Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité

par

JEAN-PIERRE DEMAILLY

Université de Grenoble I
Saint Martin d'Hères, France

0. Introduction

Soit X un espace complexe de Stein, T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X, et φ: $X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction psh (plurisousharmonique) exhaustive. Nous définissons alors des nombres de Lelong $\nu(T,\varphi)$ qui généralisent ceux classiques de P. Lelong [Le3] ainsi que ceux introduits récemment par C. O. Kiselman [Ki3]. La définition repose sur l'utilisation des opérateurs de Monge-Ampère de Bedford-Taylor [B-T] et peut s'interpréter en disant que $\nu(T,\varphi)$ est la masse de la mesure $T\wedge(dd^c\varphi)^p$ portée par l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$. Dans ce cadre, nous démontrons que $\nu(T,\varphi)$ ne dépend que du comportement asymptotique de φ au voisinage des pôles; la méthode utilisée est inspirée de notre article antérieur [De1], mais elle se trouve ici considérablement simplifiée par le fait que l'on peut manipuler des poids φ qui sont seulement continus. La souplesse d'utilisation des nombres de Lelong généralisés permet d'obtenir aussi des démonstrations très simples de résultats classiques concernant les nombres de Lelong usuels; en particulier, ces nombres sont invariants par changement de coordonnées locales (cf. [Siu]). Nous redémontrons ensuite le théorème de P. Thie [Th], suivant lequel le nombre de Lelong d'un ensemble analytique X en un point $x\in X$ coïncide avec la multiplicité algébrique de X en x; ce résultat est une conséquence directe du fait que l'on peut représenter le germe (X,x) comme un revêtement ramifié au dessus de $\mathbf{C}^p$, contenu dans un cône convexe de sommet x. On obtient enfin une version généralisée du théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong; cette version contient comme cas particulier le résultat récent de C. O. Kiselman [Ki3] relatif aux nombres de Lelong directionnels. La démonstration est inspirée de Kiselman [Ki2] et repose essentiellement sur trois ingrédients :

11–878283 *Acta Mathematica* 159. Imprimé le 23 octobre 1987

- construction d'un potentiel psh local associé au courant T et au poids φ;
- principe du minimum de Kiselman [Ki1];
- estimations L^2 de Hörmander [Hö] et Bombieri [Bo] pour l'opérateur $\bar{\partial}$.

Je tiens à remercier ici C. O. Kiselman pour de stimulantes conversations qui ont beaucoup contribué à dégager les idées de ce travail.

1. Nombres de Lelong généralisés

Soit X un espace de Stein de dimension pure n et T un courant positif fermé sur X de bidimension (p,p), i.e. de bidegré $(n-p,n-p)$. En ce qui concerne les formes et les courants sur un espace analytique, nous utiliserons ici la définition donnée dans [De2]; la plupart des calculs différentiels et intégraux se pratiquent alors comme sur une variété lisse.

Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ sont des fonctions psh finies et continues, la méthode de Bedford-Taylor [B-T] permet de définir par récurrence un courant positif fermé $T\wedge dd^c\varphi_1 \wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q$ en posant

$$T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q = dd^c(\varphi_q T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_{q-1}). \tag{1.1}$$

Pour tous compacts $K\subset\subset \tilde{K}\subset\subset X$, la masse de (1.1) sur K, notée $\|\ \|_K$, vérifie alors les inégalités classiques de Chern–Levine–Nirenberg (cf. [C-L-N], [B-T], [De2]) :

$$\|T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q\|_K \leq C_{K,\tilde{K}}\|T\|_{\tilde{K}}\|\varphi_1\|_{L^\infty(\tilde{K})}\cdots\|\varphi_q\|_{L^\infty(\tilde{K})}; \tag{1.2}$$

on en déduit aisément que le courant $T\wedge dd^c\varphi_1\wedge\ldots\wedge dd^c\varphi_q$ est faiblement continu en $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ lorsque les φ_j convergent uniformément sur tout compact.

Soit maintenant $\varphi\colon X\to[-\infty, +\infty[$ une fonction psh continue. On suppose que φ est *semi-exhaustive,* c'est-à-dire par définition qu'il existe $R>0$ tel que $\{x\in X;\varphi(x)<R\}\subset\subset X$. Pour tout réel $r<R$ on pose

$$\nu(T,\varphi,r) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\varphi<r} T\wedge(dd^c\max(\varphi,s))^p \tag{1.3}$$

où s est un réel quelconque $<r$; l'hypothèse $dT=0$ et la formule de Stokes montrent que la quantité $\nu(T,\varphi,r)$ est bien indépendante de s. Pour tous réels $r_1<r_2<R$ on obtient par différence l'identité

$$\nu(T,\varphi,r_2)-\nu(T,\varphi,r_1)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{r_1\leqslant\varphi<r_2}T\wedge(dd^c\varphi)^p$$

en choisissant $s<r_1$. En particulier, la fonction

$$r\mapsto\nu(T,\varphi,r) \tag{1.4}$$

est croissante sur l'intervalle $]-\infty,R[$.

