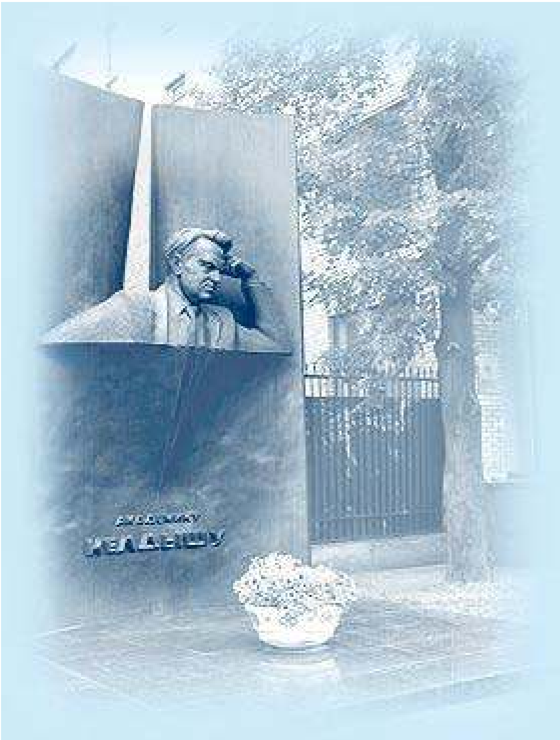
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 64 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Нормализация периодической системы Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Нормализация периодической системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 64. 18 с. doi:10.20948/prepr-2019-64
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-64

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Брюно

Нормализация периодической системы Гамильтона

Москва — 2019

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно

Нормализация периодической системы Гамильтона. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2019.

Сначала напоминается нормальная форма вблизи стационарного решения автономной системы Гамильтона. Затем рассматриваются линейные периодические системы Гамильтона. Для них находятся нормальные формы функций Гамильтона в комплексном и вещественном случаях. Обнаружена специфика вещественного случая в ситуации параметрического резонанса. Затем находятся нормальные формы функций Гамильтона нелинейных периодических систем. Посредством дополнительного канонического преобразования координат такая нормальная форма всегда сводится к автономной системе Гамильтона, которая сохраняет все малые параметры и симметрии исходной системы. Её локальным семействам неподвижных точек соответствуют семейства периодических решений исходной системы. Аналогичная теория строится вблизи периодического решения автономной системы.

Ключевые слова: система Гамильтона, комплексная нормальная форма, вещественная нормальная форма, приведённая нормальная форма, параметрический резонанс.

Alexander Dmitrievich Bruno

Normalization of the periodic Hamiltonian system.

First we remind the normal form near a stationary solution of an autonomous Hamiltonian system. Second we consider the linear periodic Hamiltonian systems. For them we find normal forms of Hamiltonian functions in both complex and real cases. The real case has a specificy in the case of parametric resonance.Then we find normal forms of the Hamiltonian functions for nonlinear periodic systems. By means of additional canonical transformation of coordinates, such system always is reduced to an autonomous Hamiltonian system, which preserves all small parameters and symmetries of the initial system. Its local families of stationary points correspond to families of periodic solutions of the initial system. We make similar theory in vicinity of periodic solution to an autonomous system.

Key words: Hamiltonian system, complex normal form, real normal form, reduced normal form, parametric resonance.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422а.

e-mail: abruno@keldysh.ru

1. Введение

Резонансная нормальная форма автономной системы Гамильтона вблизи стационарного решения, учитывающая только собственные числа матрицы A её линейной части и без ограничений на эту матрицу A, была введена в [1], §12. Оказалось, что она эквивалентна системе Гамильтона с меньшим числом степеней свободы.

Позже была введена слегка более простая сверхрезонансная нормальная форма, которая учитывала жордановы клетки нормальной формы матрицы A. Но эти дополнительные упрощения не позволяли дополнительно понизить число степеней свободы.

Теория резонансной нормальной формы подробно изложена в гл. I книги [2], и здесь она кратко напоминается в разделе 2. В гл. II книги [2] изложена аналогичная теория резонансной нормальной формы для периодической системы Гамильтона. Однако там имеются две недоделки: плохо изложен случай параметрического резонанса и нормальная форма не приводится к автономной системе. Здесь исправляются эти упущения в разделах 3 и 4 соответственно. В разделе 5 эта теория переносится на окрестность периодического решения автономной системы Гамильтона.

2. Нормальная форма вблизи стационарного решения

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}\,, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}\,, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0. \tag{2.2}$$

Если функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\,, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2}, \ldots, \xi_n^{p_n}$. Поскольку точка (2.2) — неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1).

Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Канонические замены координат

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы.

Теорема 1. *Существует каноническое формальное преобразование* (2.4)*, приводящее систему* (2.1) *к нормальной форме*

$$\dot{x}_j = \frac{\partial g}{\partial y_j}\,, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial g}{\partial x_j}\,, \quad j = 1,\ldots,n\,, \tag{2.5}$$

где ряд

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}$$

содержит только резонансные члены с $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$*, а квадратичная часть* $g_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *имеет свою нормальную форму (так что матрица линейной части системы является гамильтоновым аналогом жордановой нормальной формы). Здесь* $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \cdots + p_n\lambda_n$ *— скалярное произведение.*

Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (2.5) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами. При нормализующем преобразовании (2.4) сохраняются малые параметры и линейные автоморфизмы

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\widetilde{\boldsymbol{\xi}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}})\,, \quad t \to \widetilde{t}\,.$$

Локальные семейства периодических решений систем (2.1), (2.5) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a\,, \quad j = 1,\ldots,n\,,$$

где a — свободный параметр.

Для вещественной исходной системы (2.1) коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (2.5) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности, и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \to (\mathbf{X},\mathbf{Y})$ система (2.5) переходит в вещественную систему.

Имеется несколько способов вычисления коэффициентов $g_{\mathbf{pq}}$ нормальной формы (2.5). Наиболее простой описан в книге Журавлёва, Петрова, Шундерюка [3].

3. Нормализация линейной системы Гамильтона

3.1. Линейная система. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{d\psi} = A(\psi)\,\boldsymbol{\zeta}, \tag{3.1}$$

где вектор $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, $A(\psi)$ — матрица, аналитически зависящая от ψ. После замены координат

$$\boldsymbol{\zeta} = B(\psi)\mathbf{z} \tag{3.2}$$

система (3.1) перейдёт в систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = B^{-1}\left(AB - \frac{dB}{d\psi}\right)\mathbf{z}. \tag{3.3}$$

Пусть теперь система (3.1) гамильтонова:

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.4}$$

т. е. $m = 2n$, $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$, где $\Gamma(\psi)$ — симметрическая матрица, $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ и функция Гамильтона $\gamma = \dfrac{1}{2}\langle\boldsymbol{\zeta}, \Gamma(\psi)\boldsymbol{\zeta}\rangle$. Здесь E_n — единичная $n \times n$-матрица и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Если преобразование (3.2) каноническое, т. е.

$$B^*(\psi)JB(\psi) = \delta J, \quad \delta = \text{const} \tag{3.5}$$

(звёздочка — символ транспонирования матрицы), то система (3.3) также гамильтонова с функцией Гамильтона

$$g = \frac{1}{2\delta}\langle\mathbf{z}, B^*\Gamma B\mathbf{z}\rangle + \frac{1}{2\delta}\left\langle\mathbf{z}, B^*J\frac{dB}{d\psi}\mathbf{z}\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\langle\mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle, \tag{3.6}$$

т. е. $G = \delta^{-1}B^*\Gamma B + \delta^{-1}B^*J dB/d\psi$, $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Рассмотрим теперь систему Гамильтона (3.4), в которой матрица $A(\psi) = J\Gamma(\psi)$ имеет по ψ период 2π, т. е. $A(\psi + 2\pi) = A(\psi)$. Посредством линейной канонической замены координат (3.2), (3.5) с 2π-периодической матрицей $B(\psi)$ постараемся получить гамильтониан (3.6) наиболее простого вида. Пусть $Z(\psi)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1). Тогда

$$Z(\psi + 2\pi) = Z(\psi)N,$$

где N — постоянная матрица, $\det N \neq 0$. Для системы Гамильтона она каноническая.

Если для матрицы N существует представление

$$N = \exp(2\pi JL), \tag{3.7}$$

где L — постоянная симметрическая матрица, то, согласно § 1 гл. I книги [2], $L = B_1^* G B_1$, где B_1 — постоянная каноническая матрица и G — нормальная форма матрицы L. Таким образом, преобразование (3.2) с

$$B(\psi) = Z(\psi)\exp(-\psi J G)$$

приводит систему Гамильтона (3.4) к нормальной форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG\mathbf{z}, \quad G = \text{const}, \tag{3.8}$$

с функцией Гамильтона $g = \dfrac{1}{2}\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle$. Однако представление (3.7) имеется не для всякой канонической матрицы N (см. Вильямсон [4]).

