S} \subset \Omega \Rightarrow \mathcal{R} \cap \mathcal{S}^{-1} \leqq \Delta \qquad (\text{donc } \mathcal{R} \cap \mathcal{S}^{-1} = \Delta).$$

Schéma de hiérarchie

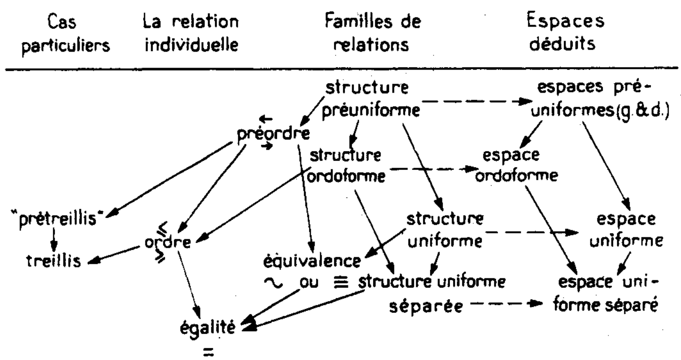

Fig. 1.

Enfin *deux espaces préuniformes, l'espace gauche et l'espace droit, se déduisent d'une structure préuniforme de la même manière qu'un espace uniforme se déduit d'une structure uniforme.*

Démonstration. — On peut transférer, mot pour mot, la démonstration de N. Bourbaki : elle ne mentionne pas l'axiome de symétrie. Naturellement, on doit maintenant distinguer *deux* espaces déduits suivant qu'on utilise la coupe gauche ou la coupe droite, bien que ces deux topologies peuvent se confondre dans certains cas [8].

En adoptant une notion de compatibilité convenable (ce qu'on peut faire de

[8] BOURBAKI (*loc. cit.*, § 2, n° 1) fait implicitement usage de la symétrie en n'explicitant pas les coupes et en confondant ces deux topologies.

manières diverses), on obtient la notion d'une *structure préuniforme compatible* avec l'opération d'un monoïde, dite aussi : *structure préuniforme invariante* (dans un sens qui doit être précisé). Si, par exemple, le monoïde est un (semi-) groupe, on obtient ainsi la notion de (semi-) *groupe préuniforme*, qui est aussi de deux manières un espace topologique par la construction ci-dessus. Un tel groupe ne sera pas, en général, un *groupe topologique* parce que la liaison entre la topologie et l'opération est plus faible : si $V = V(e)$ est un voisinage de l'identité e, V^{-1} n'est plus nécessairement un voisinage de e [9].

DEUXIÈME PARTIE.

III. — Groupoïdes préordonnés.

1. Construction du groupoïde préordonné G engendré par un semi-groupoïde préordonné S (dans lequel, non seulement l'égalité, mais aussi le préordre, noté $\rightarrow$, sont simplifiables). — Prenons l'ensemble $\{a, b, c, \ldots\}$ des éléments de S comme ensemble de générateurs de G et imposons deux types de relations définissantes :

1° $a \rightarrow b$ si cette relation a lieu dans S;
2° $ab = c$ si cette égalité a lieu dans S.

Explicitons la construction de G. Nous construisons d'abord un groupoïde préordonné G_0 dont les éléments x, y, ... sont :

a. les mots construits à l'aide d'éléments de S et d'inverses formels d'éléments de S (nous noterons $\bar{a}$ l'inverse formel de a, pour tout $a \in S$) de telle manière que les conditions suivantes (C) soient vérifiées :

si ab apparaît dans un mot, on a dans S, $a\mathcal{K}b$ (définition au § I, n° 1);
si $\bar{a}b$ apparaît dans un mot, on a dans S, $a\gamma_g b$ (définition au § I, n° 2);
si $a\bar{b}$ apparaît dans un mot, on a dans S, $a\gamma_d b$ (définition au § I, n° 2);
si $\bar{a}\bar{b}$ apparaît dans un mot, on a dans S, $b\mathcal{K}a$;

b. des symboles ε_ι indexés par des éléments de l'ensemble I défini à partir de S par la méthode du paragraphe I, (n° 2).

Dans G_0, la relation de composabilité $\mathcal{K}_0$ et l'opération sont définies de la façon suivante :

a. M et M′ étant deux mots quelconques, éléments de G_0, on a $M\mathcal{K}_0M'$ si et seulement si la juxtaposition de M et M′ donne un mot M″ satisfaisant aux conditions (C); on pose alors $MM' = M''$;

---

[9] Pour un autre genre de groupes pseudo-topologiques, *cf.* la note (6).

b. M étant un mot quelconque, élément de G_0 et ε_ι un des symboles définis plus haut, on a $M\mathcal{K}_0\varepsilon_\iota$ si et seulement si, a (ou $\bar{a}$) désignant le dernier élément de M, on a $a \in X_\iota$ (ou $a \in Y_\iota$); on pose alors $M\varepsilon_\iota = M$ et l'on notera encore ε_ι par δ_M;

c. Dans les mêmes hypothèses, on a $\varepsilon_\iota\mathcal{K}_0 M$ si et seulement si, a (ou $\bar{a}$) désignant le premier élément de M, on a $a \in Y_\iota$ (ou $a \in X_\iota$) on posera alors $\varepsilon_\iota M = M$ et l'on notera encore ε_ι par γ_M;

d. $\varepsilon_\iota\mathcal{K}\varepsilon_{\iota'} \Rightarrow \iota = \iota'$; on pose alors $\varepsilon_\iota\varepsilon_\iota = \varepsilon_\iota$.

On vérifie sans peine que G_0 est un groupoïde dont les symboles ε_ι sont les éléments unités.

Dans G_0, le préordre est défini comme la fermeture transitive et régulière de la relation $\mathcal{R}$ telle que l'on ait $x\mathcal{R}y$ dans l'un ou l'autre des cas suivants :

1° $x = a \in S$ et $y = b \in S$ avec $a \to b$ dans S;
2° $x = ab(a \in S,\ b \in S)$ et $y = c \in S$ avec $ab = c$ dans S;
3° $x = c \in S$ et $y = ab(a \in S,\ b \in S)$ avec $ab = c$ dans S;
4° $x = a\bar{a}$ et $y = \varepsilon_\iota$ avec $a \in Y_\iota$;
5° $x = \varepsilon_\iota$ et $y = a\bar{a}$ avec $a \in Y_\iota$;
6° $x = \bar{a}a$ et $y = \varepsilon_\iota$ avec $a \in X_\iota$;
7° $x = \varepsilon_\iota$ et $y = \bar{a}a$ avec $a \in X_\iota$.

Par suite, deux éléments de G_0, A et B, sont tels que $A \to B$ si et seulement si l'on peut trouver une chaîne d'éléments de G_0 :

$$A \equiv M_0 \to M_1,\quad M_1 \to M_2,\ \ldots,\ M_{p-1} \to M_p \equiv B \quad (^{10}),$$

où les $M_{i-1} \to M_i$ sont de la forme $X_iA_iY_i \to X_iB_iY_i$ (X_i et Y_i pouvant être vides) avec $A_i\mathcal{R}B_i$.

On dit que $A \to B$ est la conclusion de la chaîne considérée ou encore la *conclusion de groupe de la chaîne* $\{A_i \to B_i\}_{i=1,2,\ldots,p}$ *de substitutions élémentaires*. On dit que A_i est l'*antécédent* et B_i le *postcédant* de la $i^{\text{ième}}$ substitution.

Le groupoïde préordonné G est construit à partir de G_0 par homomorphisme, deux éléments A et B de G_0 étant considérés comme équivalents si l'on a $A\mathcal{E}_0B$, où $\mathcal{E}_0$ désigne la fermeture transitive et régulière de la relation $\mathcal{R}_0$ telle que l'on ait $x\mathcal{R}_0y$ dans l'un ou l'autre des cas 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7° définissant la relation $\mathcal{R}$. On voit aisément que G est aussi un groupoïde et qu'il est préordonné car

$$A \to B,\quad A \equiv A'(\mathcal{E}_0),\qquad B \equiv B'(\mathcal{E}_0) \Rightarrow A' \to B'.$$

2. Remarques élémentaires. — Par suite de l'homogénéité, $A \to B$ entraîne $\gamma_A = \gamma_B$, $\delta_A = \delta_B$; l'existence de XAY équivaut donc à celle de XBY. *A fortiori*, les mots d'une classe (représentant un même élément) ont même élément unité à gauche et même élément unité à droite.

(^{10}) $\equiv$ est le signe d'identité.

Les démonstrations suivantes de quelques propositions simples illustrent la méthode.

Proposition 1. — *$a \to b$ dans* S $\Rightarrow \bar{b} \to \bar{a}$ *dans* G.

Démonstration :

$$\bar{b} \equiv \bar{b}\,\delta_{\bar{b}} \equiv \bar{b}\,\gamma_b = \bar{b}\,\gamma_a = \bar{b}\,a\bar{a} \to \bar{b}\,b\,\bar{a} = \delta_b\,\bar{a} \equiv \delta_a\,\bar{a} \equiv \gamma_{\bar{a}}\,\bar{a} \equiv \bar{a}.$$

C'est une chaîne de quatre mots, ou de trois substitutions : $p = 3$.

Proposition 2. — *$a \to b$ dans* S $\Rightarrow a\bar{b} \to b\bar{a}$ *dans* G.

Première démonstration par une chaîne avec $p = 4$:

$$a\bar{b} \to b\bar{b} = \gamma_b \equiv \gamma_a = a\bar{a} \to b\bar{a}.$$

Deuxième démonstration : conséquence de la proposition 1 et de la régularité du préordre.

On démontre de même :

$ab \to c$ dans S $\Rightarrow a \to c\bar{b}$, $b \to \bar{a}c$, $\bar{c} \to \bar{b}\bar{a}$ dans G ;
$ab = c$ dans S $\Rightarrow \bar{c} = \bar{b}\bar{a}$ dans G.

On voit que tout se passe comme dans un groupe.

$a = b$ comprend, en particulier, $a \to b$ et $b \to a$; mais $a \to b$ et $b \to a$ n'entraînent pas $a \to b$. Pour définir le préordre dans l'ensemble des mots, on n'emploie que les sept relations définissantes :

$$c \to b; \quad ab \to c; \quad a\bar{a} \to \gamma_{\bar{a}}; \quad \bar{a}a \to \delta_a;$$
$$c \to ab; \quad \gamma_a \to a\bar{a}; \quad \delta_a \to \bar{a}a.$$

On peut résumer, par exemple, les trois substitutions consécutives $ab = c$, $c \to c'$, $c' = a'b'$ par $ab \to a'b'$. Plus généralement, si $S = S^2$, par exemple si S est à éléments unité, toutes ces substitutions peuvent être écrites sous la forme $ab \to a'b'$. Inversement, en conséquence de la notion même d'opération binaire, des relations quelconques peuvent toujours s'écrire comme des systèmes de relations de la forme $ab \to c$ ou $c \to ab$; par exemple, $(ab)c = a(bc)$ équivaut à dire

$$ab = u, \quad bc = v, \quad uc = z, \quad av = z.$$

On peut symboliser la *composition* binaire $ab = c(ab \to c)$ par la figure 2, ou par la figure 3 ; la *décomposition* binaire $c = ab(c \to ab)$ par la figure 4, ou par la figure 5. On a ainsi comme symbole de la demi-associativité (*cf.* § I, n° 3) la figure 6 qu'on réduit à la figure 7 ou encore à la figure 8 et qui n'est au fond qu'un tétraèdre (*fig.* 9).

Dans le paragraphe V, nous reviendrons en détail sur ces configurations [11].

---

[11] Nos conventions sont choisies pour s'adapter à notre problème particulier. Elles ne sont pas les seules possibles. Cependant nous avons cru devoir garder les notations de Malcev d'autant plus que celles-ci sont rendues particulièrement intuitives par le modèle circulaire (*cf.* § V, 6 figures).

Outre la convention de considérer seulement des relations de la forme $ab \rightarrow a'b'$, on peut se borner aux mots *alternatifs*, composés alternativement de lettres

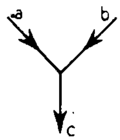

Fig. 2.

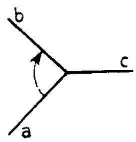

Fig. 3.

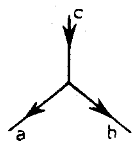

Fig. 4.

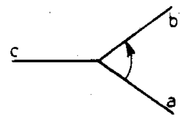

Fig. 5

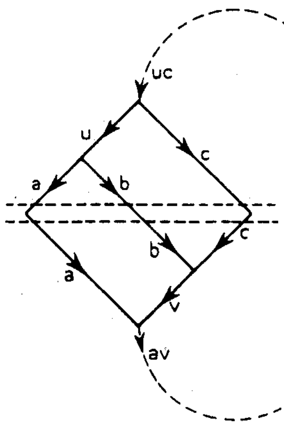

Fig. 6.

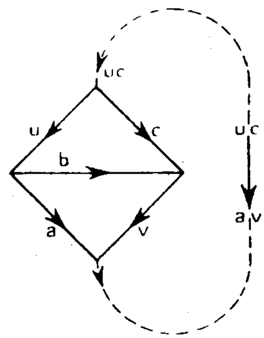

Fig. 7.