Définition 1.5. On appelle nombre de Lelong généralisé de T relativement au poids φ la limite

$$\nu(T,\varphi)=\lim_{r\to-\infty}\nu(T,\varphi,r).$$

Les nombres de Lelong généralisés précédents avaient déjà été introduits dans [De1] par une formule légèrement différente que nous rappelons ci-dessous :

$$\nu(T,\varphi,t)=(2\pi e^t)^{-p}\int_{\varphi<t}T\wedge(dd^c e^{\varphi})^p,\quad \forall t<R. \tag{1.6}$$

Posons $\varphi_s=\max(\varphi,s)$ avec $s<t$. La formule de Stokes ramène (1.6) à

$$e^{pt}\int_{\varphi<t}T\wedge(dd^c\varphi_s)^p=\int_{\varphi<t}T\wedge(dd^c e^{\varphi_s})^p.$$

Pour vérifier cette dernière égalité, on observe que

$$\begin{aligned}e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p-(dd^c e^{\varphi_s})^p&=d\big[e^{pt}(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d^c\varphi_s-(dd^c e^{\varphi_s})^{p-1}\wedge d^c(e^{\varphi_s})\big]\\&=d\big[(e^{pt}-e^{p\varphi_s})(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d^c\varphi_s\big].\end{aligned}$$

Soit λ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction croissante de classe C^∞ telle que $\lambda(t)=0$ pour $t\leqslant 1/2$ et $\lambda(t)=1$ pour $t\geqslant 1$. Après intégration par parties, on obtient

$$\int_{\varphi<t}T\wedge(e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p-(dd^c e^{\varphi_s})^p)=\lim_{\varepsilon\to0+}\int\lambda\left(\frac{t-\varphi_s}{\varepsilon}\right)T\wedge(e^{pt}(dd^c\varphi_s)^p-(dd^c e^{\varphi_s})^p)=\lim_{\varepsilon\to0+}I(\varepsilon)$$

avec

$$I(\varepsilon)=\int T\wedge\frac{1}{\varepsilon}\lambda'\left(\frac{t-\varphi_s}{\varepsilon}\right)(e^{pt}-e^{p\varphi_s})(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d\varphi_s\wedge d^c\varphi_s.$$

Le support de la fonction $\lambda'((t-\varphi_s)/\varepsilon)$ est contenu dans la couronne

$K(\varepsilon)=\{\varepsilon/2\leqslant t-\varphi_s\leqslant\varepsilon\}$; comme λ' est bornée et que $e^{pt}-e^{p\varphi_s}=O(\varepsilon)$ sur $K(\varepsilon)$, on en déduit $I(\varepsilon)\leqslant C\|T\wedge(dd^c\varphi_s)^{p-1}\wedge d\varphi_s\wedge d^c\varphi_s\|_{K(\varepsilon)}$. Soient $\chi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R})$ des fonctions convexes croissantes uniformément bornées en ε telles que $\chi_\varepsilon''=1/\varepsilon$ sur $[t-\varepsilon, t-\varepsilon/2]$. L'inégalité (1.2) appliquée avec $\varphi_1=\ldots=\varphi_{p-1}=\varphi_s$, $\varphi_p=\chi_\varepsilon\circ\varphi_s$ implique $I(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, d'où la formule (1.6).

Exemple 1.7. Supposons que l'espace X soit un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et choisissons $\varphi(z)=\log|z-x|$, $x\in X$. Alors $\frac{1}{4}dd^c(e^{2\varphi})=\frac{1}{4}dd^c|z-x|^2$ est la métrique hermitienne standard de $\mathbf{C}^n$, de sorte que la formule (1.6) appliquée à 2φ s'écrit

$$\nu(T,\varphi,\log t)=\frac{1}{2^p}\nu(T,2\varphi,2\log t)=\frac{\sigma_T(\{z;|z-x|<t\})}{\pi^p t^{2p}/p!},$$

où $d\sigma_T=(\frac{1}{4}dd^c|x|^2)^p\wedge T/p!$ est la mesure trace de T. Le nombre de Lelong généralisé $\nu(T,\varphi)$ coïncide donc avec le nombre de Lelong classique $\nu(T,x)$.

Exemple 1.8. Soit V une fonction psh sur un voisinage d'un point $x\in\mathbf{C}^n$. Notons $\theta_{x,R}$ la mesure de moyenne sur le polycercle

$$\Gamma(x,R):=\{z\in\mathbf{C}^n;\ |z_j-x_j|=e^{R_j}, 1\leqslant j\leqslant n\}.$$

Si $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\,]0,+\infty[^n$, C. O. Kiselman [Ki3] considère les nombres de Lelong "directionnels" $\nu(V,x,a)$ définis par

$$\nu(V,x,a)=\lim_{r\to-\infty}\frac{1}{r}\theta_{x,ra}(V).$$

En utilisant les résultats et les notations de [De2], on va montrer que ces nombres sont obtenus en fait pour le choix

$$\varphi(z)=\varphi_{x,a}(z)=\max_j\frac{1}{a_j}\log|z_j-x_j|.$$

Observons que $\{\varphi<r\}$ est le polydisque admettant $\Gamma(x,ra)$ pour frontière distinguée. On sait d'après [De2] que la mesure $(dd^c\varphi)^n$ est bien définie, parce que l'ensemble $\varphi^{-1}(-\infty)$ est relativement compact dans $\mathbf{C}^n$. La quasi-homogénéïté de φ donne

$$(dd^c\varphi)^n=(2\pi)^n(a_1\ldots a_n)^{-1}\delta_x,$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x. La mesure de Monge-Ampère

$$\mu_r:=(dd^c\varphi)^{-1}\wedge d^c\varphi|_{\{\varphi=r\}}$$

est d'autre part portée par $\Gamma(x, ra)$, car sur le complémentaire $\mathbf{C}^n \setminus \bigcup_{r\geqslant -\infty} \Gamma(x, ra)$ la fonction φ ne dépend localement que de $n-1$ variables complexes et donc $(dd^c\varphi)^{n-1}=0$ par raison d'homogénéïté. Comme la masse de μ_r est égale à celle de $(dd^c\varphi)^n$ et comme μ_r est invariante par le groupe $U(1)^n$ il vient

$$\mu_r = (2\pi)^n (a_1 \ldots a_n)^{-1} \theta_{x, ra}.$$

Grâce à la formule de Lelong-Jensen (cf. [De2], th.3.4), on voit que pour tous réels $r<r_0$ assez petits on a

$$\int_r^{r_0} \nu(dd^c V, \varphi, t)\, dt = \frac{\mu_{r_0}(V) - \mu_r(V)}{(2\pi)^{n-1}} = \frac{2\pi}{a_1 \ldots a_n} (\theta_{x, r_0 a}(V) - \theta_{x, ra}(V)).$$