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_{2n}$ — собственные числа канонической матрицы N. Вместе с числом $\nu_j = b$ среди них есть и число b^{-1}. Более того, элементарные делители матрицы $\nu E - N$ обладают следующими свойствами:

- если $b \neq \pm 1$ и имеется ровно k элементарных делителей $(\nu - b)^l$, то имеется ровно k элементарных делителей $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$;
- если $b = \pm 1$ и l нечётно, то элементарный делитель $(\nu - b)^l$ встречается чётное число раз.

3.2. Комплексная нормальная форма. Для комплексной системы (3.1) матрица N — комплексная. Неприводимые над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ элементарные делители матрицы $\nu E - N$ относятся к одному из следующих четырёх случаев:

C1) $(\nu - b)^l$ и $\left(\nu - b^{-1}\right)^l$, $b \neq \pm 1$;
C2) $(\nu - b)^l$ и $(\nu - b)^l$, $b = \pm 1$, l — нечётное;
C3) $(\nu - 1)^{2l}$;
C4) $(\nu + 1)^{2l}$.

Посредством постоянной канонической замены координат $\boldsymbol{\zeta}$ матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя четвёрка блоков порядка l, а вне блоков стоят нули. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении $l = n$.

В случаях C1) – C3) существует представление (3.7); при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям C1) – C3) п. 1.Б гл. I книги [2], где

$$a = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\, b = \frac{1}{2\pi}\ln|b| + \frac{i}{2\pi}\arg b + im$$

и m — любое целое число; а именно:

- в случае C1)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ & \\ C & 0 \end{pmatrix} ,$$

где C — жорданова клетка порядка l: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon & a \end{pmatrix}$, т. е.

$$g_2 = a\sum_{j=1}^{l} x_j y_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} \; ; \tag{3.9}$$

- случай C2) с $b = 1$ относится к случаю C1) с $a = im$;
- случай C2) с $b = -1$ относится к случаю C1) с $a = im + \dfrac{i}{2}$;
- в случае C3)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ & \\ C & \sigma\Delta \end{pmatrix} ,$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = 0$, $\sigma = \pm 1$ и диагональная матрица $\Delta = \{1,0,\dots,0\}$, т. е.

$$g_2 = \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} + \frac{1}{2}\sigma y_1^2 \; ; \tag{3.10}$$

- в случае C4) представления (3.7) нет, и комплексная нормальная форма

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\psi} = JG(\psi)\mathbf{z}$$

имеет

$$G = \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ & \\ C & \sigma\Delta\exp(i\psi) \end{pmatrix} ,$$

где C — жорданова клетка порядка l с $a = im + \dfrac{i}{2}$, $\sigma = \pm 1$ [5], т.е.

$$g_2 = a\sum_{j=1}^{l} x_j y_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} + \frac{1}{2}\sigma y_1^2 \exp(i\psi) \, . \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь удвоенные случаи C3) и C4).

C3*) Двум элементарным делителям $(\nu-1)^{2l'}$ и $(\nu-1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму (3.8) случая C2) с $a = im$ и произвольным целым m (только теперь $l = 2l'$ — чётно).

C4*) Двум элементарным делителям $(\nu+1)^{2l'}$ и $(\nu+1)^{2l'}$ можно поставить в соответствие нормальную форму случая C1) с
$a = (2\pi)^{-1}\operatorname{Ln}(-1) = im + \dfrac{i}{2}$.

Итак, посредством комплексной замены (3.2), где $B(\psi)$ — каноническая 2π-периодическая матрица, исходная функция Гамильтона

$$\gamma = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\zeta}, \Gamma(\psi)\boldsymbol{\zeta}\rangle$$

приводится к нормальной форме, являющейся суммой форм вида (3.9), (3.10), (3.11). Она является постоянной, если каждый элементарный делитель вида $(\nu+1)^{2l}$ встречается чётное число раз среди элементарных делителей матрицы $\nu E - N$. Вильямсон [4, теорема 1] доказал, что это условие не только достаточно, но и необходимо для комплексной приводимости.

3.3. Вещественные системы. Для вещественной системы (3.4) матрица N является вещественной. Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E - N$ обладают следующими свойствами. Пусть элементарный делитель $(\nu-b)^l$ имеется точно k раз.

- Если число b комплексное, т. е. $\operatorname{Re} b \cdot \operatorname{Im} b \neq 0$, и $|b| \neq 1$, то элементарные делители $\left(\nu-\bar{b}\right)^l$, $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$ и $\left(\nu-\bar{b}^{-1}\right)^l$ также имеются точно k раз.
- Если число b вещественное или единичного модуля, $b \neq \pm 1$, то $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$ имеется точно k раз.
- Если $b = \pm 1$ и l нечётно, то k должно быть чётным.