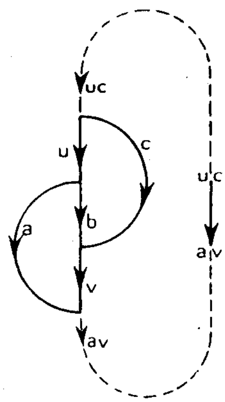

Fig. 8.

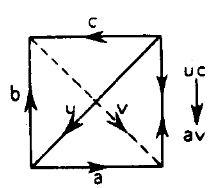

Fig. 9.

barrées et non barrées. Toutefois, nous admettrons des couples de lettres non barrées (un seul couple dans un mot).

Bien que ces conventions limitent déjà le caractère général de nos chaînes (entrave sans importance pour notre étude), nous les appellerons *chaînes générales* (chaînes de mots dans G, ainsi que chaînes de substitutions dans S) pour les distinguer de diverses formes plus particulières auxquelles on peut les réduire.

3. Description du modèle des chaînes générales. — Notre intérêt se portant sur l'ensemble préordonné des mots, nous rassemblons les sept relations définissantes sous deux titres :

I. $ab \to a'b'$ résume $a \to b$, $ab \to c$, $c \to ab$;

II.

	Naissances.	Disparitions.
Droites.........	$\gamma_a \to a\bar{a}$	$a\bar{a} \to \gamma_a$
Gauches........	$\delta_a \to \bar{a}a$	$\bar{a}a \to \delta_a$

Un mot nouveau d'une chaîne s'obtient donc à partir du mot précédent de l'une des façons suivantes :

I. sans changement de longueur du mot : $\Delta\lambda = 0$; on remplace le couple ab par $a'b'$, c'est-à-dire a par a' et b par b';

II. avec changement de longueur : $\Delta\lambda = \pm 2$;

α. $\Delta\lambda = +2$, naissance de $a\bar{a}$ ou de $\bar{a}a$;

β. $\Delta\lambda = -2$, disparition de $a\bar{a}$ ou de $\bar{a}a$.

Convenons d'écrire une chaîne de la manière suivante : les lettres d'un même mot ont la même hauteur. Chaque lettre est entourée par des vides à gauche et à droite. La largeur d'une même lettre reste constante dans les divers mots et égale à celle de la lettre qu'elle remplace éventuellement. Donnons à toutes les lettres la même largeur o et la même hauteur, disons 1 cm. Les lettres deviennent des segments verticaux pourvus de noms (« la lettre »), séparant les vides (champs) rectangulaires. Les divers mots d'une chaîne sont « collés » l'un sous l'autre de telle manière que les segments verticaux d'une lettre répétée ou remplacée se prolongent. Nous ajoutons donc un mot de la manière suivante :

I. On prolonge de 1 cm les lettres conservées ou remplacées, les segments des fibres prolongées changeant éventuellement de nom.

II. Dans les cas α et β on introduit (supprime) dans un certain vide deux segments : on commence (finit) deux nouvelles (anciennes) fibres en subdivisant un rectangle en trois (en confondant trois rectangles en un); il convient encore d'incliner les segments extrémaux d'une lettre barrée (fibre croche), afin de toucher sa conjointe non barrée; ainsi les deux sortent d'une même source (naissance = source positive) ou disparaissent dans un même puits (disparition = source négative). Les lettres sont ainsi les arêtes d'une figure plane.

Gonflons les fibres de façon à leur donner une largeur finie sans supprimer les vides; supprimons les lignes horizontales séparant un mot de l'autre, sauf là où une fibre change de nom. Nous obtenons ainsi une division du plan en polygones se rangeant en deux classes ([12]) : lettres (fibres) et vides (champs).

Un champ connexe corrrespond à un même ε et deux ε n'ont pas de frontière commune ([13]). Les fibres sont des polygones simplement connexes, mais les

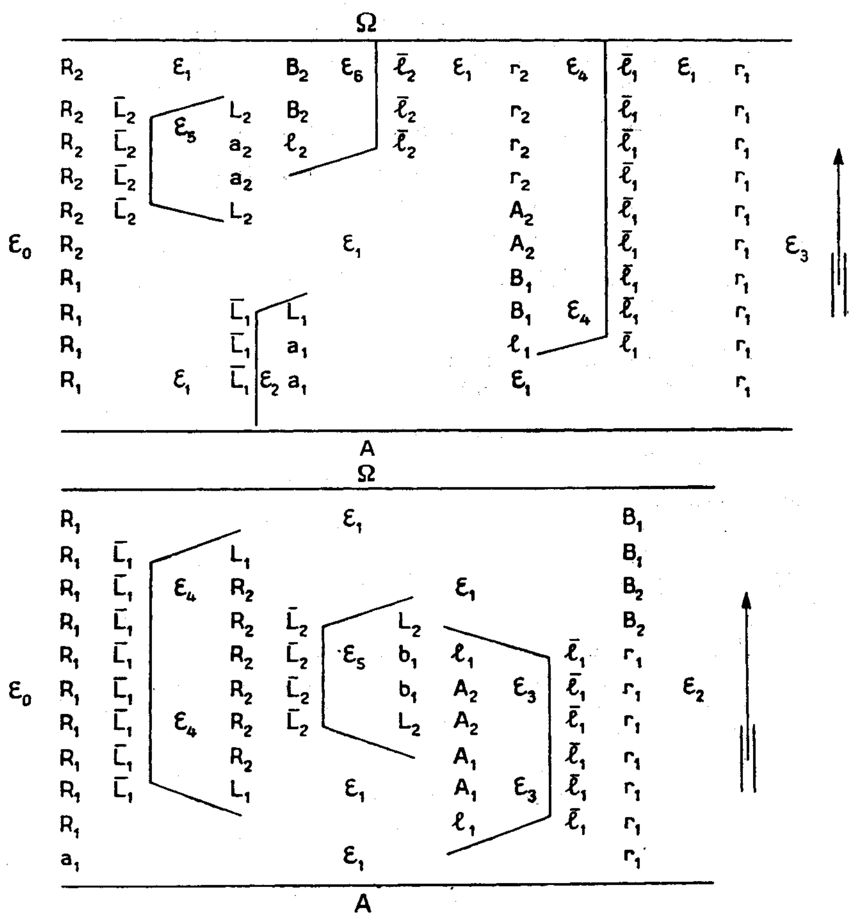

Fig. 10.

champs peuvent être de connexion multiple (*fig.* 10). C'est la seule asymétrie essentielle entre lettres et vides.

([12]) Outre un domaine A avant le premier mot et un autre Ω après le dernier mot.

([13]) Deux ε ne sont pas nécessairement des éléments distincts; par exemple, les figures sont aussi valables pour les groupes où il y a pourtant un seul ε.

4. Conditions nécessaires et suffisantes triviales pour l'immersibilité d'un semi-groupoïde préordonné dans un groupoïde préordonné. — *Remarque.* — Si au lieu d'un semi-groupoïde préordonné, nous avons un associatif préordonné A non rectangulaire, certains éléments non composables deviennent composables dans G par suite du fait qu'un groupoïde est rectangulaire. Les nouveaux produits de deux lettres non barrées sont bien déterminés et expressibles par des mots alternatifs :

$$ax = u, \qquad bx = v, \qquad ay = w \in \mathrm{A} \Rightarrow by = bx\bar{x}\bar{a}ay = (bx)(\bar{a}\bar{x})(cy) = v\bar{u}w \in \mathrm{G}.$$

Pour simplifier, nous nous bornons à une *notion stricte d'extension;* à savoir : aucune nouvelle relation, composabilité incluse, ne doit être imposée à la structure primitive. Alors la *rectangularité est une condition nécessaire d'immersibilité.*

Première forme triviale du critère d'immersibilité. — Un semi-groupoïde préordonné S est immersible dans un groupoïde préordonné si et seulement s'il est immersible dans le groupoïde préordonné G qu'il engendre.

Seconde forme triviale du critère d'immersibilité. — G ne contient aucune relation entre des mots de S (mots sans lettres barrées) qui ne soit déjà valable dans S.

Appelons S-*chaîne dans* G une chaîne de mots dans G dont les mots extrémaux A et B sont dans S. On a ainsi la

Troisième forme triviale du critère d'immersibilité. — La conclusion $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ d'une S-chaîne dans G doit être déjà valable dans S, c'est-à-dire être aussi une des relations définissantes $ab \rightarrow a'b'$ ou $ab = a'b'$ (donc une substitution élémentaire).

Nous avons déjà rangé les substitutions élémentaires sous deux titres I et II. Les substitutions II (naissances et disparitions) sont valables en vertu de la définition même d'un groupoïde. Elles sont donc triviales. On peut les supprimer dans les hypothèses d'une proposition et retenir seulement les substitutions élémentaires du type I qui sont des substitutions dans le semi-groupoïde donné. Notons la sous-chaîne ainsi obtenue : $\{\mathrm{A}_{i_k} \rightarrow \mathrm{B}_{i_k}\}_{1 \leq k \leq q \leq p}$ plus simplement $\{\mathrm{A}_k^* \rightarrow \mathrm{B}_k^*\}_{1 \leq k \leq q}$ où les $\mathrm{A}_k^* \rightarrow \mathrm{B}_k^*$ sont de la forme $ab \rightarrow a'b'(ab = a'b')$ exclusivement, et appelons encore la relation $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ la *conclusion de groupe du système de substitutions* (14) dans S $\{\mathrm{A}_k^* \rightarrow \mathrm{B}_k^*\}$. On obtient ainsi pour le critère d'immersibilité l'expression concise suivante, sa

Quatrième forme triviale. — Dans S, $\{\mathrm{A}_k^* \rightarrow \mathrm{B}_k^*\}_{1 \leq k \leq q} \Rightarrow \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$.

Nous pouvons représenter ces critères triviaux sous forme géométrique. Chaque chaîne de mots et chaque système de relations se représentent symboliquement par une figure polyédrique : suivant le n° 2 avec des arêtes orientées

(14) Le remplacement du mot « chaîne » par le mot « système » dans ce contexte a une raison importante : des chaînes distinctes peuvent déterminer des systèmes identiques à un isomorphisme près.

dont une est la conclusion. ou suivant le n° 3 qui donne les chaînes de mots d'une manière immédiate.

Dans le paragraphe suivant, nous verrons qu'on peut se borner à des chaînes d'un certain type qui sont à peu près ce que Malcev a appelé, d'un point de vue moins général, *chaînes normales*. C'est cette réduction à un *sous-ensemble* convenable et bien défini de chaînes, qui donnera aux critères d'immersibilité un caractère moins trivial et plus constructif. A ces chaînes plus spéciales, correspondront naturellement aussi des figures polyédriques plus particulières ([15]).

IV. — Théorèmes fondamentaux.

1. Types des lettres barrées. — Remarquons que les lettres barrées dans les chaînes de mots n'ont d'autre rôle que de naître, se répéter et disparaître : elles sont donc particulièrement aptes à servir de repères dans les chaînes ou, si l'on veut nous permettre une comparaison hardie, de squelette des chaînes tels les arêtes d'un poisson (*cf.* § III, n° 3 et la figure 10).

Considérons donc plus particulièrement les lettres barrées d'une chaîne. On peut distinguer celles qui sont :

0° sans origine et sans fin dans la chaîne; ces lettres sont sans intérêt; la chaîne est une juxtaposition de chaînes indépendantes qu'on peut considérer séparément;

1° sans origine, mais avec fin;

2° avec origine, mais sans fin;

3° avec origine et avec fin.

D'autre part, on peut distinguer, quant à leurs origines et leurs fins, si celles-ci sont des naissances ou disparitions de la forme $x\bar{x}$ ou de la forme $\bar{x}x$; on parle donc des origines et fins droites ou gauches suivant le côté où se trouve la lettre barrée. Dans les cas 1° et 2° une lettre barrée $\bar{x}$ aura un caractère *droit* ou *gauche* bien déterminé suivant que sa naissance ou sa disparition est à droite ou à gauche de sa conjointe non barrée x; on peut donc appeler cette lettre $\bar{x}$ ou bien *droite* ou bien *gauche*. Mais pour 3° on peut distinguer les deux cas :

a. l'origine et la fin sont du même côté;

b. elles sont de côtés différents.

En indiquant par un crochet l'origine et la fin, on obtient ces neuf possibilités (*fig.* 11) qu'on peut aussi classer de la manière suivante :

neutres (sans intérêt) ;

([15]) Toutefois, il est déjà évident que les polyèdres dont chaque sommet est rencontre de trois arêtes (et de trois faces) suffisent.

Ces graphes sont, en fait, des polyèdres ordinaires de R^3 (polyèdres d'Euler).

pures ou unilatérales *gauches* (trois cas);
pures ou unilatérales *droites* (trois cas);
mixtes ou bilatérales (deux cas).

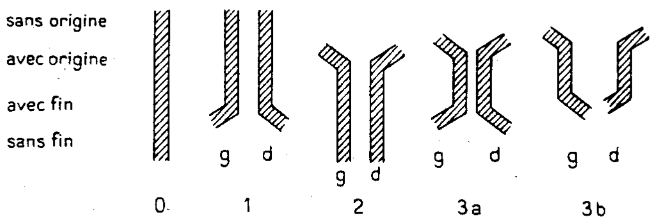

Fig. 11.