On obtient donc l'égalité

$$\nu(V, x, a) = \lim_{r\to-\infty} \frac{1}{r} \theta_{x, ra}(V) = a_1 \ldots a_n \cdot \nu\left(\frac{1}{2\pi} dd^c V, \varphi_{x, a}\right). \tag{1.9}$$

Nous définirons en général le nombre de Lelong directionnel d'un courant T par

$$\nu(T, x, a) = a_1 \ldots a_n \cdot \nu(T, \varphi_{x, a}); \tag{1.10}$$

ceci donne l'identité

$$\nu(V, x, a) = \nu\left(\frac{1}{2\pi} dd^c V, x, a\right).$$

2. Théorème de comparaison

Nous redémontrons ici le résultat de [Siu] sur l'invariance des nombres de Lelong par changement de coordonnées locales. Nous obtenons en fait un résultat beaucoup plus général, permettant de comparer les nombres de Lelong relatifs à des poids φ, ψ différents. Le lecteur pourra comparer avec [De1] pour voir combien la démonstration se trouve simplifiée par la possibilité d'utiliser des poids φ qui sont seulement continus.

THÉORÈME 2.1. *Soient φ, ψ: $X \to [-\infty, +\infty[$ des fonctions psh continues semi-exhaustives. On suppose que*

$$l := \limsup_{\varphi(x)\to-\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +\infty$$

Alors $\nu(T,\psi)\leqslant l^p\nu(T,\varphi)$, *et l'égalité a lieu si* $l=\lim\psi/\varphi$.

Démonstration. D'après la définition (1.3) on a

$$\nu(T,\lambda\varphi)=\lambda^p\nu(T,\varphi)$$

pour tout scalaire $\lambda>0$. Il suffit donc de vérifier l'inégalité $\nu(T,\psi)\leqslant\nu(T,\varphi)$ sous l'hypothèse $\limsup\psi/\varphi<1$. Pour tout $c>0$, on considère la fonction psh $u_c=\max(\psi-c,\varphi)$. Soit $r<R_\varphi$ fixé et $a<r$. Pour $c>0$ assez grand, on a $u_c=\varphi$ sur $\varphi^{-1}([a,r])$, donc

$$\nu(T,\varphi,r)=\nu(T,u_c,r)\geqslant\nu(T,u_c).$$

L'hypothèse $\limsup\psi/\varphi<1$ implique d'autre part qu'il existe $t_0<0$ tel que $u_c=\psi-c$ sur $\{u_c<t_0\}$. On en déduit aussitôt

$$\nu(T,u_c)=\nu(T,\psi-c)=\nu(T,\psi),$$

par conséquent $\nu(T,\psi)\leqslant\nu(T,\varphi,r)$ et à la limite $\nu(T,\psi)\leqslant\nu(T,\varphi)$. □

Supposons en particulier que X soit une variété de Stein lisse et x un point de X. Soit $z^k=(z_1^k,\ldots,z_n^k)$, $k=1,2$, des systèmes de coordonnées locales centrées au point x et

$$\varphi_k(z)=\log|z^k|=\log\left(|z_1^k|^2+\ldots+|z_n^k|^2\right)^{1/2}.$$

On a $\lim_{z\to x}\varphi_2(z)/\varphi_1(z)=1$, donc $\nu(T,\varphi_1)=\nu(T,\varphi_2)$ d'après le théorème 2.1.

COROLLAIRE 2.2. *Les nombres de Lelong classiques* $\nu(T,x)$ *sont invariants par changement de coordonnées locales.*

De manière générale, si X est un espace analytique, on définira $\nu(T,x)$ par

$$\nu(T,x)=\nu\left(T,\frac{1}{2}\log\sum_{1\leqslant j\leqslant N}|g_j|^2\right),$$

où $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ est un système générateur de l'idéal maximal $\mathcal{M}_{X,x}\subset\mathcal{O}_{X,x}$; cette définition est indépendante du choix des (g_j).

COROLLAIRE 2.3. *Sur un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *les nombres de Lelong directionnels sont liés aux nombres de Lelong classiques par*

$$\nu(T,x)=\nu(T,x,a_1),\quad a_1=(1,\ldots,1).$$

Démonstration. Par définition, le nombre $\nu(T,x)$ est associé au poids $\varphi(z)=\log|z-x|$ et $\nu(T,x,a_1)$ au poids $\psi(z)=\log\max|z_j-x_j|$. Il est clair que $\lim_{z\to x}\psi(z)/\varphi(z)=1$, d'où la conclusion d'après le théorème 2.1. $\square$

3. Théorème de Thie

On suppose ici que X est une variété analytique complexe de dimension n et que T est le courant d'intégration sur un ensemble analytique fermé $A\subset X$ de dimension pure p (cf. P. Lelong [Le1]); on notera suivant l'usage $T=[A]$. Nous nous proposons de redémontrer le résulat de P. Thie [Th] donnant l'interprétation des nombres de Lelong $\nu([A],x)$ comme multiplicités de l'ensemble analytique A.

