Math. Ann. 227, 51—59 (1977)

Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren

Detlev Poguntke

Fakultät für Mathematik der Universität, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

Eine involutive (Banachsche) Algebra A heißt symmetrisch, wenn jedes Element der Form x^*x, $x \in A$, ein positives Spektrum hat. Für Banachsche Algebren ist diese Eigenschaft nach einem Satz von Shirali und Ford äquivalent zu der Tatsache, daß hermite'sche Elemente ein reelles Spektrum haben, vgl. [2]. Über die Bedeutung der Symmetrie, insbesondere für die Darstellungstheorie, sei hier nichts gesagt, vgl. dazu [12] und [13]. Dort findet man auch eine Zusammenstellung der vorhandenen Ergebnisse über die Symmetrie bzw. Nicht-Symmetrie von L^1-Algebren lokalkompakter Gruppen G. Einige davon seien hier kurz wiedergegeben. Für eine zusammenhängende nicht-kompakte halbeinfache Liesche Gruppe G ist $L^1(G)$ nicht symmetrisch, [6]. Aber $L^1(G)$ ist symmetrisch, falls G eine diskrete, endlicherzeugte, nilpotente Gruppe ist, [5], G eine Bewegungsgruppe, d. h. ein semidirektes Produkt einer kompakten Gruppe mit einem abelschen Normalteiler ist, [4], G eine $[FC]^-$-Gruppe ist, d.h. falls $\{yxy^{-1}; y \in G\}^-$ für jedes $x \in G$ kompakt ist, [1], G eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe der Stufe 2 ist, [10].

Weiter ist die Klasse $[S]$ der lokalkompakten Gruppen G mit symmetrischen Gruppen-Algebren stabil gegen endliche Erweiterungen und gegen zerfallende kompakte abelsche Erweiterungen, d. h. mit M liegt auch $K \ltimes M$ in $[S]$ für kompakte abelsche Gruppen K, [12]. In [13] hat Leptin gezeigt, daß gewisse semidirekte Produkte zusammenhängender abelscher Gruppen in $[S]$ liegen, insbesondere die „$ax+b$"-Gruppe. Diese Gruppen waren sämtlich vom Typ I, aber ich werde in einer folgenden Arbeit zeigen, daß auch die „kleinste" auflösbare, zusammenhängende Liesche Gruppe, welche nicht vom Typ I ist, nämlich die „Mautner-Gruppe", in $[S]$ liegt, wodurch die in [13] geäußerte Vermutung, daß alle zusammenhängenden auflösbaren Lieschen Gruppen in $[S]$ liegen, erhärtet wird. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es jedoch, den in der Überschrift angegebenen Satz zu beweisen, unten als Satz 2 formuliert. Zuvor beweisen wir noch ein Lemma und Satz 1. Das Lemma ist eine ziemlich einfache Verallgemeinerung von Satz 2 aus [12] und enthält ein auf die Anwendung im Beweis von Satz 1 zugeschnittenes Kriterium für Symmetrie; den Beweis in [12] kann man nahezu Wort für Wort übernehmen. Satz 1 enthält den entscheidenden Schritt auf dem Wege zum Beweis der Symmetrie nilpotenter Liescher Gruppen. Obwohl ich bislang im wesentlichen nur eine Anwendung von Satz 1 kenne, nämlich auf den nilpotenten Fall, habe ich die unten angegebene allgemeinere Formulierung von Satz 1 gewählt, da Aussicht besteht, unter Verwendung dieses Satzes zu zeigen, daß zusammenhängende auflösbare Liesche Gruppen vom Typ E in [S] liegen. Zum Beispiel kann man mit Satz 1 zeigen, daß eine Gruppe minimaler Dimension unter den nicht-symmetrischen, zusammenhängenden auflösbaren Lieschen Gruppen vom Typ E notwendigerweise ein eindimensionales Zentrum besitzt (natürlich nur, sofern es solche Gruppen überhaupt gibt).

