



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 90 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф.

Численное решение задачи
Эйнфельдта на основе
разрывного метода
Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 90. 22 с. doi:[10.20948/prepr-2019-90](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-90)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-90>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Ю.А. Криксин, В.Ф. Тишкин

**Численное решение задачи Эйнфельдта
на основе разрывного метода Галеркина**

Москва — 2019

Криксин Ю. А., Тишкин В.Ф.

Численное решение задачи Эйнфельдта на основе разрывного метода Галеркина

На основе нового вариационного принципа вывода модифицированных уравнений разрывного метода Галеркина, предложенного для решения уравнений Эйлера, разработан численный алгоритм, в котором в качестве переменных, зависящих от времени и пространства, используются плотность газа, плотность импульса и давление. Соответствующие численные решения удовлетворяют дискретным аналогам законов сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийного неравенства. В качестве примера, иллюстрирующего эффективность разработанного алгоритма, рассматривается задача Эйнфельдта. Численные расчеты показывают существенное улучшение качества получаемых приближенных решений.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, разрывный метод Галеркина, ограничитель наклонов, энтропийное неравенство

Yury Anatolievich Kriksin, Vladimir Fedorovich Tishkin

Numerical solution of the Einfeldt problem based on the discontinuous Galerkin method

The numerical algorithm for solving Euler equations based on the new variational principle of deriving the modified equations of the discontinuous Galerkin method is developed. As the sought variables which depend on time and space the gas density, momentum density and pressure are used. The corresponding numerical solutions satisfy discrete analogues of the conservation laws of mass, momentum, total energy, and entropic inequality. The Einfeldt problem is considered as the example illustrating the effectiveness of the developed algorithm. Numerical calculations show a significant improvement in the quality of the resulting approximate solutions.

Key words: gasdynamic equations, the discontinuous Galerkin method, slope limiter, entropic inequality

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

Авторы благодарят центр информационных технологий университета Гронингена, Нидерланды (Center for Information Technology of the University of Groningen, the Netherlands) за предоставленную возможность проведения расчетов.

1. Введение

В последнее время энтропийно устойчивые методы решения газодинамических задач [1-14] приобретают все большую популярность. В основе мотивации разработки энтропийно устойчивых методов лежит стремление повысить качество численных решений, включив в численные алгоритмы наряду с традиционно учитываемыми законами сохранения второе начало термодинамики, описываемое энтропийным неравенством. Второе начало термодинамики запрещает отрицательное производство энтропии в элементах сплошной среды [15], а энтропийно устойчивые методы удовлетворяют дискретному аналогу энтропийного неравенства, выражающему этот запрет. В [12] приводится обзор последних научных работ, связанных с энтропийной устойчивостью численных методов. Эти методы включают также разрывный метод Галеркина (РМГ), показавший высокую эффективность в задачах механики сплошных сред [13, 16-23].

Одной из особенностей применения РМГ в газодинамических задачах является лимитирование [16-18] старших коэффициентов метода в целях обеспечения устойчивости получаемых численных решений. Первоначальные ожидания, которые имели место в процессе написания теоретических работ [11] и [14], были связаны с тем, что с обеспечением энтропийного условия отпадет необходимость в лимитировании. Однако, как показали соответствующие тесты, опубликованные в [12] и [13], лимитирование тесно связано с требованием монотонности используемых конечно-элементных (КЭ) аппроксимаций, которое не может быть проигнорировано в процессе создания численных алгоритмов. Как оказалось, монотонность КЭ-аппроксимаций сильно коррелирует с энтропийным условием, хотя эти два условия не вытекают одно из другого. Дело обстоит так, что построение высокоточных численных решений существенно зависит от разумного сочетания степени монотонности КЭ-аппроксимаций и неотрицательного производства энтропии.

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию новых версий энтропийно устойчивого РМГ, в которых удовлетворительно воспроизводятся не только механические, но и термодинамические (ТД) параметры газодинамического течения. Известным примером в этой связи является модельная задача Эйнфельдта [13, 17, 24] о распространении двух симметричных волн разрежения из центра расчетной области в противоположные стороны. В результате такого распространения в центре образуется участок с низкой плотностью газа. В этом случае, как отмечается в работе [25], методы, основанные на законе сохранения полной энергии, часто приводят к плохому предсказанию поведения внутренней энергии в режимах, где кинетическая энергия доминирует. Характерной особенностью этой модельной задачи для большинства таких численных алгоритмов является появление в численном решении нефизического экстремума (пика) удельной

внутренней энергии в центре расчетной области, высота которого остается конечной при измельчении пространственной сетки, если не применять специальные приемы типа сглаживания и усреднения [17].

