Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.

Von

E. ZERMELO in Göttingen.

Obwohl ich meinen im Jahre 1904 veröffentlichten „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann"*) gegenüber den verschiedenen im § 2 ausführlich zu besprechenden Einwendungen noch heute vollkommen aufrecht erhalte, dürfte doch der hier folgende neue Beweis desselben Theorems nicht ohne Interesse sein, da er einerseits keine speziellen Lehrsätze der Mengentheorie voraussetzt, andererseits aber den rein formalen Charakter der Wohlordnung, die mit räumlich-zeitlicher Anordnung gar nichts zu tun hat, deutlicher als der erste Beweis hervortreten läßt.

§ 1.

Der neue Beweis.

Die Voraussetzungen und Schlußformen, deren ich mich bei dem Beweise des nachstehenden Theorems bediene, lassen sich auf die folgenden Postulate zurückführen.

I. Alle diejenigen Elemente einer Menge M, denen eine für jedes einzelne Element wohldefinierte Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt, bilden die Elemente einer zweiten Menge $M_{\mathfrak{E}}$, einer „Untermenge" von M.

Jeder Untermenge M_1 von M entspricht somit eine „komplementäre Untermenge" $M - M_1$, welche alle in M_1 nicht vorkommenden Elemente von M umfaßt und sich für $M_1 = M$ auf die (leere) „Nullmenge" reduziert.

II. Alle Untermengen einer Menge M, d. h. alle diejenigen Mengen M_1, deren Elemente gleichzeitig Elemente von M sind, bilden die Elemente einer durch M bestimmten Menge $\mathfrak{U}(M)$.

Aus dem Postulat I ergibt sich leicht der Satz

III. Alle diejenigen Elemente, welche den sämtlichen Mengen $A, B, C, \cdots$ (den Elementen einer höheren Menge T) gemeinsam sind, bilden die Elemente einer Menge $Q = \mathfrak{D}(T)$, die als der „Durchschnitt"

*) Math. Annalen, Bd. 59, p. 514.

oder als der „gemeinsame Bestandteil" der Mengen $A, B, C, \cdots$ bezeichnet werden soll.

Theorem. *Ist durch irgend ein Gesetz jeder nicht verschwindenden Untermenge einer Menge M eines ihrer Elemente als „ausgezeichnetes Element" zugeordnet, so besitzt die Menge $\mathfrak{U}(M)$ aller Untermengen von M eine und nur eine Untermenge M von der Beschaffenheit, daß jeder beliebigen Untermenge P von M immer ein und nur ein Element P_0 von M entspricht, welches P als Untermenge und ein Element von P als ausgezeichnetes Element enthält. Die Menge M wird durch M wohlgeordnet.*

Beweis. Ist A irgend eine nicht verschwindende Untermenge von M, also Element von $\mathfrak{U}(M)$ und $a = \varphi(A)$ ihr ausgezeichnetes Element, so sei $A' = A - \{a\}$ diejenige Teilmenge von A, welche durch Unterdrückung des ausgezeichneten Elementes entsteht. Nun besitzt die Menge $\mathfrak{U}(M)$ aller Untermengen von M folgende drei Eigenschaften:

1) sie enthält das Element M,

2) sie enthält mit jedem ihrer Elemente A auch das zugehörige A',

3) sie enthält mit jeder ihrer Untermengen $\mathsf{A} = \{A, B, C, \cdots\}$ auch den zugehörigen Durchschnitt $Q = \mathfrak{D}(\mathsf{A})$ als Element.

Wird jetzt eine solche Untermenge Θ von $\mathfrak{U}(M)$, welcher diese drei Eigenschaften ebenfalls zukommen, als eine „Θ-*Kette*" bezeichnet, so ergibt sich unmittelbar, daß der Durchschnitt mehrerer Θ-Ketten immer selbst eine Θ-Kette darstellt, und der Durchschnitt M aller existierenden Θ-Ketten, welche ja gemäß I und II die Elemente einer wohldefinierten Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(M)$ bilden, ist somit die kleinste mögliche Θ-Kette; so daß keine echte Teilmenge von M eine Θ-Kette mehr sein kann.

Es sei nun A ein solches Element von M, daß in bezug auf A alle übrigen Elemente X von M in zwei Klassen zerfallen: 1) in Elemente U_A, welche Teilmengen von A sind, und 2) Elemente V_A, welche, wie z. B. M selbst, die Menge A als Teil umfassen. Dann ist, wie wir zeigen wollen, jedes U_A immer von der Beschaffenheit W_A, nämlich eine Untermenge von $A' = A - \{\varphi(A)\}$. In der Tat ist jedes V_A', da es kein U_A sein kann und doch Element von M sein muß, entweder A selbst oder ein V_A, und jeder Durchschnitt mehrerer V_A wieder ein V_A oder A. Andererseits ist A' sowie jedes W_A' wieder ein W_A, und ebenso jeder Durchschnitt mehrerer W_A sowie der Durchschnitt einiger W_A und einiger V_A oder A wieder ein W_A. Somit bilden die W_A mit den V_A und A zusammen schon eine Θ-Kette, sie erschöpfen also die kleinste Θ-Kette M, und jedes U_A ist wirklich ein W_A, d. h. Untermenge von A'. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß auch A' dieselbe Eigenschaft hat wie A, d. h. daß alle anderen Elemente von M entweder Teile von A' sind oder A' als Teil enthalten. Ist endlich Q der Durchschnitt mehrerer $A, B, C, \cdots$ von der soeben für A vorausgesetzten Beschaffenheit und X irgend ein anderes Element von M, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder enthält X eine der Mengen $A, B, C, \cdots$ und damit auch Q als Teil, oder X ist in allen A, B, $C, \cdots$ und damit auch in Q als Untermenge enthalten, d. h. auch Q besitzt die genannte Eigenschaft von A. Da endlich M sämtliche Elemente von M als Untermengen umschließt und daher selbst ein A darstellt, so bilden die wie A beschaffenen Elemente von M wieder eine Θ-Kette, nämlich M selbst, und für zwei beliebige Elemente A und B von M gilt die Alternative, daß entweder B Untermenge von A' oder A Untermenge von B' sein muß.

Jetzt sei P eine beliebige Untermenge von M, und P_0 der Durchschnitt aller solchen Elemente von M, welche P als Untermenge enthalten, und zu denen jedenfalls das Element M gehört. Dann ist auch P_0 Element von M, und das ausgezeichnete Element p_0 von P_0 muß ein Element von P sein, weil sonst auch $P_0' = P_0 - \{p_0\}$ alle Elemente von P enthielte und doch nur ein Teil von P_0 wäre. Jedes andere, P als Untermenge enthaltende Element P_1 von M muß dann P_0 als Teil umfassen, d. h. P_0 ist nach dem soeben Bewiesenen eine Untermenge von P_1', und das ausgezeichnete Element p_1 von P_1 kann, da es in P_1' und somit auch in P_0 nicht vorkommt, kein Element von P sein. Es gibt also in der Tat nur ein einziges Element P_0 von M, welches P als Untermenge und ein Element von P als ausgezeichnetes Element enthält.

Wählt man hier für P eine Menge der Form $\{a\}$, wo a irgend ein Element von M ist, so ergibt sich im besonderen, daß jedem Elemente a von M ein einziges Element A von M entspricht, in welchem a ausgezeichnetes Element ist, und welches mit $\mathfrak{R}(a)$ bezeichnet werden möge. Sind a, b irgend zwei verschiedene Elemente von M, so ist entweder $\mathfrak{R}(a)$ oder $\mathfrak{R}(b)$ das der Menge $P = \{a, b\}$ entsprechende Element P_0 von M, d. h. entweder enthält $\mathfrak{R}(a)$ das Element b oder $\mathfrak{R}(b)$ das Element a, aber niemals tritt beides gleichzeitig ein. Sind endlich a, b, c irgend drei Elemente von M, und ist etwa b Element von $\mathfrak{R}(a)$ und c Element von $\mathfrak{R}(b)$, so kann nur $\mathfrak{R}(a)$ das der Menge $P = \{a, b, c\}$ entsprechende Element P_0 sein, d. h. es ist auch c Element von $\mathfrak{R}(a)$. Schreibt man also $a \prec b$ für den Fall, wo b Element von $\mathfrak{R}(a)$ und $a \neq b$ ist, und sagt dann, das Element a „gehe dem Element b voran", so ergibt sich die Trichotomie:

$$a \prec b, \quad a = b, \quad b \prec a$$

für irgend zwei Elemente a, b, und aus

$$a \prec b \quad \text{und} \quad b \prec c$$

folgt immer $a \prec c$.

Die Menge M wird also vermittels der Menge M „einfach geordnet" und zwar im Cantorschen Sinne „wohlgeordnet"; denn jeder Untermenge P von M entspricht ein „erstes Element", nämlich das ausgezeichnete

Element p_0 von $P_0 = \mathfrak{R}(p_0)$, welches allen übrigen Elementen p von P „vorangeht", weil alle diese p Elemente von P_0 sind.

