В. Н. Чернега, О. В. Манько, В. И. Манько, Ж Сеилов, Новые информационно-энтропийные соотношения для коэффициентов Клебша–Гордана, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 356–366

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9255

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ**
**И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**
**ФИЗИКА**
**Том 193, № 2**
**ноябрь, 2017**



**В. Н. Чернега[*], О. В. Манько[*†], В. И. Манько[*‡], Ж. Сеилов[‡]**

# НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННО-ЭНТРОПИЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША–ГОРДАНА

С помощью свойств энтропии Шеннона и энтропии Тсаллиса получены новые неравенства для коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$; для этого квадраты коэффициентов Клебша–Гордана используются в качестве распределения вероятностей. Полученные соотношения являются новыми характеристиками корреляций в квантовых системах двух спинов. Также найдены новые неравенства для полиномов Хана и гипергеометрических функций ${}_3F_2$.

**Ключевые слова:** информационно-энтропийные неравенства, коэффициенты Клебша–Гордана, $3j$-символы Вигнера, полиномы Хана, энтропия Шеннона, энтропия Тсаллиса, свойство субаддитивности.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9255

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Коэффициенты Клебша–Гордана позволяют вычислить собственные функции оператора суммарного момента импульса составной системы, определяемого квантовыми числами $j$, $m$, где $j$ – значение момента и $m$ – проекция момента на выбранное направление, $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$, по известным собственным функциям операторов момента импульса двух подсистем, которые определяются квантовыми числами $j_1$, $m_1$ и $j_2$, $m_2$ [1]–[4]. С теоретико-групповой точки зрения коэффициенты Клебша–Гордана позволяют в явном виде записать результат сложения

Исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

[*]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: vchernega@gmail.com, omanko@sci.lebedev.ru, manko@lebedev.ru

[†]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: seilov@live.ru

моментов, задающийся в виде тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $SU(2)$, как прямую сумму представлений этой группы. Свойства коэффициентов Клебша–Гордана и связанных с ними $3j$-символов [5] были детально изучены в работах [1], [6]–[8]. Связь коэффициентов Клебша–Гордана и полиномов Хана [9], [10] была найдена в работе [11].

В недавних работах [12]–[16] было показано, что классическое распределение вероятностей для кудита – квантовой системы без подсистем – удовлетворяет информационно-энтропийным соотношениям, таким как свойства субаддитивности и сильной субаддитивности [17]. Данные свойства известны для составных систем: субаддитивность – это неотрицательность совместной информации квантовой системы из двух подсистем, а сильная субаддитивность – это неотрицательность условной информации квантовой системы из трех подсистем.

Целью настоящей работы является получение новых неравенств для коэффициентов Клебша–Гордана и $3j$-символов, которые позволяют выявить новые свойства этих коэффициентов, не описанные в работах [1], [6]–[8]. На основе этих неравенств можно описать корреляции в системе двух спинов с помощью вводимой в терминах коэффициентов Клебша–Гордана совместной информации. Отметим, что физический смысл коэффициентов Клебша–Гордана и их физические свойства обсуждались в связи с исследованием волновой функции в задачах восстановления изображений [18]. Также мы выводим новые неравенства для полиномов Хана, используя их связь с коэффициентами Клебша–Гордана, указанную в работе [19]. Эти неравенства получаются на основе представления набора квадратов коэффициентов Клебша–Гордана как распределения вероятностей. В нашем исследовании мы используем подход работы [13], согласно которому информационно-энтропийные свойства системы без подсистем аналогичны свойствам составных систем. В рамках этой аналогии в настоящей работе мы применяем понятия совместной информации Шеннона, информации Тсаллиса и свойство субаддитивности к распределению вероятностей, связанному с квадратами коэффициентов Клебша–Гордана.

Структура статьи такова. В разделе 2 мы рассматриваем основные свойства коэффициентов Клебша–Гордана и $3j$-символов. В разделе 3 мы описываем информационно-энтропийные неравенства для систем с двумя подсистемами, а также выводим их аналоги для коэффициентов Клебша–Гордана. В разделе 4 мы получаем аналогичные неравенства для полиномов Хана. В разделе 5 мы даем заключение и перспективы.