По нашему мнению, одна из причин неудовлетворительного описания ТД процессов в задаче Эйнфельдта заключается в выборе переменных интегрирования уравнений Эйлера. В большинстве используемых в настоящее время численных алгоритмов в качестве таковых традиционно используются консервативные переменные: плотность газа, плотность импульса и плотность полной энергии. Разумеется, такой выбор весьма удобен для имплементации законов сохранения в вычислительный алгоритм. В то же время детализированное описание ТД параметров системы может оказаться затруднительным вследствие нарушения правильного баланса между кинетической и внутренней энергиями.

В настоящей работе используется нетрадиционный набор переменных интегрирования: *плотность газа, плотность импульса и давление*. При таком выборе переменных интегрирования уравнения, описывающие законы сохранения массы и импульса, остаются неизменными. Однако уравнение сохранения полной энергии должно быть переписано соответствующим образом. Хотя КЭ-аппроксимация уравнения энергии усложняется в РМГ, мы полагаем, что предлагаемый выбор переменных оправдан по крайней мере тем, что пара переменных плотность–давление определяет (с учетом уравнения состояния) термодинамическое состояние системы в рассматриваемой точке пространства–времени. Отмеченная особенность, как мы считаем, служит важной предпосылкой правильного описания ТД процессов в газодинамической системе.

Изложение материала строится в следующей последовательности. Во втором разделе описана постановка задачи, в третьем разделе выводятся уравнения РМГ в переменных *плотность газа, плотность импульса и давление*, в четвертом разделе на основе вариационного подхода предлагается оригинальный способ обеспечения монотонности КЭ-аппроксимаций, неотрицательности давления и энтропийной устойчивости. Пятый раздел содержит результаты численных расчетов и их обсуждение. В шестом разделе сформулированы выводы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Эйлера, описывающую одномерную газовую динамику (ГД) в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad x \in [a, b] \subset (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

с некоторыми граничными условиями и начальным условием

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \\ U^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(\varepsilon + u^2/2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ [\rho(\varepsilon + u^2/2) + p]u \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений (1) воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \gamma = c_p / c_v = 1.4, \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения: p – давление, ρ – плотность, u – скорость, ε – удельная внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты, c_p и c_v – теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Предположим, что начальные и граничные условия для системы уравнений (1) таковы, что давление в расчетной области $x \in [a, b]$ в течение рассматриваемого промежутка времени остается не меньшим некоторой величины $p_{\min} > 0$. Поставим задачу найти численное решение системы уравнений (1), удовлетворяющее соответствующим дискретным аналогам законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Реалистичная модель газодинамического течения учитывает как законы механики, так и неравновесной термодинамики, поэтому помимо уравнения (1) искомое численное решение должно также удовлетворять дискретному аналогу энтропийного неравенства

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s u)}{\partial x} \geq 0, \quad (5)$$

выражающего необратимость неравновесных термодинамических процессов, в том числе газодинамических, в котором безразмерная удельная энтропия идеального газа определяется равенством

$$s = \ln p - \gamma \ln \rho. \quad (6)$$

Энтропийное неравенство (5) служит условием отбора физически реализуемых решений.

3. Разрывный метод Галеркина как основа для построения численного алгоритма

Приближенное решение задачи (1) строится с помощью РМГ [16] в виде конечной линейной комбинации линейно независимых функций и последующем определении коэффициентов этой комбинации как решения некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В расчетной области $[a, b]$ зададим сетку с $N+1$ узлами x_i , упорядоченными по возрастанию ($x_0 = a, x_N = b$). Граничные условия могут быть заданы с помощью дополнительных фиктивных ячеек, располагающихся слева от $x_0 = a$ и справа от $x_N = b$. Приближенное решение (1) в каждой расчетной ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ представим в виде конечной линейной комбинации ортогональных функций

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{U}_{ki}(t) \varphi_{ki}(x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

В качестве системы ортогональных функций в ячейке K_i выберем полиномы Лежандра ($\varphi_{ki}(x) = P_k(z)$, $x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i]/2$, $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$, ... ; $z \in [-1, 1]$). В РМГ с численными потоками Годунова коэффициенты разложения $\mathbf{U}_{ki}(t)$ в правой части (7) определяются как решение системы дифференциальных уравнений [12, 13, 20]

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} \varphi_{ki}(x) dx = \varphi_{ki}(x_{i-1}) \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - \\ - \varphi_{ki}(x_i) \mathbf{F}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{d\varphi_{ki}(x)}{dx} dx; \quad k = 0, 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (8)$$

где обозначение $\mathbf{U}_G(x_i, t)$ используется для значений консервативных переменных, являющихся решением задачи распада разрыва [26] $\mathbf{U}(x_i + 0, t) - \mathbf{U}(x_i - 0, t)$ в узле x_i в момент времени t .