Ist umgekehrt die Menge M auf irgend eine Weise wohlgeordnet, so entspricht jedem Elemente a von M eine bestimmte Untermenge $\mathfrak{R}(a)$ von M, welche außer a alle „auf a folgenden" Elemente enthält und als der zu a gehörende „Rest" bezeichnet werden möge. Unterdrückt man in einem solchen Reste $\mathfrak{R}(a)$ das „erste Element" a, so verbleibt der „Rest" des „nächstfolgenden" Elementes a'. Ebenso ist der gemeinsame Bestandteil oder „Durchschnitt" mehrerer Reste immer wieder ein Rest, und schließlich ist die ganze Menge M der Rest $\mathfrak{R}(e)$ ihres ersten Elementes. Somit stellt die Gesamtheit aller Reste in dem oben angegebenen Sinne eine Θ-Kette dar, in welcher das erste Element jedes Restes als „ausgezeichnetes Element" figuriert. Besäße nun $\mathfrak{U}(M)$ außer M eine zweite Untermenge M_1 von der im Theorem geforderten Beschaffenheit, so bestimmte auch M_1 eine Wohlordnung von M mit denselben ausgezeichneten Elementen und müßte daher als Θ-Kette den Durchschnitt M aller Θ-Ketten als Bestandteil enthalten. Bedeutet dann z_0 das ausgezeichnete Element eines Elementes Z von $\mathsf{M}_1 - \mathsf{M}$, so wäre z_0 ausgezeichnetes Element in zwei Elementen von M_1, außer in Z nämlich noch in dem durch M bestimmten $\mathfrak{R}(z_0)$, und dies widerspräche der vorausgesetzten Beschaffenheit von M_1. In Wirklichkeit ist also die Wohlordnung M durch die Wahl der ausgezeichneten Elemente eindeutig bestimmt, und der behauptete Satz ist in allen seinen Teilen bewiesen.

Um nun unser Theorem auf beliebige Mengen anzuwenden, bedürfen wir nur noch der Voraussetzung, daß *die gleichzeitige Auswahl der ausgezeichneten Elemente für eine beliebige Menge von Mengen prinzipiell immer möglich ist*, oder präziser, daß immer dieselben Folgerungen gelten, als ob diese Auswahl möglich wäre. In dieser Formulierung erscheint das zugrunde liegende Prinzip freilich immer noch etwas subjektiv gefärbt und Mißdeutungen ausgesetzt. Da man aber, wie ich an anderer Stelle ausführlicher darlegen werde, vermittels der elementaren und unentbehrlichen mengentheoretischen Prinzipien eine beliebige Menge T' von Mengen $A', B', C', \cdots$ immer durch eine Menge T unter sich elementenfremder Mengen $A, B, C, \cdots$ ersetzen kann, die den Mengen $A', B', C', \cdots$ bezüglich äquivalent sind, so läßt sich das allgemeine „Prinzip der Auswahl" auf das folgende Axiom zurückführen, dessen rein objektiver Charakter unmittelbar einleuchtet.

IV. Axiom. *Eine Menge S, welche in eine Menge getrennter Teile $A, B, C, \cdots$ zerfällt, deren jeder mindestens ein Element enthält, besitzt mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem der betrachteten Teile $A, B, C, \cdots$ genau ein Element gemein hat.*

Unter Anwendung dieses Axioms ergibt sich somit wie in meiner Note von 1904 der allgemeine Satz, *daß jede Menge einer Wohlordnung fähig ist.*

Die unserem neuen Beweise zugrunde liegende Definition der Wohlordnung, wie sie bereits bei der Formulierung des „Theorems" in Erscheinung trat, hat den Vorzug, ausschließlich auf den Elementarbegriffen der Mengenlehre zu beruhen, während bei der üblichen Darstellung, wie die Erfahrung lehrt, Unkundige nur allzu geneigt sind, hinter der unvermittelt auftretenden Cantorschen Beziehung $a \prec b$ irgend einen mystischen Inhalt zu suchen. Unsere Definition möge hier nochmals ausdrücklich formuliert werden, wie folgt:

Definition. *Eine Menge M heißt „wohlgeordnet", wenn jedem ihrer Elemente a eine Untermenge $\mathfrak{R}(a)$ von M als „Rest" eindeutig entspricht, und wenn jede nicht verschwindende Untermenge P von M ein und nur ein „erstes Element" d. h. ein solches Element p_0 enthält, dessen Rest $\mathfrak{R}(p_0)$ die Menge P als Untermenge umfaßt.*

§ 2.

Diskussion der Einwände gegen den früheren Beweis.

Seit 1904 sind gegen meinen damaligen „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann", eine Reihe von Einwendungen gemacht und Kritiken veröffentlicht worden, die bei dieser Gelegenheit einmal im Zusammenhange zur Sprache kommen mögen.

a. Einwände gegen das Auswahlprinzip.

An erster Stelle stehen hier diejenigen Einwände, welche sich gegen das oben formulierte „Auswahlpostulat" richten und somit meine beiden Beweise in gleicher Weise treffen. Ihnen kann ich insofern eine relative Berechtigung einräumen, als ich dieses Postulat, wie ich am Ende meiner Note ausdrücklich hervorhob*), eben nicht *beweisen* und daher niemand apodiktisch zu seiner Anerkennung zwingen kann. Indem also die Herren E. Borel**) und G. Peano***) in ihren Kritiken den Mangel eines Beweises konstatierten, haben sie sich lediglich auf meinen eigenen Standpunkt gestellt. Sie hätten mich sogar zu Dank verpflichtet, wenn sie

*) Math. Annalen, Bd. 59, p. 516. „Dieses logische Prinzip läßt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen —".

**) Math. Annalen, Bd. 60, p. 194; vergl. aber auch Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue „Cinq lettres sur la théorie des ensembles", Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 33, p. 261.

***) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 145 ff.

die von mir behauptete Unbeweisbarkeit, d. h. die logische Unabhängigkeit dieses Postulates von den übrigen, nun ihrerseits bewiesen und damit meine Überzeugung bestätigt hätten.

Nun ist *Unbeweisbarkeit* auch in der Mathematik bekanntlich keineswegs gleichbedeutend mit *Ungültigkeit*, da doch eben nicht alles bewiesen werden kann, sondern jeder Beweis wieder unbewiesene Prinzipien voraussetzt. Um also ein solches Grundprinzip zu verwerfen, hätte man seine Ungültigkeit in besonderen Fällen oder widersprechende Konsequenzen feststellen müssen; aber hierzu hat keiner meiner Gegner einen Versuch gemacht.

Auch dem „Formulaire"*) des Herrn Peano, welcher die gesamte Mathematik auf „Syllogismen" (im aristotelisch-scholastischen Sinne) zurückführen soll**), liegen eine ganze Anzahl unbeweisbarer Prinzipien zugrunde, und eines darunter, welches dem „Auswahlprinzip" für eine einzige Menge äquivalent ist und dann syllogistisch auf eine beliebige endliche Anzahl von Mengen ausgedehnt werden kann***). Aber das allgemeine Axiom, das ich mir nach dem Vorgange anderer Forscher in diesem neuen Falle auf beliebige Mengen anzuwenden erlaubte, findet sich eben nicht unter den Peanoschen Prinzipien, und Herr Peano versichert selbst, daß er es auch nicht aus ihnen herleiten könne. Er begnügt sich damit, dies festzustellen, und das Prinzip ist für ihn erledigt. Der Gedanke, daß möglicherweise sein Formulaire gerade in diesem Punkte unvollständig sein könnte, liegt doch nahe, und da es in der Mathematik keine unfehlbaren Autoritäten gibt, so haben wir auch mit dieser Möglichkeit zu rechnen und sie nicht ohne objektive Prüfung von der Hand zu weisen.

Zunächst, wie gelangt denn Herr Peano zu seinen eigenen Grundprinzipien und wie rechtfertigt er ihre Aufnahme in den Formulaire, da er sie doch gleichfalls nicht beweisen kann? Offenbar durch Analyse der historisch als gültig anerkannten Schlußweisen und durch den Hinweis auf die anschauliche Evidenz der Prinzipien und auf das wissenschaftliche Bedürfnis — alles Gesichtspunkte, die sich für das bestrittene Prinzip ebenso-

---

*) „Formulaire de Mathématiques publié par la Revue de Mathématiques" Tome II, Turin 1897.

**) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 147.

***) ibid. p. 145—147. Übrigens gelingt dieser Beweis nur durch „vollständige Induktion", ist also nur bindend, wenn man die endlichen Zahlen in Peanoscher Weise durch ihren Ordnungstypus definiert. Legt man dagegen die Dedekindsche Definition der endlichen Menge als einer solchen, welche keinem ihrer Teile äquivalent ist, zugrunde, so ist ein Beweis auch für endliche Mengen unmöglich, da die Zurückführung der beiden Definitionen aufeinander, wie wir unten (Beispiel 4) zeigen werden, wieder das Auswahlprinzip erfordert. In diesem Sinne ist also Poincarés Bemerkung (Revue de Métaphysique et de Morale 14, p. 313) gerechtfertigt.

gut geltend machen lassen. Daß dieses Axiom, ohne gerade schulmäßig formuliert zu sein, auf den verschiedensten mathematischen Gebieten, besonders aber in der Mengenlehre von R. Dedekind, G. Cantor, F. Bernstein, A. Schoenflies, J. König u. a. mit Erfolg sehr häufig angewendet worden ist, ist eine unbestreitbare Tatsache, welche durch die frühere gelegentliche Opposition einiger logischen Puristen nur bestätigt wird. Eine so weitgehende Anwendung eines Prinzips ist nur erklärlich durch seine *Evidenz*, welche mit Beweisbarkeit natürlich nicht verwechselt werden darf. Mag diese Evidenz auch bis zu einem gewissen Grade subjektiv sein, so ist sie doch jedenfalls eine notwendige Quelle mathematischer Prinzipien, wenn auch kein Gegenstand mathematischer Beweise, und die Behauptung Peanos*), daß sie mit Mathematik nichts zu tun habe, wird offenbaren Tatsachen nicht gerecht. Was sich aber objektiv entscheiden läßt, die Frage nach dem *wissenschaftlichen Bedürfnis,* möchte ich hier in der Weise der Beurteilung unterbreiten, daß ich eine Reihe von elementaren und grundlegenden Sätzen und Problemen vorlege, welche meines Erachtens ohne das Auswahlprinzip überhaupt nicht erledigt werden könnten.

1) Wenn eine Menge M in getrennte Teile $A, B, C, \cdots$ zerfällt, so ist die Menge dieser Teile einer Untermenge von M äquivalent, oder anders ausgedrückt: die Menge der Summanden ist immer von kleinerer oder der gleichen Mächtigkeit wie die Summe.

Zum Beweise muß man sich jedem dieser Teile eines seiner Elemente zugeordnet denken.**)

2) Die Summen äquivalenter Mengen sind wieder äquivalent, vorausgesetzt, daß alle Summanden unter sich elementenfremd sind, ein Satz, auf dem der ganze Kalkül mit Mächtigkeiten beruht.

---

*) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 147.

**) Daß hier ein besonderes Schlußprinzip zugrunde liegt, wurde anläßlich eines Bernsteinschen Beweises wohl zuerst von Herrn Beppo Levi ausgesprochen (Lomb. Ist. Rend. (2) 35, 1902, p. 863). Nach Herrn F. Bernstein (Math. Annalen Bd. 60, p. 193) soll allerdings in allen ähnlichen Fällen, z. B. auch in meinem Beweise, die „Hypothese" der möglichen Auswahl „entbehrlich" sein, wenn man den von ihm eingeführten Begriff der „vielwertigen Äquivalenz" benutzt. Zwei Mengen M, N sollen (Gött. Nachr. Math. Phys. 1904, Heft 6) „vielwertig äquivalent" heißen, wenn für sie statt einer einzigen eine ganze Menge A von ein-eindeutigen Abbildungen $\varphi, \chi, \psi, \cdots$ gegeben ist, „unter denen keine ausgezeichnet ist". Hier wird also ein reiner Beziehungsbegriff wie „ausgezeichnet" ohne ergänzende Bestimmung oder Erklärung wie ein absolutes Merkmal verwendet, und die versuchte Unterscheidung von der gewöhnlichen Äquivalenz ist logisch nicht durchführbar. In den betrachteten Beispielen handelt es sich aber auch gar nicht um die „Multiplizität", d. h. um die *Mächtigkeit* der Abbildungsmenge A, sondern lediglich um die Frage, ob *mindestens eine* solche Abbildung φ existiert, eine Frage, die hier durch keine Definition umgangen sondern nur durch ein Axiom entschieden werden kann.

Hier ist es erforderlich, ein System von Abbildungen zu betrachten, welche *gleichzeitig* je zwei äquivalente Summanden aufeinander beziehen; man hat also aus den sämtlichen möglichen Abbildungen, welche zu je zwei äquivalenten Summanden gehören, jedesmal eine einzige auszuwählen.

3) Das Produkt mehrerer Mächtigkeiten kann nur verschwinden, wenn ein Faktor verschwindet, d. h. die Cantorsche „Verbindungsmenge" mehrerer Mengen $A, B, C, \cdots$, deren jede mindestens ein Element enthält, muß gleichfalls mindestens ein Element enthalten. Da aber jedes solche Element eine Menge ist, welche mit jeder der Mengen $A, B, C, \cdots$ gerade ein Element gemein hat, so ist der Satz nur ein anderer Ausdruck des Auswahlpostulates für elementenfremde Mengen (IV. Axiom § 1 fin.).

4) Eine Menge, welche keinem ihrer Teile äquivalent ist, läßt sich immer so ordnen, daß jede Untermenge sowohl ein erstes, als auch ein letztes Element besitzt.

Diesen Satz, auf dem die Theorie der *endlichen* Mengen beruht, beweist man am einfachsten mittelst meines Wohlordnungstheorems. Herr R. Dedekind bewies den logisch gleichwertigen Satz, daß eine Menge, welche keinem Abschnitte seiner „Zahlenreihe" äquivalent ist, einen der ganzen Zahlenreihe äquivalenten Bestandteil enthalten muß*), durch simultane Abbildung eines Systems äquivalenter Mengenpaare, also wie hier in 2), gleichfalls mit Hilfe des Auswahlprinzipes.**) Weitere Beweise sind mir nicht bekannt.

5) Eine abzählbare Menge von endlichen oder abzählbaren Mengen besitzt immer eine abzählbare Summe.

Auf diesem Satz beruht die Theorie der abzählbaren Mengen und der „zweiten Zahlenklasse"; er läßt sich aber nur beweisen, indem man die sämtlichen betrachteten endlichen oder abzählbaren Mengen *gleichzeitig* nach dem Normaltypus ordnet.

6) Gibt es eine „Basis aller reellen Zahlen", d. h. ein System von reellen Zahlen, zwischen welchen keine linearen Relationen mit einer endlichen Anzahl ganzzahliger Koeffizienten bestehen, und aus welchen sich alle übrigen linear mit endlichvielen ganzzahligen Koeffizienten zusammensetzen lassen?

7) Gibt es unstetige Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,?$$

Diese beiden letzten Fragen sind von Herrn G. Hamel***) auf

*) „Was sind und was sollen die Zahlen?" Nr. 159.

**) Diese vielfach übersehene Tatsache wird auch von Herrn G. Hessenberg im Vorworte seiner „Grundbegriffe der Mengenlehre" (Göttingen 1906) ausdrücklich anerkannt.

***) Math. Annalen, Bd. 60, p. 459.

Grund der möglichen Wohlordnung des *Kontinuums* in bejahendem Sinne entschieden worden.

Die Cantorsche Theorie der Mächtigkeiten bedarf also jedenfalls unseres Postulates, ebenso die Dedekindsche Theorie der endlichen Mengen, welche die Grundlage der Arithmetik bildet. Die Tatsache, daß man in der Funktionentheorie seine Anwendung gewöhnlich umgehen kann, erklärt sich einfach durch den Umstand, daß man es dort in der Regel mit „abgeschlossenen“ Mengen zu tun hat, bei welchen die eindeutige Definition ausgezeichneter Elemente keine Schwierigkeit bietet. Wo dies nicht der Fall ist, also namentlich in der Theorie der durchweg unstetigen Funktionen, wird das Prinzip oft unentbehrlich, wie unser letztes Beispiel zeigt.

Solange nun die hier vorgelegten relativ einfachen Probleme den Hilfsmitteln Peanos unzugänglich bleiben, und solange andererseits das Auswahlprinzip nicht positiv widerlegt werden kann, wird man die Vertreter der produktiven Wissenschaft nicht hindern dürfen, sich dieser „Hypothese“, wie man es meinetwegen nennen möge, fernerhin zu bedienen und ihre Konsequenzen im weitesten Umfange zu entwickeln, zumal ja doch nur auf diesem Wege etwaige Widersprüche eines Standpunktes aufgedeckt werden könnten. Dabei genügt es, diejenigen Theoreme, welche das Axiom notwendig erfordern, von denen zu trennen, bei welchen es entbehrt werden kann, um auch die gesamte Peanosche Mathematik als einen besonderen Zweig, als eine gewissermaßen künstlich verstümmelte Wissenschaft mit zu umfassen. Fundamentale Tatsachen oder Probleme einfach aus der Wissenschaft zu weisen, weil sie sich mit gewissen vorgeschriebenen Prinzipien nicht erledigen lassen, wäre ebenso, als wollte man in der Geometrie den weiteren Ausbau der Parallelentheorie verbieten, weil das betreffende Axiom als unbeweisbar nachgewiesen ist. In der Tat müssen die Prinzipien aus der Wissenschaft, nicht die Wissenschaft aus ein für allemal feststehenden Prinzipien beurteilt werden. Die Geometrie hat existiert vor den Euklidischen „Elementen“, ebenso die Arithmetik und Mengenlehre vor dem Peanoschen „Formulaire“, und beide werden noch jeden solchen Versuch einer schulmäßigen Systematisierung unzweifelhaft überleben.