Zunächst sei kurz an den Begriff der adjungierten Algebra erinnert, vgl. [7] und [8]. Dazu sei A eine involutive Banachsche Algebra, welche der Bedingung (L^*) aus [7] genügt, d.h. für alle $x\in A$ gelte

$$\|x\| = \sup_{\|y\|\leqq 1} \|xy\|$$

($=\|L_x\|$, wenn $L_x: A\to A$ durch $w\to xw$ definiert ist). Offenkundig ist (L^*) von selbst erfüllt, wenn es in A eine beschränkte approximierende Eins gibt, d.h. ein Netz (e_λ) mit $\|e_\lambda\|=1$ und $\lim_\lambda xe_\lambda = \lim_\lambda e_\lambda x = x$ für alle $x\in A$. Dann ist die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $T: A\to A$, für welche ein (eindeutig bestimmter) beschränkter linearer Operator $T^*: A\to A$ mit $(Tx)^*y = x^*T^*y$ für $x, y\in A$ existiert, in der Operator-Norm eine involutive (mit Involution $T\to T^*$) Banachsche Algebra; diese wird mit A^b bezeichnet. Weiter ist $x\to L_x$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von A auf ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in A^b; A läßt sich mithin mit einem Ideal in A^b identifizieren, und wir werden im folgenden diese Identifikation ohne weiteren Kommentar benützen. Es sei noch bemerkt, daß $L^1(G)^b$ für eine lokal-kompakte Gruppe G nichts anderes als die Maßalgebra von G ist.

Lemma. *Es sei B eine involutive Banachsche Algebra mit beschränkter approximierender Eins. Ferner sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von Projektoren (d.h. $q=q^*=q^2$ für $q\in\mathcal{Q}$) in B^b. Zu jedem $(p,q)\in\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}$ sei ein $v_{pq}\in B^b$ gegeben, und es gelte*

(i) $v_{pq}^* = v_{qp}$.

(ii) $v_{pq}q = v_{pq}$ *(und dann auch, wegen* (i), $v_{qp} = qv_{qp}$*).*

(iii) $p = v_{pq}v_{qp} = v_{qp}^* v_{qp}$ *für alle* $p, q\in\mathcal{Q}$.

(iv) *Zu einer endlichen Teilmenge $\mathcal{E}$ von $\mathcal{Q}$ und einem ausgezeichneten Element $q\in\mathcal{E}$ mögen stets $q_1,\dots,q_n\in\mathcal{Q}$ existieren mit $q_1=q$, $q_iq_j=\delta_{ij}q_i$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ und derart, daß $\mathcal{E}$ in dem von q_i und $v_{q_iq_j}$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ aufgespannten linearen Teilraum liegt.*

Weiter liege $\sum_{p,q\in\mathcal{Q}} pBq$ *dicht in* B.

Ist dann pBp symmetrisch für ein $p\in\mathcal{Q}$ (und mithin für alle), so ist B symmetrisch.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß für $p, q\in\mathcal{Q}$ die Beziehung $(pBqqBq)^- = pBq$ gilt. Die eine Inklusion ist trivial (pBq ist abgeschlossen!). Seien nun $x\in pBq$ und (e_α) eine approximierende Eins in B. Dann ist $xe_\alpha q\in pBqBq$ und $\lim_\alpha xe_\alpha q = x$.

Um die Symmetrie von B zu beweisen, verwenden wir die in (2) aus [12] gegebene Charakterisierung. Sei also L ein maximales modulares Linksideal in B.

Wir haben die Existenz einer nicht-trivialen stetigen hermite'schen positiv definiten Linearform f auf B mit $f(L)=0$ zu zeigen. Wegen der Dichtheit von $\sum_{p,q\in\mathcal{Q}} pBq$ gibt es $p,q\in\mathcal{Q}$ mit $pBq \not\subset L$. Dann ist aber auch $qBq \not\subset L$. Wenn nicht, so gälte $(pBq)(qBq)\subset L$ und mithin $L\supset(pBqqBq)^{-}=pBq$.

$L_0:=qBq\cap L$ ist ein echtes Linksideal in qBq. Weiter gilt $B=Bq+L$, und es gibt folglich eine Rechtseins e in Bq für L, also $eq=e$. Dann ist $qeq=qe$ eine Rechtseins für das Linksideal L_0 in qBq. L_0 ist also ein modulares Linksideal in der symmetrischen Algebra qBq, und es gibt mithin ein nicht-triviales, stetiges, hermite'sches, positiv definites Funktional f_0 auf qBq mit $f_0(L_0)=0$.

Für $x\in B$ setzen wir (e^*Be liegt in qBq!)

$$f(x)=f_0(e^*xe)$$

und behaupten, daß dieses f unser Problem löst.