Lemme 0. — *On peut éliminer les cas mixtes* $3b$; autrement dit : *on peut se borner aux lettres barrées qui sont ou bien gauches ou bien droites.*

Démonstration. — Soit, par exemple, la naissance de $\bar{a}$ à droite et sa disparition à gauche; on considère le schéma (*fig.* 12) :

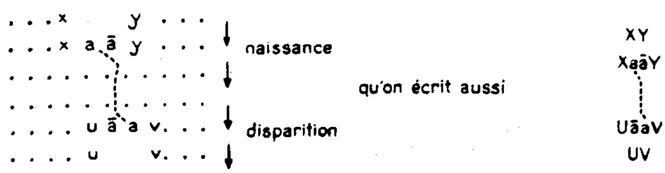

Fig. 12.

où X, Y, U, V représentent des mots partiels. Pendant l'existence de $\bar{a}$ les mots sont partagés en une partie à gauche de $\bar{a}$, C_g et une partie à droite de $\bar{a}$, C_d. Les substitutions dans une partie sont indépendantes de celles dans l'autre. On a donc les deux schémas partiels non interférents, chacun représentant une chaîne que nous indiquons par sa conclusion :

$$C_g : \; Xa \rightarrow U \qquad \text{et} \qquad C_d : \; Y \rightarrow aV.$$

Évidemment, on aurait pu exécuter leurs substitutions séparément, à savoir celles de C_g après toutes celles de C_d :

$$XY \rightarrow X(aV) \equiv (Xa)V \rightarrow UV,$$

avec la même conclusion $XY \rightarrow UV$ sans introduire $\bar{a}$.

Nous notons désormais les lettres gauches par $\bar{L}$, les lettres droites par $\bar{l}$ avec des indices convenables et obtenons la notation de Malcev.

Malgré des affinités évidentes entre la démonstration de Malcev [2] et la nôtre, il y a aussi des différences essentielles :

1° Malcev introduit *a priori* des *inverses formels à droite* et *à gauche*, x^- et x^+ (correspondant en fait à nos deux types de lettres barrées), mais une distinction semblable entre *unités gauches et droites* (qui n'existe pas chez Malcev) nous donne la généralisation aux groupoïdes.

2° Nous n'avons pas besoin de son lemme et de sa relation $\leqslant$([2], § 2, p. 332).

3° La partie principale de la démonstration par induction de Malcev est remplacée par notre simple lemme 3 (n° 6).

2. Indépendance et mobilité de substitution dans une chaîne. — Deux substitutions sont dites *indépendantes*, si l'on peut les exécuter simultanément. C'est possible si et seulement si leurs antécédents existent *simultanément*, c'est-à-dire dans un mot où ils sont *disjoints*. Alors on peut aussi les appliquer l'une après l'autre et permuter l'ordre de leur application. Ceci s'applique aussi aux naissances et aux disparitions. On retrouve ainsi la même situation que dans la Mécanique quantique où des opérateurs permutables correspondent aux observations indépendantes ou, ce qui revient au même, simultanées.

Une subtitution indépendante des autres substitutions apparaissant dans une portion *temporelle* de la chaîne peut être déplacée dans cette portion en avant et en arrière. En la déplaçant ainsi, les mots qu'elle rencontre seront partagés en une partie gauche et une partie droite par rapport à elle; les substitutions de la partie gauche n'ayant aucun lien avec celles de la partie droite dans cette portion de la chaîne, on peut aussi faire toutes celles d'un côté avant toutes celles de l'autre.

Le *lieu* d'une substitution élémentaire, naissance ou disparition, est une notion appartenant plutôt aux couples de mots consécutifs. Un tel lieu se trouve ou bien à droite ou bien à gauche d'une lettre apparaissant dans ces deux mots.

Chaque mot intérieur à la chaîne participe à deux transformations, une venant du passé et dont il contient le postcédent de la substitution élémentaire; l'autre allant vers l'avenir et dont il contient l'antécédent. Le premier mot d'une chaîne ne contient qu'un seul antécédent actif, le dernier un seul postcédent actif (si un mot intérieur ne participait qu'à une seule substitution, disons du passé, il serait suivi par sa simple répétition qu'on peut naturellement supprimer). Si l'on dit que dans une certaine partie d'un mot aucune transformation n'a lieu, cela veut dire que cette partie ne contient ni antécédent, ni postcédent actif.

3. Normalité. — Définitions. — 1° *Équivalence de chaînes.* — Deux chaînes ayant des extrémités identiques sont dites *équivalentes*. Ainsi le lemme du n° 1 peut être formulé : Toute chaîne ayant des *lettres mixtes* est équivalente à une chaîne sans lettres mixtes.

2° *Lettres normales.* — Une lettre (naturellement barrée) *gauche* est dite *normale dans la chaîne*, si pendant son existence aucune transformation n'est effectuée à sa gauche; même énoncé en remplaçant gauche par *droite*. (Évidemment une lettre mixte n'est pas normale.)

3° *Chaînes normales.* — Une chaîne est dite *normale*, si toutes ses lettres barrées sont normales dans la chaîne. (Une chaîne avec une lettre mixte n'est pas normale.)

4° *Mots normaux.* — Un mot d'une chaîne est dit *normal dans cette chaîne*, si toutes ses lettres gauches se trouvent à gauche de toutes ses lettres droites; le mot se divise donc en une partie gauche contenant toutes les lettres gauches tandis que la partie droite contient toutes les lettres droites.

Énoncé des théorèmes de normalité :

Théorème de normalité de Malcev généralisé. — *Chaque* S-*chaîne* (*commençant et finissant dans* S) *est équivalente à une chaîne normale.*

C'est le théorème qu'il nous faut pour le théorème d'immersibilité. Il généralise le théorème de Malcev correspondant par le fait que S est muni d'un préordre et par le fait que l'opération est partielle. Mais nous démontrerons, en fait, un théorème plus général :

Une chaîne liant deux mots normaux (N-*chaîne*) *est équivalente à une chaîne normale* [16].

On peut appeler le remplacement d'une chaîne donnée par une chaîne normale équivalente la *normalisation* de la chaîne donnée. On peut donc dire : *chaque* N-*chaîne peut être normalisée.* En particulier, les mots du semi-groupoïde préordonné S ne contiennent aucune lettre barrée; ils sont donc des mots normaux; une S-chaîne est donc une N-chaîne particulière.

On démontrera le théorème grâce à trois lemmes.

4. Lemme 1. — *Dans une chaîne normale, tous les mots sont normaux.*

Démonstration. — Si l'on avait dans un mot d'une chaîne normale

$$\ldots \bar{l} \ldots \bar{L} \ldots$$

aucune transformation ne pourrait s'effectuer tant que cette coexistence aurait lieu; $\bar{l}$ et $\bar{L}$ ne pourraient donc coexister que, dans un seul mot au plus. Mais alors l'une d'elles serait née dans ce mot ou disparaîtrait avec lui; ceci est en contradiction avec la normalité supposée de ces lettres dans la chaîne, car l'une d'elles naîtrait ou disparaîtrait pendant l'existence de l'autre du côté interdit.

Corollaire. — *Une condition nécessaire pour qu'une chaîne soit normale, est qu'elle soit une* N-*chaîne.*

Remarque. — D'après le théorème énoncé ci-dessus, que nous sommes en train de démontrer, c'est aussi une condition suffisante pour qu'une chaîne soit

---

[16] Et même (mais nous ne le démontrerons pas ici), *toute chaîne est équivalente à une juxtaposition finie de chaînes normales.*

équivalente à une chaîne normale. La classe des N-chaînes est donc la classe d'équivalence engendrée par les chaînes normales.

Autres conséquences du lemme 1. — Dans une chaîne normale, chaque mot a une *partie centrale* entre l'élément gauche le plus à droite et l'élément droit le plus à gauche. Le *centre* seul participe aux transformations; il ne contient que des lettres non barrées; les lettres gauches (droites) apparaissent ou disparaissent à sa gauche (droite) immédiate. Appelons l'ensemble des parties centrales des mots d'une chaîne normale l'*axe de la chaîne*, qu'on peut s'imaginer réalisé en mettant les mots centre sur centre au même lieu envisagé dans l'ordre temporel. En dehors de l'axe, à droite et à gauche, on rencontre alternativement des lettres barrées et non barrées. Dans l'axe, l'élément variable de S peut toujours se présenter par deux lettres, et cela suffit pour les substitutions de la forme $ab \to a'b'$ et pour les notions à droite et à gauche qui sont l'émission ou l'absorption d'une lettre barrée.

5. Soit, dans une chaîne C, $\bar{l}$ une lettre droite *non normale.* Écrivons la portion de la chaîne contenant $\bar{l}$ de sa naissance jusqu'à sa disparition (si les deux événements ont lieu dans C) :

$$\begin{array}{cccc} & X & Y & \\ X & l & \bar{l} & Y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U & l & \bar{l} & V \\ & U & V & \end{array}$$

Il doit y avoir des transformations à gauche et à doite de $\bar{l}$. On peut réarranger ces transformations d'une manière telle que $\bar{l}$ devienne normale; pour cela, on remarque l'indépendance des substitutions de C_g et de C_d (des deux côtés de $\bar{l}$); on peut donc placer les substitutions « anormales » (les transformations à droite de $\bar{l}$) avant la naissance ou après la disparition de $\bar{l}$. On obtient ainsi une chaîne équivalente C_1 ou C_2 :

$$\begin{array}{lll} & & XY \\ C_d : & Y \to V & \dots \\ & & XV \\ C_1 & & Xl\bar{l}V \\ & & \dots\dots \\ & & \dots\dots \\ C_g : & Xl \to Ul & Ul\bar{l}V \\ & & UV \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & & XY \\ & & Xl\bar{l}Y \\ C_g : & Xl \to Ul & \dots\dots \\ C_2 & & \dots\dots \\ & & Ul\bar{l}Y \\ & & UY \\ C_d : & Y \to V & \dots \\ & & UV \end{array}$$

Si $\bar{l}$ était sans fin, on devrait choisir le mode C_1; s'il était sans origine, on choisirait C_2.

Procédé analogue pour un $\bar{L}$.

On appelle ce procédé la *normalisation d'une lettre.* On a donc démontré le

Lemme 2. — *Une lettre barrée quelconque dans une chaîne peut toujours être normalisée.*

Remarque. — Les mots partiels X et Y existent dans C pendant la naissance de $\bar{l}$ à sa gauche et à sa droite. Si X contient déjà des lettres normales dans C, elles ne peuvent être que gauches; de même Y ne peut contenir que des lettres normales droites; de même U et V existent pendant la disparition de $\bar{l}$; on a donc pour leurs lettres normales éventuelles les mêmes énoncés.

6. Lemme 1. — *Dans une chaîne dont les extrémités sont des mots normaux, la normalisation d'une lettre ne détruit pas la normalité éventuelle d'autres lettres barrées de la chaîne.*

Démonstration. — Examinons de plus près ce qu'on a fait en normalisant $\bar{l}$. Dans C, on a distingué des transformations gauches C_g et des transformations droites C_d :

$$\begin{array}{ccc} X\,l & & Y \\ \cdots & & \cdot \\ \cdots & \text{et} & \cdot \\ \cdots & & \vdots \\ U\,l & & V \end{array}$$

Chaque fois qu'on effectue une transformatiou de C, la transformation élémentaire appartient à C_g et alors on fait dans C_d une répétition, ou bien c'est l'inverse. Dans C_1 par exemple, on peut continuer de parler de C'_g et de C'_d, qui ont la même longueur et présentent les mêmes transformations dans le même ordre que C_g et C_d. La seule différence est qu'on a changé l'ordre des répétitions. Dans C'_g, on les effectue toutes au commencement en répétant X, dans C'_d à la fin en répétant V. En outre, la « vie » de $\bar{l}$ s'est réduite à l' « essentiel », c'est-à-dire au nombre des transformations à sa gauche.

Pour démontrer le lemme, on considère les lettres normales dans la portion de la chaîne allant de XY à UV. On distingue $2 \times 2 = 4$ cas suivant que l'on considère des lettres normales se trouvant dans C_d ou dans C_g :

1° lettre gauche à droite;
2° lettre droite à droite;
3° lettre gauche à gauche;
4° lettre droite à gauche.

1° Soit $\bar{L}$ une lettre normale gauche à droite de $\bar{l}$. $\bar{L}$ ne peut pas exister dans C à droite de $\bar{l}$ pendant une transformation de C_g, ni pendant la naissance, ni pendant la disparition de $\bar{l}$; autrement dit, $\bar{L}$ n'existe que pendant des transformations de C_d, et toute son existence sera transportée avec C_d par le réarrangement C_1 avant la naissance de $\bar{l}$, ou par le réarrangement C_2 après sa disparition. Naturellement, $\bar{L}$ est normale dans C_d si elle l'est dans C, et donc aussi dans C_1 (ou C_2).

2° Soit $\overline{l}_i$ une lettre normale à droite de $\overline{l}$. Toutes les transformations de C_d doivent se trouver à gauche de $\overline{l}_i$ et le transport de C_d par lequel on obtient C_1 ou C_2 ne crée pas de transformations nouvelles à droite de $\overline{l}_i$, qui reste donc aussi normale dans C_1 ou dans C_2 ([17]).

3° S'il existe une lettre $\overline{L}$ normale gauche à gauche de $\overline{l}$, les transformations de C_g, et, *a fortiori*, celles de C_d ayant lieu pendant l'existence de $\overline{L}$, se trouvent dans C à droite de $\overline{L}$ et elles y resteront éventuellement dans C_1 ou C_2.