Freilich hätte Herr Peano noch ein einfaches Mittel, die in Frage stehenden Sätze wie noch viele andere aus seinen eigenen Prinzipien zu beweisen. Er brauchte nur von der neuerdings viel erörterten „Russellschen Antinomie“ Gebrauch zu machen, da sich aus widersprechenden Prämissen bekanntlich alles beweisen läßt. In der Tat schließen die Prinzipien des Formulaire, welche zwischen „Menge“ und „Klasse“ keinen Unterschied machen, diesen Widerspruch nicht aus. Dagegen sind, wie ich demnächst an anderer Stelle zeigen werde, die Vertreter der Mengenlehre als einer rein mathematischen Disziplin, welche nicht auf die Grundbegriffe der traditionellen Logik beschränkt ist, durchaus in der Lage, durch geeignete Spezialisierung ihrer Axiome alle bisher bekannten „Antinomieen“ zu vermeiden. Während also der Bereich der Peanoschen Prinzipien, wie wir eben zeigten, zu eng ist, um die Wissenschaft in ihrer vollen Schönheit zu entwickeln, ist er andererseits zu weit, um sie von inneren Widersprüchen frei zu halten; und solange die Antinomieen dieses Systems nicht beseitigt sind, wird man in ihm wohl kaum die endgültige Grundlegung der mathematischen Wissenschaft suchen dürfen.

b. Einwand der nicht-prädikativen Definition.

Den hier vertretenen Standpunkt einer in letzter Linie auf Intuition beruhenden produktiven Wissenschaft hat neuerdings auch Herr H. Poincaré der Peanoschen „Logistik“ gegenüber in einer Reihe von Aufsätzen*) geltend gemacht, in denen er auch dem Auswahlprinzip, das er für ein unbeweisbares, aber unentbehrliches Axiom ansieht, durchaus gerecht wird.**) Dabei ist er aber, weil seine Gegner sich vorzugsweise der Mengenlehre bedienten, im Angriff soweit gegangen, die ganze Cantorsche Theorie, diese ursprüngliche Schöpfung genialer Intuition und spezifisch mathematischen Denkens, mit der von ihm bekämpften Logistik zu identifizieren und ihr ohne Rücksicht auf ihre positiven Leistungen lediglich auf Grund der noch ungeklärten „Antinomieen“ jede Existenzberechtigung abzusprechen.***) Kam es ihm nur darauf an, in den Grundlagen der Arithmetik „synthetische Urteile a priori“ nachzuweisen, zu denen er zunächst das „Prinzip der vollständigen Induktion“ glaubte rechnen zu dürfen, so hätte es den mengentheoretischen Beweisen dieses Prinzips gegenüber genügt, den Grundsätzen, auf denen diese Beweise beruhen, einen synthetischen Charakter zuzuschreiben, und auch die Vertreter der Mengenlehre hätten dies gelten lassen können, da die Unterscheidung von „synthetisch“ und „analytisch“ dann eine rein philosophische wäre und die Mathematik als solche nicht berührte. Statt dessen hat er es unternommen, mathematische Beweise mit den Waffen der formalen Logik zu bekämpfen, und sich damit auf ein Feld begeben, auf dem seine logistischen Gegner ihm überlegen sind.

Um die Auffassung Poincarés zu verdeutlichen, ist es wohl am

*) „Les mathématiques et la logique“, Revue de Métaphysique et de Morale t. 13; t. 14, p. 17, p. 294, p. 866.

**) ibid. 14, p. 311—313: „C'est donc un jugement synthétique a priori sans lequel la théorie cardinale serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis.“

***) ibid. 14, p. 316: „Il n'y a pas d'infini actuel; les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction.“

einfachsten, ein Beispiel zu wählen, daß dem im § 1 dieses Artikels vorausgeschickten Beweise entnommen ist. Dort habe ich eine besondere Klasse von Mengen definiert, die ich als „Θ-Ketten" bezeichnete, und habe dann nachgewiesen, daß der gemeinsame Bestandteil M aller dieser Θ-Ketten selbst eine Θ-Kette darstellt. Dieses Verfahren ist derjenigen „Ketten"-Theorie nachgebildet, auf welche R. Dedekind*) seine Theorie der endlichen Zahlen gründet, und ist auch sonst in der Mengenlehre gebräuchlich. Nach Herrn Poincaré**) soll aber eine Definition nur dann „prädikativ" und logisch allein zulässig sein, wenn sie alle solchen Gegenstände *ausschließt*, welche von dem definierten Begriffe „abhängig" sind, d. h. durch ihn irgendwie bestimmt werden können. Demnach hätte in dem hier angeführten Beispiele die Menge M, welche selbst erst durch die Gesamtheit der Θ-Ketten bestimmt ist, von der Definition dieser Ketten ausgeschlossen werden müssen, und meine Definition, welche M selbst als Θ-Kette rechnet, wäre „nicht-prädikativ" und enthielte einen circulus vitiosus. In zwei ganz analogen Fällen, deren letzterer sich auf die „γ-Mengen" meines Beweises von 1904 bezieht, wird dies ausdrücklich als Kritik meines Beweisverfahrens ausgeführt.***)

Nun ist aber einerseits diese logische Form eines Beweises keineswegs auf die Mengenlehre beschränkt, sondern findet sich genau so in der Analysis überall, wo das Maximum oder Minimum einer vorher definierten „abgeschlossenen" Zahlenmenge Z zu weiteren Folgerungen benutzt wird. Dies geschieht z. B. in dem bekannten Cauchyschen Beweise für den „Fundamentalsatz der Algebra", ohne daß es bisher jemand eingefallen wäre, etwas Unlogisches darin zu erblicken. Andererseits enthält gerade die als „prädikativ" bezeichnete Form der Definition etwas Zirkelhaftes; denn ohne den Begriff schon zu haben, kann man noch gar nicht wissen, welche Gegenstände sich durch ihn einmal bestimmen lassen und deswegen auszuschließen wären. In Wahrheit muß natürlich die Frage, ob ein beliebig vorgelegter Gegenstand unter eine Definition fällt, unabhängig von dem erst zu definierenden Begriffe durch ein *objektives* Kriterium entscheidbar sein. Ist aber ein solches Kriterium einmal gegeben, wie dies in den meinen Beweisen entlehnten Beispielen tatsächlich überall der Fall ist, so hindert nichts, daß einige der Gegenstände, welche unter die Definition fallen, zu demselben Begriffe noch in einer besonderen Beziehung stehen und dadurch — als Minimum oder als gemeinsamer Bestandteil — vor den übrigen ausgezeichnet oder bestimmt werden können. Durch eine

*) „Was sind und was sollen die Zahlen?" § 4.

**) Rev. d. Mét. e. d. Mor. 14, p. 307.

***) ibid. p. 314 und 315.

solche „Bestimmung“ wird ein Gegenstand ja nicht erst geschaffen, sondern jeder Gegenstand kann auf sehr verschiedene Weisen bestimmt werden, und diese verschiedenen Bestimmungen liefern nicht identische, sondern nur „äquivalente“ Begriffe, d. h. solche von gleichem „Umfange“. In der Tat scheint, worauf besonders Herr G. Peano*) in diesem Zusammenhange hinweist, die Existenz äquivalenter Begriffe dasjenige zu sein, was Herr Poincaré in seiner Kritik übersehen hat. Eine Definition darf sich sehr wohl auf Begriffe stützen, welche dem zu definierenden äquivalent sind; ja in jeder Definition sind Definierendes und Definiertes äquivalente Begriffe, und die strenge Befolgung der Poincaréschen Forderung würde jede Definition und damit jede Wissenschaft unmöglich machen.

c. Einwände, gegründet auf die Menge W.