В дальнейшем будет удобно представить вектора \mathbf{U} и \mathbf{F} в (1) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = (\rho, I, E)^T = (\rho, \rho u, (\gamma - 1)^{-1} p + \rho u^2 / 2)^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\gamma(\gamma - 1)^{-1} p + \rho u^2 / 2)u)^T = \\ = (I, \rho^{-1} I^2 + p, (\gamma(\gamma - 1)^{-1} p + \rho^{-1} I^2 / 2) \rho^{-1} I)^T. \end{aligned} \quad (9)$$

В отличие от работы [13] в качестве переменных интегрирования выберем величины ρ , I и p , ограничившись значением $n=1$ (см. (7)), т.е. положим в каждой расчетной ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(t) + \rho_1(t)z, & I &= I_0(t) + I_1(t)z, & p &= p_0(t) + p_1(t)z, \\ z &= (x_i - x_{i-1})^{-1}(2x - x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что в этом случае первые две компоненты вектора \mathbf{U} $U^{(1)} = \rho$ и $U^{(2)} = I$ сохраняют свою обычную аппроксимацию вида (7), в то время как аппроксимация третьей (энергетической) компоненты $U^{(3)}$ в ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ приобретает более сложный вид

$$U^{(3)} = E = p_0(t) + p_1(t)z + \frac{[I_0(t) + I_1(t)z]^2}{2[\rho_0(t) + \rho_1(t)z]}. \quad (11)$$

Воспользовавшись соотношениями (8), получим уравнения РМГ для коэффициентов $\rho_k(t)$, $I_k(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{dt} &= (x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(1)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(1)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))], \\ \frac{dI_0}{dt} &= (x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(2)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(2)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))], \\ \frac{d\rho_1}{dt} &= -3(x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(1)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) + F^{(1)}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - \int_{-1}^1 F^{(1)}(\mathbf{U})dz], \\ \frac{dI_1}{dt} &= -3(x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(2)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) + F^{(2)}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - \int_{-1}^1 F^{(2)}(\mathbf{U})dz] \end{aligned} \quad (12)$$

и $p_k(t)$ ($k=0,1$)

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= (\gamma - 1)\{(x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))] - \frac{dQ_0}{dt}\}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -3(\gamma - 1)\{(x_i - x_{i-1})^{-1}[F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) + F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - \\ &\quad - \int_{-1}^1 F^{(3)}(\mathbf{U})dz] + \frac{dQ_1}{dt}\}, \end{aligned} \quad (13)$$

в ячейке K_i , где

$$Q_m(t) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{[I_0(t) + I_1(t)z]^2}{\rho_0(t) + \rho_1(t)z} z^m dz; \quad m = 0, 1. \quad (14)$$

Функции $Q_m(t)$ полностью определяются значениями коэффициентов $\rho_k(t)$, $I_k(t)$. Их производные по времени могут быть явно получены с использованием правых частей соотношений (12). Обратим внимание на то, что функция $Q_0(t)$ допускает простую интерпретацию в качестве дискретного аналога средней плотности кинетической энергии газа в ячейке K_i .

4. Вариационная энтропийная регуляризация РМГ

Для удобства дальнейшего изложения введем векторное обозначение

$$\mathbf{V}_{ki}(t) = (\rho_{ki}(t), I_{ki}(t), p_{ki}(t))^T, \quad k = 0, 1 \quad (15)$$

для коэффициентов РМГ в расчетной ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$, определяемых уравнениями (12)-(14). Правые части уравнений (12) и (13) обозначим соответственно как

$$\mathbf{B}_{ki}(t) = (B_{ki}^{(1)}(t), B_{ki}^{(2)}(t), B_{ki}^{(3)}(t))^T, \quad k = 0, 1. \quad (16)$$

Система уравнений (12) и (13) в обозначениях (15) и (16) может быть переписана в виде

$$\frac{d\mathbf{V}_{ki}(t)}{dt} = \mathbf{B}_{ki}, \quad k = 0, 1. \quad (17)$$

Для высокоточного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) (17) широко используются явные методы Рунге-Кутты. В целях упрощения изложения рассмотрим простейшую явную схему первого порядка (схему Эйлера).

$$\tau^{-1}[\mathbf{V}_{ki}(t + \tau) - \mathbf{V}_{ki}(t)] = \mathbf{B}_k, \quad k = 0, 1. \quad (18)$$

Обобщение предлагаемого подхода состоит в его применении к каждой стадии явного метода Рунге-Кутты.

Как известно, в общем случае интегрирование СОДУ для коэффициентов РМГ на основе явных формул (8) может давать нефизические численные решения [16, 18]. Для достижения удовлетворительных результатов численного интегрирования необходимо модифицировать правую часть СОДУ (18) с учетом следующих условий: 1) значения вектора \mathbf{V}_0 должны обеспечить выполнение дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и энергии (свойство консервативности); 2) старшие коэффициенты РМГ ($k = 1$)

должны быть ограничены по модулю, чтобы обеспечить монотонность КЭ-аппроксимаций приближенного решения и выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства (5) [13].