## 2. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША–ГОРДАНА

Коэффициенты Клебша–Гордана $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle$ могут быть определены с помощью следующего выражения [2], [3]:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle \psi^{(1)}_{j_1 m_1} \psi^{(2)}_{j_2 m_2}, \tag{1}$$

где $m_1 + m_2 = m$. Здесь $\psi_{jm}$ – волновая функция системы со спином $j$ и его проекцией $m$, $\psi^{(1)}_{j_1 m_1}$ и $\psi^{(2)}_{j_2 m_2}$ – волновые функции подсистем со спинами $j_1$ и $j_2$ и их проекциями $m_1$ и $m_2$.

$3j$-Символ Вигнера $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$ определяется следующим образом (см., например, книгу [2]):

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Свойства $3j$-символов и коэффициентов Клебша–Гордана давно изучены и рассмотрены, например, в работах [1], [7], [20]. Одним из них является свойство ортогональности:

$$\begin{gathered} (2j+1) \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}, \\ \sum_{j,m} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & -m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'}\, \delta_{m_2 m_2'}. \end{gathered} \tag{3}$$

Такие же соотношения можно записать и для коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{gathered} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'}\, \delta_{mm'}, \\ \sum_{j,m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm \rangle = \delta_{m_1 m_1'}\, \delta_{m_2 m_2'}. \end{gathered} \tag{4}$$

Явное выражение для $3j$-символов и коэффициентов Клебша–Гордана имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \left[ \frac{(j_1 + j_2 - j_3)!\, (j_1 - j_2 + j_3)!\, (-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times [(j_1 + m_1)!\, (j_1 - m_1)!\, (j_2 + m_2)!\, (j_2 - m_2)!\, (j_3 + m_3)!\, (j_3 - m_3)!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_z \big\{ [(-1)^{z + j_1 - j_2 - m_3}]\, [z!\, (j_1 + j_2 - j_3 - z)!\, (j_1 - m_1 - z)! \times \\ &\qquad \times (j_2 + m_2 - z)!\, (j_3 - j_2 + m_1 + z)!\, (j_3 - j_1 - m_2 + z)!]^{-1} \big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Физический смысл коэффициентов Клебша–Гордана обсуждается, например, в обзоре [7]. В работах [21], [22] было введено томографическое представление спиновых состояний. В этом представлении состояния спина описываются распределением вероятностей $\omega(m, \alpha, \beta)$ проекций спина $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ на направления, задаваемые единичным вектором $\vec{n} = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$. Это распределение вероятностей, называемое спиновой томограммой, определяет матрицу плотности квантового состояния $\rho_{mm'}$ и содержит полную информацию о состоянии системы, эквивалентную информации, содержащейся в матрице плотности. В томографическом подходе к описанию спиновых состояний коэффициенты Клебша–Гордана и $3j$-символы играют важную роль, поскольку входят в явные формулы, связывающие томограммы, которые могут быть получены экспериментально. А именно, с помощью $3j$-символов и D-функций Вигнера можно выразить взаимосвязь между томографическим распределением вероятностей

$$\omega(m_1, \alpha, \beta) = \sum_{m_1' = -j}^{j} \sum_{m_2' = -j}^{j} D^{(j)}_{m_1 m_1'}(\alpha, \beta, \gamma)\big|_{\gamma=0}\, \rho^{(j)}_{m_1' m_2'}\, D^{(j)*}_{m_1 m_2'}(\alpha, \beta, \gamma)\big|_{\gamma=0}$$

и матрицей плотности спинового состояния $\rho^{(j)}_{m_1' m_2'}$ [21]:

$$-\sum_{j_3=0}^{2j}\sum_{m_3=-j_3}^{j_3}(2j_3+1)^2\times$$
$$\times\sum_{m_1=-j}^{j}\int(-1)^{m_1}\omega(m_1,\alpha,\beta)D^{(j_3)}_{0m_3}(\alpha,\beta,\gamma)\big|_{\gamma=0}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} j & j & j_3\\ m_1 & -m_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & j_3\\ m_1' & -m_2' & m_3\end{pmatrix}\frac{d\omega}{8\pi^2}=(-1)^{m_2'}\rho^{(j)}_{m_1' m_2'}. \qquad (6)$$

Также с помощью коэффициентов Клебша–Гордана можно записать соотношения, которые связывают неприводимый тензорный оператор $\widehat{T}^{(j)}_{LM}$ группы $SU(2)$ и оператор $|jm\rangle\langle jm'|$ (см., например, монографию [1]):

$$\widehat{T}^{(j)}_{LM}=\sum_{m_1,m_2=-j}^{j}(-1)^{j-m_1}\langle jm_2 j(-m_1)|LM\rangle|jm_2\rangle\langle jm_1|,$$
$$|jm\rangle\langle jm'|=\sum_{L=0}^{2j}\sum_{M=-L}^{L}(-1)^{j-m'}\langle jmj(-m')|LM\rangle\widehat{T}^{(j)}_{LM}.$$

Неприводимый тензорный оператор, записанный в такой форме, позволяет получить явное выражение для ядра звездочного произведения томографических символов физических наблюдаемых для спиновых систем [23]. Ядро такого звездочного произведения используется для вычисления статистических характеристик (средних значений, высших моментов и корреляций) спиновых наблюдаемых.