Die bisher erörterten Kritiken, welche sich gegen die Prinzipien und Beweismethoden der Mengenlehre überhaupt richten, haben naturgemäß bei denjenigen Mathematikern wenig Anklang gefunden, welche wie die Herren J. König, Ph. Jourdain und F. Bernstein auf diesem Gebiete selbst bereits produktiv tätig gewesen sind und sich dabei von der Unentbehrlichkeit der genannten Hilfsmittel überzeugen konnten. Dagegen scheint bei einigen derselben die neuerdings wieder so vielfach erörterte „Burali-Fortische Antinomie“, welche sich auf die „Menge W aller Cantorschen Ordnungszahlen“ bezieht, einen allzu weitgehenden Skeptizismus gegenüber der Theorie der Wohlordnung hinterlassen zu haben. Und doch hätte schon die elementare Form, welche Herr B. Russell**) den

*) Rivista di Matematica VIII, Nr. 5, p. 152. Es handelt sich hier um einen neuen Beweis des Schröder-Bernsteinschen Theorems über die Äquivalenz der Mengen, den ich im Januar 1906 Herrn Poincaré brieflich mitgeteilt hatte. Diesen Beweis hatte der letztere im Maihefte der Revue de Métaphysique et de Morale (14, p. 314—315) inhaltlich richtig wiedergegeben und zum Gegenstande einer Kritik gemacht, auf die sich die angeführte Stelle Peanos (zum Teil wörtlich zitierend) bezieht. Herr Peano knüpft aber, ohne diesen Tatbestand zu erwähnen, seine Ausführung an eine vorhergehende Reproduktion seines eigenen, mit dem meinigen wesentlich übereinstimmenden, nur in Begriffsschrift gefaßten Beweises, dessen erste Mitteilung (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XXI, adunanza 8 Apr. 1906) Herrn Poincaré bei der Abfassung seines Artikels offenbar noch nicht vorgelegen hatte. Warum vermeidet Herr Peano hier, wo er mit mir übereinstimmt, die Nennung meines Namens, um unmittelbar darauf seine Bekämpfung des Auswahlprinzipes so ausdrücklich an meine Adresse zu richten? Es dürfte doch einleuchten, daß nicht die mathematischen Prinzipien, welche Gemeingut sind, sondern lediglich die auf sie gegründeten Beweise Eigentum des einzelnen Mathematikers sein können. Übrigens hatte ich am Schluß meiner Note ausdrücklich bemerkt, daß ich die Heranziehung des Auswahlprinzipes zur Bildung einer „γ-Belegung“ einem Vorschlage des Herrn Erhard Schmidt (jetzt in Bonn) verdanke.

**) „The Principles of Mathematics“, vol. I (Cambridge 1903), p. 366—368. Indessen mengentheoretischen Antinomieen gegeben hat, sie überzeugen können, daß die Lösung dieser Schwierigkeiten nicht in der Preisgabe der Wohlordnung, sondern lediglich in einer geeigneten Einschränkung des Mengenbegriffes zu suchen ist. Im Hinblick auf solche Bedenken hatte ich bereits in meinem Beweise von 1904 nicht nur alle irgendwie zweifelhaften Begriffe, sondern sogar die Verwendung der „Ordnungszahlen" überhaupt vermieden und mich sichtlich auf solche Prinzipien und Hilfsmittel beschränkt, welche für sich allein bisher noch zu keinen „Antinomieen" Anlaß gegeben haben. Wenn nun trotzdem einige Kritiker diese ominöse „Menge W" gegen meinen Beweis ins Feld geführt haben, so mußten sie dieselbe erst künstlich hinein interpretieren, und alle aus dem widerspruchsvollen Charakter dieser „Menge" geschöpften Argumente wenden sich gegen ihre Urheber zurück. In meinem neuen Beweise bin ich nun vollends bis zuletzt sogar ohne das Hilfsmittel der Rangordnung ausgekommen und habe damit, wie ich hoffe, jede Möglichkeit zur Einführung von W definitiv abgeschnitten.

Diesem W-Standpunkte scheint Herr J. König wenigstens nicht fern zu stehen. Denn obwohl er sich noch in seinem Heidelberger Vortrage*) selbst auf das Auswahlprinzip stützte, die wesentlichste Voraussetzung meines Theorems also anerkennt, hat er auch in seinen späteren Publikationen**) die Frage nach der möglichen Wohlordnung des Kontinuums

hatte ich selbst diese Antinomie unabhängig von Russell gefunden und sie schon vor 1903 u. a. Herrn Prof. Hilbert mitgeteilt.

*) Bericht des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg, 1904, p. 144: Zum Kontinuum-Problem.

**) Math. Annalen Bd. 60, p. 177, Bd. 61, p. 156. Über die „Antinomie Richard", die Herr König in dem letzten Artikel hier heranzuziehen versucht, vergl. G. Peano, Riv. d. Mat. VIII, Nr. 5, p. 148—157, sowie namentlich G. Hessenberg, „Grundbegriffe der Mengenlehre" XXIII („Die Paradoxie der endlichen Bezeichnung"), wo der vorliegende Fehlschluß m. Er. treffend aufgedeckt wird. Der Begriff „endlich definierbar" ist kein absoluter sondern ein Relativbegriff und bezieht sich immer auf die gewählte „Sprache" oder „Bezeichnungsweise". Der Schluß, daß alle endlich definierbaren Gegenstände abzählbar sein müssen, gilt aber nur, wenn für alle ein und dasselbe Zeichensystem verwendet werden soll, und die Frage, ob ein einzelnes Individuum überhaupt einer endlichen Bezeichnung fähig ist oder nicht, ist an und für sich gegenstandslos, da man jedem Dinge nötigenfalls willkürlich eine beliebige Bezeichnung zuordnen kann. Übrigens hat die Wohlordnung des Kontinuums mit dieser Antinomie im Grunde nicht viel mehr zu tun wie jeder andere Satz, den man unter Benutzung eines Widerspruches gleich gut beweisen und widerlegen kann. In der Tat hat auch Herr F. Bernstein mit Hilfe der endlichen Definierbarkeit einmal beweisen wollen (Deutsche Math.-Vereinigung 1905, p. 447), daß das Kontinuum der zweiten Zahlenklasse, also einer wohlgeordneten Menge, äquivalent sein müsse; er ist sonach von demselben Begriffe ausgehend zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt wie Herr König. Die versprochene Ausführung dieses „Beweises" ist allerdings niemals erschienen.

ohne Rücksicht auf meine bereits erschienene Note als ein ungelöstes Problem behandelt, hat es aber bisher unterlassen, seinen Bedenken gegen irgend einen bestimmten Schritt meines Beweises öffentlichen Ausdruck zu geben.

Herr Ph. Jourdain*) behauptet zwar, den Satz von der Wohlordnung schon vor mir, und zwar einfacher und vollständiger, bewiesen zu haben, gibt ihm aber mit Rücksicht auf W eine Auslegung, nach welcher, wie er a. a. O. S. 469 ausdrücklich bemerkt, nicht einmal das Kontinuum ein Aleph zu sein brauchte. Nach ihm sollen nur „konsistente" Mengen, d. h. solche, welche keinen Bestandteil ähnlich W enthalten, Ordnungstypen und Kardinalzahlen besitzen, und gerade in dieser Zulassung „inkonsistenter" Mengen erblickt er die größere „Vollständigkeit" seines Resultates. Da nun aber „Ordnungstypen" und „Kardinalzahlen" in der Cantorschen Theorie nichts anderes sind als bequeme *Ausdrucksmittel,* um die Mengen in bezug auf Ähnlichkeit oder Äquivalenz ihrer Teile miteinander zu vergleichen, so kann ich der Aussage, einer wohlgeordneten Menge komme kein Ordnungstypus oder keine Kardinalzahl zu, keinen verständlichen Sinn abgewinnen, und dieser Versuch, unter Beibehaltung von W die Antinomie zu lösen, scheint mir nur auf ein Spiel mit Worten hinauszukommen. Willkürlich kann man freilich, etwa von der zweiten oder dritten Zahlenklasse an, alle höheren Ordnungstypen ignorieren, nicht mehr als solche anerkennen und erhält dann ein W vom Typus ω bezw. Ω, welches unter den gemachten Annahmen, und soweit man von seinem „Ordnungstypus" absieht, gewiß widerspruchsfrei ist. Nur bleibt es so *völlig unbestimmt* und vor allem ist es eben nicht *dasjenige* W, um das es sich in der Antinomie handelt, nämlich eine Menge von der Beschaffenheit, daß jeder beliebigen wohlgeordneten Menge ein Element von W als Ordnungstypus entspricht. Ein ähnliches Bedenken scheint auch Herrn Jourdain nachträglich gekommen zu sein und ihn, wenn auch nicht zum Verzicht auf sein W, so doch zur Einführung einer *zweiten* gleichfalls wohlgeordneten Menge $\mathfrak{W}$ veranlaßt zu haben, welche als „absolut un-

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 465. In den von ihm zitierten früheren Arbeiten (Phil. Mag. 1904, p. 61, p. 294; 1905, p. 42), auf die er seine Prioritätsansprüche stützt, ist dagegen von einer möglichen Wohlordnung überhaupt nicht die Rede. Vielmehr beschränkt sich in dem ersten dieser Artikel sein „Beweis, daß jede Kardinalzahl ein Aleph ist", lediglich auf einen Versuch, die Möglichkeit von Mächtigkeiten größer als alle Alephs durch den Hinweis auf die „Burali-Fortische Antinomie" auszuschließen. Hier wird also *ohne Beweis* vorausgesetzt, daß eine Menge, deren Kardinalzahl selbst kein Aleph ist, einen der Gesamtheit aller Alephs ähnlichen Bestandteil enthalten müßte; und der bloße Hinweis auf die Methoden und Resultate von Cantor und Hardy, welche sich auf die beiden ersten Mächtigkeiten beziehen, kann diesen Beweis doch unmöglich ersetzen.

endlich" wie das weiter unten zu besprechende Bernsteinsche W keiner „Fortsetzung" mehr fähig sein soll.