Zunächst zeigen wir, daß $f_0=f|_{qBq}$; insbesondere ist dann $f\neq 0$. Für $x\in qBq$ ist $x-xe\in L\cap qBq=L_0$, mithin $f_0(x-xe)=0$ oder $f_0(x)=f_0(xe)$. Da f_0 hermite'sch ist, gilt weiter $f_0(x)=f_0(x^*)^{-}=f_0(x^*e)^{-}=f_0(e^*x)$, also $f_0(x)=f_0(xe)=f_0(e^*x)$ $=f_0(e^*xe)=f(x)$. Es gilt $f(L)=0$; denn ist $x\in L$, so auch xe (wegen $x\equiv xe \bmod L$), und letztlich $e^*xe\in L$, also in L_0. Daher ist $0=f_0(e^*xe)=f(x)$. Offenkundig ist f hermite'sch. Wir müssen nur noch die Positivität von f zeigen. Wegen der Stetigkeit von f genügt es zu beweisen, daß $f(x^*x)\geqq 0$ für $x\in \sum_{p,r\in\mathcal{Q}} pBr$. In der Summen-Darstellung dieses x treten nur endlich viele p's und r's auf. Wegen (iv) und (ii) gibt es $q_1,\ldots,q_n\in\mathcal{Q}$ mit $q_1=q, q_iq_j=\delta_{ij}q_i$ und $x\in \sum_{i,j=1} q_iBq_j$. Für $v_{q_iq_j}$ schreiben wir dann auch kurz v_{ij}. Es ist $x=\sum_{i,j=1} x_{ij}$ mit $x_{ij}\in q_iBq_j$. Wir müssen e^*x^*xe in passender Form darstellen. Nun ist $xe=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}e=\sum_{i=1}^{n} y_i$ mit $y_i:=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}e\in q_iBq=q_iBq_1$. Setzt man

$$z_i:=v_{1i}y_i\in v_{1i}q_iBq=v_{1i}Bq=qv_{1i}Bq\subseteq qBq \qquad (1\leqq i\leqq n),$$

so gilt

$$z_i^*z_i=y_i^*v_{1i}^*v_{1i}y_i=y_i^*q_iy_i=y_i^*y_i\ .$$

Für $i\neq j$ ist

$$y_j^*y_i\in(q_jBq)^*(q_iBq)=qBq_jq_iBq=(0)\ .$$

Daher ist

$$e^*x^*xe=(xe)^*(xe)=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)=\sum_{i,j=1} y_i^*y_j$$
$$=\sum_{i=1}^{n} y_i^*y_i=\sum_{i=1}^{n} z_i^*z_i\in qBq\ .$$

Da nun f eine Fortsetzung von f_0 ist und f_0 positiv ist, gilt folglich $f(e^*x^*xe) = f_0\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^* z_i\right) \geqq 0$.

Satz 1. *Seien G eine lokalkompakte abelsche Gruppe und A eine involutive symmetrische Banachsche Algebra mit beschränkter approximierender Eins. G wirke durch isometrische *-Isomorphismen auf A, $(a,x) \to a^x$ für $(a,x) \in A \times G$. Für jedes $a \in A$ sei $x \to a^x$ stetig. G wirkt dann auch auf A^b, und es sei eine abgeschlossene G-invariante, involutive, symmetrische Unteralgebra U des Zentrums von A^b gegeben. Für jedes $u \in U$ sei $x \to u^x$ stetig. Das Spektrum $\hat{U}$ von U sei gleich G, die Wirkung von G auf $\hat{U}$ sei die Linkstranslation. Die Gelfand-Darstellung $u \to \hat{u} \in C_\infty(G)$ sei injektiv. $S(G)$: $= \{\hat{u}; u \in U\}$ genüge den Bedingungen 1)–4) von p. 262 in [11]; insbesondere sei die Algebra $S_0(G)$ der in $S(G)$ gelegenen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $S(G)$ (für die von U induzierte Norm auf $S(G)$). Weiter habe U eine „approximierende Eins für A", d. h. es gebe ein Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in U mit $\lim_\lambda u_\lambda f = f$ für alle $f \in A$. Unter diesen Voraussetzungen ist auch die verallgemeinerte L^1-Algebra $B := L^1(G,A)$ symmetrisch.*

Beweis. Wir wollen das im Lemma formulierte Kriterium für Symmetrie verwenden. Mit A besitzt auch B eine approximierende Eins, vgl. [8]. Weiter haben wir die Menge $\mathcal{Q} \subseteq B^b$ anzugeben. Zu diesem Zweck bilden wir die verallgemeinerte L^1-Algebra $D := L^1(G,U) \cong L^1(G,S(G))$. D läßt sich kanonisch in B^b einbetten. Wichtig für den weiteren Beweis sind die beiden folgenden Eigenschaften von D:

(1) D ist eine einfache Banachsche Algebra.