Для любых фиксированных значений спинов $j_1$ и $j_2$ можно построить матрицу коэффициентов Клебша–Гордана, в которой по столбцам меняются значения $j$ и $m$, а по строкам меняются значения $m_1$ и $m_2$. Полученная матрица, которую мы обозначаем как $U$, является унитарной матрицей размера $N=(2j_1+1)(2j_2+1)$. Фактически, поскольку $3j$-символы и коэффициенты Клебша–Гордана действительны, матрица $U$ – это действительная ортогональная матрица. Любые соотношения для коэффициентов Клебша–Гордана, как известные [1], [3], [5], [7], так и полученные в настоящей работе, позволяют прояснить физические свойства измеряемых статистических характеристик состояний спина, задаваемых квантовыми томограммами.

## 3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ ПОДСИСТЕМАМИ. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША–ГОРДАНА

Матрицу, элементы которой суть квадраты соответствующих элементов матрицы $U$ коэффициентов Клебша–Гордана, обозначим как $\mathcal{B}$:

$$\langle j_1m_1j_2m_2|\mathcal{B}|jm\rangle\equiv|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2.$$

Введем новые обозначения для индексов элементов матрицы $\mathcal{B}$: сделаем замены $j_1m_1j_2m_2\leftrightarrow r$, $jm\leftrightarrow s$. Индекс $r=1,2,\ldots,N$, где $N=(2j_1+1)(2j_2+1)$, обозначает номера строк матрицы $\mathcal{B}$, индекс $s=1,2,\ldots,N$ отвечает номерам столбцов. Указанная замена может быть представлена формулой

$$\langle j_1m_1j_2m_2|\mathcal{B}|jm\rangle\equiv\langle r|\mathcal{B}|s\rangle=\mathcal{B}_{rs},\qquad r,s=1,2,\ldots,N.$$

Полученная матрица является бистохастической: суммы элементов каждого столбца и каждой строки дают единицу,

$$\sum_{r=1}^{N}\mathcal{B}_{rs}=\sum_{s=1}^{N}\mathcal{B}_{rs}=1,$$

кроме того, $\mathcal{B}_{rs}\geqslant 0$. Это означает, что каждый столбец и каждая строка могут быть интерпретированы как распределения вероятностей.

Напомним, что для распределения вероятностей $p_i$, $i=1,\dots,M$, определена энтропия Шеннона [24]

$$H(p_i)=-\sum_{i=1}^{M}p_i\log p_i \tag{7}$$

(здесь и далее log означает логарифм по основанию 2). Эта энтропия неотрицательна и характеризует степень упорядоченности в системе с флуктуирующими наблюдаемыми.

Если система содержит подсистемы, то ее энтропия удовлетворяет ряду неравенств. Одно из них – свойство субаддитивности

$$H(A)+H(B)\geqslant H(AB), \tag{8}$$

где $A$ и $B$ являются двумя подсистемами составной системы $AB$. Распределения вероятностей подсистем могут быть найдены как маргинальные распределения вероятностей составной системы $AB$. Размерности подсистем $A$, $B$ и системы $AB$ в случае спиновых наблюдаемых таковы: $n_1=2j_1+1$, $n_2=2j_2+1$ и $N=n_1n_2$ соответственно. Энтропии подсистем $A$, $B$ и системы $AB$ определяются формулой (7) с соответствующими размерностями $M=n_1$, $M=n_2$ и $M=N=n_1n_2$.

Энтропия Шеннона может быть выражена в терминах коэффициентов Клебша–Гордана для любой строки или столбца матрицы $\mathcal{B}$. Свойство субаддитивности (8) для коэффициентов Клебша–Гордана имеет вид

$$\begin{aligned}
&-\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\log\biggl[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\biggr]-\\
&-\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\biggr]\geqslant\\
&\qquad\geqslant-\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle|^2\biggr].
\end{aligned}$$

Это неравенство является новой характеристикой коэффициентов Клебша–Гордана, дополняющей известные в литературе [1], [6]–[8].

