

621.6-24

ピストン形流体機械のピストンの運動*

(第1報, 理論解析)

山 口 悅**, 谷 岡 豊***

1. 緒 言

ピストンを主要な部材とする流体機械は数多い。特に油圧機器においては、ピストンポンプ、ピストンモータ、スプール弁など多数のこの種の機器が用いられている。これらの機械の特性を解析するには、まず、ピストンの運動がはあくされていかなければならない。

これに関連する研究としてつぎのものがある。ピストン形のポンプ、モータをおもな対象として、ピストンが傾斜している場合のエネルギー損失の和を最小とする条件を求めた理論解析⁽¹⁾、流体固着現象に関して、有限長さのピストンがシリンダ内で傾斜している場合を取り扱った研究⁽²⁾⁽³⁾、流体固着現象の防止のために静圧軸受理論の適用あるいはテーパを付けたピストンの使用について論じた研究⁽⁴⁾⁽⁵⁾がある。一方ジャーナル軸受において、ジャーナルが受けに対して傾斜した場合の特性を求めた研究^{(6)~(8)}がある。

しかしこれらの研究は、いずれもピストン(スプール、ジャーナル)に作用する定常的な力やモーメントを求めたものであり、ピストンの運動、すなわちその非定常特性を研究したものではない。

本研究は油圧機器をおもな対象として、ピストンの運動を理論ならびに実験的に解析することを目的とするものであり、第1報においてはピストンおよびシリンダ穴が幾何学的な円筒である場合の理論解析を行う。

2. 記 号

本報告に用いるおもな記号は、つぎのとおりである。

- a : ピストン支点(接続棒小端部)のピストン中心に対する位置
- C : 半径すきま
- e_0 : ピストン中心の偏心量

* 昭和46年8月26日 第809回講演会において講演、原稿受付
昭和47年1月31日。

** 正員、横浜国立大学工学部(横浜市南区大岡2-31-1)。
*** 正員、東京計器会社。

F_x, F_y : それぞれピストンに作用する x, y 方向の摩擦力

h : 流体膜厚さ

I : ピストン慣性モーメント

L : ピストン長さ

m : ピストン質量

M_x, M_y : それぞれピストン中心に作用する x, y 軸まわりの流体圧力にもとづくモーメント

M_{xa}, M_{ya} : それぞれピストン支点に作用する x, y 軸まわりの流体圧力にもとづくモーメント

p : 流体圧力

P_x, P_y : それぞれピストンに作用する x, y 方向の流体圧力にもとづく力

R : ピストン半径

t : 時間

T_x, T_y : それぞれピストン支点に作用する x, y 軸まわりの摩擦モーメント

V : 代表速度

w_0 : ピストン往復速度(中心軸方向)

W_x, W_y : それぞれピストンに作用する x, y 方向の押し付け力

x, y, z : 座標

X, Y : それぞれピストン中心の x, y 座標

α : ピストン中心軸とシリンダ穴中心軸とのなす角度

β, γ : 図1に定義される角度

μ : 流体粘度

ϕ_x, ϕ_y : それぞれピストン中心軸が xz, yz 平面となす角度(図6)

ω : ピストンの中心軸まわりの回転角速度

Ω : 代表角速度(一般に圧力の変動周期より定める)。

無次元化した量

$$\bar{a} = a/R$$

$$\bar{F} = FC^2/12\mu VR^2L$$

$$\bar{h} = h/C$$

$$\bar{I} = IC^3V/12\mu R^5L^2$$

$$\bar{m} = mC^3V/12\mu R^4L$$

$$\bar{M} = MC^2/12\mu VR^2L^2$$

$$\bar{p} = pC^2/6\mu VR$$

$$\bar{P} = PC^2/12\mu VR^2L$$

$$\bar{T} = TC^2/12\mu VR^2L^2$$

$\bar{w}_0 = w_0/V$ (一般に $|\bar{w}_0|$ の最大値を 1 とするよ
うに V を定める)

$$\bar{W} = WC^2/12\mu VR^2L$$

$$\bar{X} = X/C$$

$$\bar{Y} = Y/C$$

$$\bar{z} = z/R$$

$$\bar{\alpha} = \alpha R/C$$

$$\varepsilon = e_0/\alpha R$$

$$\tau = Qt$$

$$\bar{\phi}_x = R\phi_x/C$$

$$\bar{\phi}_y = R\phi_y/C$$

$$\bar{\omega} = R\omega/V$$

\bar{F} , \bar{M} , \bar{T} , \bar{W} には方向に応じ添字 x , y が付く。

3. ピストンに作用する流体力

本報においては、つきの仮定を設ける。

(1) ピストンとシリンダ穴は共に幾何学的な円筒である。

(2) ピストンとシリンダ壁との間の流れに対して、すべり軸受理論の仮定が成り立つ。

(3) 流体は非圧縮性であり、粘度などの物性値は一定である。

(4) ピストンの往復速度（中心軸方向速度）およびこの軸まわりの回転速度は既知である。

図1に示すように、座標 xyz 系を z 軸がシリンダ中心軸と一致するように定める。ピストン中心を O' 、ピストン中心軸 z' 上の任意の点を O_z' とすると、流体膜の厚さ h は、図示の記号を用いて

$$h = C - \overline{O O_z}' \cos(\varphi - \gamma)$$

$$= C - e_0 \cos(\varphi - \gamma) - \alpha z' \cos(\varphi - \beta) \quad \dots(1)$$