(2) Die „reguläre Darstellung" π von D in $\mathcal{H} := L^2(G)$, gegeben durch $(\pi(f)\xi)(x) = \int_G f(x+y)(-y)\xi(-y)dy$, wobei $f(x+y)$ als Element von $S(G)$ angesehen wird, ist eine topologische irreduzible *-Darstellung von D (siehe [9] und [11]).

Ist v eine reellwertige Funktion in $S_0(G)$ mit $\|v\|_2 = \left(\int_G |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 1$, und bildet man dazu $q(x) := v^x v$, so liegt q in D, und $\pi(q)$ ist der Projektor auf den von v aufgespannten Teilraum von $\mathcal{H}$; es ist $\pi(q) = \langle -, v \rangle v$. $J := \{f \in D; \pi(f)$ ist von endlichem Rang$\}$ ist dann ein involutives, zweiseitiges, von Null verschiedenes und mithin wegen (1) dichtes Ideal in D. Studiert man die im Beweis von Théorème 2 in [3] wirklich verwendeten Voraussetzungen, so stellt man fest, daß die dortige Argumentation im vorliegenden Fall auch stichhaltig ist; d. h. bezeichnet man mit $\mathcal{H}'$ den von Elementen der Form $\pi(f)\xi$, $f \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$ aufgespannten Unterraum von $\mathcal{H}$, so gilt:

(3) $\mathcal{H}'$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

(4) $\mathcal{H}'$ ist invariant unter $\pi(D)$.

(5) $\mathcal{H}'$ ist der kleinste von Null verschiedene, unter $\pi(J)$ invariante Unterraum von $\mathcal{H}$.

(6) $\pi(J)$ besteht genau aus den beschränkten linearen Operatoren T endlichen Ranges auf $\mathcal{H}$ mit $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$ und $T^*(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}'$.

Es sei nun $\mathcal{Q}$ die Menge derjenigen $q \in D$, für die $\pi(q)$ ein Projektor vom Rang 1 ist. Da π wegen (1) injektiv ist, erkennt man an dem durch (6) vermittelten Bild von J

sofort, daß zu diesem $\mathcal{Q}$ ein Satz von Elementen $\{v_{pq}\}$ mit den Eigenschaften (i)–(iv) aus dem Lemma existiert. Weiter gilt $v_{pp}=p$ für alle $p\in\mathcal{Q}$, und J ist die lineare Hülle von $\mathcal{Q}$.

Wir wollen nun die Dichtheit von $\sum\limits_{p,q\in\mathcal{Q}} pBq$ beweisen.

Es ist $\sum\limits_{p\in\mathcal{Q}} pB=JB$ und mithin $\Big(\sum\limits_{p\in\mathcal{Q}} pB\Big)^{-}=(JB)^{-}=(DB)^{-}$. Ist nun $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in U für A und $(e_\mu)_{\mu\in M}$ eine approximierende Eins in der gewöhnlichen Gruppenalgebra $L^1(G)$, so kann man wie in [8] zeigen, daß $(e_\mu u_\lambda)_{(\mu,\lambda)\in M\times\Lambda}$ eine approximierende Eins in D für B ist, d.h. daß $\lim\limits_{\mu,\lambda} e_\mu u_\lambda f=f$ für alle $f\in B$ ist. Folglich ist

$$\Big[B=(DB)^{-}=(BD)^{-}=\Big(\sum_{q\in Q} Bq\Big)^{-}=\Big(\sum_{q\in Q} qB\Big)^{-}\Big]$$

und dann auch $\Big(\sum\limits_{p,q\in Q} pBq\Big)^{-}=B$. Mit Hilfe des Lemmas sind wir fertig, wenn wir nun noch ein $q\in\mathcal{Q}$ angeben können, für welches qBq symmetrisch ist. Da wir oben explizit solche q's konstruiert haben, genügt es zu zeigen:

(7) Sei $u=u^*\in U$, $v:=\hat{u}$ liege in $S_0(G)$, und es gelte $\|v\|_2=1$. Definiert man dann $q\in\mathcal{Q}\subset D$ durch $q(x)=u^x u$, so ist qBq symmetrisch.