Понятие совместной информации связано со свойством субаддитивности и определяется выражением (см., например, монографию [17])

$$I=H(A)+H(B)-H(AB)\geqslant 0. \tag{9}$$

Значение совместной информации характеризует степень корреляций в системе из двух подсистем. Используя выражение (9), мы вводим понятие совместной информации $I$ в терминах коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned}I = {} & \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr] - \\ & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr] - \\ & - \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr] \geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В соответствии с общими свойствами информации, если совместная информация равна нулю, в системе отсутствуют корреляции. Для спиновых систем степень корреляций, описываемых коэффициентами Клебша–Гордана в (10), определяется значением совместной информации $I$. Таким образом, физический смысл получаемых энтропийно-информационных неравенств заключается в том, что они характеризуют наличие и степень квантовых корреляций в системе двух спинов.

Для системы с двумя подсистемами известно неравенство Араки–Либа [25]:

$$H(AB) \geqslant |H(A) - H(B)|. \tag{11}$$

Данное неравенство также можно представить в терминах коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned} & -\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr] \geqslant \\ & \geqslant \biggl| - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr] + \\ & \quad + \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2 \log\biggl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle|^2\biggr]\biggr|. \end{aligned}$$

Это новая энтропийная характеристика коэффициентов Клебша–Гордана.

Одним из наиболее известных обобщений энтропии Шеннона является энтропия Тсаллиса [26], определяемая для распределения вероятностей $p_i$, $i = 1, \dots, M$, формулой

$$T_q(p_i) = \frac{1}{1-q}\biggl(\sum_{i=1}^{M} p_i^q - 1\biggr),$$

где $q$ называется энтропийным индексом. В пределе $q \to 1$ значение энтропии Тсаллиса стремится к энтропии Шеннона. Для системы с двумя подсистемами энтропия Тсаллиса также обладает свойством субаддитивности

$$T_q(AB) \leqslant T_q(A) + T_q(B). \tag{12}$$

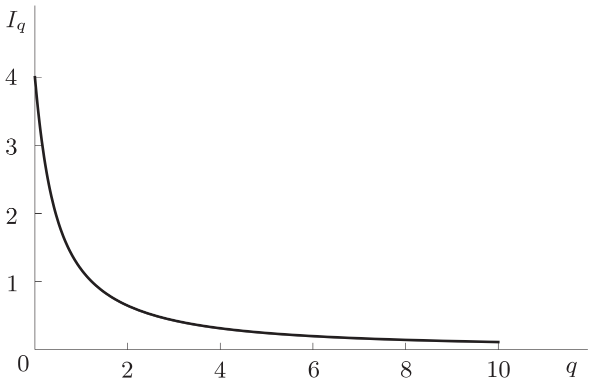


Рис. 1. Зависимость информации Тсаллиса $I_q$ от энтропийного индекса $q$ для систем с квантовыми числами $j_1 = 5/2$, $j_2 = 2$, $j = 9/2$, $m = 1/2$.

В случае систем двух спинов неравенство субаддитивности для энтропии Тсаллиса можно записать через коэффициенты Клебша–Гордана. Таким образом, мы получаем неравенство, являющееся новой характеристикой коэффициентов Клебша–Гордана, дополняющей известные [1], [6]–[8]:

$$\frac{1}{1-q}\left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|^{2q}-1\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1-q}\left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\left(\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|^{2}\right)^q-1\right]+$$
$$+\frac{1}{1-q}\left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\left(\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}|\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|^{2}\right)^q-1\right].$$

На рис. 1 показана зависимость информации Тсаллиса $I_q = T_q(A)+T_q(B)-T_q(AB)$ от энтропийного индекса $q$ для системы двух частиц со спинами $j_1 = 5/2$, $j_2 = 2$ и состояния $j = 9/2$, $m = 1/2$. Как и совместная информация Шеннона, информация Тсаллиса не принимает отрицательные значения. В данном случае в пределе $q \to 1$ информация Тсаллиса совпадает с совместной информацией для энтропии Шеннона: $I_q \to I = 1.176$. Полученное значение, соответствующее совместной информации, вдвое меньше ее максимального для рассматриваемого примера значения $I_{\max} = \min\{H(A), H(B)\} = \log 5 = 2.32$, но не равно нулю, что сигнализирует о корреляции в данной системе двух спинов.