で与えられる。ここに $e_0 = \overline{O O'} :$ ピストン中心の偏心量、 $\alpha :$ 点 O' を通り xy 平面に垂直な直線と z' 軸とのなす角度。 α は微小な角度であるから、式(1)は

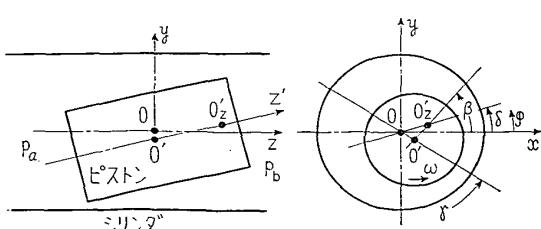


図1 記号説明図

つぎのように書ける。

$$h = C - e_0 \cos(\varphi - \gamma) - \alpha z \cos(\varphi - \beta) \quad \dots(2)$$

流体膜がうすいので、すきまを展開して解析する。流体膜厚さ方向に \hat{y} 軸、周方向に \hat{x} 軸、長さ（幅）方向に $\hat{z}(=z)$ 軸をとると、ピストンの運動に対する境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \hat{y}=0 \text{ (シリンダ壁)} \\ u=0, \quad v=0, \quad w=0 \\ \hat{y}=h \text{ (ピストン)} \\ u=R\omega, \quad v=\partial h/\partial t, \quad w=w_0 \end{array} \right\} \dots(3)$$

となる。ここに u , v , w はそれぞれ \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 方向速度である。式(3)を満たすレイノルズ方程式は、 $\hat{x}=R\varphi$ として

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{R\partial\varphi} \left(h^3 \frac{\partial p}{R\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ & = 6\mu \left(R\omega \frac{\partial h}{R\partial\varphi} - w_0 \frac{\partial h}{\partial z} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad \dots(4)$$

で与えられる。圧力 $p(\varphi, z, t)$ に対する境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} p(0, z, t) = p(2\pi, z, t) \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} p(0, z, t) = \frac{\partial}{\partial\varphi} p(2\pi, z, t) \\ p(\varphi, -L/2, t) = p_a(t) \\ p(\varphi, L/2, t) = p_b(t) \end{array} \right\} \dots(5)$$

で与えられる。ここに p_a , p_b はピストン端面に作用する圧力である。式(2)を式(4)右辺に代入し、無次元化すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) \\ & = \bar{w}\bar{\alpha}\varepsilon \sin(\varphi - \gamma) + \bar{w}\bar{\alpha}\bar{z} \sin(\varphi - \beta) \\ & + \bar{w}_0\bar{\alpha} \cos(\varphi - \beta) - 2\varepsilon \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{RQ}{V} \cos(\varphi - \gamma) \\ & - 2\bar{\alpha} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \frac{RQ}{V} \cos(\varphi - \gamma) - 2\bar{\alpha}\varepsilon \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{RQ}{V} \sin(\varphi - \gamma) \\ & - 2\bar{z} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{RQ}{V} \cos(\varphi - \beta) - 2\bar{\alpha}\bar{z} \frac{d\beta}{d\tau} \frac{RQ}{V} \sin(\varphi - \beta) \end{aligned} \quad \dots(6)$$

$\bar{\alpha}$ は、一般に小さいと考えられるから、圧力を

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{\alpha}\bar{p}_1 + \bar{\alpha}^2\bar{p}_2 + \dots \quad \dots(7)$$

とおき、摂動法を用いることとする。式(7)と無次元化した式(2)とを式(6)に代入し、 $\bar{\alpha}^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の係数を等置することによって、 \bar{p}_0 , \bar{p}_1 などに対する微分方程式が導かれる。

\bar{p}_0 に対して

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \dots(8)$$

境界条件は、式(5)より

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_0(0, \bar{z}, \tau) &= \bar{p}_0(2\pi, \bar{z}, \tau), & \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{p}_0(0, \bar{z}, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{p}_0(2\pi, \bar{z}, \tau) \\ \bar{p}_0(\varphi, -L/2R, \tau) &= \bar{p}_a, & \bar{p}_0(\varphi, L/2R, \tau) &= \bar{p}_b \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。式(9)を満たす式(8)の解は次式で与えられる。

$$\bar{p}_0 = \bar{p}_a + \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{L} \bar{z} \right) (\bar{p}_b - \bar{p}_a) \quad (10)$$