Was nun endlich den *Beweis* betrifft, den Herr Jourdain in der genannten Annalen-Note*) dem meinigen als den „einfacheren" gegenübergestellt, so ist das von ihm vorgeschlagene Verfahren zur Wohlordnung einer beliebigen Menge M das folgende. Man nehme ein beliebiges Element als erstes, dann noch eines usw., nach einer beliebigen endlichen oder unendlichen Anzahl von Elementen ein beliebiges Element des Restes als nächstfolgendes und fahre so fort, bis die ganze Menge erschöpft ist. Diese Idee einer sukzessiven Konstruktion ist nicht neu, sie wurde mir vor längerer Zeit einmal von Herrn F. Bernstein mündlich mitgeteilt und geht wahrscheinlich auf Herrn G. Cantor zurück, der aber offenbar Bedenken trug, sie als *Beweis* anzuerkennen. Dieselbe Konstruktion empfiehlt auch Herr E. Borel**), um sie ohne weitere Begründung sofort zu verwerfen und damit, wie er meint, das Auswahlprinzip ad absurdum zu führen. Das ist ihm aber keineswegs gelungen; denn nicht die unendlich wiederholte *Auswahl* ist es, welche diesem „Beweise" entgegensteht, sondern einfach die Tatsache, daß er nicht zum Ziele führt. Läßt man nämlich das oben erwähnte Peanosche Prinzip, welches die Auswahl aus einer einzigen Menge gestattet, einmal gelten, so gibt es keine Grenze mehr für seine wiederholte Anwendung. Aber was *beweist* denn diese ganze Betrachtung? Offenbar nicht mehr, als daß jede wohlgeordnete echte Teilmenge M' von M durch Hinzufügung eines willkürlichen Elementes m' aus dem Reste noch erweitert werden kann; oder vielmehr dies ist die *Voraussetzung*, die — im strikten Gegensatz zur Bernstein-Schoenfliesschen Auffassung — dem ganzen Verfahren zugrunde liegt. Läßt sich nun beweisen, daß unter den wohlgeordneten Bestandteilen von M ein *größter* L *existiert*, so wie z. B. bei mir die Existenz einer größten γ-Menge L_γ *bewiesen* wird, so muß $L = M$ sein und M ist wohlgeordnet. Genau so will auch Herr Jourdain schließen; nur fehlt ihm dazu als wesentliche Prämisse der Nachweis für die Existenz von L. Diese setzt er vielmehr *unbewiesen* voraus, indem er annimmt, daß sein Verfahren, sofern es die Menge M nicht erschöpft, in einer wohlgeordneten Teilmenge ähnlich $\mathfrak{W}$ seinen Abschluß finden müßte. Die „Einfachheit" dieses Beweises geht also so weit, daß er sich auf einen einzigen Schluß reduziert; allerdings einen Fehlschluß.***)

*) l. c. p. 468. **) Math. Annalen Bd. 60, p. 194.

***) An derselben Unbestimmtheit wie das Cantor-Jordainsche Verfahren leidet Hardys angebliche und u. a. auch von Herrn Schoenflies (l. c. p. 183) ausdrücklich anerkannte „Konstruktion einer Teilmenge des Kontinuums von der zweiten Mächtigkeit" (Quart. Journ. of Math. 1903, p. 87). Er gibt eine Regel, aus einer

Während Herr Jourdain, wie wir sahen, der „inkonsistenten“ Menge W immerhin noch zweifelnd gegenübersteht, macht sie Herr F. Bernstein*) bereits zum Gegenstande einer dogmatischen Theorie. Da der widerspruchsvolle Charakter dieser „Menge aller Ordnungszahlen“ bekanntlich zutage tritt, wenn man ihr ein weiteres Element e hinzufügt, welches auf alle Elemente von W folgt, so glaubt Herr Bernstein alle Schwierigkeiten beseitigen zu können, indem er eine solche Anhängung eines neuen Elementes als der Definition von W widersprechend für unzulässig erklärt. Die Menge W soll nur die Ordnungstypen aller „fortsetzbaren“ wohlgeordneten Mengen oder aller „Abschnitte wohlgeordneter Mengen“ umfassen, W selbst aber „nicht fortsetzbar“ sein. Von diesem Standpunkte aus kritisiert er dann in meinem Beweise von 1904 den Übergang 7 V von der wohlgeordneten Menge L zu (L, m_1'), weil doch L möglicherweise der Menge W ähnlich sein könnte,**) und konstruiert mit Hilfe von W eine Menge Z, welche keiner Wohlordnung fähig sein soll.

Freilich ist dies verlorne Liebesmüh. Denn wenn die Menge W einmal existiert, so ist sie, wie Herr Bernstein ausdrücklich zugibt, auch wohlgeordnet mit einem bestimmten Ordnungstypus β, und jede andere wohlgeordnete Menge ist entweder W selbst ähnlich oder einem Abschnitte von W. Nach der ein für alle Mal feststehenden Cantorschen Definition für das Größer und Kleiner der Ordnungszahlen wäre somit β größer als jede andere Ordnungszahl α, und in der nach der Größe geordneten Menge (W, β) rangierte β *hinter* allen Elementen von W, d. h. W wäre tatsächlich „fortsetzbar“, entgegen seiner Definition und trotz aller Verbote. Gegen diese unerwünschte Folgerung weiß Herr Bernstein nichts weiter einzuwenden als***) „daß der Widerspruch nur daraus entsteht, daß β als

bereits konstruierten abzählbaren und wohlgeordneten Teilmenge A ein neues Element des Kontinuums abzuleiten, welches von allen vorhergehenden verschieden ist. Da aber diese Regel *nicht eindeutig* ist, sondern von der in weiten Grenzen willkürlichen Darstellung durch „Fundamentalreihen“ abhängt, so besitzt sein Verfahren keinen Vorzug vor dem sehr viel einfacheren Cantorschen „Diagonalverfahren“, welches nur eine Umordnung nach dem ω-Typus erfordert, und liefert eben so wenig wie dieses eine *bestimmte* Teilmenge von der zweiten Mächtigkeit; sondern bestenfalls einen neuen Beweis der Tatsache, daß die Mächtigkeit des Kontinuums $\geqq \aleph_1$ ist.

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 187.

**) Herr Bernstein verwirft damit nicht nur einen „Teil“, wie er sagt, sondern den gesamten Inhalt des Jourdainschen Beweises, obwohl sein eigenes W dem Jourdainschen $\mathfrak{W}$ genau entspricht. Bei Jourdain kann L, eben weil es fortsetzbar ist, mit $\mathfrak{W}$ nicht ähnlich sein, während Bernstein umgekehrt aus der Ähnlichkeit mit W auf die Nicht-Fortsetzbarkeit schließt. Auch hier werden also aus übereinstimmenden Annahmen entgegengesetzte Folgerungen gezogen.

***) a. a. O. p. 189. Nur habe ich e durch β ersetzt und einige Worte durch den Druck hervorgehoben.

auf alle Elemente von W folgend *angenommen* wird. Wenn nur die Vereinigungsmenge $(W; \beta)$ gebildet wird, ohne daß zwischen β und den Elementen von W eine *Ordnungsbeziehung festgesetzt* wird, so führt das zu keinem Widerspruch.“ Als ob es nur auf das *Wort* „Ordnungsbeziehung“ oder die *Schreibweise* $\alpha \prec \beta$ ankäme, und als ob durch Vermeidung eines *Wortes* eine objektive mathematische *Tatsache* beseitigt werden könnte! Die Mathematik wäre keine internationale Wissenschaft, wenn ihre Sätze nicht einen von der Sprache, in der wir sie ausdrücken, unabhängigen objektiven Inhalt besäßen. Bei der Prüfung eines Widerspruches handelt es sich ja gar nicht darum, ob eine bedenkliche Folgerung *wirklich vollzogen* und offiziell *anerkannt*, sondern lediglich, ob sie überhaupt formell *möglich* ist; und diese Möglichkeit allein deswegen zu verneinen, *weil* sie zu einem Widerspruche führt, wäre offenbar eine petitio principii oder ein circulus vitiosus. In der Tat kommt aber das eingeschlagene Verfahren zur Rechtfertigung von W darauf hinaus, den in seiner Definition liegenden Widerspruch nicht zu lösen, sondern zu *ignorieren*. Wenn eine Annahme A nach den allgemeinen Prinzipien zu zwei entgegengesetzten Folgerungen B und B' Anlaß gibt, so ist A als unhaltbar aufzugeben. In dem hier vorliegenden Falle soll es aber erlaubt sein, sich für die eine dieser Folgerungen B zu entscheiden und die andere B', weil sie dann mit B im Widerspruch stände, durch ein Ausnahmegesetz zu verbieten oder durch Namensänderung zu verschleiern. Da dieses Verfahren ersichtlich auf jede beliebige Hypothese A anwendbar wäre, so gäbe es überhaupt keinen Widerspruch; man könnte alles behaupten, aber nichts beweisen, da mit der Möglichkeit eines Widerspruches auch die eines Beweises beseitigt wäre, und eine mathematische Wissenschaft könnte nicht existieren.*)