4.1. Обеспечение консервативности схемы

Сначала рассмотрим вопрос о консервативности схемы (18). Отметим, что дискретные аналоги законов сохранения массы и импульса выполняются благодаря равенствам

$$\begin{aligned} V_{0,i}^{(m)}(t) &= U_{0,i}^{(m)}(t), \\ B_{0,i}^{(m)}(t) &= (x_i - x_{i-1})^{-1} [F^{(m)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(m)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))], \end{aligned} \quad m=1, 2. \quad (19)$$

В целях выполнения дискретного аналога закона сохранения энергии уравнение для определения третьей компоненты $V_{0,i}^{(3)}(t + \tau)$ схемы (18) должно быть модифицировано. Интегрируя соотношение (8) при $k=0$ по времени в пределах $[t, t + \tau]$ для третьей компоненты (11) вектора \mathbf{U} в ячейке $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ и аппроксимируя интегральный член с первым порядком точности

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\tau} [F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t')) - F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t'))] dt' \approx \\ &\approx \tau [F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))], \end{aligned} \quad (20)$$

приходим к равенству

$$E_{0,i}(t + \tau) = E_{0,i}(t) + \tau (x_i - x_{i-1})^{-1} [F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))], \quad (21)$$

где (см. (14))

$$E_{0,i}(t) = (\gamma - 1)^{-1} p_{0,i}(t) + Q_{0,i}(t). \quad (22)$$

С учетом (11) получим консервативную по полной энергии схему первого порядка точности по времени со специальной формулой для вычисления коэффициента $p_{0,i}(t + \tau)$ на следующем временном слое

$$\begin{aligned} \tau^{-1} [p_{0,i}(t + \tau) - p_{0,i}(t)] &= (\gamma - 1) \{ \tau^{-1} [Q_{0,i}(t) - Q_{0,i}(t + \tau)] + \\ &+ (x_i - x_{i-1})^{-1} [F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)) - F^{(3)}(\mathbf{U}_G(x_i, t))] \}, \end{aligned} \quad (23)$$

представляющего собой среднее давление в ячейке K_i . Отметим, что среднее давление $p_{0,i}(t + \tau)$ может быть также непосредственно получено из равенства (22)

$$p_{0,i}(t + \tau) = V_{0,i}^{(3)}(t + \tau) = (\gamma - 1)[E_{0,i}(t + \tau) - Q_{0,i}(t + \tau)], \quad (24)$$

когда средняя полная энергия $E_{0,i}(t + \tau)$ и коэффициенты РМГ $V_{ki}^{(m)}(t + \tau)$ ($k = 0, 1$; $m = 1, 2$) уже вычислены на новом временном слое.

В отличие от случая консервативных переменных (9), в котором коэффициенты РМГ на новом временном слое $U_{0,i}(t + \tau)$ вычисляются независимо от старших коэффициентов $U_{ki}(t + \tau)$ ($k > 0$) [13], следствием использования новых переменных (15) является зависимость коэффициента $p_{0,i}(t + \tau)$ от коэффициентов плотности $\rho_{ki}(t + \tau)$ и плотности импульса $I_{ki}(t + \tau)$ ($k = 0, 1$), входящих в выражение для дискретного аналога плотности кинетической энергии, определяемого равенством (14) при $k = 0$.

4.2. Монотонность КЭ-аппроксимации и энтропийная устойчивость схемы

В целях обеспечения монотонности КЭ-аппроксимации и энтропийной устойчивости воспользуемся вариационным подходом, аналогичным использованному в работе [13]. Отметим, что правая часть СОДУ (17) и явной схемы первого порядка (18), относящихся к ячейке K_i , является точкой безусловного минимума квадратичной функции

$$\begin{aligned} W_0(\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 z - \mathbf{B}_{0,i} - \mathbf{B}_{1,i} z|^2 dz = \\ &= |\mathbf{C}_0 - \mathbf{B}_{0,i}|^2 + \frac{1}{3} |\mathbf{C}_1 - \mathbf{B}_{1,i}|^2, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$|\mathbf{C}| = \{[C^{(1)}]^2 + [C^{(2)}]^2 + [C^{(3)}]^2\}^{1/2}. \quad (26)$$

Произведем следующую замену переменных в (25)

$$\mathbf{C}_k = \tau^{-1}[\tilde{\mathbf{V}}_{ki} - \mathbf{V}_{ki}(t)], \quad \tilde{\mathbf{V}}_{ki} = \mathbf{V}_{ki}(t + \tau), \quad k = 0, 1. \quad (27)$$

В результате такой замены получим новую целевую функцию

$$\tilde{W}_0(\tilde{\mathbf{V}}_{0,i}, \tilde{\mathbf{V}}_{1,i}) = |\tau^{-1}[\tilde{\mathbf{V}}_{0,i} - \mathbf{V}_{0,i}(t)] - \mathbf{B}_{0,i}|^2 + \frac{1}{3} |\tau^{-1}[\tilde{\mathbf{V}}_{1,i} - \mathbf{V}_{1,i}(t)] - \mathbf{B}_{1,i}|^2 \quad (28)$$

для определения значений коэффициентов РМГ на следующем временном слое $t + \tau$.