\bar{p}_1 に対する微分方程式は、 $\partial \bar{p}_1 / \partial \varphi = 0$ であることを用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial \bar{z}^2} &= \left(3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{RQ}{V} + \bar{w}_0 \right) \cos(\varphi - \beta) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) \frac{RQ}{V} \cos(\varphi - \gamma) \\ &+ \left(\bar{w}\bar{z} - 2\bar{z} \frac{d\beta}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \sin(\varphi - \beta) + \left(\bar{w}\varepsilon - 2\varepsilon \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \sin(\varphi - \gamma) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。境界条件は

$$\bar{p}_1(0, \bar{z}, \tau) = \bar{p}_1(2\pi, \bar{z}, \tau), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{p}_1(0, \bar{z}, \tau) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{p}_1(2\pi, \bar{z}, \tau), \quad \bar{p}_1(\varphi, -L/2R, \tau) = \bar{p}_1(\varphi, L/2R, \tau) = 0 \quad (12)$$

である。式(12)を満たす式(11)の解は

$$\bar{p}_1(\varphi, \bar{z}, \tau) = (A_1 e^{\bar{z}} + B_1 e^{-\bar{z}}) \cos \varphi + (C_1 e^{\bar{z}} + D_1 e^{-\bar{z}}) \sin \varphi + E(\bar{z}, \tau) \cos \varphi + F(\bar{z}, \tau) \sin \varphi \quad (13)$$

となる。ここに E, F の項は特解であり、 E, F は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E(\bar{z}, \tau) &= \left(-\bar{w}_0 + 2 \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{RQ}{V} - 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \cos \beta + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) \frac{RQ}{V} \cos \gamma \\ &+ \bar{z} \left(\bar{w} - 2 \frac{d\beta}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \sin \beta + \varepsilon \left(\bar{w} - 2 \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \sin \gamma \\ F(\bar{z}, \tau) &= \bar{z} \left(-\bar{w} + 2 \frac{d\beta}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \cos \beta + \varepsilon \left(-\bar{w} + 2 \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{RQ}{V} \right) \cos \gamma \\ &+ \left(-\bar{w}_0 + 2 \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{RQ}{V} - 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \sin \beta + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) \frac{RQ}{V} \sin \gamma \end{aligned}$$

積分定数 A_1, B_1, C_1, D_1 は式(12)の第3式より定まり

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ E \left(-\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{-L/2R} - E \left(\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{L/2R} \right\} / (e^{L/R} - e^{-L/R}) \\ B_1 &= \left\{ E \left(\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{-L/2R} - E \left(-\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{L/2R} \right\} / (e^{L/R} - e^{-L/R}) \\ C_1 &= \left\{ F \left(-\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{-L/2R} - F \left(\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{L/2R} \right\} / (e^{L/R} - e^{-L/R}) \\ D_1 &= \left\{ F \left(\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{-L/2R} - F \left(-\frac{L}{2R}, \tau \right) e^{L/2R} \right\} / (e^{L/R} - e^{-L/R}) \end{aligned}$$

で与えられる。

式(13)に現れるパラメータ $\bar{w}_0, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \varepsilon, \bar{p}_b - \bar{p}_a$ が時間的に変動しない場合(以下定常状態とよぶ)の \bar{p}_1 の分布を図2に示す。ただし $\bar{w}=0, \varepsilon=0, \beta=\gamma=0, L/R=2, \bar{p}_b - \bar{p}_a=1$ の場合である。摂動法の収束性を調べるために、同じ状態に対し \bar{p}_2 を求めた結果を図3に示す(ただし $\bar{w}_0=1$ の場合)。これらの図から $\bar{p}_0 + \bar{\alpha}\bar{p}_1 + \bar{\alpha}^2\bar{p}_2$ と $\bar{p}_0 + \bar{\alpha}\bar{p}_1$ との比を求めることにより、収束性を調べることができる。

つぎにピストンに作用する x, y 軸方向の力 P_x, P_y ならびにピストン支点に作用する x, y 軸まわりのモーメント M_{xa}, M_{ya} を求める。ただしモーメントは、座標原点からみて、右ねじの方向を正とする。なお粘

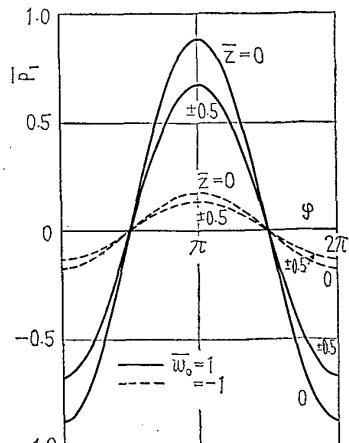


図2 定常圧力分布 (\bar{p}_1)