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение.

Поэтому элементарные делители матрицы $\nu E - N$ относятся к одному из следующих восьми случаев:

R1) $(\nu-b)^l\left(\nu-\bar{b}\right)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l\left(v-\bar{b}^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b \cdot \operatorname{Im} b \neq 0$, $|b| \neq 1$;
R2) $(\nu-b)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$;
R3) $(\nu-b)^l\left(\nu-\bar{b}\right)^l$, $|b| = 1$, $b \neq \pm 1$;
R4) $(\nu-1)^l$ и $(\nu-1)^l$, l — нечётно;
R5) $(\nu-1)^{2l}$;
R6) $(\nu+1)^l$ и $(\nu+1)^l$, l — нечётно;
R7) $(\nu-b)^l$ и $\left(\nu-b^{-1}\right)^l$, $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$, $b \neq -1$;
R8) $(\nu+1)^{2l}$.

Посредством вещественной постоянной канонической замены координат матрицу $\Gamma(\psi)$ можно привести к такому блочному виду, что каждому из перечисленных случаев отвечает своя группа блоков, а вне этих блоков стоят нули. Поэтому достаточно рассмотреть каждый из этих случаев в предположении, что он исчерпывает матрицу N. В случаях R1) – R7) существует представление (3.7) с вещественной матрицей L; при этом элементарные делители $(\lambda - a)^l$ матрицы $\lambda E - JL$ относятся к случаям R1) – R5) п. 1. В гл. I книги [2] соответственно, где

$$a = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Ln}\,b = \frac{1}{2\pi}\ln b + im.$$

При этом число $\ln b$ однозначно определяется по b, а целое число m надо вычислять дополнительно следующим образом.

Вычисляется любое решение $\boldsymbol{\zeta}(\psi)$ линейной подсистемы вида (3.1), относящейся к одному из случаев R1) – R7). Количество колебаний каждой из его координат на периоде 2π — это и есть число m. Если сделать дополнительное каноническое преобразование

$$\tilde{x}_j = x_j \exp(-im\psi), \quad \tilde{y}_j = y_j \exp(im\psi), \quad j = 1, \ldots, l\,,$$

то получим собственное число $\widetilde{\lambda}\ :\ 0 \leqslant \mathrm{Im}\,\widetilde{\lambda} \leqslant 1$. При этом в случаях R3) и R5) имеется дополнительный вещественных инвариант $\sigma = \pm 1$.

Итак, в случаях R1) – R7) имеется постоянная комплексная нормальная форма гамильтониана

$$g_2 = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z} \right\rangle,$$

которая переводится в вещественную нормальную форму

$$f_2 = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{Z}, F\mathbf{Z} \right\rangle$$

с помощью стандартного канонического преобразования

$$\mathbf{Z} = Q\mathbf{z}, \quad \det Q = 1.$$

При этом подстановка

$$\bar{\mathbf{z}} = P\mathbf{z},$$

где $2n$-матрица $P = \overline{Q}^{-1}Q$, сохраняет гамильтониан. Конкретный вид матриц Q и P для каждого из случаев R1) – R7) описан в главе I книги [2]. Так, в случаях R2) – R7) либо

$$x_j = X_j = \bar{x}_j, \quad y_j = Y_j = \bar{y}_j, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{3.12}$$

либо

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(iX_j - Y_j) = i\bar{y}_j, \quad y_j = \frac{1}{\sqrt{2i}}(iX_j + Y_j) = i\bar{x}_j, \quad j = 1,\ldots,l. \quad (3.13)$$

Теорема 2. *Комплексная запись вещественной нормальной формы в случае R8) — это система* (3.11) *с таким стандартным преобразованием:*

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{2i}\left\{X_j[1 + i\exp(-it)] - Y_j[i + \exp(-it)]\right\}, \\ y_j &= \frac{1}{2i}\left\{X_j[i - \exp(it)] + Y_j[-1 + i\exp(it)]\right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь

$$\bar{x}_j = ix_j\exp(it), \quad \bar{y}_j = -iy_j\exp(-it), \quad \varepsilon_j = i, \sigma = \pm i, j = 1,\ldots,l.$$

Тогда

$$\overline{G}(\psi) = G(\psi)$$

и гамильтониан нормальной формы (3.11) имеет вид

$$g_2 = \lambda\sum_{j=1}^{l} x_j y_j + i\sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} \pm \frac{i}{2}(X_1^2 + Y_1^2 + X_1^2\sin\psi - 2X_1Y_1\cos\psi - Y_1^2\sin\psi).$$

4. Нелинейная нормальная форма

4.1. Нелинейная нормализация. Рассмотрим систему Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad (4.1)$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами, который разлагается в сходящийся ряд Пуассона

$$\gamma = \sum_{m} \gamma_{\mathbf{pq}m}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\exp(im\psi), \quad (4.2)$$

начинающийся с квадратичных членов g_2 по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$.