Идея вариационной энтропийной регуляризации РМГ [11, 13, 14] состоит в замене векторов \mathbf{V}_{ki} правой части схемы (18) на вектора $\tilde{\mathbf{V}}_{ki} = \tau^{-1}[\tilde{\mathbf{V}}_{ki} - \mathbf{V}_{ki}(t)]$, значения которых доставляют условный минимум квадратичной функции (28) при линейных ограничениях

$$|\tilde{V}_{1,i}^{(j)}| \leq D_i^{(j)},$$

$$D_i^{(j)} = \min\left(\frac{\delta}{2}|\tilde{V}_{0,i}^{(j)} - \tilde{V}_{0,i-1}^{(j)}|, \frac{\delta}{2}|\tilde{V}_{0,i}^{(j)} - \tilde{V}_{0,i+1}^{(j)}|, \sigma_j|\tilde{V}_{0,i}^{(j)}|\right), \quad (29)$$

$$\delta \in [0, 2], \quad \sigma_1, \sigma_3 \in (0, 1); \quad \sigma_2 = +\infty,$$

обеспечивающих монотонность КЭ-аппроксимации и положительность плотности и давления, и выпуклом ограничении

$$\int_{-1}^1 S(\mathbf{V}(x, t + \tau)) dz \geq C_S, \quad x = [(1-z)x_{i-1} + (1+z)x_i]/2, \quad (30)$$

$$\mathbf{V}(x, t) = \mathbf{V}_{0,i}(t) + \mathbf{V}_{1,i}(t)z,$$

являющимся дискретным аналогом энтропийного неравенства (5), где

$$C_S = \int_{-1}^1 S(\mathbf{V}(x, t)) dz - 2\tau(x_i - x_{i-1})^{-1} H(\mathbf{U}_G(x_i, t)) - H(\mathbf{U}_G(x_{i-1}, t)), \quad (31)$$

$$S(\mathbf{V}) = \rho s, \quad H(\mathbf{U}) = I s,$$

а безразмерная удельная энтропия s определена равенством (6).

После того, как консервативность схемы будет обеспечена, как это описано в п. 4.2, число искоемых коэффициентов сократится вдвое, поскольку коэффициенты $\tilde{V}_{0,i}^{(1)}$ и $\tilde{V}_{0,i}^{(2)}$ выражаются через правые части первых двух уравнений (18), а коэффициент $\tilde{V}_{0,i}^{(3)}$ – через коэффициенты $\tilde{V}_{1,i}^{(1)}$ и $\tilde{V}_{1,i}^{(2)}$ и правую часть третьего из уравнений (18). Однако целевая функция (28) уже не будет квадратичной по векторной переменной $\tilde{\mathbf{V}}_{1,i}$, в результате чего задача ее условной минимизации резко усложнится. Чтобы избежать такого усложнения, применим альтернативную двухэтапную процедуру вариационной энтропийной регуляризации, изложенную ниже.

Представим целевую функцию (28) в виде суммы двух слагаемых

$$\tilde{W}_0(\tilde{\mathbf{V}}_{0,i}, \tilde{\mathbf{V}}_{1,i}) = \tilde{W}_1 + \tilde{W}_2, \quad (32)$$

где

$$\tilde{W}_1 = \sum_{j=1}^2 [(\tau^{-1}(\tilde{V}_{0,i}^{(j)} - V_{0,i}^{(j)}) - B_{0,i}^{(j)})^2 + \frac{1}{3}(\tau^{-1}(\tilde{V}_{1,i}^{(j)} - V_{1,i}^{(j)}) - B_{1,i}^{(j)})^2], \quad (33)$$

$$\tilde{W}_2 = (\tau^{-1}(\tilde{V}_{0,i}^{(3)} - V_{0,i}^{(3)}) - B_{0,i}^{(3)})^2 + \frac{1}{3}(\tau^{-1}(\tilde{V}_{1,i}^{(3)} - V_{1,i}^{(3)}) - B_{1,i}^{(3)})^2. \quad (34)$$

На первом этапе проводится приближенная условная минимизация квадратичной функции \tilde{W}_1 с линейными ограничениями (29) при $j=1, 2$ и ограничением снизу по среднему давлению

$$\tilde{V}_{0,i}^{(3)} = p_{0,i}(t + \tau) \geq p_*, \quad (35)$$

где $p_* > 0$ является параметром алгоритма.