Für das folgende seien u, v und q wie oben fest gewählt. Bevor wir (7) beweisen können, müssen wir einige Eigenschaften der Elemente in qBq zusammenstellen. Dafür benötigen wir zunächst:

(8) Ist $h\in A$ und $(x\to u^{-x}u^{-x}h)\in L^1(G,A)$, so gilt $h=\int\limits_G u^{-x}u^{-x}h\,dx$.

Zu (8): Da U eine approximierende Eins für A besitzt und $S_0(G)$ in $S(G)$ dicht liegt, genügt es zu zeigen, daß $wh=w\int\limits_G u^{-x}u^{-x}h\,dx$ für alle $w\in U$ mit $\hat{w}\in S_0(G)$ gilt. Für solche w ist obige Gleichung aber wegen $w=\int\limits_G wu^{-x}u^{-x}dx$ ($\|v\|_2=1$!) offenkundig erfüllt.

(9a) Sei $f\in qB\subseteq L^1(G,A)$. Dann gibt es eindeutig $h\in A$ mit $f(x)=u^x h$ für fast alle $x\in G$. Es ist $h=\int\limits_G u^{-x}f(-x)dx=\int\limits_G u^{-x}u^{-x}h\,dx$. Gilt umgekehrt für ein $h\in A$, daß $(x\to u^x h)\in B$, so liegt $(x\to u^x h)$ in qB.

Da $(qB)^*=Bq$, gibt es auch eine „duale Fassung“:

(9b) Sei $g\in Bq$. Dann gibt es eindeutig $k\in A$ mit $g(x)=uk^x$ für fast alle $x\in G$. Es ist $k=\int\limits_G u^{-x}g(x)^{-x}dx=\int\limits_G u^{-x}u^{-x}k\,dx$. Gilt umgekehrt für ein $k\in A$, daß $(x\to uk^x)\in B$, so liegt $(x\to uk^x)$ in Bq.

Zu (9a): Für fast alle $x\in G$ gilt

$$\begin{aligned} f(x)=(q*f)(x)&=\int_G q(x+y)^{-y}f(-y)dy=\int_G (u^{x+y}u)^{-y}f(-y)dy\\ &=\int_G u^x u^{-y}f(-y)dy=u^x\int_G u^{-y}f(-y)dy\,, \end{aligned}$$

da letzteres Integral wegen $\|u^{-y}f(-y)\| \leqq \|u^{-y}\| \, \|f(-y)\| = \|u\| \, \|f(-y)\|$ existiert. Aus (8) folgt zum einen die Eindeutigkeit von h und zum anderen, daß Elemente der Form $x \to u^x h$ in qB liegen, sofern sie nur in B liegen, also integrierbar sind.

(9b) beweist man ähnlich. Indem man ausnutzt, daß die Involution in B durch $f^*(x) = [f(-x)^x]^*$ erklärt ist, kann man auch (9b) direkt aus (9a) herleiten. (9a) und (9b) verwenden wir nun zur Bestimmung von $qBq = qB \cap Bq$.

(10) Ist $f \in qBq$, so gibt es eindeutig $h \in A$ mit $u^x h = uh^x$ für alle $x \in G$ und $f(x) = u^x h$ für fast alle $x \in G$. Ist umgekehrt $h \in A$ mit $u^x h = uh^x$ für alle $x \in G$ und liegt $(x \to u^x h)$ in B, so liegt dieses Element in qBq. Dieses Element ist genau dann hermitesch in B bzw. in qBq, wenn $h = h^*$.

Zu (10): Nach (9a) und (9b) ist $f(x) = u^x h$ und $f(x) = uk^x$ für fast alle $x \in G$ mit wohlbestimmten $h, k \in A$. Wir haben $h = k$ zu zeigen. Da $x \to u^x h$ und $x \to uk^x$ stetig sind, gilt $u^x h = uk^x$ für alle x; insbesondere ist $uh = uk = ku$. Nach (9a, b) ist

$$k = \int_G u^{-x} f(x)^{-x} dx = \int_G u^{-x} uh^{-x} dx = \int_G u(uh)^{-x} dx = \int_G u(ku)^{-x} dx$$

$$= \int_G uk^{-x} u^{-x} dx = \int_G f(-x) u^{-x} dx = h \, .$$

Es sind nun nur noch die hermite'schen Elemente in qBq zu charakterisieren. Es sei $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = uh^x$ für alle $x \in G$. Dann gilt $f^*(x) = \{f(-x)^x\}^* = \{(uh^{-x})^x\}^* = \{u^x h\}^* = u^x h^*$ (u ist hermite'sch). Also gilt $f = f^*$ genau dann, wenn $h = h^*$.