Soit $x\in A$ un point fixé et $\mathscr{I}_{A,x}$ l'idéal des germes de fonctions holomorphes en x s'annulant sur A. Ou peut alors trouver sur X des coordonnées locales $z=(z_1,\dots,z_n)$, centrées au point x, telles qu'il existe des polynômes distingués $P_j\in\mathscr{I}_{A,x}$ en la variable z_j, $p<j\leqslant n$, s'écrivant sous la forme

$$P_j(z)=z_j^{d_j}+\sum_{k=1}^{d_j}a_{j,k}(z_1,\dots,z_{j-1})\,z_j^{d_j-k},\quad a_{j,k}\in\mathcal{M}^k_{\mathbf{C}^{j-1},0} \tag{3.1}$$

Montrons en effet cette propriété par récurrence sur $\operatorname{codim}X=n-p$, en identifiant le germe (X,x) à $(\mathbf{C}^n,0)$ grâce à un système de coordonnées locales $(w_1,\dots,w_n)$ fixé une fois pour toutes.

Si $n-p\geqslant1$, il existe un élément non nul $f\in\mathscr{I}_{A,x}$. Soit d le plus petit entier tel que $f\in\mathcal{M}^d_{\mathbf{C}^n,0}$ et soit $e_n\in\mathbf{C}^n$ un vecteur non nul tel que $\lim_{t\to0}f(te_n)/t^d\neq0$. Complétons le vecteur e_n en une base $(\tilde e_1,\dots,\tilde e_{n-1},e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ et notons $(\tilde z_1,\dots,\tilde z_{n-1},z_n)$ les coordonnées correspondantes. Le théorème de préparation de Weierstrass permet de factoriser f sous la forme $f=gP$, où P est un polynôme distingué de la forme (3.1) en la variable z_n et où g est une fonction holomorphe inversible au point x. Si $n-p=1$, le polynôme $P_n=P$ répond à la question.

Si $n-p\geqslant2$, $\mathscr{O}_{A,x}=\mathscr{O}_{X,x}/\mathscr{I}_{A,x}$ est un $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1},0}=\mathbf{C}\{\tilde z_i,\dots,\tilde z_{n-1}\}$-module de type fini, c'est-à-dire que la projection $\mathrm{pr}:(X,x)\approx(\mathbf{C}^n,0)\to(\mathbf{C}^{n-1},0)$ est un morphisme fini de (A,x) sur un germe $(Z,0)\subset(\mathbf{C}^{n-1},0)$ de dimension p. L'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathscr{I}_{Z,0}=\mathscr{O}_{\mathbf{C}^{n-1},0}\cap\mathscr{I}_{A,x}$ permet de trouver une nouvelle base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ de $\mathbf{C}^{n-1}$ et des polynômes $P_{p+1},\dots,P_{n-1}\in\mathscr{I}_{Z,0}$ s'écrivant sous la forme (3.1) dans les coordonnées

$(z_1, \ldots, z_{n-1})$ associées à la base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Si l'on pose $P_n = P$, l'assertion précédente est alors démontrée en codimension $n-p$.

Etant donné un polynôme $Q(w) = w^d + a_1 w^{d-1} + \ldots + a_d \in \mathbf{C}[w]$, toute racine w de Q vérifie

$$|w| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |a_k|^{1/k}, \tag{3.2}$$

sinon $Q(w)\, w^{-d} = 1 + a_1 w^{-1} + \ldots + a_d w^{-d}$ serait de module supérieur ou égal à $1 - (2^{-1} + \ldots + 2^{-d}) = 2^{-d}$, ce qui est absurde. Notons $z = (z', z'')$ avec $z' = (z_1, \ldots, z_p)$ et $z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$. Comme $a_{j,k} \in \mathcal{M}^k_{\mathbf{C}^{j-1}, 0}$, on a

$$|a_{j,k}(z_1, \ldots, z_{j-1})|^{1/k} = O(|z_1| + \ldots + |z_{j-1}|) \quad \text{si } j > p,$$

et on déduit de (3.1), (3.2) que $|z_j| = O(|z_1| + \ldots + |z_{j-1}|)$ sur (A, x). Par suite, le germe (A, x) est contenu dans un cône $|z''| \leqslant C|z'|$.

On va maintenant utiliser cette propriété pour calculer le nombre de Lelong du courant $[A]$ au point x. Quand z tend vers x, les fonctions

$$\varphi(z) = \log|z| = \log(|z'|^2 + |z''|^2)^{1/2}, \quad \psi(z) = \log|z'|$$

sont équivalentes sur le germe (A, x); d'après le théorème 2.1 ceci entraîne

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

Soit $B' \subset \mathbf{C}^p$ la boule de centre 0 et de rayon r', $B'' \subset \mathbf{C}^{n-p}$ la boule de centre 0 et de rayon $r'' = Cr'$. L'inclusion du germe (A, x) dans le cône $|z''| \leqslant C|z'|$ montre que pour r' assez petit la projection

$$\mathrm{pr}\colon A \cap (B' \times B'') \to B'$$

est propre et finie. L'application pr est donc un revêtement ramifié ayant un nombre fini q de feuillets. D'après la formule (1.6) appliqué à 2ψ on a

$$\begin{aligned}
\nu([A], \psi, \log t) &= (4\pi t^2)^{-p} \int_{A \cap \{\psi < \log t\}} (dd^c e^{2\psi})^p \\
&= (4\pi t^2)^{-p} \int_{A \cap \{|z'| < t\}} (\mathrm{pr}^* \, dd^c |z'|^2)^p \\
&= (4\pi t^2)^{-p} \cdot q \cdot \int_{\mathbf{C}^p \cap \{|z'| < t\}} (dd^c |z'|^2)^p = q.
\end{aligned}$$

On obtient donc le théorème suivant, dû à P. Thie [Th].