4° Soit une lettre $\overline{l}_i$ normale droite à gauche de $\overline{l}$ dans C. $\overline{l}_i$ n'a pas existé pendant la naissance ou la disparition de $\overline{l}$, ni pendant les transformations de C_d: celles qui sont à droite de $\overline{l}$ étant, *a fortiori*, à droite de $\overline{l}_i$; $\overline{l}_i$ n'existe donc que pendant les transformations de C_g où elle continuera à exister en restant normale.

Par symétrie, on a les considérations analogues à partir d'un élément $\overline{L}$ (au lieu de $\overline{l}$) et le lemme est démontré.

7. **Théorèmes fondamentaux d'immersibilité.** — On obtient le théorème de normalité énoncé dans le n° 3 en continuant ainsi la normalisation de la chaîne, lettre après lettre, d'ailleurs dans un ordre quelconque. On diminue le nombre des lettres anormales jusqu'à zéro; on obtient donc une chaîne normale. Désormais nous appellerons ces chaînes normales « *chaînes de Malcev* » ([18]). Naturellement à chaque chaîne de mots de Malcev correspond une *chaîne de substitutions élémentaires de Malcev* bien déterminée. En combinant le théorème de normalité démontré avec la troisième forme triviale du critère d'immersibilité, on obtient la

Première forme du théorème fondamental d'immersibilité. — *Un semi-groupoïde préordonné* S *est immersible dans un groupoïde préordonné si et seulement si les conclusions des* S-*chaînes de Malcev sont déjà valables dans* S.

A une chaîne de Malcev correspond encore une chaîne associée de substitutions élémentaires et, en particulier, un système de substitutions dans S, $\{A_k^* \rightarrow B_k^*\}$ que nous appelons d'une manière analogue *système de substitutions de Malcev* ou, éventuellement, S-système de substitutions de Malcev dans S. Le quatrième critère d'immersibilité combiné avec le théorème de normalité donne donc la

([17]) D'ailleurs, naissance ou disparition éventuelle de $\overline{l}_i$ dans la portion considérée de C, pendant l'existence de $\overline{l}$, seront transportées dans C_1 avant la naissance, dans C_2 après la disparition de $\overline{l}$. On obtient ainsi les possibilités suivantes : ou bien $\overline{l}_i$ sera née avant $\overline{l}$ et disparue après $\overline{l}$, ou bien toute l'existence de $\overline{l}_i$ se déroulera dans C_1 avant celle de $\overline{l}$, ou dans C_2 après $\overline{l}$; autrement dit, les intervalles d'existence des lettres normales du même genre sont ou bien l'un contenu dans l'autre ou bien séparés; en outre dans le cas non séparé, c'est l'intervalle d'existence de la lettre droite la plus à droite qui contient celui de l'autre; par symétrie, on a l'énoncé dual pour des lettres gauches.

([18]) Pour distinguer d'autres notions éventuelles de chaînes normales.

Seconde forme du théorème fondamental d'immersibilité. — *Un semi-groupoïde préordonné* S *est immersible dans un groupoïde préordonné si et seulement si avec chaque* S-*système de substitutions de Malcev dans* S, *sa conclusion de groupe est valable dans* S.

Nous aurions pu raccourcir les démonstrations si nous n'avions pas voulu obtenir, en même temps, une connaissance plus détaillée de la structure de ces chaînes. En fait, ces corollaires, permettent de vérifier que les chaînes de Malcev coïncident avec les modèles du paragraphe suivant, construit d'une manière indépendante à partir de certaines conventions intuitives.

TROISIÈME PARTIE.

V. — Modèles.

1. Construction intuitive du modèle des courants. ([19]). — Considérons un système de courants dans un plan $x - t$ affine, composé de *lignes de courant* ou plus brièvement *courants*. Il est commode d'interpréter x comme un axe d'espace et t comme un axe de temps, appelé aussi *axe central* qui partage le système des courants en une partie gauche et une partie droite.

Convenons des propriétés suivantes :

Le système est *fini*, c'est-à-dire composé d'un nombre fini de courants.

Les courants sont t-dirigés : ils sont dirigés du passé vers l'avenir, faisant toujours avec l'axe $+t$ un angle aigu; en particulier, les lignes de courants ne peuvent pas être fermées.

Deux courants ne se rencontrent jamais. Donc, dans un certain sens, tous les courants sont parallèles entre eux.

Distinguons deux classes de courants : un courant est ou *gauche*, ou *droit* et ne traverse jamais l'axe t. Si un courant touche l'axe t en un point ce point est ou bien *origine* ou bien *fin*. Un courant touche donc l'axe t au plus deux fois. Il y a des courants qui ne touchent jamais l'axe t (ils commencent dans le passé infini et vont vers l'avenir infini), des courants touchent exactement une fois (ils commencent sans finir, ou ils finissent sans avoir commencé dans le système), et des courants qui commencent et finissent dans le système.

Appelons *sources*, les points où un courant commence ou finit. Une source appartient à un seul courant. Elle est donc ou bien l'*origine* (*source positive*), ou bien la *fin* (*source négative*) d'un certain courant gauche ou droit.

Distinguons pour chaque courant et pour l'axe t, deux rivages ou *bords*. Les bords des courants sont *intérieurs* ou *extérieurs* suivant qu'ils sont plus près ou plus loin de l'axe central.

([19]) On ne doit insister sur aucun détail métrique des modèles: il s'agit uniquement de propriétés de nature topologique, ou plutôt, combinatoire.

Tout ce qui appartient à un courant gauche est noté par des *majuscules*, tout ce qui appartient à un courant droit par des *minuscules*. Les différents courants ont des indices convenables $i = 1, 2, \ldots, N$, et $j = 1, \ldots, n$, où N et n sont les nombres des courants gauches et droits ; $N + n = \mu$ est le nombre total des courants.

Notons les origines A_i et a_j, et les fins B_i et b_j, où i et j sont des indices des courants gauche ou droit correspondants. Notons les bords extérieurs des courants par R_i et r_j, les bords intérieurs par $\bar{L}_i$ et $\bar{l}_j$: R_i est le bord gauche d'un courant gauche, $\bar{L}_i$ son bord droit; r_j est le bord droit d'un courant droit, $\bar{l}_j$ son bord gauche.

Aux sources, nous distinguons d'abord les deux angles formés par le courant et l'axe t et le rivage de l'axe t opposé au courant (*fig.* 13). Un des angles est

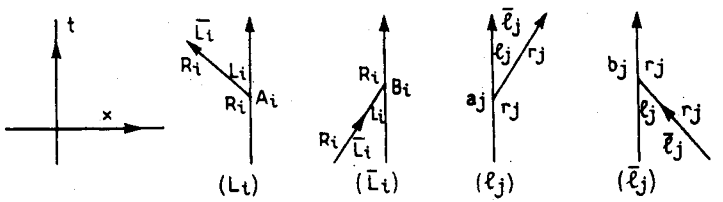

Fig. 13.

intérieur (aigu) et nous le notons par L_i ou l_j; l'autre est *extérieur* (obtus) et nous le nommons comme le bord extérieur R_i ou r_j. Nous écrivons le nom de la source sur le bord opposé, c'est-à-dire à gauche de l'axe t pour la source d'un courant droit, à droite de l'axe t pour la source d'un courant gauche.

En outre, distinguons pour une source son *dos*, côté du passé, et son *front*, côté de l'avenir. A chaque côté d'une source appartient donc un couple ordonné de lettres non barrées.

Voici le tableau (*fig.* 13) des quatre configurations des sources et le tableau correspondant de huit cases, dont le contenu est identique à celui de Malcev :

	Droite.		Gauche.	
	Origine.	Fin.	Origine.	Fin.
	l_j	$\bar{l}_i$	L_i	$\bar{L}_i$
Front...........	$a_j l_j$	$b_j r_j$	$L_i A_i$	$R_i B_i$
Dos.............	$a_j r_j$	$b_r l_j$	$R_i A_i$	$L_i B_i$

Chaque côté C d'une source, dos ou front, détermine univoquement un mot en relevant de gauche à droite les lettres rencontrées sur les bords des courants et de l'axe t par une parallèle à l'axe x passant par C. Un mot correspond donc à un état physique avec la particularité que la simultanéité est absolue et que les états forment une suite discrète. On obtient ainsi en considérant successivement les deux côtés des différentes sources, une suite finie de mots qu'on appelle *chaîne de mots*. Les lettres correspondant aux deux bords de l'axe t constituent les *couples* *centraux* des mots ; la suite des couples centraux est la *chaîne centrale*. Au passage d'un mot-dos au mot-front suivant correspond la création ou la disparition d'un couple $\bar{L}_i L_i$ ou $l_j \bar{l}_j$.

2. La notion de substitution. — Au passage d'un mot-front au mot-dos de la source suivante correspond la *substitution* d'un couple de lettres de la seconde ligne du tableau à un couple de lettres de la première ligne. Le mot « substitution » est ici entendu dans le sens littéral le plus large et n'implique aucune autre relation particulière entre le premier et le second nombre. En effet, on appliquera ces chaînes aux cas où le membre substitué n'est ni égal, ni équivalent au membre se substituant. En particulier, on ne suppose pas que les substitutions soient réversibles. Les substitutions identiques (répétitions) sont toujours admises en nombre quelconque : la relation binaire de substitution est donc une relation réflexive. Par définition cette relation est transitive ; autrement dit, elle n'est pas autre chose qu'un *préordre*.

De plus, on convient que la substitution $M \rightarrow M'$ remplaçant le mot $M = ABC$ par le mot $M' = AB'C$ (les sous-mots A et C peuvent manquer) appartient à la *même* relation que $B \rightarrow B'$. Cela revient à exiger l'*homogénéité;* la relation de substitution constitue donc en définitive un *préordre homogène*.

En conséquence de la transitivité, chaque chaîne de substitutions $M_{i-1} \rightarrow M_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, reliant le premier mot M_0 avec le dernier mot M_p entraîne $M_0 \rightarrow M_p$, substitution qu'on appelle la « *conclusion* » de la chaîne.

3. Première interprétation. Chaînes spéciales. — Les lettres non barrées seront interprétées comme des éléments d'un semi-groupe S, ou, plus généralement, d'un semi-groupoïde, et les couples de lettres non barrées comme leurs produits, c'est-à-dire comme les éléments qui sont les résultats de l'opération binaire dans S. Un tel couple impose donc, en particulier, que les deux éléments qui le constituent soient composables dans S.

Les lettres barrées $\bar{L}_i$ et $\bar{l}_j$ appartiennent chacune à un courant bien déterminé et existent en même temps que ce courant. Elles seront interprétées comme les inverses formels des lettres non barrées correspondantes dans le groupoïde G engendré par S. Ce groupoïde ne contient pas en général un sous-semi-groupoïde isomorphe à S. Dans cette interprétation, les deux mots d'une même source sont dans la relation d'identité parce qu'ils ne se distinguent que par l'adjonction ou la suppression d'un élément neutre.

Les courants, sans origine et sans fin dans le système, sont sans intérêt parce qu'ils ne participent à aucune transformation et provoquent seulement la répétition continue des mêmes lettres au début ou à la fin des mots. Nous nous limiterons donc aux systèmes dans lesquels chaque courant commence et finit. Le premier mot est donc le dos d'une origine, donc aussi un élément de S ; de même pour le dernier mot. Dans ce cas, le nombre des sources est un nombre pair 2μ, et le nombre des substitutions est $2\mu - 1$. Nous appelons ces chaînes, *chaînes spéciales*.

Si l'on considère maintenant les substitutions de la chaîne centrale comme appartenant à une relation de préordre définie dans S, on obtient un préordre bien déterminé dans G.

4. Le modèle circulaire. — Pour les chaînes spéciales centrales, un « *modèle circulaire* » convient également. On peut le considérer comme une figure d'un plan $x - y$ ordinaire, composée d'un cercle et de cordes, ou comme un polyèdre.

Pour l'obtenir, on recourbe l'axe t en un cercle orienté, en gardant une marque sur l'origine du circuit. Ainsi, un demi-plan devient l'intérieur de cercle, l'autre son extérieur. On replie l'extérieur sur l'intérieur.

Ce cercle doublement couvert est une sphère dont la surface subdivisée est un polyèdre avec

$$\begin{aligned} S &= 2\mu && \text{(nombre des sommets)}, \\ A &= 3\mu && \text{(nombre des arêtes)}, \qquad (\mu = n + N), \\ F &= \mu + 2 && \text{(nombre des faces)}, \end{aligned}$$

d'un type si simple qu'il est préférable de se servir de la figure plane suivante :

On peut s'arranger de telle manière que le demi-plan droit devienne, par exemple, l'intérieur, et que le demi-plan gauche soit replié, et qu'en plus, les courants gauches deviennent des cordes « verticales », notées par des majuscules, et les courants droits des cordes « horizontales », notées par des minuscules. On obtient ainsi deux classes de cordes. Chaque corde est orientée d'une manière naturelle. On note son origine et sa fin, comme auparavant, par A_i et a_j, ou par B_i et b_j, et l'on distingue son bord gauche, noté L_i ou l_j, et son bord droit, noté R_i ou r_j. On a donc conservé les notations, aux lettres barrées près.