(11) Sei $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = uh^x$. Dann ist $hh^x = h^x h$ für alle $x \in G$ und folglich $h^y h^x = h^x h^y$ für alle $x, y \in G$.

Zu (11): Nach (8) ist

$$hh^x = \int_G u^{-y} u^{-y} h dy h^x = \int_G u^{-y} u^{-y} hh^x dy = \int_G u^{-y} uh^{-y} h^x dy$$

$$= \int_G u^{-y} h^{-y} uh^x dy = \int_G u^{-y} h^{-y} u^x h dy = \int_G u^{-y} h^x u^{-y} h dy \, ,$$

da $h^y u^x = h^x u^y$ für alle $x, y \in G$.

Unter erneuter Verwendung von (8) erhält man letztlich $hh^x = h^x h$. Der Träger von $v = \hat{u}$ sei mit K bezeichnet. Dann gilt $q(x) = u^x u = 0$ für $x \notin L := K + (-K)$ und weiter

(12) Ist $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = uh^x$, so ist $h^x h = hh^x = 0$ für $x \notin L$.

Zu (12): Für alle $x \in G$ ist

$$uh^x = u^x h = u^x \int_G u^{-y} u^{-y} h dy = u^x \int_G u^{-y} uh^{-y} dy = \int_G u^{-y} u^x uh^{-y} dy$$

und folglich $uh^x = u^x h = 0$ für $x \notin L$. Oben, in (11), hatten wir als Zwischenergebnis $hh^x = \int_G u^{-y} h^{-y} u^x h dy$ für alle $x \in G$. Daraus folgt (12) nun unmittelbar.

Wir kommen nun schließlich

Zu (7): Es genügt zu zeigen, daß das Spektrum eines hermite'schen Elementes $f \in qBq$ reell ist. Wir haben also zu zeigen, daß die Gleichung

$$fg = \lambda g + f \tag{$*$}$$

für ein gegebenes $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ eine Lösung $g\in qBq$ besitzt. Wenn man nämlich $(*)$ lösen kann, so besitzt auch jede Gleichung $fg'=\lambda g'+b$ mit $b\in qBq$ eine Lösung g' in qBq und, durch Anwenden der Involution, auch jede Gleichung $g'f=\lambda g'+b$; also gilt $(f-\lambda)B=B(f-\lambda)=B$. Um nun $(*)$ zu lösen, setzen wir $w:=\int\limits_L u^{-x}h^{-x}dx =\int\limits_L u^x h^x dx\in A$, wenn f durch h gegeben ist, wenn also $f(x)=u^x h=uh^x$ ist. Da f nach Voraussetzung hermite'sch ist, ist $h=h^*$ nach (10) und wegen $u=u^*$ und der Zentralität von u ist $w=w^*$. Laut Voraussetzung ist A symmetrisch, und die Gleichung

$$wk=\lambda k+h \tag{$**$}$$

besitzt folglich eine eindeutig bestimmte Lösung $k\in A$. Da $x\to u^x w$ einen kompakten Träger hat, hat auch $x\to u^x wk$ einen kompakten Träger und liegt nach (9a) in qB. Dann liegt aber auch g, definiert durch $g(x)=u^x k$, in qB, da $g(x)=\frac{1}{\lambda}\{u^x wk-u^x h\}$. Nach (11) vertauscht h^y mit w für alle $y\in G$, es gilt daher $wh^y k=\lambda h^y k+h^y h$ für alle $y\in G$. Nach (12) ist $h^y h=0$ für $y\in G\backslash L$ und mithin $h^y k=0$ für $y\in G\backslash L$, da $w-\lambda$ wegen der Symmetrie von A ein invertierbarer Operator auf A ist. Wir zeigen nun, daß $g\in qB$ eine Lösung von $(*)$ ist.

Es gilt

$$(f*g)(x)=\int\limits_G f(x+y)^{-y}g(-y)dy=\int\limits_G (u^{x+y}h)^{-y}u^{-y}kdy=\int\limits_G u^x h^{-y}u^{-y}kdy$$

$$=\int\limits_L u^x h^{-y}u^{-y}kdy\,,$$

da $h^{-y}k=0$ für $y\in G\backslash L$.