THÉORÈME 3.3. *Soit A un ensemble analytique de dimension p dans une variété analytique complexe X de dimension n et soit $x \in A$. Alors il existe au point x des coordonnées locales*

$$z=(z',z''),\quad z'=(z_1,\ldots,z_p),\quad z''=(z_{p+1},\ldots,z_n)$$

et des boules $B' \subset \mathbf{C}^p, B'' \subset \mathbf{C}^{n-p}$, relatives à ces coordonnées, de rayons respectifs r', r'', telles que $A \cap (B' \times B'')$ soit contenu dans le cône d'équation $|z''| \leq (r''/r')|z'|$. On définit la multiplicité de A au point x comme le nombre q de feuillets dans le revêtement ramifié $A \cap (B' \times B'') \to B'$. Alors $\nu([A], x) = q$.

4. Théorème d'analyticité de Siu

On se donne ici un deuxième espace analytique Y et une fonction $\varphi: X \times Y \to [-\infty, +\infty[$ psh et continue. On suppose que φ est *semi-exhaustive* par rapport à X, c'est-à-dire que pour tout compact $L \subset Y$ il existe $R = R(L) < 0$ tel que

$$\{(x,y) \in X \times L; \varphi(x,y) \leq R\} \subset\subset X \times Y. \tag{4.1}$$

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X. Pour tout point $y \in Y$, la fonction $\varphi_y(x) := \varphi(x,y)$ est semi-exhaustive sur X; on peut donc associer à y le nombre de Lelong généralisé $\nu(T, \varphi_y)$. La continuité faible de la mesure $T \wedge (dd^c \max(\varphi_y, a))^p$ par rapport au paramètre y montre que pour tous $r_1 < r_2 < R$ on a

$$\limsup_{y \to y_0} \nu(T, \varphi_y, r_1) \leq \nu(T, \varphi_{y_0}, r_2). \tag{4.2}$$

On en déduit aussitôt que l'application $y \mapsto \nu(T, \varphi_y)$ est semi-continue supérieurement. Les ensembles de niveau

$$E_c = \{y \in Y; \nu(T, \varphi_y) \geq c\}, \quad c > 0 \tag{4.3}$$

sont donc fermés. On s'intéresse dans la suite au problème de savoir si E_c est en général un ensemble analytique. Comme il s'agit d'une question locale, on peut supposer sans perte de généralité que Y est un espace de Stein. Après addition d'une constante à φ, on peut supposer aussi qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que

$$\{(x,y) \in X \times Y; \varphi(x,y) \leq 0\} \subset K \times Y.$$

Première étape: construction d'un potentiel psh local.

Notre objectif est ici de généraliser la construction classique des potentiels psh associés à un courant positif fermé (cf. P. Lelong [Le2] et H. Skoda [Sk]), en remplaçant le noyau standard issu de la métrique hermitienne de $\mathbf{C}^n$ par un noyau construit à l'aide du poids φ.

D'après le théorème 2.1, seul le comportement asymptotique de φ au voisinage de l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$ entre en jeu. On va donc se permettre de modifier légérement φ en dehors d'un voisinage de $\varphi^{-1}(-\infty)$. Quitte à rétrécir de nouveau Y si nécessaire, il existe une régularisation $\psi \in C^\infty(X\times Y)$ de φ telle que $\psi>\varphi$ sur $X\times Y$ et $\psi<\varphi+1/2$ sur l'ensemble

$$\{(x,y)\in X\times Y;\ -2\leqslant\varphi(x,y)\leqslant 0\}.$$

Après remplacement de φ par la fonction $\hat\varphi$ telle que

$$\begin{cases}\hat\varphi=\varphi & \text{sur}\quad \varphi(x,y)\leqslant -2\\ \hat\varphi=\max(\varphi,2\psi+1) & \text{sur}\quad -2\leqslant\varphi(x,y)\leqslant -1\\ \hat\varphi=2\psi+1 & \text{sur}\quad -1\leqslant\varphi(x,y)\end{cases}$$

on voit qu'on peut supposer φ de classe C^∞ au voisinage de $\{\varphi(x,y)\geqslant -1\}$. Soit $\chi\in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction croissante telle que $\chi(t)=t$ pour $t\leqslant -1$ et $\chi(t)=0$ pour $t\geqslant 0$. Notons $H\subset\mathbf{C}$ le demi-plan $H=\{z\in\mathbf{C};\ \operatorname{Re} z<-1\}$. On associe à T la fonction potentiel V sur $Y\times H$ définie par

$$V(y,z)=-\int_{\operatorname{Re} z}^{0}\nu(T,\varphi_y,t)\chi'(t)\,dt. \tag{4.4}$$

La formule (1.3) entraîne pour tout $t>\operatorname{Re} z$ l'égalité

$$\nu(T,\varphi_y,t)=(2\pi)^{-p}\int_{\varphi(x,y)<t}T(x)\wedge(dd_x^c\,\tilde\varphi(x,y,z))^p$$

avec $\tilde\varphi(x,y,z):=\max(\varphi(x,y),\operatorname{Re} z)$. Le théorème de Fubini appliqué à (4.4) donne alors

$$V(y,z)=(2\pi)^{-p}\int_{x\in X}T(x)\wedge\chi(\tilde\varphi(x,y,z))\,(dd_x^c\tilde\varphi(x,y,z))^p.$$

Pour toute $(n-1,n-1)$-forme h de classe C^∞ à support compact dans $Y\times H$, il vient

$$\langle dd^cV,h\rangle=\langle V,dd^ch\rangle=(2\pi)^{-p}\int_{X\times Y\times H}T(x)\wedge\chi(\tilde\varphi(x,y,z))\,(dd^c\tilde\varphi(x,y,z))^p\wedge dd^ch(y,z).$$

La forme $\chi\circ\tilde\varphi\cdot h$ est à support compact dans $X\times Y\times H$. On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\langle dd^c V, h\rangle = (2\pi)^{-p}\int_{X\times Y\times H} T(x)\wedge dd^c(\chi\circ\tilde\varphi(x,y,z))\wedge(dd^c\tilde\varphi(x,y,z))^p\cdot h(y,z).$$