Exemples. — On lit les chaînes de bas en haut :

1° Figure 14 :

	Substitutions. Antéc.	Substitutions. Poste.
$R_2 B_2 \bar{l}_2 r_2 \bar{l}_1 r_1$		
$R_2 \bar{L}_2 L_2 B_2 \bar{l}_2 r_2 \bar{l}_1 r_1$		
	$a_2\ l_2$	$\to L_2 B_2$
$R_2 \bar{L}_2\ a_2\ l_2\ \bar{l}_2 r_2 \bar{l}_1 r_1$		
$R_2 \bar{L}_2\ a_2\ r_2 \bar{l}_1 r_1$		
	$L_2 A_2$	$\to a_2\ r_2$
$R_2 \bar{L}_2\ L_2 A_2 \bar{l}_1 r_1$		
$R_2 A_2 \bar{l}_1 r_1$		
	$R_1 B_1$	$\to R_2 A_2$
$R_1 B_1 \bar{l}_1 r_1$		
$R_1 \bar{L}_1 L_1 B_1 \bar{l}_1 r_1$		
	$a_1\ l_1$	$\to L_1 B_1$
$R_1 \bar{L}_1\ a_1\ l_1 \bar{l}_1 r_1$		
$R_1 \bar{L}_1\ a_1 r_1$		

Conclusion : $R_1 \bar{L}_1 a_1 r_1 \to R_2 B_2 \bar{l}_2 r_2 \bar{l}_1 r_1$.

2° Figure 15 :

$$R_1 B_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 L_1 B_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 B_2$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 \bar{L}_2 L_2 B_2$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 \bar{L}_2 b_1 r_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 \bar{L}_2 b_1 l_1 \bar{l}_1 r_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 \bar{L}_2 L_2 A_2 \bar{l}_1 r_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 R_2 A_2 \bar{l}_1 r_1$$
$$R_1 \bar{L}_1 L_1 A_1 \bar{l}_1 r_1$$
$$R_1 A_1 \bar{l}_1 r_1$$
$$a_1 l_1 \bar{l}_1 r_1$$
$$a_1 r_1$$

Substitutions.

Antéc.	Postc.
$R_2 B_2 \rightarrow$	$L_1 B_1$
$b_1 r_1 \rightarrow$	$L_2 B_2$
$L_2 A_2 \rightarrow$	$b_1 l_1$
$L_1 A_1 \rightarrow$	$R_2 A_2$
$a_1 l_1 \rightarrow$	$R_1 A_1$

Conclusion : $a_1 r_1 \rightarrow R_1 B_1$.

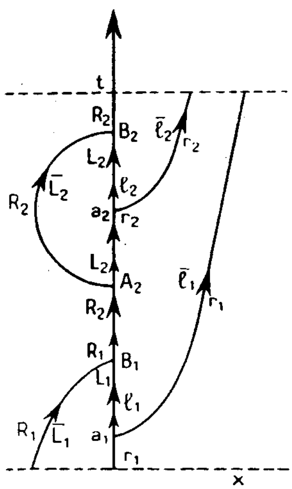

Fig. 14.

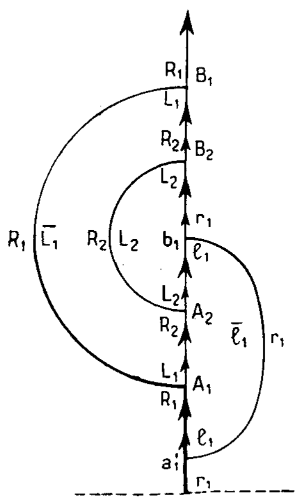

Fig. 15.

Imaginons que chaque corde soit un rectangle dans le plan $x - y$, qui sera lui-même le tableau de multiplication du semi-groupoïde S. Les a_j, b_j deviennent les abscisses des côtés verticaux des rectangles horizontaux, les A_i, B_i les ordonnées des côtés horizontaux des rectangles verticaux. Un arc orienté entre deux sources consécutives signifie une relation de substitution. On obtient, à partir de ce modèle de chaîne centrale spéciale, la chaîne centrale générale en découpant une partie du cercle, c'est-à-dire un arc quelconque avec sa part de cordes.

Inversement, chaque cercle orienté, avec un nombre fini de cordes et une marque de coupure, sera la configuratiou d'une chaîne si et seulement si deux classes au plus suffisent pour mettre deux cordes se coupant dans des classes disjointes.

5. **Chaînes connexes et disconnexes.** — Notons l'équivalence (non-équivalence) de deux cordes $c \sim c' (c \nsim c')$, et la relation de deux cordes distinctes se coupant $c \between c'$, sa négation $c \not\between c'$:

$$c \between c' \Rightarrow c \nsim c'; \qquad c \sim c' \Rightarrow c \not\between c';$$

la relation $\between$ est antiréflexive et antisymétrique, c'est-à-dire

$$c \between c', \quad c' \between c'' \Rightarrow c \sim c'', \qquad \text{et, en particulier,} \quad c \not\between c'';$$

autrement dit : trois cordes ne forment jamais un triangle dans l'intérieur du cercle. De même, il n'y a pas de pentagone, de $(2i+1)$-gones.

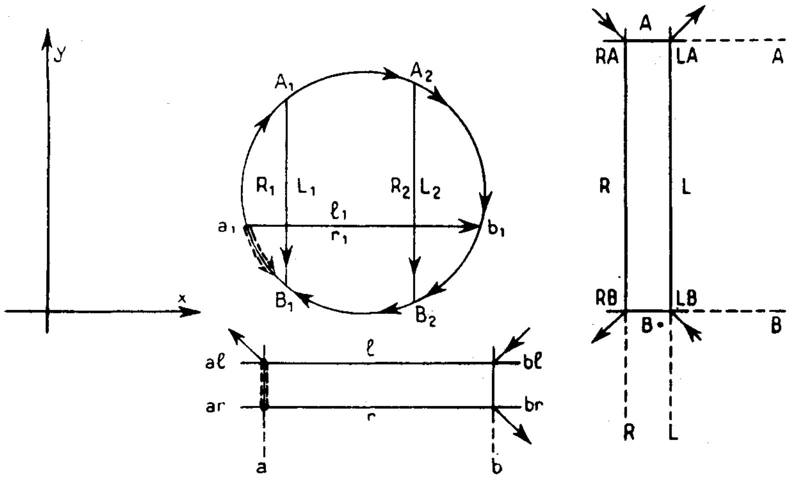

Fig. 16.

Le cas où une seule classe suffit, c'est-à-dire où deux cordes quelconques sont disjointes, et, plus généralement, tous les cas dans lesquels on peut changer la classification de certaines cordes, peuvent être éliminés et n'ont pas d'intérêt : ces cas se réduisent à une simple juxtaposition temporelle de chaînes autonomes plus courtes, dont chacune peut être remplacée dans le système par sa conclusion. On peut donc se limiter aux considérations dites *connexes*, dans lesquelles la classification est entièrement déterminée : en fixant la classe d'une seule corde, la classe de chaque corde est fixée.

Dans un système connexe, on peut trouver pour deux cordes quelconques c et c' une suite finie de cordes $c = c_0, c_1, \ldots, c_n = c'$, telle que $c_{i-1} \between c_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a

$$c \sim c' \Rightarrow n \equiv 0 \pmod 2 \qquad \text{et} \qquad c \nsim c' \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 2.$$

Les configurations C_n les plus simples sont, outre (ou ; on supprime le cercle et la dualité « horizontal-vertical ») :

$m = 2$: une seule, correspondant à la partition $2 = 1 + 1$: ;

$m = 3$: une seule, correspondant à la partition $3 = 1 + 2$: ;

$m = 4$: une pour la partition $1 + 3$, deux pour $2 + 2$:

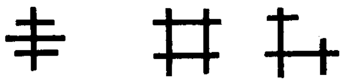

Fig. 17.

$m = 5$: une pour $1 + 1$, six pour $2 + 3$:

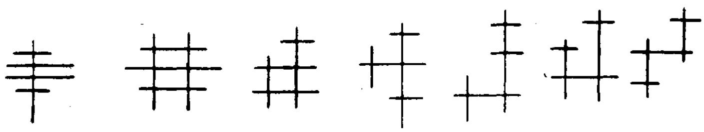

Fig. 18.

Ces configurations ne représentent pas des invariants (prototypes) de systèmes associatifs, mais sont un moyen pour les calculer.

6. Généralisation de la condition Z. — Montrons comment les conditions de Malcev généralisent la condition particulière Z et permettent de considérer la construction du groupe engendré par un sous-groupe immersible comme une généralisation directe ou plutôt, comme une application de la méthode de Ore, itérée jusqu'à l'infini.

Soit une quelconque des conditions de Malcev représentée sous la forme du modèle circulaire; l'arc $a_1 \to y_s$ est distingué par son orientation opposée à l'orientation du reste du cercle (les $2\mu - 1$ autres arcs). Nous pouvons supposer, sans limiter la généralité, que le système des cordes est connexe et soit

$$c_1 \between c_2 \between \ldots \between c_s$$

un chemin connexe où c_1 est la corde d'origine a_1 et où c_s est la corde d'extrémité y_s; y_s est un B_i ou un b_j suivant que s est pair ou impair. Dans les illustrations suivantes, nous figurons seulement les cordes du chemin choisi; les autres cordes éventuelles sont indiquées dans l'écriture des chaînes partielles par des points.

Le cas le plus simple est $s = 2$ (pour $s = 1$ le problème ne se pose pas) :

$$c_1 \between c_2 \equiv c_s, \qquad \text{donc} \quad y_s = B_i.$$

Prenons les chaînes partielles de substitutions (*fig.* 19) :

$$\begin{array}{ll} C_{11}: & L_i A_i \to \ldots \to b_1 l_1; \\ C_{12}: & L_i B_i \leftarrow \ldots \leftarrow b_1 r_1; \\ C_{21}: & R_i A_i \leftarrow \ldots \leftarrow a_1 l_1; \\ C_{22}: & R_i B_i \leftarrow a_1 r_1. \end{array}$$

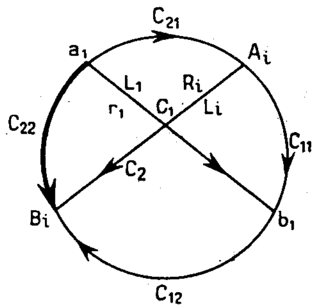

Fig. 19.

Chacune de ces chaînes est une *chaîne monotone* dans le sens que le postcédent d'une substitution et l'antécédent de la substitution suivante ont ou bien le facteur gauche ou bien le facteur droit en commun.

Soit le cas $s = 3$, donc $y_s = y_3 = b_j$ (*fig.* 20) :

$$\begin{array}{lll} C_{11}: & a_j l_j \to \ldots \to L_i B_i, & L_i A_i \to \ldots \to b_1 l_1; \\ C_{12}: & a_j r_j \leftarrow \ldots \leftarrow b_1 r_1; & \\ C_{21}: & b_j l_j \leftarrow \ldots \leftarrow R_i B_i, & R_i A_i \leftarrow \ldots \leftarrow a_1 l_1; \\ C_{22}: & b_j r_j \leftarrow a_1 r_1. & \end{array}$$

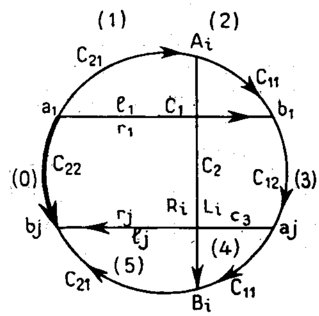

Fig. 20.

Nous donnons encore la figure du cas $s = 4$.

La règle générale s'obtient de la manière suivante : les $2s$ extrémités des s cordes du chemin choisi ([20]) donnent une division des $2\mu - 1$ arcs élémentaires en

([20]) Il pourrait exister d'autres chemins connexes de longueurs distinctes s'; toutefois $s \equiv s' \pmod 2$ et, naturellement, $s, s' \leq \mu$.

$2s-1$ arcs orientés que nous numérotons $(1), (2), \ldots, (2s-1)$ en donnant à l'arc élémentaire associé à la conclusion C_{22}, orienté en sens contraire le numéro (0).