性摩擦力は、一般に十分小さいため、省略する。すなわち

$$\bar{P}_x = -\frac{R}{2L} \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos \varphi d\varphi d\bar{z}, \quad \bar{P}_y = -\frac{R}{2L} \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \bar{p} \sin \varphi d\varphi d\bar{z} \quad (14)$$

$$\bar{M}_{xa} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} (\bar{z} - \bar{a}) \bar{p} \sin \varphi d\varphi d\bar{z}, \quad \bar{M}_{ya} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} (\bar{z} - \bar{a}) \bar{p} \cos \varphi d\varphi d\bar{z} \quad (15)$$

となる。ただし z 方向に大きな圧力差があることにより、キャビテーションは生じないものと仮定している。式(15)において、ピストン中心に作用するモーメントを M_x, M_y とすると

$$\bar{M}_{xa} = \bar{M}_x + \bar{a}(R/L)\bar{P}_y, \quad \bar{M}_{ya} = \bar{M}_y - \bar{a}(R/L)\bar{P}_x \quad (16)$$

となること、 \bar{p} として \bar{p}_2 までを求めて $\bar{p}_2 = \bar{p}_2(2\varphi, \bar{z}, \tau)$ であるため、 \bar{P}_x などに関与するのは三角関数の直交性から \bar{p}_1 のみであることを考慮して、式(13)を式(14), (15)に代入し式(16)を用いると

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_x &= \bar{\alpha} A \left[\left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \cos \beta - 2 \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) \frac{R\Omega}{V} \cos \gamma - \varepsilon \left(\bar{w} - 2 \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \right) \sin \gamma \right] \\ \bar{P}_y &= \bar{\alpha} A \left[\varepsilon \left(\bar{w} - 2 \frac{d\gamma}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \right) \cos \gamma + \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \sin \beta - 2 \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) \frac{R\Omega}{V} \sin \gamma \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= \bar{\alpha} B \left[\left(-\bar{w} + 2 \frac{d\beta}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \right) \cos \beta + \frac{2}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \sin \beta \right] \\ \bar{M}_y &= \bar{\alpha} B \left[-\frac{2}{\bar{\alpha}} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \cos \beta - \left(\bar{w} - 2 \frac{d\beta}{d\tau} \frac{R\Omega}{V} \right) \sin \beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

をうる。ここに

$$A = \frac{\pi}{2} \frac{R}{L} \left(\frac{L}{R} - 2 \frac{e^{L/R} - 1}{e^{L/R} + 1} \right)$$

$$B = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{12} \left(\frac{L}{R} \right) - \frac{1}{2} \frac{e^{L/R} + 1}{e^{L/R} - 1} + \frac{R}{L} \right]$$

である。

図4, 5に定常状態における \bar{P}_x を示す。ただし $\bar{w}_0 = \pm 1, \varepsilon = \beta = 0$ の場合であって、この場合 $\bar{P}_y = 0$ であり、 \bar{w}, γ は無関係となる。一方 \bar{M}_x, \bar{M}_y は ω

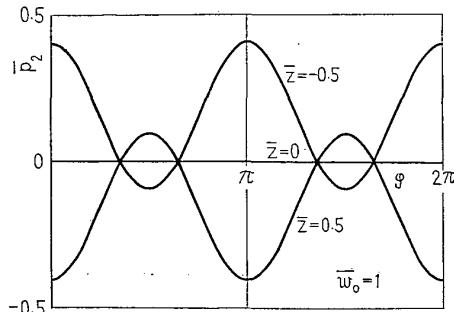


図3 定常圧力分布 (\bar{p}_2)

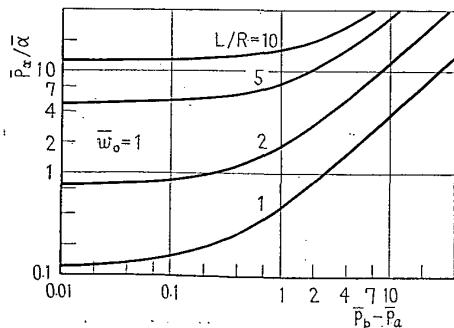


図4 定常押し付け力 ($\bar{P}_x, \bar{w}_0 = 1$ の場合)

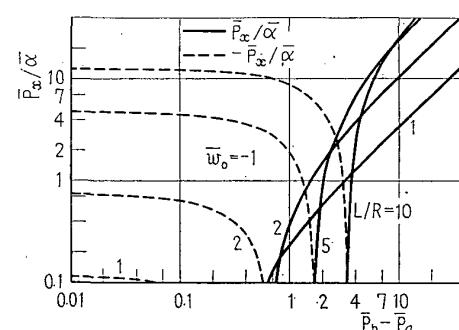


図5 定常押し付け力 ($\bar{P}_x, \bar{w}_0 = -1$ の場合)