Daß es tatsächlich immer möglich ist, einer *beliebigen* wohlgeordneten Menge M ein weiteres Element u als letztes hinzuzufügen, läßt sich übrigens aus den allgemeinen Prinzipien der Mengenlehre elementar *beweisen*, wenn man nur eine rein formale Definition der Wohlordnung, wie die hier am Schlusse des § 1 gegebene, zugrunde legt. Ist nämlich die Wohlordnung von M gegeben durch das System der „Reste“ $\mathfrak{R}(x)$, welche zu den Elementen x von M gehören, so genügt es, jedem dieser Reste (unabhängig von

---

*) Über die verschiedenen Versuche zur „Rettung von W“ vergl. auch G. Hessenberg „Grundbegriffe der Mengenlehre“ XXIV („Ultrafinite Paradoxieen“), wo es am Schlusse von § 98 heißt: „Die Menge W selbst ist übrigens gegen alle Ehrenrettungen im höchsten Grade undankbar. So bemühen sich im 60[ten] Bande der Mathematischen Annalen gleichzeitig Bernstein und Jourdain um ihre Widerspruchslosigkeit, wobei der erste auf Grund der Eigenschaften von W beweist, daß es Mengen gibt, die nicht wohlgeordnet werden können, während dem zweiten der Beweis des Gegenteils gelingt.“

seiner Anordnung) durch einfache Vereinigung mit der Menge $\{u\}$ das neue Element hinzuzufügen, um dann zusammen mit der Menge $\{u\}$ ein neues Restesystem zu erhalten, welches die verlangte Wohlordnung von $M_1 = M + \{u\}$ leistet. In der Tat ist dann sehr einfach einzusehen, daß jede Untermenge von M_1 wieder ein „erstes Element" in dem a. a. O. definierten Sinne besitzt und daß alle Elemente von M dem Elemente u „vorangehen". Mit diesem Beweise, den ich in meiner Note von 1904 nur wegen seiner trivialen Einfachheit als unnötig weggelassen hatte, ist nach dem Obigen gleichzeitig auch die Nichtexistenz von W gesichert, und alle aus W gezogenen Folgerungen werden hinfällig. Da nun andererseits „Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge" gewiß ein logisch zulässiger *Begriff* ist, so folgt weiter, was allerdings viel einfacher schon aus der „Russellschen Antinomie" hervorgeht, daß nicht jeder beliebige Begriffsumfang als Menge behandelt werden darf und daß somit die übliche Mengendefinition zu weit ist. Beschränkt man sich aber in der Mengenlehre auf gewisse feststehende Prinzipien wie die unserem Beweise zugrunde liegenden, einfache Mengen zu bilden und aus gegebenen neue abzuleiten, so lassen sich alle solchen Widersprüche vermeiden.

d. Einwand der speziellen Erzeugungsprinzipien und der Menge Z.

Ebenfalls gegen den letzten Schritt 7 V meines Beweises richtet sich vom Standpunkte desselben W-Glaubens aus die Kritik des Herrn A. Schoenflies*) und wird somit durch die voraufgehenden Erörterungen mit der Bernsteinschen gleichzeitig erledigt. Der betreffende Artikel enthält aber noch weitere Irrtümer und Mißverständnisse, die hier nicht unerwähnt bleiben können.

Zunächst unterscheidet Herr Schoenflies in der Theorie der wohlgeordneten Mengen „einen allgemeinen und einen speziellen Teil" und behauptet, daß *nur* die Theoreme des „allgemeinen Teiles" auf der bekannten Cantorschen *Definition* der Wohlordnung**), die übrigen aber auf „Erzeugungsprinzipien" beruhen. In Wahrheit müssen vielmehr *alle* Theoreme über einen Begriff aus seiner Definition zu beweisen sein, anderenfalls wären sie überhaupt nicht bewiesen. Stehen für einen Begriff zwei Definitionen zur Verfügung, so hat man sich bestimmt für die eine zu entscheiden oder die Äquivalenz der beiden nachzuweisen; jedes Schwanken zwischen zwei Definitionen oder die Ergänzung der einen durch die andere ist logisch völlig unzulässig. — Herr Schoenflies fährt dann fort:

*) Math. Annalen Bd. 60, p. 181.

**) G. Cantor, Math. Annalen Bd. 49, p. 207.

„Will man auf dieser allgemeinen Grundlage den fraglichen Satz beweisen, so hat man zu zeigen, daß eine unendliche Reihe von Mengen M_i, deren Mächtigkeiten abnehmen, nicht existieren kann; jede Reihe der Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2 > \mathfrak{m}_3 > \cdots$ müßte nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbrechen. Dies ist die notwendige *und hinreichende* Bedingung des Satzes." Notwendig aber *nicht* hinreichend, und eben deshalb zu einem Beweise des Theorems nicht zu verwenden. Das angeführte Kriterium bezieht sich lediglich auf die Wohlordnung der nach ihrer Größe geordneten *Mächtigkeiten* und gar nicht auf die Wohlordnung der *Mengen* selbst, um die es sich in meinem Theorem handelt. Sind alle Mächtigkeiten Alephs, so sind sie allerdings auch nach ihrer Größe wohlgeordnet, aber umgekehrt kann man *nicht* schließen, während der Vorschlag des Herrn Schoenflies dies augenscheinlich erfordert. Nicht einmal die *Vergleichbarkeit* beliebiger Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit läßt sich nach dieser Methode beweisen, sie liegt ihr vielmehr schon als Voraussetzung zugrunde. „Diesem Weg folgt der Zermelosche Beweis nicht." Allerdings nicht, weil ein Beweis so eben nicht geführt werden kann. „Er operiert mit Hilfsmitteln, die den speziellen Teil der Theorie der wohlgeordneten Mengen, nämlich ihre Erzeugung betreffen." Ganz im Gegenteil beruht mein Beweis ausschließlich auf der klassischen Cantorschen Definition und hat mit „Erzeugungsprinzipien" in dem angenommenen Sinne als selbständigen Beweisquellen nichts zu schaffen.

„Erzeugungsprinzipien kann man zunächst nur *axiomatisch postulieren* und hat dann ihre Berechtigung nachzuweisen. Auch die Einführung der Zahlen der zweiten Zahlenklasse und des Fortgangsprinzips von n auf ω war ursprünglich nur mittels eines solchen Axioms möglich. Der Nachweis seiner Zulässigkeit ist durch die von Herrn G. Cantor gegebene ausführliche Theorie dieser Zahlen und ihre ausnahmslose Gesetzmäßigkeit als geführt zu betrachten." Vielmehr definiert G. Cantor*) die Zahlen der zweiten Zahlenklasse als die *Ordnungstypen*, welche einer wohlgeordneten abzählbaren Menge zukommen können, und *beweist* alles übrige aus dieser Definition. Vorausgesetzt wird lediglich die Existenz abzählbarer Mengen oder der Typus ω, durch den sie definiert sind; weiter braucht es keines Axioms. Wäre aber die Existenz solcher Ordnungstypen irgendwie zweifelhaft, so könnte auch der schönste Formalismus nicht helfen. In analoger Weise wird jede höhere Zahlenklasse vermittels der vorhergehenden definiert, *ohne* daß es dazu „einer Neuschöpfung, resp. eines neuen Axioms und des Nachweises seiner Berechtigung bedarf". In meinem Beweise hat nun Herr Schoenflies gleichfalls ein neues „Postulat" entdeckt, „das die Erzeugung

*) Math. Annalen Bd. 49, p. 221.