Écrivons $S_1 \to S_2$ pour deux substitution *enchaînées* (*fig.* 21) :

$$\begin{aligned} &S_1: \quad x_1 y_1 \to x'_1 y'_1\,; \\ &S_2: \quad x_2 y_2 \to x'_2 y'_2 \qquad \text{avec} \quad x'_1 = x_2 \qquad \text{ou} \qquad y'_1 = y_2, \end{aligned}$$

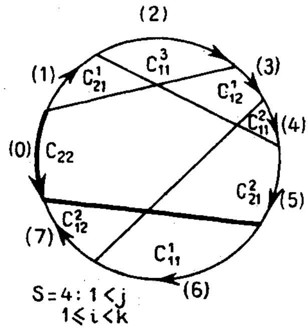

Fig. 21.

et appelons une suite de substitutions enchaînées, le cas d'une seule substitution étant inclus,

$$\mathcal{L}: \quad S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_l \to S_{l+1} \to \ldots$$

une *chaîne monotone*. Écrivons de même $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ pour deux chaînes monotones enchaînées

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\ : \quad S_1 \to S_2 \to \ldots \to S_\alpha\,; \\ &\mathcal{L}': \quad S'_1 \to S'_2 \to \ldots \to S'_\beta, \qquad \text{avec} \quad S_\alpha \to S'_1. \end{aligned}$$

Les arcs $(0), (1), \ldots, (2s-1)$ sont chacun une chaîne monotone. Nous les composons en quatre chaînes monotones

$$\begin{array}{ll} C_{11}: \ b_1 l_1 \leftarrow \ldots \quad \ldots \quad \ldots \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{i_s} l_{i_s} \\ L_{i_s} A_{i_s} \end{array} \right. & C_{12}: \ b_1 r_1 \to \ldots \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} a_{i_s} r_{i_s} \\ L_{i_s} B_{i_s} \end{array} \right. \\ \quad (1) \leftarrow (4) \leftarrow (6) \leftarrow \ldots \leftarrow (2s-2) & \quad (3) \to (7) \to \ldots \to \left(4\left[\frac{s}{2}\right]-1\right) \\ C_{21}: \ a_1 l_1 \to \ldots \quad \ldots \quad \ldots \to \left\{ \begin{array}{l} b_{i_s} l_{i_s} \\ R_{i_s} A_{i_s} \end{array} \right. & C_{22}: \ a_1 r_1 \to \left\{ \begin{array}{l} b_{i_s} r_{i_s} \\ R_{i_s} B_{i_s} \end{array} \right. \\ \quad (1) \to (5) \to (9) \to \ldots \to \left(4\left[\frac{s-1}{2}\right]+1\right) & \quad (0) \end{array}$$

l'alternative des lettres majuscules ou minuscules correspondant à $s \equiv 0$ ou $1 \pmod 2$.

Donnons encore une interprétation de ce fait en termes de la construction du groupe extension pour le cas classique où le préordre considéré est l'égalité, bien que nous écrivions autant que possible le symbole $\to$ ou $\leftarrow$.

Si S : $a \to a'$ est une substitution, nous notons

$$\overline{\mathrm{S}} : \ \overline{a}' \to \overline{a} \quad \text{ou} \quad \overline{a} \leftarrow \overline{a}',$$

donc si S : $ab \to a'b'$,

$$\overline{\mathrm{S}} : \ \overline{b}\overline{a} \leftarrow \overline{b}'\overline{a}'.$$

Si $\mathcal{L}$: $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2 \to \ldots$ est une chaîne monotone, nous notons

$$\overline{\mathcal{L}} : \ \overline{\mathrm{S}}_1 \leftarrow \overline{\mathrm{S}}_2 \leftarrow \ldots .$$

Dans un groupe, donc éventuellement aussi dans un semi-groupe immersible, une substitution et son inverse sont équivalentes.

Cas de deux cordes, $\mu = s = 2$:

$$\mathrm{C}_{11} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_{12} \Rightarrow \overline{l}r \to \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B} \Leftrightarrow \overline{r}l \leftarrow \overline{\mathrm{B}}\mathrm{A}.$$

C_{21} et C_{22} expriment la *même relation d'égalité*. Si l'on avait $\hat{}\,\mathrm{C}_{22}$ c'est-à-dire $ar \not\to \mathrm{RB}$, donc $ar \not\equiv \mathrm{RB}$, on aurait simultanément

$$\overline{l}r = \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B} \quad \text{et} \quad \overline{l}r \neq \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}.$$

De même C_{11} et $\mathrm{C}_{21} \Rightarrow a\overline{b} \to \mathrm{R}\overline{\mathrm{L}} \Leftrightarrow b\overline{a} \leftarrow \mathrm{L}\overline{\mathrm{R}}$, compatible avec C_{12} et C_{22} mais pas avec C_{12} et $\hat{}\,\mathrm{C}_{22}$.

Cas $\mu = 3$ *et* $s = 2$ (*fig.* 22) :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{C}_{11} : & b_1 l_1 \leftarrow b_2 r_2, & b_2 l_2 \leftarrow \mathrm{LA}\,; & \mathrm{C}_{12} : \ b_1 r_1 \to \mathrm{LB}\,; \\ \mathrm{C}_{21} : & a_1 l_1 \to a_2 r_2, & a_2 l_2 \to \mathrm{RA}\,; & \mathrm{C}_{22} : \ a_1 r_1 \to \mathrm{RB}\,; \end{array}$$

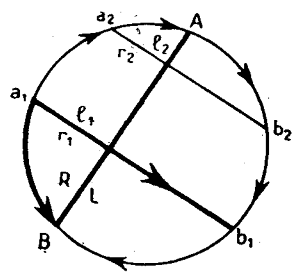

Fig. 22.

en multipliant les membres correspondants de C_{21} et $\overline{\mathrm{C}}_{11}$ on obtient $a_1\overline{b}_1 \to a_2\overline{b}_2 \to \mathrm{R}\overline{\mathrm{L}}$, donc $a_1\overline{b}_1 \to \mathrm{R}\overline{\mathrm{L}}$ qui s'interprète avec C_{12} et C_{22} et avec C_{12} et $\hat{}\,\mathrm{C}_{22}$ comme ci-dessus. En combinant C_{11} (ou plutôt $\overline{\mathrm{C}}_{11}$) avec C_{12}, nous obtenons

$$\left.\begin{array}{r} \overline{l}_1 r_1 \to \overline{r}_2 \overline{b}_2 b_1 r_1 \to \overline{r}_2 \overline{b}_2 \mathrm{LB} \\ \overline{l}_2 \overline{b}_2 b_1 r_1 \to \overline{l}_2 \overline{b}_2 \mathrm{LB} \to \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B} \end{array}\right\} \Rightarrow r_2 \overline{l}_1 r_1 \to l_2 \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}$$

qui est une relation entre mots alternatifs de longueur 3 (un quotient est un mot alternatif de longueur 2), qu'on peut aussi écrire comme une identification d'un mot alternatif de longueur 4, c'est-à-dire d'un produit de deux quotients d'un même genre, avec *un* quotient du même genre : $\bar{l}_2 r_2 . \bar{l}_1 r_1 = \bar{A}B$.

D'une manière générale, on observe que le couple de chaînes C_{11} et C_{21} (et de même le couple C_{11} et C_{12}) contient deux sortes de lettres : celles qui apparaissent deux fois et celles qui apparaissent une seule fois. On fait en sorte qu'on élimine les lettres doubles, ce qui est facile par des juxtapositions $a\bar{a}$ ou $\bar{a}a$ en inversant et multipliant des relations successivement. Le résultat sera une relation entre deux mots alternatifs formés justement des lettres solitaires, parce qu'au moins un facteur de chaque antécédent et de chaque postcédent intérieurs est une lettre double. Le deuxième couple avec la conclusion, c'est-à-dire C_{12} et C_{22} ou C_{21} et C_{22} doit contenir justement les mêmes lettres solitaires. Nous produisons par le procédé d'élimination de ces lettres doubles la *même relation d'égalité* entre les *mêmes* mots alternatifs que l'on obtient avec le couple contenant C_{11}, tandis que $\hat{}C_{22}$ signifiera une inégalité entre ces mêmes mots, donc une contradiction. C'est donc la construction de proche en proche de l'égalité dans

$$[S \times \bar{S}], \quad [S \times \bar{S} \times S], \quad [S \times \bar{S} \times S \times \bar{S}], \quad \ldots$$

où

$$S \subseteq [S \times \bar{S}] \subseteq [S \times \bar{S} \times S] \subseteq [S \times \bar{S} \times S \times \bar{S}] \subseteq \ldots.$$

L'immersibilité générale n'est qu'une propriété négative dans ce sens qu'elle assure la continuation de cette construction sans contradiction.

VI. — Corollaires.

1. Corollaires immédiats. — On trouve des corollaires nombreux en spécialisant dans deux directions : d'une part, on peut remplacer la relation de préordre général par un préordre spécial comme l'ordre ordinaire ou l'égalité du cas abstrait; d'autre part, on peut remplacer indépendamment l'opération, en général partielle, par une opération partout définie. Ces corollaires de spécialisation sont si faciles qu'on doit plutôt remarquer qu'ils ne sont pas tout à fait triviaux dans ce sens : il n'est pas évident *a priori* qu'en spécialisant les conditions du théorème fondamental, c'est-à-dire S, on obtienne la même spécialisation pour G; mais en fait, il en est bien ainsi.

1° *Le cas algébrique pur* (*abstrait*). — Il s'agit de semi-groupoïdes abstraits; toutes les substitutions sont des identités. On peut parcourir chaque chaîne dans les deux sens et l'on obtient deux conclusions inverses. D'après nos définitions, cette double conclusion appartiendra à l'identité correspondante du groupoïde, et le groupoïde obtenu sera un groupoïde abstait, toutes ses substitutions étant des identités.

2° S *est un semi-groupoïde préordonné.* — Ce qui est vrai pour une opération non nécessairement parfaite, le reste dans le cas particulier d'une opération parfaite. On a seulement à remarquer qu'en partant d'une opération parfaite dans S, l'opération obtenue dans G par notre construction sera parfaite; c'est d'ailleurs déjà explicitement dit : le rang (nombre des ε) est invariant; $\rho = 1$ signifie que l'opération est partout définie.

3° *Le théorème de Malcev proprement dit.* — On fait les deux spécialisations à la fois. C'est donc un sous-corollaire du corollaire 1° aussi bien que du corollaire 2°.

2. Le cas de l'ordre. — On obtient des corollaires moins triviaux en introduisant comme préordre particulier l'ordre habituel écrit $\leqq$ ou $\geqq$.

L'ordre Ω dans G doit évidemment être défini par l'existence d'une chaîne de substitutions élémentaires descendante dans S. Si M_1 et M_2 pouvaient être liés par deux chaînes, l'une descendante, l'autre scendante, on aurait simultanément $M_1 \geqq M_2$, $M_1 \leqq M_2$, donc $M_1 = M_2$, donc l'identité des M_i avec tous les mots intermédiaires dans les deux chaînes, et par simplification encore : toutes les substitutions élémentaires des deux chaînes seraient des identités. On serait conduit à une contradiction avec la définition de l'égalité si une des substitutions élémentaires n'était pas une identité dans S, mais une relation d'ordre stricte. Le lemme suivant montre que ceci ne peut pas arriver si la condition dont on affirme la suffisance pour l'immersibilité de S (avec prolongement de l'ordre de S) est vérifié.

Lemme. — *Si le semi-groupoïde ordonné* S *est immersible dans* G *le préordre engendré est un ordre.*

Démonstration. — On doit établir que $M_1 \rightarrow M_2$, $M_2 \rightarrow M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$; pour cela on doit montrer que si l'on a simultanément les deux chaînes de mots :

$$M_1 \rightarrow \ldots \rightarrow H_i \rightarrow H_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow M_2,$$
$$M_2 \rightarrow \ldots \rightarrow K_j \rightarrow \ldots \rightarrow M_1,$$

où les substitutions élémentaires sont des relations d'ordre dans S, elles sont toutes nécessairement des identités. Supposons, qu'au contraire, il y ait une relation d'ordre strict : disons que dans $H_i = SxT$ et $H_{i+1} = SyT$ (les mots S, $T \in G$; $y \in S$) on ait $x > y$, c'est-à-dire $x \neq y$. Alors, on aurait aussi la chaîne

$$SyT \equiv H_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow M_2 \rightarrow \ldots \rightarrow K_j \rightarrow \ldots \rightarrow M_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \ldots \rightarrow H_i \equiv SxT$$

avec la conclusion $Syt \rightarrow SxT$. Mais dans ce cas, il devrait aussi exister une chaîne liant y et x avec la conclusion $y \geqq x$, tandis qu'on a supposé $x > y$ [21].

[21] Une telle chaîne est

$$y = \ldots = S^{-1}SyTT^{-1} \equiv S^{-1}H_{i+1}T^{-1} \rightarrow \ldots \rightarrow S^{-1}M_2T^{-1} \rightarrow \ldots \rightarrow S^{-1}K_jT^{-1} \rightarrow \ldots$$
$$\rightarrow S^{-1}M_1T^{-1} \rightarrow \ldots \rightarrow S^{-1}H_iT^{-1} = \ldots = x,$$

où S^{-1} est l'inverse formel du mot S.

En partant de ce corollaire au lieu du théorème, on peut, d'une manière analogue, obtenir des sous-corollaires correspondant à 1°, 2° et 3° du n° 1. Le corollaire pour le cas abstrait s'obtient en considérant les identités comme des couples d'inégalités inverses, un tel couple signifiant nécessairement une identité. Le corollaire pour le cas d'une opération parfaite donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'immersion d'un semi-groupe ordonné dans un groupe ordonné. Enfin, on peut obtenir de nouveau le théorème de Malcev proprement dit comme sous-corollaire d'un de ces sous-corollaires.

3. **Connexion avec d'autres résultats connus : Généralités.** — On considère en particulier les cas dans lesquels la condition de Malcev — à savoir : une chaîne de Malcev entraîne sa « conclusion de groupe » — se démontre par induction. La validité pour des chaînes de longueur $n+1$ est une conséquence de celle pour des chaînes de longueur n. Il suffit de considérer les chaînes C_n connexes. Sinon, la chaîne est composée de sous-chaînes connexes plus courtes, dont au moins une occupe un arc ininterrompu du modèle circulaire. Alors on peut la remplacer par sa conclution, et l'on obtient en tout une chaine plus courte avec la même conclusion que la chaîne primitive. En conséquence de l'hypothèse d'induction, la conclusion sera valable.