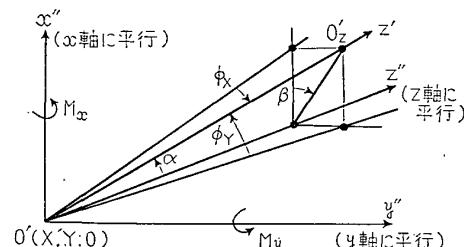


図6 ϕ_X, ϕ_Y 説明図

ピストン支点 ($z=a$) まわりの回転運動に対して

$$(I+a^2m) \frac{d^2\phi_x}{dt^2} = -M_{xa} - T_x, \quad (I+a^2m) \frac{d^2\phi_y}{dt^2} = M_{ya} + T_y \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

となる。なお、式(20)の第1式右辺の負号は、 x 軸まわりのモーメントの方向と ϕ_x の方向とが逆となるためである。図1, 6より近似的に

が成り立つ。これを式(17), (18)に代入し、その結果を式(16)と共に式(19), (20)に代入すると、無次元表示したピストンの運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{m} \left(\frac{R\Omega}{V} \right)^2 \frac{d^2 \bar{X}}{d\tau^2} + 2A \left(\frac{R\Omega}{V} \right) \frac{d\bar{X}}{d\tau} + A\bar{\omega}\bar{Y} - A \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \bar{\phi}_Y = \bar{W}_x + \bar{F}_x \\ \bar{m} \left(\frac{R\Omega}{V} \right)^2 \frac{d^2 \bar{Y}}{d\tau^2} + 2A \left(\frac{R\Omega}{V} \right) \frac{d\bar{Y}}{d\tau} - A\bar{\omega}\bar{X} - A \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \bar{\phi}_X = \bar{W}_y + \bar{F}_y \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

となる。

まず固体摩擦のない場合について、ピストンの運動の安定性を調べてみる。いま $\bar{a}=0$ とすると、回転運動 [式 (23)] と並進運動 [式 (22)] とに分けて安定性を吟味できる。この場合、 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\phi}_X, \bar{\phi}_Y$ に対して e^{st} に比例する解が仮定でき、パラメータ s に対してつきの特性方程式が導かれる。

回転運動

$$\left\{ \bar{I} \left(\frac{R\Omega}{V} \right)^2 s^2 + 2B \left(\frac{R\Omega}{V} \right) s \right\}^2 + B^2 \bar{\omega}^2 = 0$$

並進運動

$$\left\{ \bar{m} \left(\frac{R\Omega}{V} \right)^2 s^2 + 2A \left(\frac{R\Omega}{V} \right) s \right\}^2 + A^2 \bar{\omega}^2 = 0$$

$\bar{\omega} \neq 0$ の場合、特性方程式の s の一次の項が欠けているために、Routh-Hurwitz の判別式より、運動は不安定となる。 $\bar{\omega} = 0$ の場合には、 $\bar{\phi}_X, \bar{\phi}_Y$ は一定となる ($B > 0$ である)。 \bar{X}, \bar{Y} については、例えば \bar{X} は

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{d\tau} &= \frac{1}{\bar{m}(RQ/V)^2} \exp \left[\frac{-2A\tau}{\bar{m}(RQ/V)} \right] \\ &\times \int \left[\bar{W}_x + A \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \bar{\phi}_Y \right] \\ &\times \exp \left[\frac{2A\tau}{\bar{m}(RQ/V)} \right] d\tau + C_0 \exp \left[\frac{-2A\tau}{\bar{m}(RQ/V)} \right] \end{aligned}$$

を τ で積分することにより求まる。ただし C_0 は積分定数である。ここで $A > 0$ であるから、 x 方向の運動に対しピストン変位が有限であるためには

$$f_x(\tau) = \bar{W}_x + A \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \bar{\phi}_Y$$

が0であるか、あるいは0を中心として周期的に変動することが必要である。同様に y 方向の運動に対する条件は

$$f_y(\tau) = \bar{W}_y + A \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) \bar{\phi}_X$$

について $f_x(\tau)$ と同様のことがいえればよい。 $f_x(\tau)$, $f_y(\tau)$ について、この条件が満たされれば、 $\bar{w}=0$ の場合に、 \bar{X}, \bar{Y} の解に $b_1\tau$ (b_1 は定数) の形は含まれず、ピストンの変位は有限となる。

ここに述べた安定判別の結果は、スプール弁の流体固着現象の原因を示すものである。すなわち幾何学的な円筒に仕上げられたピストン（スプール）とシリンダ壁間に、異物を全く含まない流体を流した場合にも、流体固着現象が生じるのが普通であって、この現象はピストンの運動の不安定性にもとづくのである。この結果は、Dransfield⁽⁸⁾が単一ランドのピストンについて行った実験結果に対して、理論的な説明を与えるものである。

$a \neq 0$ の場合に対して、 $\bar{w}_0 + 3(\bar{p}_b - \bar{p}_a)R/L$ が一定であれば、同様の取扱いによりピストンの運動の安定判別を行うことができる。この場合も $\bar{w} \neq 0$ のとき、常に不安定となり、 $\bar{w}=0$ のときには、

$$4B + \bar{a} \frac{R}{L} \bar{m} \left(\bar{w}_0 + 3 \frac{\bar{p}_b - \bar{p}_a}{L/R} \right) > 0$$

[$B > 0$ であり, \bar{m} は十分小さい値であるので, この関係は () 内の値にかかわらず, 一般に成り立つ]とともに, \bar{X} などの解についての形が含まれなければピストン変位は有限となる.