Отметим, что ограничение (35) является выпуклым, так как в силу (14) и (24) среднее давление с обратным знаком $-p_{0,i}(t + \tau)$ является выпуклой функцией по переменным $\tilde{V}_{ki}^{(j)}$ ($j=1, 2$). В целях упрощения вычислений сначала проведем условную минимизацию функции (33) только с линейными ограничениями (29) без учета выпуклого ограничения (35). Последняя задача решается аналитически

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{0,i}^{(j)} &= V_{0,i}^{(j)} + \tau B_{0,i}^{(j)}, & \tilde{V}_{1,i}^{(j)} &= \min(D_i^{(j)}, |R_{1,i}^{(j)}|) \text{sign}(R_{1,i}^{(j)}), \\ R_{1,i}^{(j)} &= V_{1,i}^{(j)} + \tau B_{1,i}^{(j)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее проверяем выполнение выпуклого ограничения (35). Если последнее выполнено, то задача условной минимизации функции (33) решена точно. В противном случае переходим к приближенной условной минимизации функции (33) с учетом ограничения (35). С этой целью находим наибольший на отрезке $\lambda \in [0, 1]$ корень λ_{\max} выпуклой вверх функции

$$\Phi(\lambda) = (\gamma - 1)[E_{0,i}(t + \tau) - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{[\tilde{V}_{0,i}^{(2)} + \lambda \tilde{V}_{1,i}^{(2)} z]^2}{\tilde{V}_{0,i}^{(1)} + \lambda \tilde{V}_{1,i}^{(1)} z} dz] - p_*. \quad (37)$$

Вместо значений $\tilde{V}_{1,i}^{(j)}$ в качестве приближенного решения задачи условной минимизации функции (33) используются значения $\lambda_{\max} \tilde{V}_{1,i}^{(j)}$. Для определения корня уравнения (37) целесообразно использовать метод Ньютона. В дальнейшем за решением (точным или приближенным) только что рассмотренной задачи на условный минимум сохраним обозначение $\tilde{V}_{ki}^{(j)}$ ($j=1, 2$).

На втором этапе фиксируем найденные на первом этапе значения коэффициентов РМГ $\tilde{V}_{ki}^{(j)}$ ($j=1, 2$). С учетом консервативности схемы (23) по полной энергии значение среднего давления (24) также становится фиксированным. Оно полностью определяется значениями $\tilde{V}_{ki}^{(j)}$ ($j=1, 2$) и потоками на границах ячейки K_j . Вследствие такой фиксации функция (34) зависит только от одного аргумента $\tilde{V}_{1,i}^{(3)} = p_{1,i}(t + \tau)$ и является квадратичной. По аналогии с первым этапом выполним условную минимизацию функции (34) с линейным ограничением (29) при $j=3$. Точное решение этой задачи определяется соответствующим соотношением (36), в котором $j=3$. Далее проверяем, удовлетворяет ли найденное решение дискретному аналогу энтропийного неравенства (30). В случае положительного результата проверки задача второго этапа решена. Тогда получаем полный набор коэффициентов РМГ $\tilde{V}_{ki}^{(j)}$ ($j=1, 2, 3$), который определяет приближенное решение системы (1) в момент времени $t + \tau$. Если же неравенство (30) не выполняется, то находим наибольший на отрезке $\mu \in [0, 1]$ корень μ_{\max} функции

$$\Omega(\mu) = \int_{-1}^1 (\tilde{V}_{0,i}^{(1)} + \mu \tilde{V}_{1,i}^{(1)} z) [\ln(\tilde{V}_{0,i}^{(3)} + \mu \tilde{V}_{1,i}^{(3)} z) - \gamma \ln(\tilde{V}_{0,i}^{(1)} + \mu \tilde{V}_{1,i}^{(1)} z)] dz - C_S, \quad (38)$$

где

$$\tilde{V}_{0,i}^{(3)} = (\gamma - 1) [E_{0,i}(t + \tau) - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{[\tilde{V}_{0,i}^{(2)} + \mu \tilde{V}_{1,i}^{(2)} z]^2}{\tilde{V}_{0,i}^{(1)} + \mu \tilde{V}_{1,i}^{(1)} z} dz]. \quad (39)$$

После вычисления корня μ_{\max} ($j=1, 2, 3$) в качестве старших коэффициентов РМГ используются значения $\mu_{\max} \tilde{V}_{1,i}^{(j)}$ вместо значений $\tilde{V}_{1,i}^{(j)}$, а соответствующее скорректированное значение правой части (39) при $\mu = \mu_{\max}$ принимается в качестве среднего давления $p_{0,i}(t + \tau)$.