Сделаем линейное каноническое преобразование $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \longrightarrow \mathbf{x},\mathbf{y}$, которое 2π-периодично по ψ и приводит квадратичную часть гамильтониана системы

(4.1) к комплексной нормальной форме, являющейся суммой частей вида (3.9), (3.10), (3.11). Тогда на главной диагонали матрицы JG стоят её собственные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n, -\lambda_1,\ldots,-\lambda_n$. Обозначим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Гамильтониан (4.2) примет вид

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y},\psi) = \sum g_{\mathbf{pq}m}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}y^{\mathbf{q}}\exp(im\psi)\,. \tag{4.3}$$

Назовём его нормальной формой, если

1) его форма g_2 является нормальной формой (3.9), (3.10), (3.11),
2) в разложении (4.2) имеются только резонансные члены, для которых

$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q},\lambda\rangle + im = 0. \tag{4.4}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Теорема 3. *Для гамильтониана* (4.3) *существует формальная каноническая замена координат* $\mathbf{x},\mathbf{y},\psi \longrightarrow \mathbf{u},\mathbf{v},\varphi$*:*

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{w} + \mathbf{b}(\mathbf{w},\varphi),\ \psi = \varphi + b_{2n+1}(\mathbf{w},\varphi),$$

2π*-периодическая по* φ*, которая переводит гамильтониан* (4.3) *в нормальную форму*

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},\varphi) = \sum h_{\mathbf{pq}m}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}}\exp(im\varphi) \tag{4.5}$$

со свойством (4.4).

Доказательство см. в гл. I и II книги [2].

Теорема 4. *Каноническое преобразование*

$$u_j = \tilde{u}_j\exp\left(-i\operatorname{Im}\lambda_j\varphi\right),\quad v_j = \tilde{v}_j\exp\left(i\operatorname{Im}\lambda_j\varphi\right),\quad j = 1,\ldots,n\,,$$

приводит нормальную форму гамильтониана (4.5) *к постоянному степенному ряду*

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pq}m}\tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}}, \tag{4.6}$$

где

$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q},\operatorname{Re}\boldsymbol{\lambda}\rangle = 0,\quad \langle \mathbf{p}-\mathbf{q},\operatorname{Im}\boldsymbol{\lambda}\rangle = -m, \tag{4.7}$$

$\mathbf{p}$*,* $\mathbf{q}$*,* m *— целочисленны,* $\mathbf{p},\mathbf{q}\geqslant 0$*. При этом* $\tilde{h}_{\mathbf{pq}m} = h_{\mathbf{pq}m}$*, если* $\|\mathbf{p}\|+\|\mathbf{q}\|\geqslant 3$*, квадратичные члены имеют вид*

$$\tilde{h}_2(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\left\langle \widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{G}\widetilde{\mathbf{w}}\right\rangle,$$

где матрица $J\widetilde{G} = JG - \operatorname{Im}\Lambda$ *с диагональной матрицей* $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$*, и отсутствуют линейные члены по* $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \widetilde{\mathbf{w}}$.

Доказательство сводится к проверке равенства (3.5), которое здесь очевидно. Здесь $\|\mathbf{p}\| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Для исходного вещественного гамильтониана (4.2) комплексные координаты $\mathbf{z}$ связаны с вещественными координатами $\mathbf{Z} = (\mathbf{X},\mathbf{Y})$ стандартным преобразованием, состоящим из замен (3.12), (3.13), (3.14), а координаты $\mathbf{w}$ и $\widetilde{\mathbf{w}}$ связаны этим же преобразованием с соответствующими вещественными координатами $\mathbf{W}$ и $\widetilde{\mathbf{W}}$, [2].

Таким образом, приходим к автономной системе Гамильтона с n степенями свободы.