Also gilt $(f*g)(x)=u^x wk=u^x(\lambda k+h)$ oder $f*g=\lambda g+f$. Dann ist aber $g*q$ eine Lösung von $(*)$ in qBq und Satz 1 ist bewiesen.

Es ist nun recht einfach, unser Hauptergebnis zu beweisen.

Satz 2. *Sei G eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe. Dann ist $L^1(G)$ eine symmetrische Algebra.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über $\dim G$. Falls $\dim G=1$, so ist G kommutativ und $L^1(G)$ bekanntlich eine kommutative symmetrische Algebra. Sei nun $\dim G=:n>1$. Da Quotienten symmetrischer Algebren offenkundig symmetrisch sind, kann man o.B.d.A. annehmen, daß G einfach-zusammenhängend ist. Wie in [12] dargelegt, genügt es zu zeigen: Ist ϱ eine beschränkte, algebraisch irreduzible Darstellung von $L^1(G)$ in dem Banachschen Raum E und ist $P:=\operatorname{Kern}\varrho\cap(\operatorname{Kern}\varrho)^*$, so ist $L^1(G)/P$ symmetrisch.

Wegen seiner Kürze sei dieses Argument hier kurz wiederholt. Wäre nämlich $L^1(G)$ nicht symmetrisch, so gäbe es $f\in L^1(G)$ mit $L^1(G)(1+f^*f)\subsetneqq L^1(G)$. Zu dem modularen Linksideal $L^1(G)(1+f^*f)$ gäbe es dann ein umfassendes maximales modulares Linksideal Λ mit Rechtseins $-f^*f$. Man hätte dann eine beschränkte, algebraisch irreduzible Darstellung ϱ von $L^1(G)$ in $E:=L^1(G)/\Lambda$, aber $L:$

$=L^1(G)/\mathrm{Kern}\,\varrho\cap(\mathrm{Kern}\,\varrho)^*$ wäre nicht symmetrisch, da $L(1+g^*g)\subsetneqq L$, wenn g das Bild von f in L bezeichnet. Seien nun E, ϱ und P wie oben. Wie im Falle unitärer Darstellungen stammt ϱ von einer beschränkten stetigen Darstellung der Gruppe, welche ebenfalls mit ϱ bezeichnet sei (vgl. [11], insb. p. 266), d. h. es gibt einen beschränkten, stark stetigen Homomorphismus ϱ von G in die Gruppe der beschränkten invertierbaren Operatoren auf E mit $\varrho(f)=\int_G f(x)\varrho(x)dx$ für $f\in L^1(G)$. Da ϱ beschränkt und E algebraisch irreduzibel ist, gibt es einen Charakter γ des Zentrums Z von G mit $\varrho(z)=\gamma(z)1_E$ für $z\in Z$. $L^1(G)/P$ ist ein Quotient von $L^1(G/\mathrm{Kern}\,\gamma)$. Ist nun $\dim\mathrm{Kern}\,\gamma>0$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $L^1(G/\mathrm{Kern}\,\gamma)$ und dann auch $L^1(G)/P$ symmetrisch. Wir können also $\dim\mathrm{Kern}\,\gamma=0$ annehmen; insbesondere ist dann $\dim Z=1$. Nach Kirillows Lemma, vgl. [14], gibt es einen zweidimensionalen Normalteiler $N\supset Z$, einen Normalteiler H der Codimension 1 ($H=$ Zentralisator von N in G) und ein Komplement R zu H derart, daß $G=R\ltimes H$ und daß $R\ltimes N$ die dreidimensionale Heisenberg-Gruppe ist. Wir dividieren nun $\mathrm{Kern}\,\gamma$ aus und bezeichnen die erhaltenen Gruppen $G/\mathrm{Kern}\,\gamma$, $H/\mathrm{Kern}\,\gamma$... erneut mit $G, H, \ldots$. Für die durch ϱ und γ indizierten Homomorphismen schreiben wir ebenso wieder ϱ und γ. Dann ergibt sich die folgende Situation: $G=R\ltimes H$ hat ein eindimensionales kompaktes Zentrum Z. Für $z\in Z$ gilt $\varrho(z)=\gamma(z)1_E$ mit einem nun treuen Charakter γ von Z. Es ist die Symmetrie von $L^1(G)/P$ zu zeigen. Dazu sei $L^1(G)_\gamma$ die Menge aller $f\in L^1(G)$ mit $f(xz)=\gamma(z)f(x)$ für (fast) alle $x\in G$ und $z\in Z$. Es sei $T_\gamma: L^1(G)\to L^1(G)$ definiert durch $(T_\gamma f)(x)=\int_Z \gamma(z)f(xz)dz$, wobei dz hier das normierte Haarsche Maß von Z bezeichnet. Offenbar ist T_γ ein idempotenter Morphismus von $L^1(G)$ auf $B:=L^1(G)_\gamma$, und an der Integraldarstellung von ϱ, $\varrho(f)=\int_G f(x)\varrho(x)dx$, erkennt man leicht, daß $\varrho=\varrho\circ T_\gamma$. Also ist $L^1(G)/P$ ein Quotient von $L^1(G)/\mathrm{Kern}\,T_\gamma\cong B$, und es genügt, die Symmetrie dieser Algebra zu beweisen.