4.3. Вычисление определенных интегралов

Все определенные интегралы, значения которых необходимы в процессе реализации РМГ в переменных (15), могут быть вычислены с использованием элементарных первообразных соответствующих подынтегральных функций. Эти интегралы могут быть сведены к двум типовым определенным интегралам

$$X_m^n(k) = \int_{-1}^1 \frac{z^n}{(1 + kz)^m} dz, \quad m=1, 2; \quad n=0, 1, 2, 3, 4 \quad (40)$$

и

$$Y^n(k) = \int_{-1}^1 z^n \ln(1+kz) dz, \quad n=0,1; \quad (41)$$

которые вычисляются аналитически с использованием элементарных первообразных подынтегральных функций в (40) и (41) [27] и формулы Ньютона-Лейбница, если $|k| \geq k^*$. Для малых значений $|k| < k^*$ предпочтительнее разложить подынтегральные функции в степенной ряд по z и интегрировать этот ряд почленно. В наших расчетах было использовано значение $k^* = 0.17$. Для обеспечения двойной точности вычислений достаточно использовать сумму первых десяти членов получившихся после интегрирования степенных рядов по k . Отметим, что при $|k| \rightarrow 1$ вычисление интегралов (40) и (41) с помощью квадратурных формул Гаусса неэффективно из-за существенной потери точности.

5. Численное тестирование алгоритма на примере задачи Эйнфельдта

Задача Эйнфельдта [13, 17] о распространении двух симметричных волн разрежения в противоположные стороны выбрана в качестве модельного примера из-за одной своей особенности, связанной с поведением внутренней энергии на численном решении. Эта задача может быть решена точно как частный случай задачи распада разрыва. В качестве расчетной области используется отрезок $[0, 1]$. Разрыв располагается в центре этого отрезка - в точке $x = 0.5$. Начальные условия представлены в таблице 1.

Таблица 1

Задача	Левая область			Правая область			Расчетное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15

В процессе распространения волн разрежения в центре расчетной области образуется расширяющийся неподвижный участок с постоянными значениями плотности и давления газа, которые являются достаточно малыми. Поскольку выполняется уравнение состояния идеального газа (4), удельная внутренняя энергия остается постоянной на этом участке. Кроме этого, газодинамическое течение в задаче Эйнфельдта является изоэнтропическим: удельная энтропия остается константой во всей расчетной области в любой момент времени. Численные решения задачи Эйнфельдта на основе большинства известных методов неудовлетворительно передают поведение удельных внутренней энергии и энтропии. Как будет показано ниже, предложенный выше алгоритм существенно улучшает аппроксимацию этих термодинамических величин по

сравнению с известными методами. Причина этого, как мы полагаем, в выборе переменных интегрирования.

В работе [13] была предложена энтропийно устойчивая версия РМГ для газодинамических задач, в которой уравнения Эйлера численно интегрировались в консервативных переменных (9): плотность, плотность импульса, плотность полной энергии. Так же как и в настоящей работе, в целях монотонизации КЭ-аппроксимаций решения в отношении консервативных переменных применялись ограничения наклонов вида (29). Положительный параметр δ управляет "чувствительностью" метода. С его увеличением аппроксимация численного решения улучшается. Однако чрезмерное увеличение δ приводит к появлению паразитных осцилляций в численном решении. Для версии РМГ работы [13] оптимальным значением указанного параметра является значение $\delta \approx 1$. Отметим, что при $\delta = 1$ КЭ-аппроксимации обладают свойством монотонности, т.е. они преобразуют монотонную функцию в монотонную КЭ-аппроксимацию этой функции с тем же самым направлением монотонности [13]. Численное решение задачи Эйнфельдта в консервативных переменных представлено на рис. 1

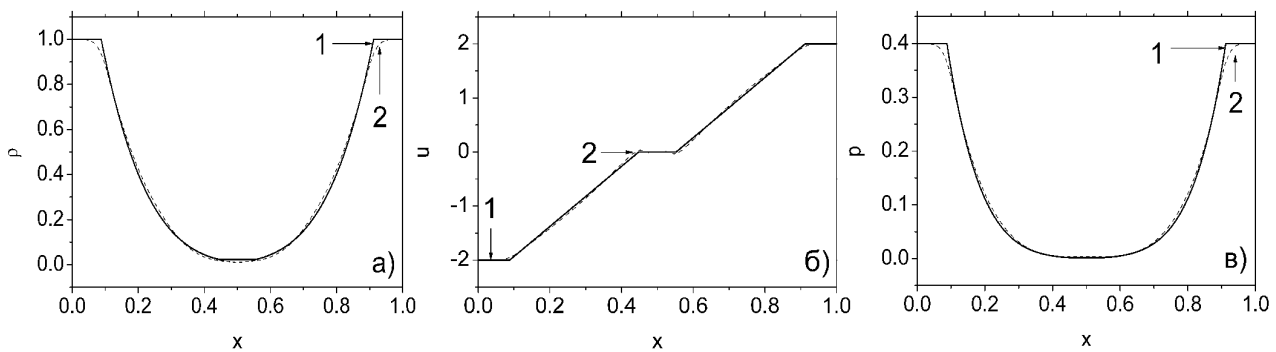


Рис. 1. Распределения а) плотности, б) скорости и в) давления для задачи Эйнфельдта в момент времени $t = 0.15$: 1 – точное решение; 2 – численное решение, полученное по методу работы [13] с $N = 200$ расчетными ячейками. Используется ограничитель наклонов при $\delta = 1$.