4.2. Малые параметры. Пусть исходный гамильтониан разлагается в степенной ряд по малым параметрам $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$. По теореме 5.1 гл. I книги [2] при нормализующем преобразовании малые параметры не меняются. Поэтому получаем автономный гамильтониан (4.6), (4.7), где коэффициенты $\tilde{h}_{\mathbf{p},\mathbf{q},m}$ суть степенные ряды по малым параметрам $\boldsymbol{\mu}$. При $\boldsymbol{\mu} = 0$ эти коэффициенты с $\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| = 1$ равны нулю, а с $\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| = 2$ соответствуют (4.4). Но при $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ это не обязательно.

Для системы, соответствующей гамильтониану (4.6), (4.7), можно вычислить семейства неподвижных точек вблизи точки $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{v}} = 0$, $\boldsymbol{\mu} = 0$. Это делается с помощью степенной геометрии (книга [6]). Им соответствуют семейства периодических решений исходной периодической системы Гамильтона. Вообще укорочения функции Гамильтона и системы Гамильтона изучены в гл. IV книги [6]. Они не всегда совпадают. Примеры таких вычислений см. в [7].

4.3. Линейные канонические автоморфизмы. Пусть исходная система (4.1) обладает линейным каноническим автоморфизмом

$$\boldsymbol{\zeta}^* = M\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}^*, \quad \psi = \theta\widetilde{\psi},$$

где M — постоянная матрица $2n \times 2n$ и $\theta = \text{const}$. Согласно теореме 2.3 гл. I книги [2] приведённая нормальная форма (4.6), (4.7) также обладает соответствующим линейным каноническим автоморфизмом. Впрочем, она может иметь дополнительные автоморфизмы, которые не имеют соответствия в исходной системе.

5. Нормальная форма в окрестности периодического решения

5.1. Локальные координаты. Пусть вещественная функция $\widetilde{\gamma}\left(\widetilde{\boldsymbol{\xi}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}}\right)$ аналитична в некоторой области $\mathcal{C}$ вещественного пространства $\mathbb{R}^{2n+2}$ с координатами

$$\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_{n+1}), \widetilde{\boldsymbol{\eta}} = (\widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_{n+1}).$$

Тогда через каждую точку области $\mathcal{C}$ проходит одна траектория (она же решение) $\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t)$ системы Гамильтона.

$$\dot{\widetilde{\xi}}_j = \frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial \widetilde{\eta}_j}, \quad \dot{\widetilde{\eta}}_j = -\frac{\partial \widetilde{\gamma}}{\partial \widetilde{\xi}_j}, \quad j = 1, \cdots, n+1\,. \tag{5.1}$$

Траектории образуют фазовое пространство этой системы. Пусть у системы (5.1) есть периодическое решение $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ с периодом $T = T(\mathcal{M})$. В дальнейшем под $\mathcal{U}$ будем понимать достаточно малую окрестность решения $\mathcal{M}, \mathcal{U} \subset \mathcal{C}$. В окрестности $\mathcal{U}$ существуют такие аналитические функции $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, ρ, ψ от $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}$, что

1) траектория $\mathcal{M}$ определяется равенствами $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0, \rho = 0$;

2) функция ψ является циклической (угловой) по $\operatorname{mod} 2\pi$;

3) окрестность $\mathcal{U}$ является косым произведением $(2n+1)$-мерного шара на цикл $\psi \in [0, 2\pi]$;

4) координаты $\boldsymbol{\xi}, \rho$ и $\boldsymbol{\eta}, \psi$ являются канонически сопряжёнными, так что в окрестности $\mathcal{U}$ система (5.1) в этих координатах гамильтонова:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \cdots, n\,, \\ &\dot{\rho} = \frac{\partial \gamma}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Гамильтониан γ в окрестности $\mathcal{U}$ является 2π-периодическим по ψ и разлагается в сходящийся ряд Тейлора

$$\gamma = \sum \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{pq}l}(\psi) \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} \rho^l\,, \tag{5.3}$$

где целочисленные $\mathbf{p} \geqslant 0, \mathbf{q} \geqslant 0, l \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{p}} = \xi_1^{p_1} \cdots \xi_n^{p_n}$, аналитические функции $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{pq}l}(\psi)$ имеют по ψ период 2π и разлагаются в ряды Фурье. Поскольку на решении $\mathcal{M}$ имеем $\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0, \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0, \dot{\rho} = 0$, то на $\mathcal{M}$ система (5.2) принимает вид

$$0 = \gamma_{0\mathbf{e}_j 0}(\psi), \quad 0 = \gamma_{\mathbf{e}_j 00}(\psi), \quad j = 1, \ldots, n\,, \tag{5.4}$$

$$0 = \frac{d\gamma_{000}}{d\psi}/, \quad \dot{\psi} = -\gamma_{001}(\psi)\,, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{e}_j$ — j-й единичный вектор. Из (5.5), в частности, следует, что $\gamma_{000}(\psi)$ =const. Так как гамильтониан можно задавать с точностью до постоянного слагаемого, положим $\gamma_{000} = 0$.