Sur la couronne $\{-1\leqslant\varphi(x,y)\leqslant 0\}$ on a $\tilde\varphi(x,y,z)=\varphi(x,y)$ avec φ de classe C^∞, tandis que pour $\varphi(x,y)<-1$ il vient $\tilde\varphi<-1$ et $\chi\circ\tilde\varphi=\tilde\varphi$. Comme $\tilde\varphi$ est psh, on voit que $dd^c V(y,z)$ est somme de la $(1,1)$-forme positive

$$(y,z)\mapsto(2\pi)^{-p}\int_{\{x\in X;\,\varphi(x,y)<-1\}} T(x)\wedge(dd^c_{x,y,z}\tilde\varphi(x,y,z))^{p+1}$$

et de la $(1,1)$-forme indépendante de z à coefficients localement bornés

$$y\mapsto(2\pi)^{-p}\int_{\{x\in X;\,-1\leqslant\varphi(x,y)\leqslant 0\}} T\wedge dd^c_{x,y}(\chi\circ\varphi)\wedge(dd^c_{x,y}\varphi)^p$$

La fonction V est d'autre part continue sur $Y\times H$ grâce à la continuité faible de la mesure $T\wedge(dd^c_{x,y,z}\tilde\varphi)^p$ par rapport aux variables (y,z). On en déduit par conséquent le résultat suivant.

THÉORÈME 4.5. *Il existe une fonction psh positive $\varrho\in C^\infty(Y)$ telle que $V(y,z)+\varrho(y)$ soit psh sur $Y\times H$.*

Si on fait tendre $\operatorname{Re} z$ vers $-\infty$, on voit que la fonction

$$U_0(y)=V(y,-\infty)+\varrho(y)=\varrho(y)-\int_{-\infty}^0 \nu(T,\varphi_y,t)\chi'(t)\,dt$$

est localement psh ou $\equiv-\infty$ sur Y. De plus, il est clair que $U_0(y)=-\infty$ en tout point y tel que $\nu(T,\varphi_y)>0$. Si Y est irréductible et si $U_0\not\equiv-\infty$, on voit donc déjà que l'ensemble de densité $\bigcup_{c>0}E_c$ est pluripolaire dans Y.

Deuxième étape: utilisation du principe du minimum de Kiselman.

Soit α un réel $\geqslant 0$ quelconque. La fonction

$$Y\times H\ni(y,z)\mapsto V(y,z)+\varrho(y)-\alpha\operatorname{Re} z$$

est alors psh et indépendante de $\operatorname{Im} z$. D'après le principe du minimum de Kiselman [Ki1], la transformée de Legendre

$$U_\alpha(y) = \inf_{r<-1} [V(y,r)+\varrho(y)-\alpha r]$$

est localement psh ou $\equiv -\infty$ sur Y.

LEMME 4.6. *Soit $y_0 \in Y$ un point fixé.*

(a) *Si $\alpha > \nu(T, \varphi_{y_0})$, alors U_α est bornée inférieurement dans un voisinage de y_0.*

(b) *Si $\alpha < \nu(T, \varphi_{y_0})$, alors $U_\alpha(y_0) = -\infty$.*

Démonstration. Par définition de V (cf. (4.4)) on a

$$V(y,r) \leqslant -\nu(T, \varphi_y, r) \int_r^0 \chi'(t)\,dt = r\nu(T, \varphi_y, r) \leqslant r\nu(T, \varphi_y). \tag{4.7}$$

Il en résulte bien que $U_\alpha(y_0) = -\infty$ si $\alpha < \nu(T, \varphi_{y_0})$. D'autre part, si on a $\nu(T, \varphi_{y_0}) < \alpha$, il existe $t_0 < 0$ tel que $\nu(T, \varphi_{y_0}, t_0) < \alpha$. Soit $r_0 < t_0$ fixé. La propriété de semi-continuité (4.2) entraîne qu'il existe un voisinage ω de y_0 tel que $\sup_{y\in\omega} \nu(T, \varphi_y, r_0) < \alpha$. Pour tout $y \in \omega$, on a alors

$$V(y,r) \geqslant -C - \alpha \int_r^{r_0} \chi'(t)\,dt = -C + \alpha(r - r_0),$$

ce qui implique $U_\alpha(y) \geqslant -C - \alpha r_0$. □

THÉORÈME 4.8. *Si Y est irréductible et si $E_c \neq Y$, alors E_c est un ensemble fermé pluripolaire complet dans Y, i.e. il existe une fonction psh continue $w: Y \to [-\infty, +\infty[$ telle que $E_c = w^{-1}(-\infty)$.*

Démonstration. On observe d'abord que la famille (U_α) est croissante en α, que $U_\alpha = -\infty$ sur E_c pour tout $\alpha < c$, et que $\sup_{\alpha<c} U_\alpha(y) > -\infty$ si $y \in Y \setminus E_c$ (cf. lemme 4.6). Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite exhaustive de compacts de Y. Pour tout entier $k \geqslant 1$, soit $w_k \in C^\infty(Y)$ une régularisée de $U_{c-1/k}$ telle que $w_k \geqslant U_{c-1/k}$ sur Y et $w_k \leqslant -2^k$ sur $E_c \cap Y_k$. Le lemme 4.6 (a) montre que la famille (w_k) est uniformément minorée sur tout compact de $Y \setminus E_c$, et on peut également choisir les w_k uniformément majorées sur tout compact de Y puisque $U_{c-1/k} \leqslant U_c$. La fonction

$$w = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} w_k$$

répond alors à la question. □

Troisième étape: estimation de la singularité des potentiels U_α.