$\bar{a} \neq 0$ の場合に対するピストンの運動の安定性の判別は、近似的な取扱いではあるが、上記の検討結果よりピストンの運動は、一般に不安定であると考えることができる。しかしここでは変位が有限である場合について、いくつかの数値例によってピストンの運動軌跡を示し、またピストンとシリンダ壁との接触の問題

を検討することとする。

ピストン変位が有限となる条件を満たし、またピストンポンプにある程度対応する場合として

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_0 &= \cos \tau, & \bar{p}_b - \bar{p}_a &= \bar{p}_0 + \bar{p}_0 \cos \tau, & \bar{W}_x &= -\bar{W}_0 \cos \tau \\ \bar{W}_y &= -\bar{W}_0 \sin \tau, & \bar{\omega} &= 0, & \bar{F}_x &= \bar{F}_y = \bar{T}_x = \bar{T}_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を考える。ただし \bar{p}_0 , \bar{W}_0 は一定とする。いま式 (23) において $d^2\bar{X}/d\tau^2$, $d^2\bar{Y}/d\tau^2$ の項が省略できるものとし、また $\bar{I} + \bar{a}^2 m R / L$ を \bar{I} と書くこととする。式 (24) を式 (23) に代入し、 τ で積分することにより

$$\bar{\phi}_x = \bar{\phi}_{x0} + D \left[\frac{2B}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right) \cos \tau + \sin \tau \right], \quad \bar{\phi}_y = \bar{\phi}_{y0} - D \left[\frac{2B}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right) \sin \tau - \cos \tau \right] \quad (25)$$

をうる。ここに

$$D = \bar{a} \frac{R}{L} \frac{\bar{W}_0}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 / \left[1 + \left(\frac{2B}{\bar{I}} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right]$$

であり、積分定数 $\bar{\phi}_{x0}$, $\bar{\phi}_{y0}$ はピストンの変位が有限となる条件よりつぎのように求まる。例えば $\bar{\phi}_{x0}$ は $\bar{\phi}_x$ を式 (22) の第2式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{Y}}{d\tau^2} + \frac{2A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right) \frac{d\bar{Y}}{d\tau} &= \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \left\{ \cos \tau + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 (1 + \cos \tau) \right\} \\ &\times \left[\bar{\phi}_{x0} + D \left\{ \frac{2B}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right) \cos \tau + \sin \tau \right\} \right] - \frac{\bar{W}_0}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \sin \tau \end{aligned}$$

となる。ここで \bar{Y} が有限であるためには、上式右辺の時間平均値が 0 であればよい。このことから

$$\bar{\phi}_{x0} = -\frac{1}{3} \frac{L}{R} D \frac{B}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right) \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) / \bar{p}_0$$

をうる。同様に $\bar{\phi}_y$ を式 (22) の第1式に代入して

$$\bar{\phi}_{y0} = -\frac{1}{6} \frac{L}{R} D \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) / \bar{p}_0$$

をうる。 $\bar{\phi}_{x0}$, $\bar{\phi}_{y0}$ がそれぞれ上式で与えられる場合には

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \bar{X}_0 + A_1 \left(-2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \cos \tau - \sin \tau \right) + A_2 \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \sin \tau - \cos \tau \right) \\ &\quad + A_3 \left(-\frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \cos 2\tau - \sin 2\tau \right) + A_4 \left(\frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \sin 2\tau - \cos 2\tau \right) \\ \bar{Y} &= \bar{Y}_0 + B_1 \left(-2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \cos \tau - \sin \tau \right) + B_2 \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \sin \tau - \cos \tau \right) \\ &\quad + B_3 \left(-\frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \cos 2\tau - \sin 2\tau \right) + B_4 \left(\frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \sin 2\tau - \cos 2\tau \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。ここに \bar{X}_0 , \bar{Y}_0 は積分定数であり、

$$\begin{aligned} A_1 &= -6 \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 D \frac{B}{\bar{I}} / \left[1 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ A_2 &= \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \left[\frac{A}{m} \left(\bar{\phi}_{y0} + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \bar{\phi}_{x0} + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 D \right) - \frac{\bar{W}_0}{m} \right] / \left[1 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ A_3 &= -\frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^3 D \frac{B}{\bar{I}} \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) / \left[4 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ A_4 &= \frac{1}{2} \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 D \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) / \left[4 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ B_1 &= \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \left(\frac{A}{m} 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 D - \frac{\bar{W}_0}{m} \right) / \left[1 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ B_2 &= \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \left[\bar{\phi}_{x0} + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \bar{\phi}_{x0} + 6 \frac{R}{L} \bar{p}_0 D \frac{B}{\bar{I}} \left(\frac{V}{RQ} \right) \right] / \left[1 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ B_3 &= \frac{1}{2} \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^2 \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) D / \left[4 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \\ B_4 &= \frac{A}{m} \left(\frac{V}{RQ} \right)^3 D \frac{B}{\bar{I}} \left(1 + 3 \frac{R}{L} \bar{p}_0 \right) / \left[4 + \left(2 \frac{A}{m} \frac{V}{RQ} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