Поскольку $\mathcal{M}$ — периодическое решение, то на нём нет неподвижных точек; следовательно, $\gamma_{001}(\psi) \neq 0$ при вещественных ψ. Пусть $\dfrac{1}{\lambda_0}$ — среднее значение функции $\dfrac{1}{\gamma_{001}(\psi)}$, тогда

$$\frac{\lambda_0}{\gamma_{001}(\psi)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\psi + b_m \sin m\psi) .$$

Положим

$$g(\psi) = \int \frac{\lambda_0 \, d\psi}{\gamma_{001}(\psi)} = \psi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (a_m \sin m\psi - b_m \cos m\psi)$$

и сделаем каноническую замену

$$\widetilde{\rho} = \frac{\gamma_{001}(\psi)}{\lambda_0} \rho, \quad \widetilde{\psi} = g(\psi) . \tag{5.6}$$

Тогда на $\mathcal{M}$ уравнение для $\widetilde{\psi}$ есть $\dot{\widetilde{\psi}} = -\lambda_0$, т.е. $\widetilde{\psi} = -\lambda_0 t + \mathrm{const}$. Поскольку $\mathcal{M}$ — периодическое решение с периодом T, а $\widetilde{\psi}$ имеет период 2π, то $-\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, где значение T может быть любого знака.

В дальнейшем будем считать, что преобразование (5.6) уже сделано, и будем опускать тильды над ρ и ψ. Если теперь разложить гамильтониан γ в ряд вида (5.3), где вместо ρ и ψ стоят $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{\psi}$, то, опуская тильды, вместо (5.5) получим равенство

$$\gamma_{000}(\psi) = 0, \quad -\gamma_{001}(\psi) = \frac{2\pi}{T} . \tag{5.7}$$

Итак, определены свободный и линейный члены разложения (5.3).

5.2. Линейная нормализация. Пусть $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$. Для разложения (5.3) через $\gamma_{kl}(\boldsymbol{\zeta},\rho,\psi)$ будем обозначать однородную форму по $\boldsymbol{\zeta}$ порядка k, содержащую ρ только в виде множителя ρ^l. Согласно (5.4) и (5.7), в гамильтониане (5.3) члены наименьшего порядка суть

$$\gamma_{20} + \gamma_{01} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\zeta}, \Gamma(\psi)\boldsymbol{\zeta} \rangle - \rho \right) . \tag{5.8}$$

Пусть преобразование (5.2) каноническое в координатах $\boldsymbol{\zeta}$, т.е. удовлетворяет равенству (3.5); если одновременно с ним сделать преобразование

$$\rho = \delta\tilde{s} - \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{z}, B^* J \frac{dB}{d\psi} \mathbf{z} \right\rangle , \quad \psi = \psi ,$$

то получим комплексную нормальную форму (см. (3.10)):

$$g_{20} + g_{01} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{2}\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle - \tilde{s}\right), \quad G = \text{const}. \tag{5.9}$$

При этом на главной диагонали матрицы JG стоят её собственные числа $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_n, -\lambda_1\,, \ldots, -\,\lambda_n$.

5.3. Нелинейная нормализация. В результате канонической замены (3.2), (5.8) гамильтониан (5.3) примет вид $g(\mathbf{x},\mathbf{y},\tilde{s},\psi) = \delta^{-1}\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\rho,\psi)$. Разложим его в ряд Пуассона с $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y},\tilde{s},\psi) = \sum g_{\boldsymbol{pq}lm}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}}\tilde{s}^{l}\exp(im\psi). \tag{5.10}$$

Этот ряд сходится абсолютно для достаточно малых $|\mathbf{x}|,|\mathbf{y}|,|\tilde{s}|,|\mathrm{Im}\,\psi|$.