Pour pouvoir obtenir une telle estimation, nous avons besoin d'une information sur le comportement de φ au voisinage des pôles. Dans la suite, on considère l'espace Y comme étant plongé dans on ouvert de Stein $\Omega \subset \mathbf{C}^N$, et on munit Y de la distance induite par la distance euclidienne de $\mathbf{C}^N$.

HYPOTHÈSE 4.9. *On suppose que $e^{\varphi(x,y)}$ est localement höldérienne en y sur $X \times Y$, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X \times Y$, il existe des constantes $M>0$, $\gamma \in]0,1]$ telles que*

$$|e^{\varphi(x,y_1)} - e^{\varphi(x,y_2)}| \leq M|y_1 - y_2|^\gamma \tag{4.10}$$

pour tous $(x, y_1) \in K$, $(x, y_2) \in K$.

On observera que l'hypothèse 4.9 est satisfaite pour toute fonction φ de la forme

$$\varphi = \max_j \log \left(\sum_k |F_{j,k}|^{\gamma_{j,k}} \right)$$

où les $F_{j,k}$ sont des fonctions holomorphes sur $X \times Y$ et les $\gamma_{j,k}$ des constantes réelles >0; dans ce cas e^φ est höldérienne d'ordre $\gamma = \min(\gamma_{j,k}, 1)$.

THÉORÈME 4.11. *Soit $y_0 \in Y$ un point fixé, L un voisinage compact de y_0, $K \subset X$ une partie compacte et r_0 un réel <-1 tels que*

$$\{(x,y) \in X \times L; \varphi(x,y) \leq r_0\} \subset K \times L.$$

On suppose que φ vérifie l'inégalité (4.10) *pour tous $(x, y_1, y_2) \in K \times L \times L$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un réel $\eta(\varepsilon)>0$ tel que pour tout $y \in Y$ vérifiant $|y-y_0|<\eta(\varepsilon)$, on ait*

$$U_\alpha(y) \leq ((1-\varepsilon)^p \, \nu(T, \varphi_{y_0}) - \alpha) \left(\gamma \log |y-y_0| + \log \frac{2eM}{\varepsilon} \right) + \varrho(y).$$

Démonstration. On commence par estimer $\nu(T, \varphi_y, r)$ lorsque $y \in L$ est voisin de y_0. Posons

$$\begin{cases} \psi(x) = (1-\varepsilon)\, \varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2 & \text{si} \quad \varphi_{y_0}(x) \leq r-1 \\ \psi(x) = \max(\varphi_y(x), (1-\varepsilon)\, \varphi_{y_0}(x) + \varepsilon r - \varepsilon/2) & \text{si} \quad r-1 \leq \varphi_{y_0}(x) \leq r \\ \psi(x) = \varphi_y(x) & \text{si} \quad r \leq \varphi_{y_0}(x) \leq r_0 \end{cases}$$

et vérifions que cette définition est bien cohérente si $|y-y_0|$ est assez petit. Par hypothèse

$$|e^{\varphi_y(x)}-e^{\varphi_{y_0}(x)}|\leqslant M|y-y_0|^\gamma.$$

On en déduit aussitôt les inégalités

$$\varphi_y(x)\leqslant\varphi_{y_0}(x)+\log(1+M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)})$$

$$\varphi_y(x)\geqslant\varphi_{y_0}(x)+\log(1-M|y-y_0|^\gamma e^{-\varphi_{y_0}(x)}).$$

En particulier, pour $\varphi_{y_0}(x)=r$ il vient $(1-\varepsilon)\,\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2=r-\varepsilon/2$ et

$$\varphi_y(x)\geqslant r+\log(1-M|y-y_0|^\gamma e^{-r}),$$

tandis que pour $\varphi_{y_0}(x)=r-1$ on a $(1-\varepsilon)\,\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2=r-1+\varepsilon/2$ et

$$\varphi_y(x)\leqslant r-1+\log(1+M|y-y_0|^\gamma e^{-r}).$$

La définition de ψ est donc cohérente dès que $M|y-y_0|^\gamma e^{1-r}\leqslant\varepsilon/2$, c'est-à-dire

$$\gamma\log|y-y_0|+\log\frac{2eM}{\varepsilon}\leqslant r.$$

Dans ce cas ψ coïncide avec φ_y au voisinage de $\{\psi=r\}$, et avec

$$(1-\varepsilon)\,\varphi_{y_0}(x)+\varepsilon r-\varepsilon/2$$

au voisinage de l'ensemble polaire $\psi^{-1}(-\infty)$. Par définition de la quantité $\nu(T,\psi,r)$ ceci entraîne

$$\nu(T,\varphi_y,r)=\nu(T,\psi,r)\geqslant\nu(T,\psi)=(1-\varepsilon)^p\,\nu(T,\varphi_{y_0}).$$

Grâce à (4.7) on obtient $V(y,r)\leqslant r\nu(T,\varphi_y,r)$, d'où

$$U_\alpha(y)\leqslant V(y,r)+\varrho(y)-\alpha r\leqslant r(\nu(T,\varphi_y,r)-\alpha)+\varrho(y), \tag{4.12}$$

$$U_\alpha(y)\leqslant r((1-\varepsilon)^p\,\nu(T,\varphi_{y_0})-\alpha)+\varrho(y).$$

Supposons $\gamma\log|y-y_0|+\log(2eM/\varepsilon)\leqslant r_0$, i.e. $|y-y_0|\leqslant(\varepsilon/2eM)^{1/\gamma}e^{r_0/\gamma}$; on peut choisir alors $r=\gamma\log|y-y_0|+\log(2eM/\varepsilon)$, et d'après (4.12) ceci donne l'inégalité du théorème 4.11. □

Quatrième étape: utilisation des estimations L^2 de Hörmander.