La chaîne centrale de substitutions élémentaires appartenant à une configuration donnée, peut être transformée de plusieurs manières dans un autre système de substitutions. Par exemple, on peut multiplier, ou simplifier les deux membres d'une substitution à gauche et à droite par un facteur arbitraire et redécomposer chacun des deux membres en un produit binaire. En faisant cela avec chaque substitution, le système transformé n'appartient plus à la même configuration, ni même, en général, à une chaîne centrale quelconque. Pour qu'on conserve la même configuration, il suffit que les quatre extrémités de substitutions qui forment un rectangle dans le tableau de composition soient transformées de nouveau en un rectangle isomorphe (conservation de lignes et de colonnes, les lettres identiques étant remplacées par des lettres identiques). On n'impose pas que des *lettres* distinctes puissent être remplacées par des *éléments* distincts.

Considérons, pour fixer les idées, la partition du cercle des substitutions en deux arcs par une corde verticale. On peut multiplier à gauche toutes les substitutions d'un de ces arcs par un même facteur f sans détruire la configuration parce que chacun des coefficients gauche apparaît deux fois, donc n'apparaît pas ailleurs; on ne fait qu'«allonger» ou « raccourcir » horizontalement certains rectangles par la même translation gauche f (homothétie). De même, on peut appliquer simultanément une translation gauche f sur une partie et une autre translation gauche g sur l'autre partie, et garder la même configuration. L'analogue est valable pour ~~la~~ partition par une corde horizontale et des translations droites.

4. **Le cas de Ore.** — Bien que le cas « quasi régulier de Doss contienne celui de Ore (contenant lui-même d'une manière triviale le cas commutatif) nous considérons d'abord ce dernier. Supposons donc l'existence générale de multiples

communs, disons à gauche. Soit AB la corde verticale de séparation. En choisissant f et g tels que $fL = gR$, les deux couples de flèches

$$xy \to LA, \quad RA \to uv, \quad \text{et} \quad pq \to RB, \quad LB \to st$$

peuvent être remplacés par les deux flèches

$$fx.y \to gu.v \quad \text{et} \quad gp.q \to fs.t \quad (^{22}),$$

on obtient ainsi la même configuration, mais dégénérée : les deux côtés verticaux du rectangle de la corde AB sont confondus, et l'on peut supprimer cette dernière, le nouveau système appartenant à une configuration de $n-1$ cordes qui possède la même conclusion. Si la chaîne commence par A ou finit par B, on laisse tomber la substitution extrémale : dans la chaîne

$$gR.A \to gu.v, \quad \ldots, \quad gp.q \to gR.B, \quad fl.B \to fs.t,$$

par exemple, on remplace le dernier couple par la substitution $gp.q \to fs.t$ comme auparavant, ce qui donne la chaîne de $n-1$ cordes avec conclusion $gu.v \to fw.z$, qui, avec la première substitution, donne $LA \to wz$, c'est-à-dire la conclusion initiale. On peut donc toujours se ramener à un système de $n-1$ cordes. En continuant ainsi, on peut s'arrêter à $n=2$; la condition correspondante n'est autre que la condition z, vérifiée dans un semi-groupe régulier. On peut aussi continuer jusqu'à $n=1$; la condition correspondante est une conséquence de la simplifiabilité.

5. **Le cas de Doss.** — Constatons d'abord qu'il y a dans chacune des deux classes de cordes toujours au moins une corde telle qu'un de ses arcs ne porte ni

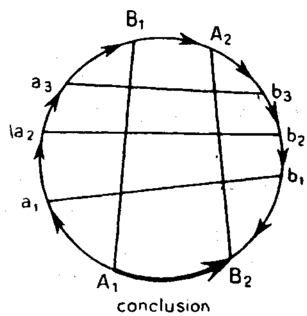

Fig. 23.

la conclusion, ni des extrémités d'autre cordes de la même classe. Par exemple, la corde verticale A_1B_1 est telle sur l'arc $A_1a_1a_2a_3B_1$; de même a_3b_3 sur $a_3B_1a_3$; mais a_1b_1 ne l'est pas (*fig.* 23).

(22) Les x, y, u, v, p, q, s, t sont des indéterminées pouvant représenter aussi bien des majuscules; de même les couples fx, gu, gp, fs représentent chacun une lettre.

La forme générale des substitutions d'un tel arc est ou bien

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} \mathrm{RA} \rightarrow c_1 s_1 \\ \qquad c_1 t_1 \rightarrow c_2 s_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_i s_i \leftarrow c_{i-1} t_{i-1} \\ \mathrm{RB} \leftarrow c_i t_i \end{array}\right. \quad \text{ou bien} \quad (\mathrm{II})\left\{\begin{array}{l} ar \rightarrow \mathrm{S}_1 \mathrm{C}_1 \\ \qquad \mathrm{T}_1 \mathrm{C}_1 \rightarrow \mathrm{S}_2 \mathrm{C}_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad \mathrm{S}_i \mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{T}_{i-1} \mathrm{C}_{i-1} \\ br \leftarrow \mathrm{T}_i \mathrm{C}_i \end{array}\right.
$$

Les c_k sont des a_{i_k} ou b_{i_k}, les s_k et t_k des r_{i_k} et l_{i_k} ou inversement; de même, pour les majuscules. En conséquence immédiate des lemmes de Doss, on peut supposer, sans limiter la généralité, qu'un au moins des coefficients gauches de (I) est régulier à gauche (dans le cas de quasi-régularité à gauche). Si R est régulier, on procède comme dans le cas de Ore; sinon, on doit réarranger les substitutions de telle manière que la corde avec c_k régulier devienne verticale et AB horizontale (*fig.* 24). Sans avoir changé la conclusion, on obtient de nouveau le cas précédent.

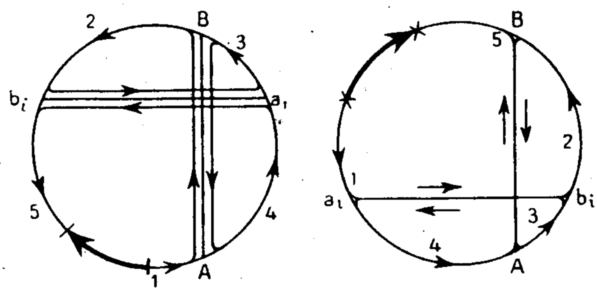

Fig. 24.

Nous avons généralisé les résultats de Ore et de Doss au cas préordonné et à ses corollaires. Toutefois ceci ne contient pas les résultats de nos Notes [2] parce que la compatibilité de l'ordre y est généralisée à un « caractéroïde *unilatéral* » isomorphe au demi-groupe multiplicatif des entiers (mod 3).

6. Généralisations ultérieures. — Il est immédiat qu'on peut formuler et démontrer des théorèmes analogues sur l'immersion de *semi-groupoïdes préuniformes* dans des *groupoïdes préuniformes* (23) d'où l'on peut encore tirer des corollaires concernant par exemple le cas des *structures uniformes*, le cas d'un préordre (contenant, en particulier, notre théorème fondamental du paragraphe IV), etc. C'est particulièrement facile si l'on emploie la notion d'homogénéité pour chacune de relations de la famille. Mais, déjà dans le cas assez particulier traité dans [3], nous avons eu recours à une notion de compatibilité plus large; une structure uniforme *homogène* d'un côté, mais seulement *invariante*

(23) Il s'agit des *espaces préuniformes* munis des structures algébriques du monoïde correspondant, les deux structures étant compatibles dans un certain sens qui doit être précisé. Au lieu de préuniforme, on dit aussi bien « préordoforme ».

de l'autre côté. Cette invariance est justement un exemple non trivial d'un *caractéroïde*, qui est naturellement permutable avec l'identité constituant le caractéroïde trivial de l'autre côté (*cf.* § II, n° 2). Toutefois, il est plus difficile d'épuiser exactement le domaine de généralité offert par nos moyens que d'obtenir ainsi par exemple le théorème d'immersion topologique correspondant le plus général ([24]).

Annonçons encore un problème : l'extension éventuelle aux anneaux quelconques. Dans les cas particuliers connus, la réponse est toujours indiquée par la structure multiplicative seule, et la structure additive la suit bien que ceci ne soit pas toujours très facile à montrer.

APPENDICE I.

Chaînes de Malcev et conditions de Malcev généralisées ([25]).

1. Considérons, sur l'axe *central* t (temps) d'un plan $x - t$, un nombre fini de points, *origines* ou *fins* de *courants* t-dirigés s'écoulant sans se couper soit à *gauche*, soit à *droite* de t. Notons par des majuscules (minuscules) le caractère gauche (droit); par des $A_i/a_j(B_i/b_j)$ les origines (fins); par des $R_i/r_j(L_i/l_j)$ les bords extérieurs (intérieurs) des courants munis d'indices convenables, et par des $R_i/r_j(L_i/l_j)$ les angles axe-courant *obtus* (aigus). En écrivant le nom des sources sur l'autre rive de t, chaque côté d'une source reçoit un couple de lettres non barrées, éléments d'un semi-groupe D avec élément unité et détermine son *mot* formé des lettres rencontrées par une ligne spatiale (parallèle à l'axe x). Considérons, en particulier, des *chaînes de sources* où chaque courant commence et finit : le premier et le dernier mot sont dans D.

2. Soit $\mathcal{R}$ un *préordre homogène* (régulier) défini dans D. $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, transitive et invariante par rapport aux translations gauches et droites de D. On parle d'une *$\mathcal{R}$-chaîne* (quelle que soit la relation $\mathcal{R}$) si chaque front et le dos suivant de la chaîne des sources sont *$\mathcal{R}$-reliés*, et l'on parle d'une *$\mathcal{R}$-conclusion* de cette chaîne si ses extrémités sont $\mathcal{R}$-reliées dans l'ordre naturel.

THÉORÈME. — *Pour que* D *soit immersible dans un groupe préordonné, il faut et il suffit qu'avec chaque $\mathcal{R}$-chaîne dans* D *sa conclusion soit aussi valable dans* D.

COROLLAIRES. — 1° *Théorème de Malcev : $\mathcal{R}$ est égalité.*

2° *$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*

3. Une famille non vide $F = \{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ de relations réflexives R_i sur D est une base d'une *structure* « *préordoforme* » sur D si :

1° F est une base de filtre;

([24]) *Voir* l'appendice I, n° 3.

([25]) *Generalized Malcev Chains and Conditions*, communiqué au Congrès international des Mathématiciens 1950 à Harvard.

2° $\mathcal{R} \in F \Rightarrow \exists \mathcal{R}' \in F$ et que $\mathcal{R}\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$;

F est *invariante* dans D si l'on a en plus :

3° $a, b \in D \Rightarrow a.F.b \sim {}_aF_b$;

en notant : $\sim$ l'équivalence associée au préordre entre familles de sous-ensembles d'un ensemble;

$$a.F.b = \{a.\mathcal{R}.b\}_{\mathcal{R} \in F} \quad \text{avec} \quad a.\mathcal{R}.b = \{(axb, ayb)\}_{x\mathcal{R}y},$$
$${}_aF_b = \{{}_a\mathcal{R}_b\}_{\mathcal{R} \in F},$$

${}_a\mathcal{R}_b$ étant la trace de la relation $\mathcal{R}$ sur le sous-demi-groupe $aDb \subseteq D$.

Théorème. — *Pour que* D *dans lequel* F *est invariante soit immersible dans un groupe possédant la même propriété, il faut et il suffit, que, pour chaque configuration de chaîne* C *et chaque relation* $\mathcal{R} \in F$, *il existe une relation* $\mathcal{R}_C \in F$ *telle que chaque* $\mathcal{R}_C$*-chaîne du type* C *dans* D *ait une* $\mathcal{R}$*-conclusion dans* D.

Corollaire. — 1° Le théorème du n° 2 : $F = \{\mathcal{R}\}$ *est réduit à une seule relation (nécessairement un préordre).*

2° Cas topologique : F *est une structure uniforme invariante (avec l'axiome de symétrie).*

3° Le théorème de Malcev (n° 2, 2°) est aussi un corollaire du corollaire 2° précédent : F *est l'égalité (structure iniforme séparée triviale)* (26).

4. **Groupoïdes G_p et demi-groupoïdes D_p (à opération partielle).** — 1° *Extensions d'inversibilité pure.* — Des éléments non composables restent non composables. Les seules modifications sont la condition nouvelle, dite « du rectangle » : $ax, ay, bx \in D_p \Rightarrow by \in D_p$ et la pluralité des éléments neutres (unités relatives); on forme des mots par juxtaposition d'éléments composables, les inverses formels inclus.

2° *Extensions totalisantes.* — La construction qui introduit des couples d'éléments non composables comme des éléments nouveaux et se répète dans l'ensemble ainsi élargi, etc., s'applique aussi à des systèmes *non associatifs*. La structure donnée sera immergée si elle ne se rétrécit pas : génération d'une algèbre quelconque dans le sens le plus large par des générateurs et des relations définissantes (l'immersibilité signifie la possibilité d'identifier des générateurs avec les éléments). L'application au problème classique des demi-groupes se fait, par exemple, en considérant l'ensemble de leurs éléments comme organisé par la division gauche et droite. Ceci conduit à une autre déduction des chaînes de Malcev.