## 4. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХАНА

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha\beta)}(x,N)$ могут быть определены с помощью последовательности гипергеометрических функций

$${}_3F_2(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k(a_3)_k}{(b_1)_k(b_2)_k}\frac{z^k}{k!},$$

где $(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+k-1)$ – символ Похгаммера, следующим образом:

$$h_n^{(\alpha\beta)}(x,N) = \frac{(-1)^n (N-n)_n (\beta+1)_n}{n!}\, {}_3F_2(-n,-x,\alpha+\beta+n+1;\beta+1,1-N;1).$$

Коэффициенты Клебша–Гордана в терминах полиномов Хана задаются следующей формулой [19], [27]:

$$\begin{aligned}(-1)^{j_1-m_1}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle &= \frac{\sqrt{\rho(x)}}{d_n} h_n^{(\alpha\beta)}(x,N) = \\ &= \frac{\sqrt{\rho(j_2-m_2)}}{d_{j-m}} h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2, j_1+j_2-m+1),\end{aligned}$$

где $n=j-m$, $x=j_2-m_2$, $N=j_1+j_2-m+1$, $\alpha=m-j_1+j_2$, $\beta=m+j_1-j_2$. В определении полиномов Хана использованы весовая функция

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}, \qquad \alpha>-1, \quad \beta>-1,$$

и квадратичная норма

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Квадрат коэффициентов Клебша–Гордана в терминах полиномов Хана имеет вид

$$|\langle j_1 m_1 j_2 m_2|jm\rangle|^2 = \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2, j_1+j_2-m+1)]^2.$$

Используя данное выражение, связывающее коэффициенты Клебша–Гордана и полиномы Хана, мы можем переписать свойство субаддитивности (8) как

$$\begin{aligned}&-\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\ &\times \log\Bigl[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2\Bigr] - \\ &-\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\ &\times \log\Bigl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2\Bigr] \geqslant \\ &\geqslant -\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\ &\times \log\Bigl[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2}[h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2\Bigr].\end{aligned}$$

Аналогичным образом находим выражение для неравенства Араки–Либа (11) в терминах полиномов Хана:

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\
&\quad \times \log\Big[ \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \Big] \geqslant \\
&\geqslant \Big| - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\
&\quad \times \log\Big[ \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \Big] + \\
&\quad + \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \times \\
&\quad \times \log\Big[ \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \Big] \Big|.
\end{aligned}
$$

Неравенство субаддитивности для энтропии Тсаллиса (12) в терминах полиномов Хана записывается как

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1-q} \Big[ \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^{2q} - 1 \Big] \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{1-q} \Big[ \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \Big( \sum_{m_2=-j_2}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \Big)^q - 1 \Big] + \\
&+ \frac{1}{1-q} \Big[ \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \Big( \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2-m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2,m+j_1-j_2)}(j_2-m_2,j_1+j_2-m+1)]^2 \Big)^q - 1 \Big].
\end{aligned}
$$

Выражая полиномы Хана через гипергеометрические функции, также можно получить аналоги неравенств Араки–Либа, свойства субаддивности для энтропии Шеннона и свойства субаддитивности для энтропии Тсаллиса в терминах гипергеометрических функций. В частности, свойство субаддитивности (8) для гипергеометрической функции ${}_3F_2$ имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \Big\{ \Big[ \frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \Big] \times \\
&\quad \times \Big[ \frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \Big]^2 \Big\} \times \\
&\quad \times \log\Big[ \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \Big\{ \Big[ \frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \Big] \times \\
&\quad \times \Big[ \frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \Big]^2 \Big\} \Big] - \\
&- \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \Big\{ \Big[ \frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \Big] \times \\
&\quad \times \Big[ \frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \Big]^2 \Big\} \times
\end{aligned}
$$

$$\times \log\Bigg[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\Bigg\{\Bigg[\frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)}\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)}\frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)}\Bigg]^2\Bigg\}\Bigg]\geqslant$$
$$\geqslant-\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\Bigg\{\Bigg[\frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)}\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)}\frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)}\Bigg]^2\Bigg\}\times$$
$$\times\log\Bigg[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\Bigg\{\Bigg[\frac{(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\,\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)}\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)}\frac{{}_3F_2(m-j,m_2-j_2,m+j+1;m+j_1-j_2+1,m-j_1-j_2;1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)}\Bigg]^2\Bigg\}\Bigg].$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом представленной работы являются новые информационно-энтропийные неравенства для коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$. Полученные неравенства и введенная в терминах коэффициентов Клебша–Гордана совместная информация характеризуют степень квантовых корреляций в системе двух спинов. Получены новые неравенства для полиномов Хана и для гипергеометрических функций ${}_3F_2$. Использованный метод может быть применен при выведении новых соотношений для коэффициентов Клебша–Гордана в случае других групп Ли и квантовых групп. На основе развитого в настоящей работе подхода можно вывести новые неравенства для $6j$-символов на основе известного свойства сильной субаддитивности энтропии системы, содержащей три подсистемы.