Analog zu $L^1(G)_\gamma$ kann man auch die Algebren $A:=L^1(H)_\gamma\subseteqq L^1(H)$ und $U:=L^1(N)_\gamma\subseteqq L^1(N)$ bilden. $L^1(G)$ fassen wir nun als verallgemeinerte L^1-Algebra $L^1(R, L^1(H))$ auf mit trivialem Faktorensystem und der durch die zu R gehörigen inneren Automorphismen induzierten Wirkung von R auf $L^1(H)$. Offenkundig ist B dann gerade die Unteralgebra $L^1(R, A)$. U ist isometrisch *-isomorph zu $L^1(\mathbb{R})$ und hat mithin das Spektrum $\mathbb{R}=R$. Ferner ist U als zentrale Unteralgebra von $L^1(H)^b$ (= Maßalgebra von H) und dann auch von A^b auffaßbar. A ist als abgeschlossene *-Unteralgebra von $L^1(H)$ nach Induktionsvoraussetzung symmetrisch. Man überlegt sich leicht, daß auch die übrigen Voraussetzungen von Satz 1 in der vorliegenden speziellen Situation erfüllt sind. B ist folglich symmetrisch, und Satz 2 ist bewiesen.

Wir schließen mit der folgenden

Bemerkung. Aus Satz 2 ergibt sich mit Hilfe von (6) aus [12], daß für eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe G die Menge der Kerne topologisch irreduzibler *-Darstellungen von $L^1(G)$ mit der Menge der primitiven Ideale (im Sinne der Algebra) und mit der Menge der maximalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale übereinstimmt.

Literatur

1. Anusiak, Z.: Symmetry of L^1-group algebras of locally compact groups with relatively compact classes of conjugated elements. Bull. Acad. Pol. Sci. **18**, 329—332 (1970)
2. Bonsall, F.F., Duncan, I.: Complete normed algebras. Ergebnisse der Mathematik 80. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
3. Dixmier, J.: Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires. Publ. math. Inst. Hautes Etudes scient. **6**, 305—317 (1960)
4. Gangolli, R.: On the symmetry of L^1-algebras of locally compact motion groups and the Wiener Tauberian theorem. Preprint Seattle (1975)
5. Hulanicki, A.: On symmetry of group algebras of discrete nilpotent groups. Studia Math. **35**, 207—219 (1970)
6. Jenkins, J.: Nonsymmetric group algebras. Studia Math. **45**, 295—307 (1973)
7. Leptin, H.: Verallgemeinerte L^1-Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen. I. Inventiones math. **3**, 257—281 (1967)
8. Leptin, H.: Darstellungen verallgemeinerter L^1-Algebren. Inventiones math. **5**, 192—215 (1968)
9. Leptin, H.: On group algebras of nilpotent Lie groups. Studia Math. **47**, 37—49 (1973)
10. Leptin, H.: Harmonische Analyse auf gewissen nilpotenten Lieschen Gruppen. Studia Math. **48**, 201—205 (1973)
11. Leptin, H.: Ideal theory in group algebras of locally compact groups. Inventiones math. **31**, 259—278 (1976)
12. Leptin, H.: Symmetrie in Banachschen Algebren. Erscheint im Archiv der Mathematik
13. Leptin, H.: Lokal kompakte Gruppen mit symmetrischen Algebren. Vorabdruck, Bielefeld (1976)
14. Pukanszky, L.: Leçons sur les représentations des groupes. Paris: Dunod 1967

Eingegangen am 5. Juli 1976