5. On peut remplacer l'hypothèse de l'existence de l'unité dans D (des unités dans D_p) par des lois de cancellation ou par des conditions A de Clifford (27) convenablement généralisées.

(26) Aussi dite « discrète ».

(27) [3], p. 166.

APPENDICE II.

Arithmétique des chaînes de Malcev.

Le but principal est l'énumération complète des chaînes de Malcev en fonction de leur longueur m, et en particulier, des chaînes connexes.

Déjà les chaînes *unilatérales* (c'est-à-dire telles que tous les courants sont d'un même côté) bien qu'étant totalement disconnexes, donc triviales par rapport au problème de l'immersion, sont susceptibles d'une dizaine (ou même plus) d'interprétations : arithmétiques, algébriques, combinatoires, géométriques et logistiques dont quelques-une bien connues et même classiques). Leur nombre, le nombre de Catalan

$$K_m = \frac{\binom{2m}{m}}{m+1} = \prod_{i=1}^{m} \frac{4i-2}{i+1}$$

permet deux cribles de factorisation en nombres premiers : *crible vertical* et *crible horizontal.*

Par un raisonnement combinatoire élémentaire, on voit que le nombre des chaînes de Malcev avec n courants droits et N courants gauches est

$$M_{n,N} = K_n K_N \binom{2m}{2n} \qquad (m = n + N).$$

Une identité connue entre coefficients binomiaux donne pour le nombre des chaînes de Malcev de longueur m,

$$M_m = \sum_{n=0}^{m} M_{n.m-n} = K_m K_{m+1}.$$

D'autre part, $M_m = C_m + D_m$, où C_m est le nombre des chaînes connexes et D_m celui des chaînes disconnexes de longueur m. Enfin une chaîne disconnexe D_m est composée de h chaînes connexes de longueurs h_i :

$$C_{h_1}, \quad C_{h_2}, \quad \ldots, \quad C_{h_k} \qquad (h_1 + h_2 + \ldots + h_k = m, \; 2 \leqq k \leqq m),$$

où les $h_i < m$.

Par l'analyse diophantienne d'un système d'inégalités linéaires, on obtient comme corollaire d'un théorème d'analyse combinatoire, nouveau à notre connaissance, une formule pour D_m dépendant des $C_h(h < m)$:

$$D_m = \sum \frac{1}{k} \binom{2m}{k-1} \frac{k!}{f_1!f_2!\ldots.f_i!} C_{g_1}^{f_1}.C_{g_2}^{f_2}.\ldots.C_{g_i}^{f_i},$$

la somme s'étendant tous les i, k, f_1, ..., f_i, g_1, ..., g_i satisfaisant à

$$1 \leqq i, \quad f_1, \quad \ldots, \quad f_i;$$
$$2 \leqq f_1 + f_2 + \ldots + f_i = k;$$
$$0 < g_1 < g_2 < \ldots < g_i < m,$$

et

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_i g_i = m.$$

En substituant ces valeurs de M_m et de D_m dans $C_m = M_m - D_m$, on obtient une formule de récurrence pour C_m, les valeurs $C_1 = C_2 = 2$ étant triviales.

Théorie des prototypes.

On constate la portée limitée du résultat obtenu : des chaines *distinctes* peuvent appartenir à des systèmes de *substitutions isomorphes*, c'est-à-dire se transformant l'un dans l'autre par un changement de notation biunivoque. On est ainsi conduit à la définition de classe de chaînes connexes sous le nom de *prototypes* PT_m, correspondant aux classes d'isomorphies des systèmes de substitutions. Ces prototypes dans le sens étroit peuvent s'associer en *types larges* Tl_m en négligeant un groupe de transformations constitué par des changements cycliques, des symétries et des inversions, les PT_m s'attachant au modèle des courants, les Tl_m au modèle circulaire. Nous dressons la table complète des types jusqu'à $m = 6$. Cette analyse est assez pénible et une méthode plus puissante, mettant mieux en évidence les invariants du problème, reste encore à trouver.

Les prototypes forment une *hiérarchie*, chacun étant image *homomorphe* d'autres prototypes : pour chaque prototype PT_n, il existe des prototypes PT_{n+1} tels que PT_n soit une dégénérescence des PT_{n+1}. La signification des prototypes PT_n est simple : chacun détermine immédiatement un semi-groupe libre préordonné à $4n$ générateurs [28] n'est pas immersible dans un groupe préordonné; inversement, chaque demi-groupoïde préordonné non immersible contient des images homomorphes de tels prototypes sans contenir leur conclusion de groupe. La longueur minimale m_0 d'un tel prototype sans fermeture, représenté homomorphiquement dans le demi-groupoïde, donne une certaine mesure de l'immersibilité partielle dans un groupoïde.

Voici une table des nombres et des types mentionnés :

n.	k_n.	M_n.	D_n.	C_n.	C^c_n.	PT_n.	Tl_n.
1	1	2	0	2	1	2	1
2	2	10	8	2	1	1	1
3	5	70	64	6	1	2	1
4	14	588	560	28	3	6	2
5	42	5 544	5 384	160	7	22	3
6	132	56 628	55 592	1 036	33	91	9
7	429	613 470	606 176	7 294	–	–	–
8	1 430	6 952 660	6 898 112	54 548	–	–	
9	4 862	81 662 152	81 235 192	426 960	–	–	–
10	16 796		–	–	–	–	

BIBLIOGRAPHIE [29].

ASANO (K.) :

Über die Quotientenbildung von Schiefringen (*J. Math. Soc. Jap.*, t. 1, 1949, p. 73).

---

[28] On peut réaliser ces demi-groupes avec un nombre inférieur de générateurs et même à l'aide de deux générateurs seulement.

[29] Les chiffres entre [ ], précédant certains titres, correspondent aux références dans le texte.

BAER (R) :

Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law I-III; (*Amer. J. Math.*, t. 71, 1949, p. 706; t. 72, 1950, p. 625 et 647).

BIRKHOFF (G.) :

Lattice-ordered groups (*Ann. Math.*, t. 43, 1942, p. 298).

Lattice theory, revised edition, New-York, 1948.

BORUVKA (O.) :

Über Ketten von Faktoroiden (*Math, Ann.*, t. 118, 1941, p. 41).

BOURBAKI (N.) :

Théorie des ensembles, fasc. rés., Paris, 1940.

Algèbre, t. I, Paris, 1942.

[2] *Topologie générale*, t. I, II, Paris, 1940, 2e édit., 1951.

BRANDT (H.) :

Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs (*Math. Ann.*, t. 96, 1926, p. 360).

CLIFFORD (A. H.) :

Partially ordered abelian groups (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 465).

Semigroups admitting relative inverses (*Ann. Math.*, t. 42, 1941, p. 1037).

[3] *Extensions of semigroups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 68, 1950, p. 165).

CROISOT (R.) :

Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 616).

Hypergroupes partiels (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1090).

Algèbre de relations et hypergroupes partiels (*C. R. Acad.* Sc., t. 228, 1949, p. 1181).

DEHN (N.) :

Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes (*Math. Ann.*, t, 69, 1910, p. 137).

DOSS (R.) :

Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe (*Bull. Sc. Math.*, t. 72, 1948, p. 1).

DUBREIL (P.) :

Contribution à la théorie des demi-groupes (*Mém. Acad. Sc.*, t. 63, 1936-1939, p. 1-52).

Sur les problèmes d'immersion de la théorie des modules (*C. R. Acad. Sc.*, t. 216, 1943, p. 625).

Algèbre, Paris, 1946.

Relations binaires et applications (*C. R. Acad. Sc.*, 230, 1950, p. 1028).

Comportement des relations binaires dans une application multiforme (*C. R. Acad. Sc.*, 230, 1950, p. 1242).

DUBREIL-JACOTIN (Mme) :

Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 787).

Quelques propriétés des applications multiformes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 806).

Applications multiformes et relations d'équivalence (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 906).

HAUSSMANN (B. A.), *voir* ORE (O.).

HILLE (E.) :

FunctionalA nalysis and Semigroups (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. 31, New-York, 1948).

KUNTZMANN (J.) :

Contribution à l'étude des systèmes multiformes (*Thèse*, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1939 p. 155).

Notion générale d'homomorphie dans un système multiforme (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1958).

LAMBEK (J.) :

The immersibility of a semigroup into a group (*Canad. J. Math.*, t. 3, 1951, p. 34).

LORENZEN (P.) :

Abstrakte Negründung der multiplikativen Idealtheorie (*Malh. Z.*, t. 45, 1939, p. 533).

Über halbgeornete Gruppen (*Math. Z.*, t. 52, 1949, p. 483).

MAGNUS (W.) :

Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (*der Freiheitssatz*) [*J. Math.* (*Crelle*), t. 163, 1930, p. 141].

MALCEV (A.) :

[1] *On the immersion of an algebraic ring into a field* (*Math. Ann.*, t. 113, 1937, p. 686).

[2] *Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen* (en russe) (*Mat. Sorbnik*, Moscou, t. 6, 1939, p. 331).

Über die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen II (en russe) (*Mat. Sbornik*, Moscou, t. 8, 1940, p. 251).

MURATA (K.) :

On the quotient semigroup of a non commutative semigroup (*Osaka Math. J.*, t. 2, 1950. p. 1).

NEUMANN (B. H.) :

On ordered division rings (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 66, 1948, p. 202).

Embedding non associative rings in division rings (Abstract, *Bull. Amer. Soc.*, t. 56, 1940, p. 475).

NEUMANN (Hanna) :

Generalized free products with amalgemated subgroups (*Amer. J. Math.*, t. 70, 1942, p. 590).

ORE (O.) :

[1] *Linear equations in non commutative fields* (*Ann. Math.*, t. 32, 1931, p. 463).

Theory of quasi-groups (*Amer. J. Math.*, t. 59, 1937, p. 983) (avec B. A. HAUS-MANN).

[2] *Theory of equivalence relations* (*Duke J.*, t. 9, 1942, p. 573).

POST (E. L.) :

Recursive unsolvability of a problem of True (*J. Sym. Log.*, t. 12, 1947, p. 1).

PTAK (V.) :

Immersibility of semigroups (*Acta. Fac. Nat. Univ. Car.*, Prague, t. 192, 1949).

REES (D.) :

On semi-groups (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 387).

On the group of a set of partial transformations (*J. London math. Soc.*, t. 22, 1947, p. 281).

RIGUET (J.) :

[1] *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 76, 1948, p. 114).

Quelques propriétés des relations difonctionnelles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1999).

Sur les ensembles réguliers de relations binaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 936).

ROMANOFF (N. P.) :

One parameter operator groups and semi-groups and new methods in the theory of prime number based on examination of them (en russe) (*Siberian Phys. Tech. Inst. Univ. Tomsk*, 1942).

SHEFFER :

A set of five independant operations of Boclean algebras (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 14, 1913, p. 481).

STONE (N. H.) :

Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings (*Proc. nat. Acad Sc.*, t. 40, 1936, p. 87).

SUSCHKEWITSCH (A.) :

Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindentigen Umkehrbarkeit (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 30).

Über die Erwerterung der Semigruppe bis zur ganzen Gruppe (en russe) [*Comm. Soc. Math. et Inst. Sc. Math. Kharkoff*, (4), t. 12, 1935, p. 81].

TAMARI (Dov) :

Linear Algebra in general rings (en hébreux) (*Thèse M. Sc.*, Jerusalem, 1938).

On a certain classification of rings and semigroups (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 54, 1948, p. 153).

Caractérisation des semi-groupes à un paramètre (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228 1949, p. 1092).

[1] *Groupoïdes reliés et demi-groupes ordonnés* (*loc. cit.*, p. 1184).

[2] *Groupoïdes ordonnés. L'ordre lexicographique* (*loc. cit.* p. 1909).

Ordres pondérés (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 98).

[3] *Sur l'immersion d'un semi-groupe topologique dans un groupe topologique* (*Algèbre et théorie des nombre*, C. N. R. S., Paris, 1950).
[4] *Les images homorphes des groupoïdes, etc.* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 1291).
[5] *Représentations isomorphes, etc.* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1332).

TARSKI (A.) :
Cardinal algebra, Oxford University Press, New-York, 1949.

TURING (A. M.) :
The word problem in semi-groups with cancellation (*Ann. Math.*, t. 52, 1950, p. 491).

WARRDEN (B. L. v. d.) :
Free products of groups (*Amer. J. Math.*, t. 70, 1948, p. 527).

WEDDERBURN (J. H. N.) :
Non-commutative domains of integrity [*J. Math.* (*Crelle*) t. 167, 1932, p. 129].

ZASSENHAUS (H.) :
The theory of groups, New-York, 1949.

ERRATA.

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*)

Tome 228 (1949).

Page 1092, 2e ligne de la Note, *au lieu de* sur *lire* dans.
» 1185, 7e ligne, *au lieu de* $ac > cb$, *lire* $ac < bc$.
» 1186, 14e ligne, *au lieu de* Cette limite ..., *lire* On dit : l'ordre est pondéré si cette limite ....

Tome 229 (1949).

Page 1293, 2e ligne, *au lieu de* image homomorphe d'une partie d'un B, *lire* partie d'une image homomorphe 1° d'un B.
Page 1293, dernière ligne de 2°, *rayer les quatre derniers mots.*

Tome 232 (1951).

Page 1334, avant dernière ligne de la Note, *lire les deux dernières formules comme suit :* $(Z, A)_{G'}$; 6° $(Z, S)_{G'}$.