である。

$\bar{a}=0$ の場合の数値例を図7に示す。ただし $\bar{\omega}=0$, $R\Omega/V=1$, $\bar{W}_0=0.1$, $\bar{m}=1\times 10^{-5}$, $\bar{I}=3\times 10^{-6}$ の場合であって、これらの数値は図7~10に共通である。この場合、 \bar{X} などの振幅は \bar{W}_0 に比例し、 $R\Omega/V$ にはほぼ逆比例するが、 \bar{p}_0 , C/R には無関係となる。ただし $\bar{X}_0, \bar{Y}_0=0$ としている。また普通の油圧用ピストンポンプ、同モータに対応する \bar{m}, \bar{I} を用いた数値計算結果では、慣性項の影響はほとんどない。このことから $a\neq 0$ に対しても、式(25), (26)を導くさいの慣性項の取扱いは妥当であるといえる。

図8は \bar{p}_0 の影響を示す数値例であり、 \bar{X} などの振幅は \bar{W}_0 に比例する。 $\bar{\phi}_Y$ は \bar{p}_0 に無関係となる。図9は、 \bar{a} の \bar{X} に対する影響を示す数値例であって、 \bar{Y} などに対する影響もほぼ同様である。流体膜の厚さの最小値 \bar{h}_{min} は、式(2)を \bar{X} などで表示し、その最小値をとることによって

$$\bar{h}_{min} = 1 - \left[\left(\bar{X} \pm \frac{L}{2R} \bar{\phi}_Y \right)^2 + \left(\bar{Y} \pm \frac{L}{2R} \bar{\phi}_X \right)^2 \right]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (27)$$

で与えられる。ただし複号は同順であり、 $\bar{h}_{min}=0$

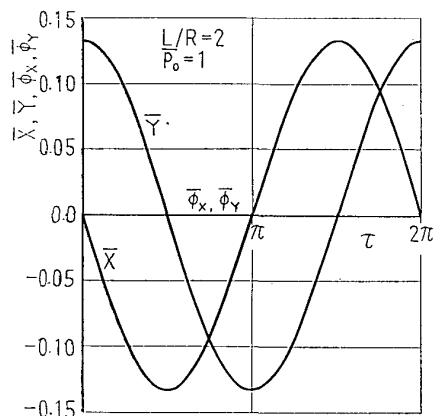


図7 ピストン変位($\bar{a}=0$ の場合)

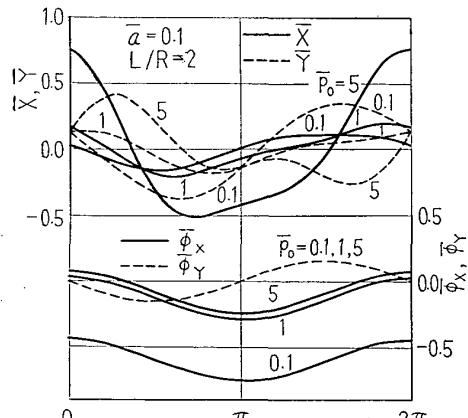


図8 ピストン変位(\bar{p}_0 の影響)

はピストンがシリンダ壁に接触していることを示す。図9において、 $\bar{a}=0.2$ の場合 \bar{h}_{min} の最小値は約0.12であり、 $\bar{a}=0.3$ では $\bar{h}_{min}<0$ となる ($\bar{a}=0.3$ の曲線は参考値である)。図10は、 L/R の \bar{X} に対する影響を示した数値例である。図に示していないが、 $L/R=1$ ではピストンはシリンダ壁に接触してしまう。この図から L/R として、ある程度の大きさが必要であることがわかる。

以上の結果から、ピストンの変位が有限である場合に、ピストンのシリンダ壁への接触を防止するために、ピストンに作用する押し付け力を小さくするほか、 \bar{a} を0に近づけ、 L/R をある程度の大きさ(例えば5程度)に選ぶことが有効であることがわかる。

5. 結語

ピストンとシリンダ壁とが、共に幾何学的な円筒であるとして、ピストンの中心軸方向速度とこの軸まわりの回転速度を与えた場合の、ピストンの運動を理論的に解析した。その結果として

- (1) ピストンの運動は、一般に不安定である。
- (2) ピストン変位を有限にするためには、ピストン中心軸まわりの回転運動がなく、また時間に比例するピストン変位を生じるような力(モーメント)が作用しないことを必要とする(ただし摩擦を無視した場合)。
- (3) スプール弁の流体固着現象は、スプール(ピストン)の運動の不安定性が根本の原因である。
- (4) ピストン変位が有限である場合に、ピストン