Теперь будем искать наиболее простой гамильтониан

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},\tilde{r},\varphi) = h_{20} + h_{01} + \sum h_{\boldsymbol{pq}lm}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}}\tilde{r}^{l}\exp(im\psi), \tag{5.11}$$

к которому приводится гамильтониан (5.10) посредством нелинейной канонической замены координат $\mathbf{x},\mathbf{y},\tilde{s},\psi \to \mathbf{u},\mathbf{v},\tilde{r},\varphi$:

$$\begin{gathered} \mathbf{z} = \mathbf{w} + \mathbf{b}(\mathbf{w},\tilde{r},\varphi), \\ \tilde{s} = \tilde{r} + b_{2n+1}(\mathbf{w},\tilde{r},\varphi), \quad \psi = \varphi + b_{2n+2}(\mathbf{w},\tilde{r},\varphi), \end{gathered} \tag{5.12}$$

где $\mathbf{w} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Пусть форма $g_{20}+g_{01}$ есть (5.10). Тогда на главной диагонали матрицы JG стоят её собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Обозначим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Гамильтониан (5.12) назовём *комплексной нормальной формой*, если:

1) его форма $h_{20} + h_{01}$ является нормальной формой (5.9);
2) в разложении (5.11) имеются только такие члены, для которых

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}\rangle + im = 0\,.$$

Теорема 5 ([2]). *Для гамильтониана* (5.10) *существует формальное преобразование* (5.12) *к нормальной форме* (5.11).

5.4. Приведённая нормальная форма.

Теорема 6. *Каноническое преобразование*

$$u_j = \tilde{u}_j \, \exp(-i \, \mathrm{Im}\lambda_j \varphi), \, v_j = \tilde{v}_j \, \exp(i \, \mathrm{Im}\lambda_j \varphi), \, j = 1, \ldots, n \, ,$$

приводит нормальную форму гамильтониана (5.11) *к постоянному степенному ряду*

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}},\tilde{r}) = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pq}lm} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}} \tilde{r}^{l} \, , \tag{5.13}$$

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathrm{Re}\, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0, \; \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathrm{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle = -m, \tag{5.14}$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q}, l, m$ *— целочисленны,* $\mathbf{p}, \mathbf{q}, l \geqslant 0$. *При этом* $\tilde{h}_{\mathbf{pq}lm} = h_{\mathbf{pq}lm}$, *если* $\|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| \geqslant 3$, *квадратичные члены имеют вид*

$$\tilde{h}_{20} + \tilde{h}_{01} = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{2} \left\langle \widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{G} \widetilde{\mathbf{w}} \right\rangle - \tilde{r} \right) \, ,$$

где матрица $J\widetilde{G} = JG - i \, \mathrm{Im}\Lambda$ *с диагональной матрицей* $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$ *и отсутствуют линейные члены по* $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}}) = \widetilde{\mathbf{w}}$. *Здесь* $\|\mathbf{p}\| = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Таким образом, приходим к автономной системе Гамильтона (5.13), (5.14) с n степенями свободы, двумя дополнительными уравнениями

$$\dot{r} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\partial \tilde{h}}{\partial r} \tag{5.15}$$

и дополнительным малым параметром r, которую *назовём приведённой нормальной формой*. Она позволяет изучать бифуркации семейств периодических решений системы (4.1) в окрестности резонансного периодического решения.

Для исходного вещественного гамильтониана (5.3) комплексные координаты **z** связаны с вещественными координатами $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ стандартным преобразованием (3.12) – (3.14), а координаты **w** и $\widetilde{\mathbf{w}}$ связаны этим же преобразованием с соответствующими вещественными координатами **W** и $\widetilde{\mathbf{W}}$. Координаты r и φ вещественны.

Другие свойства приведённой нормальной формы (сохранение малых параметров и линейных автоморфизмов) аналогичны таким же свойствам нормальной формы (5.12), описанным в пп. 2.Г и 2.Д главы II книги [2].

5.5. Понижение числа степеней свободы. Пусть k — число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ системы уравнений

$$\langle \mathbf{p}, \mathrm{Re}\, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p}, \mathrm{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0 \, .$$

Тогда приведённая нормальная форма (5.12) — (5.15) каноническим преобразованием сводится к автономной системе Гамильтона с $k+1$ степенью свободы и с $n-k$ параметрами согласно §3 главы I книги [2].

5.6. Локальные семейства неподвижных точек. Здесь справедливо всё, что было сказано в конце подраздела 4.2, только надо учитывать ещё один малый параметр.

Список литературы

[1] Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды Моск. Матем. Общества, 1972, т. 26, с. 199–226

[2] Брюно А.Д. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1990.

[3] Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015, 291 с.

[4] Williamson J. The exponential representation of canonical matrices // Amer. Math. J. 1939. Vol. 61, No 4, pp. 897–911.

[5] Брюно А.Д. Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 223. 15 с. doi:10.20948/prepr-2018-223
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-223

[6] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

[7] Брюно А.Д. Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 57. 27 с. doi:10.20948/prepr-2019-57
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-57

Оглавление