wohlgeordneter Mengen betrifft. Es besagt nämlich, daß, wenn L irgend eine wohlgeordnete Menge ist, auch (L, m) eine solche ist". In Wahrheit gar kein „Postulat", sondern, wie wir oben sahen, ein *beweisbarer Satz.* „Diese Annahme und insbesondere der Gebrauch, den H. Z. von ihr macht, *schließt* so zu sagen *die sämtlichen möglichen Erzeugungsprinzipien in sich ein.* Sie *enthält aber noch mehr,* und gerade deshalb ist sie unzulässig." Auch hier verhält sich alles genau umgekehrt, als Herr Schoenflies behauptet. Bei G. Cantor dienen die „Erzeugungsprinzipien" *nicht* zur „Herstellung wohlgeordneter Mengen", sondern zur systematischen Auffindung sämtlicher Ordnungstypen einer gegebenen Zahlenklasse. Hier ist die Hinzufügung eines einzelnen Elementes an das Ende einer Menge von gegebenem Ordnungstypus ξ, also die Operation $\xi + 1$, das „erste Erzeugungsprinzip", welches innerhalb einer *jeden* Zahlenklasse neue Ordnungstypen liefert und die *Voraussetzung* aller übrigen Erzeugungsprinzipien bildet. Nur *reicht* es schon in der zweiten Zahlenklasse *nicht aus,* da es, von ω ausgehend, nicht einmal $\omega \cdot 2$ erzeugen könnte, und bedarf daher der Ergänzung durch das „zweite Erzeugungsprinzip", welches sich auf die „Fundamentalreihen" vom Typus ω bezieht. In den höheren Zahlenklassen bedürfte man *außer* diesen beiden noch *weiterer* Prinzipien. Niemals aber führt das „erste Erzeugungsprinzip" $\xi + 1$ aus irgend einer Zahlenklasse hinaus, da die *Mächtigkeit* einer transfiniten Menge, welche durch Definition das unterscheidende Merkmal der verschiedenen Zahlenklassen bildet, durch Hinzufügung eines einzelnen Elementes bekanntlich nicht geändert wird. Dementsprechend wird auch in meinem Beweise die Wohlordnung der Gesamtmenge natürlich *nicht* durch *diese* Operation „hergestellt", sondern, wie ich am Schlusse ausdrücklich bemerkte, durch die „*Verschmelzung* der verschiedenen möglichen γ-Mengen". Nur kann eben jede einzelne γ-Menge nach diesem Prinzip „fortgesetzt" werden, worauf ich dann den Schluß gründe, daß $L_\gamma = M$ sein muß. — Sehr seltsam ist weiter die Behauptung: „*Nirgends* bedarf man sonst einer Annahme, wie sie der Zermelosche Beweis benutzt" — wo doch die ganze Theorie der Ordnungszahlen und Erzeugungsprinzipien auf dieser Operation $\xi+1$ basiert.

Jetzt kommt aber der Hauptpunkt. „Der Begriff der *Gesamtheit* aller überhaupt möglichen Erzeugungsprinzipien wohlgeordneter Mengen ist meines Erachtens ein *wohldefinierter mengentheoretischer Begriff*, ebenso der Begriff der mit ihnen herstellbaren wohlgeordneten Mengen ... in demselben Sinn ... wie die Gesamtheit der ganzen Zahlen." Damit wird also das Dogma vom W verkündigt. Auf eine Rechtfertigung dieses widerspruchsvollen Begriffes, die Herr F. Bernstein doch wenigstens *versucht* hatte, läßt Herr Schoenflies sich gar nicht erst ein, sein „Erachten" soll uns hier genügen. Die nun folgende Unterscheidung zwischen „herstellbaren" und „nicht herstellbaren" wohlgeordneten Mengen ist nicht recht zu verstehen, zumal schon im nächsten Absatze eine „nicht herstellbare" Menge ohne weiteres auch als „logisch widerspruchsvoll" bezeichnet wird. „Jedenfalls gelangen wir zu einer ebenfalls *wohldefinierten Gesamtheit* wohlgeordneter Mengen. . . . Die dadurch bestimmte wohlgeordnete Menge sei Z. Ihrer Definition nach gibt sie die Grenze an, über die wir bei der wirklichen Herstellung einer wohlgeordneten Menge niemals hinauskommen." Offenbar soll dieses Z die Gesamtheit der möglichen *Ordnungstypen* solcher Mengen darstellen, aber diese von G. Cantor so sorgfältig getrennten Begriffe einer geordneten „Menge" und ihres „Ordnungstypus" werden in dem Schoenfliesschen Artikel überhaupt nicht unterschieden, eine Ungenauigkeit, die, wie wir sogleich sehen werden, auch nicht ohne verhängnisvolle Folgen geblieben ist.

„Nehmen wir zunächst einmal an, daß Z die zweite Zahlenklasse ist, d. h. also, daß alle wohlgeordneten Mengen, die wir . . . bilden können, niemals über die zweite Zahlenklasse hinausführen. . . . In diesem Falle stellt die Menge (Z, m) einen in sich widerspruchsvollen Begriff dar. . . ." Hiernach scheint also Herr Schoenflies den Ordnungstypus von (Z, m) für den *ersten* zu halten, welcher nicht mehr der zweiten Zahlenklasse angehört. Nun hat aber Cantor bewiesen, daß *die Gesamtheit der Zahlen der zweiten Zahlenklasse selbst nicht mehr abzählbar* ist, ihr Ordnungstypus also bereits zur nächstfolgenden Zahlenklasse gehört, während man mittelst des „ersten Erzeugungsprinzipes" $\xi + 1$ immer nur Zahlen derselben Klasse erhält. Sonach wäre also auf Grund der gemachten Annahme nicht erst (Z, m), sondern bereits *Z selbst ein widerspruchsvoller Begriff*. Und in der Tat ist das Schoenfliessche Z genau so wie das Bernsteinsche W, weil es eben seinen eigenen Ordnungstypus nicht als Element enthalten kann, wie wir oben sahen, unter allen Umständen mit inneren Widersprüchen behaftet.

„Auf vorstehender Grundlage" wird nun eine neue Methode zur Prüfung des fraglichen Satzes vorgeschlagen, welche, wie Herr Schoenflies sich nachzuweisen bemüht, gleichfalls zu *keinem Resultate* führt. Gewiß gibt es immer mancherlei Methoden, ein gegebenes Theorem *nicht* zu beweisen, und namentlich verschwommene und widerspruchsvolle Begriffe dürften zur Vermeidung von Beweisen besonders geeignet sein. Nur kann man wirkliche Beweise durch solche Hilfsmittel natürlich auch nicht widerlegen. Das vorgeschlagene Verfahren besteht aber darin, daß der wohlgeordnete Bestandteil L der betrachteten Menge M mit den oben charakterisierten Mengen W und Z verglichen wird. Dabei ergeben sich dann verschiedene Fälle, welche alle logisch gleich möglich sein sollen, während nur der eine von ihnen den in meinem Beweise gemachten Annahmen entspricht. Das kann natürlich nicht wundernehmen, nachdem Herr Schoenflies alle diejenigen Widersprüche, welche zur Ausschließung der übrigen Fälle führen, bereits in seine Voraussetzungen aufgenommen hat.

Wenn also Herr Schoenflies am Schlusse seines Artikels bemerkt: „Meines Erachtens sollte man mit Annahmen, die zu widerspruchsvollen Begriffen oder Resultaten führen, auch in der Mengenlehre ebenso verfahren, wie man es sonst zu tun pflegt", so kann man gewiß beistimmen. Dieses Verfahren besteht nämlich darin, daß man solche Annahmen ausschließt und aus widerspruchsvollen Begriffen keine Folgerungen ableitet. In meinem Beweise ist dieses Verfahren auch streng eingehalten, nicht aber in der Kritik des Herrn Schoenflies.

e. Zusammenfassung.

Die vorstehende Erörterung der gegen meinen Beweis von 1904 gerichteten Opposition läßt sich wohl am einfachsten in die folgenden Sätze zusammenfassen. Während Herr Poincaré mit seiner formal-logischen Kritik, welche die Existenz der gesamten Mathematik bedrohen würde, bisher noch auf keiner Seite Zustimmung gefunden hat, lassen sich alle übrigen Gegner in zwei Klassen einteilen. Die einen, welche gegen meine Deduktionen durchaus nichts einzuwenden haben, beanstanden die Anwendung eines unbeweisbaren allgemeinen Prinzipes, ohne zu bedenken, daß solche Axiome jeder mathematischen Theorie zugrunde liegen und daß gerade das von mir herangezogene für den Ausbau der Wissenschaft auch sonst nicht entbehrt werden kann. Die anderen Kritiker dagegen, welche sich durch eingehendere Beschäftigung mit der Mengenlehre von dieser Unentbehrlichkeit überzeugen konnten, gründen ihre Einwände auf die „Burali-Fortische Antinomie", die für meinen Standpunkt tatsächlich *ohne Bedeutung ist*, da die von mir benutzten Prinzipien die Existenz einer Menge *W ausschließen.*

Die verhältnismäßig große Anzahl der gegen meine kleine Note gerichteten Kritiken ist ein Zeugnis dafür, daß dem Satze von der möglichen Wohlordnung beliebiger Mengen offenbar starke Vorurteile im Wege stehen. Die Tatsache aber, daß *man in meinem* Beweise trotz eingehender Prüfung, für die ich allen Kritikern zu Dank verpflichtet bin, keine *mathematischen Irrtümer* hat nachweisen können, und daß die gegen meine *Prinzipien* erhobenen Einwände einander widersprechen und so sich gewissermaßen gegenseitig aufheben, läßt mich hoffen, daß sich alle diese Widerstände durch genügende Aufklärung mit der Zeit wohl werden überwinden lassen.

Chesières, den 14. Juli 1907.