## Список литературы


[1] L. C. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and application*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **8**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, М., 2004.

[3] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1958.

[4] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*: *Recent Advances*, Mathematics and Its Applications, **316**, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[5] E. P. Wigner, “On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of S. R. groups”, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Part A. The Scientific Papers*, eds. A. S. Wightman, Springer, Berlin, 1993, 608–654.

[6] Yu. F. Smirnov, S. K. Suslov, J. M. Shirokov, “Clebsch–Gordan coefficients and Racah coefficients for the SU(2) and SU(1, 1) groups as the discrete analogs of the Pöschl–Teller potential wavefunctions”, *J. Phys. A*: *Math. Gen.*, **17**:11 (1984), 2157–2175.

[7] Я. А. Смородинский, Л. А. Шелепин, “Коэффициенты Клебша–Гордана с разных сторон”, *УФН*, **106**:1 (1972), 3–45.

[8] Z. Plunař, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy, “Clebsch–Gordan coefficients of SU(3) with simple symmetry properties”, *J. Phys. A*: *Math. Gen.*, **19**:1 (1986), 21–28.

[9] W. Hahn, "Über orthogonalpolynome, die $q$-differenzengleichungen genügen", *Math. Nachr.*, **2**:1–2 (1949), 4–34.

[10] Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.

[11] S. Karlin, J. R. McGregor, "The Hahn polynomials, formulas and applications", *Scr. Math.*, **26** (1961), 33–46.

[12] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, "No signaling and strong subadditivity condition for tomographic $q$-entropy of single qudit states", *Phys. Scr.*, **90**:7 (2015), 074052.

[13] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, "No-signaling property of the single-qudit-state tomogram", *J. Russ. Laser Res.*, **35**:6 (2014), 582–589.

[14] V. N. Chernega, O. V. Man'ko, "Tomographic and improved subadditivity conditions for two qubits and a qudit with $j = 3/2$", *J. Russ. Laser Res.*, **35**:1 (2014), 27–38.

[15] M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, "The quantum strong subadditivity condition for systems without subsystems", *Phys. Scr.*, **2014**:T160 (2014), 014030.

[16] V. N. Chernega, O. V. Manko, V. I. Manko, "New inequality for density matrices of single qudit states", *J. Russ. Laser Res.*, **35**:5 (2014), 457–461.

[17] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland Series in Statistics and Probability, **1**, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[18] L. E. Vicent, K. B. Wolf, "Unitary transformation between Cartesian- and polar-pixellated screens", *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**:8 (2008), 1875–1884.

[19] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985.

[20] Р. М. Аскерова, У. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, "Об общей аналитической формуле для $U_q(su(3))$-коэффициентов Клебша–Гордана", *ЯФ*, **64**:12 (2001), 2170–2175.

[21] В. И. Манько, О. В. Манько, "Томография спиновых состояний", *ЖЭТФ*, **112**:3(9) (1997), 796–804.

[22] V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, "Positive distribution description for spin states", *Phys. Lett. A*, **229**:6 (1997), 335–339.

[23] O. Castaños, R. López-Peña, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko, "Kernel of star-product for spin tomograms", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:16 (2003), 4677–4688.

[24] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System Tech. J.*, **27**:3 (1948), 379–423;; **27**:4 (1948), 623–656.

[25] H. Araki, E. H. Lieb, "Entropy Inequalities", *Commun. Math. Phys.*, **18**:2 (1970), 160–170.

[26] C. Tsallis, "Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: historical background and present status", *Nonextensive Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistical Mechanics and Its Applications* (Okazaki, February 15–18, 1999), Lecture Notes in Physics, **560**, eds. S. Abe, Y. Okamoto, Springer, Berlin, 2001, 3–98.

[27] N. M. Atakishiyev, S. K. Suslov, "The Hahn and Meixner polynomials of an imaginary argument and some of their applications", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**:10 (1985), 1583–1596.

Поступила в редакцию 26.07.2016,
после доработки 10.12.2016