Supposons d'abord que Y soit une variété de Stein lisse, et notons m la dimension de Y. La démonstration repose sur le lemme crucial suivant (cf. Hörmander [Hö], corollary 4.4.6, et Bombieri [Bo]).

LEMME 4.13. *Soit w une fonction psh sur Y. Alors l'ensemble des points $y \in Y$ au voisinage desquels e^{-w} n'est pas localement sommable est un sous-ensemble analytique de Y.*

La fin de la démonstration reprend l'idée de la méthode de C. O. Kiselman [Ki2]. Pour tous réels $\alpha, \beta > 0$ notons $Z_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des points $y \in Y$ au voisinage desquels $\exp(-U_\alpha/\beta)$ n'est pas localement sommable. Comme la famille (U_α) est croissante en α, on a $Z_{\alpha',\beta'} \supset Z_{\alpha'',\beta''}$ si $\alpha' \leqslant \alpha''$ et $\beta' \leqslant \beta''$.

Soit y_0 un point fixé de Y. Distinguons deux cas suivant que y_0 appartient ou non à E_c. Si $y_0 \notin E_c$ alors $\nu(T, \varphi_{y_0}) < c$ par définition. Choisissons α tel que $\nu(T, \varphi_{y_0}) < \alpha < c$; d'après le lemme 4.6 (a), la fonction U_α est bornée inférieurement au voisinage de y_0, donc $y_0 \notin Z_{\alpha,\beta}$ pour tout $\beta > 0$. Si $y_0 \in E_c$ et si $\alpha < c$, alors le lemme 4.11 implique que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$U_\alpha(y) \leqslant (1-\varepsilon)(c-\alpha)\gamma \log|y-y_0| + C(\varepsilon);$$

cette inégalité entraîne que $\exp(-U_\alpha/\beta)$ est non sommable au voisinage de y_0 dès que $\beta < (c-\alpha)\gamma/2m$. On en déduit donc

$$E_c = \bigcap_{\substack{\alpha<c \\ \beta<(c-\alpha)\gamma/2m}} Z_{\alpha,\beta},$$

ce qui prouve que E_c est un sous-ensemble analytique de Y.

Dans le cas où Y est un espace analytique avec singularités, on peut d'après Hironaka [Hi] trouver une modification lisse $\pi\colon \tilde{Y} \to Y$. Pour tout $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, posons

$$\tilde{\varphi}(x, \tilde{y}) = \varphi(x, \pi(\tilde{y})),$$

$$\tilde{E}_c = \{\tilde{y} \in \tilde{Y}; \nu(T, \tilde{\varphi}_{\tilde{y}}) \geqslant c\}.$$

Alors $E_c = \pi(\tilde{E}_c)$, par suite E_c est analytique comme image propre d'un ensemble analytique (théorème de Remmert [Re1], [Re2]). On obtient donc l'énoncé suivant, qui généralise à la fois le théorème d'analyticité de [Siu] et celui de Kiselman [Ki3].

THÉORÈME 4.14. *Soient X, Y des espaces analytiques complexes, X étant de Stein, et T un courant positif fermé sur X. Soit*

$$\varphi: X \times Y \to [-\infty, +\infty[$$

une fonction psh continue. On suppose que φ est semi-exhaustive relativement à X et que $e^{\varphi(x,y)}$ est localement höldérienne en y sur $X \times Y$. Alors les ensembles de niveau

$$E_c = \{y \in Y; \nu(T, \varphi_y) \geqslant c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de Y.

On peut conjecturer que le théorème 4.14 est encore vrai sans l'hypothèse de continuité höldérienne de e^{φ}, mais comme la plupart des poids φ intéressants vérifient cette hypothèse, il nous semble que la généralisation ainsi obtenue ne serait pas très significative.

Bibliographie

[B-T] BEDFORD, E. & TAYLOR, B. A., A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149 (1982), 1–41.

[Bo] BOMBIERI, E., Algebraic values of meromorphic maps. *Invent. Math.*, 10 (1970), 267–287 and Addendum, *Invent. Math.*, 11 (1970), 163–166.

[C-L-N] CHERN, S. S., LEVINE, H. I. & NIRENBERG, L., Intrinsic norms on a complex manifold. *Global Analysis* (papers in honor of K. Kodaira), p. 119–139, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[De1] DEMAILLY, J.-P., Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32 (1982), 37–66.

[De2] — Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, 19 (1985), 1–124.

[Hi] HIRONAKA, H., Resolution of singularities of an algebraic variety I, II. *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109–326.

[Hö] HÖRMANDER, L., *An introduction to Complex Analysis in several variables*. 2nd edition, North-Holland Math. libr., vol. 7, Amsterdam, London, 1973.

[Ki1] KISELMAN, C. O., The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions. *Invent. Math.*, 49 (1978), 137–148.

[Ki2] — Densité des fonctions plurisousharmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 295–304.

[Ki3] — Un nombre de Lelong raffiné. Communication orale aux Journées Complexes du Sud de la France (mai 1986).

[Le1] LELONG, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 239–262.

[Le2] — Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbf{C}^n$. *J. Analyse Math. Jerusalem*, 12 (1964), 365–407.

[Le3] — *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*. Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris, 1969.

[Re1] REMMERT, R., Projectionen analytischer Mengen. *Math. Ann.*, 130 (1956), 410–441.
[Re2] — Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Ann.*, 133 (1957), 328–370.
[Siu] SIU, Y. T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, 27 (1974), 53–156.
[Sk] SKODA, H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$. *Bull. Soc. Math. France*, 100 (1972), 353–408.
[Th] THIE, P., The Lelong number of a point of a complex analytic set. *Math. Ann.*, 172 (1967), 269–312.

Reçu le 11 juillet, 1986
Révisé le 31 octobre, 1986