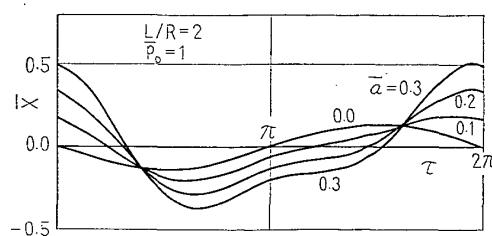


図9 ピストン変位(\bar{a} の影響)

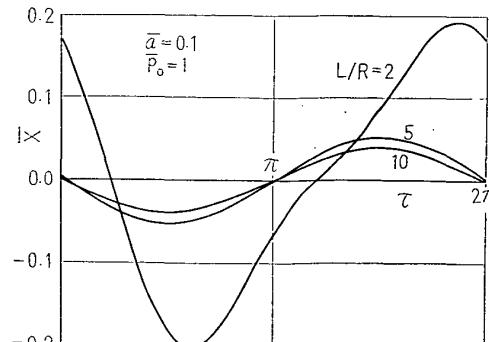


図10 ピストン変位(L/R の影響)

に作用する横方向押し付け力によるピストンのシリンドラ壁への接触を防ぐためには、ピストンの長さをその半径の数倍とし、ピストン支点をその中心にとることなどが有効である。

などを明らかにした。

文 献

- (1) Shute, N.A. and Turnbull, D.E., *Hydr. Pneumat. Pwr. & Contr.*, 9 (1963), 192; *BHRA Rep.*, RR 744 (1962).

- (2) Dransfield, P., ほか2名, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Pt.1, 182-27 (1967-68), 595.
 (3) Dransfield, P., *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Pt. 1, 182-27 (1967-68), 603.
 (4) Raimondi, A.A. and Boyd, J., *Trans. ASME, Ser. E*, 31-3 (1964-9), 390.
 (5) Boyd, J., 文献(4) の 397 ページ.
 (6) Sassenfeld, H. und Walther, A., *VDI-Forsch.-h.*, 441 (1954).
 (7) Ausman, J.S., *Trans. ASME, Ser. D*, 82-2 (1960-6), 335.
 (8) Galletti-Manacorda, L. and Capriz, G., *Trans. ASME, Ser. D*, 87-4 (1965-12), 847.

討 論

[質問] 近江宗一(大阪大学工学部)

(1) 図5において $\bar{P}_a/\bar{\alpha}$ の値と共に $-\bar{P}_a/\bar{\alpha}$ の値として破線で示されている曲線があるが、これはどのような意味をもつものか。

(2) ピストンのシリンドラ壁への接触を防止する方策として、 $\bar{\alpha}$ の値を0に近づけ、 L/R の値をある程度の大きさにすることはうなづけるが、押し付け力 \bar{W}_0 を小さくすることは具体的にどのようにして実現させるか。

なお、 \bar{X} などの振幅が \bar{W}_0 に比例するとは、どのようにして説明されるか。

また、図8などを参照すれば、 $\bar{p}_0=5$ の場合は具合悪く、 \bar{p}_0 の値もある限度以下にすることが必要と考えられるがいかがか。

[回答] (1) 図4, 5に示す数値例では $\bar{w}_0+3 \times (\bar{p}_b-\bar{p}_a)/(L/R)$ の正負に応じ $\bar{P}_a/\bar{\alpha}$ は正あるいは負の値をとる。図5の点線は $\bar{P}_a/\bar{\alpha}$ の値が負となる

ことを示している。

(2) 線形連立微分方程式(22), (23)において、数値例のように $\bar{F}=\bar{T}=0$ を仮定すると、右辺はすべて \bar{W}_0 に比例することになり、したがって \bar{X} などの振幅は \bar{W}_0 に比例することになる。さらに $\bar{\alpha}=\bar{\omega}=0$ とすると、式(25)より $\bar{\phi}_x=\bar{\phi}_y=0$ となり式(22)には \bar{p}_0 (すなわち $\bar{p}_b-\bar{p}_a$) が含まれないことになる。このため本文には \bar{p}_0 についての条件を記していない。 $\bar{\alpha}\neq 0$ である図8では、ご指摘のように \bar{p}_0 はピストン変位に関係している。

油圧用ピストンポンプなどでは、機構上 $\bar{W}(\bar{F}, \bar{T})$ も) は $\bar{p}_b-\bar{p}_a$ に比例することになるから、高圧の場合、ピストンのシリンドラ壁への接触は生じやすくなる。この場合、 \bar{W} (あるいは \bar{W}_0) を小さくする方法として、 $\bar{p}_b-\bar{p}_a$ を小さくするほかに、ピストンと連接棒とのなす角度を小さくすることが考えられる。