Приближенное решение на рис. 1 в целом неплохо передает зависимости плотности, скорости и давления газа, однако оно является сглаженным в области угловых точек профиля точного решения. Как видно из рис. 2, увеличение значения параметра δ несколько уменьшает сглаживание, но ведет к появлению осцилляций на профиле скорости (рис. 2б).

Существенное улучшение аппроксимации происходит, когда применяется энтропийно устойчивая версия РМГ в переменных (15), разработанная в пп. 3 и 4 настоящей работы. Как оказалось, в новых переменных возрастает устойчивость метода по отношению к паразитным осцилляциям и достигается более высокая точность численного решения.

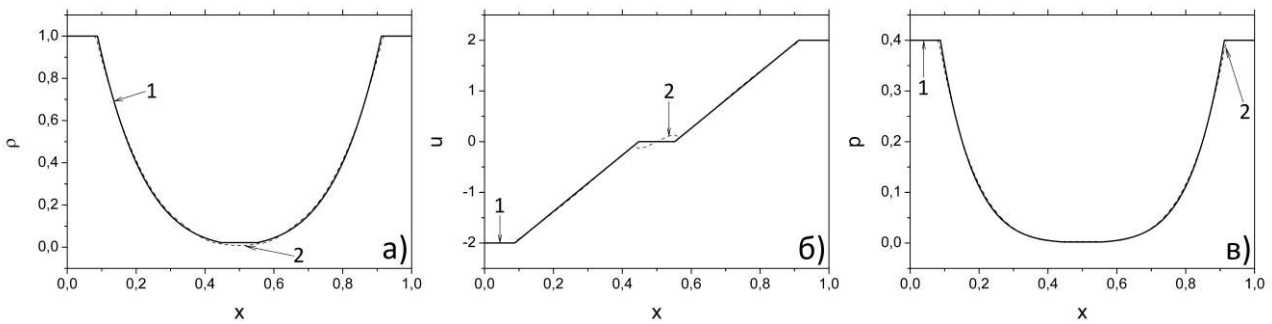


Рис. 2. Распределения а) плотности, б) скорости и в) давления для задачи Эйнфельда в момент времени $t = 0.15$: 1 – точное решение; 2 – численное решение, полученное по методу работы [13] с $N = 200$ расчетными ячейками. Используется ограничитель наклонов при $\delta = 2$.

Соответствующие точное и численное решения задачи Эйнфельда представлены на рис. 3.

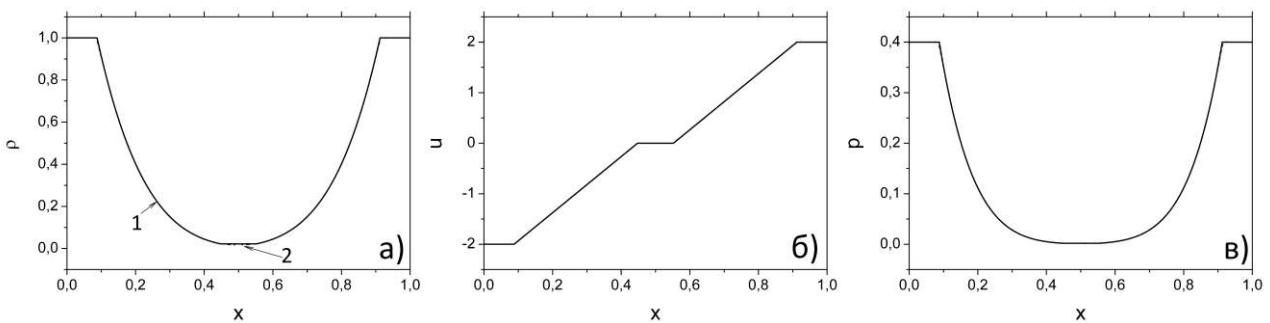


Рис. 3. Распределения а) плотности, б) скорости и в) давления для задачи Эйнфельда в момент времени $t = 0.15$: 1 – точное решение; 2 – численное решение, полученное по энтропийно устойчивой версии РМГ в переменных (15) с $N = 200$ расчетными ячейками. Используется ограничитель наклонов при $\delta = 2$.

В предлагаемой версии РМГ новый выбор переменных интегрирования (15) позволяет достичь большей точности за счет увеличения параметра "чувствительности" δ до значения 2. При этом паразитные осцилляции практически не проявляются, а визуальные отличия численного и точного решений между собой минимальны, так что пометить численное решение на рис. 3а и 3б не представляется возможным.

Наиболее показательными являются зависимости удельных внутренней энергии (ϵ) и энтропии (s). Сравним сначала профили внутренней энергии, полученные обоими методами для различного числа расчетных ячеек (см. рис. 4).

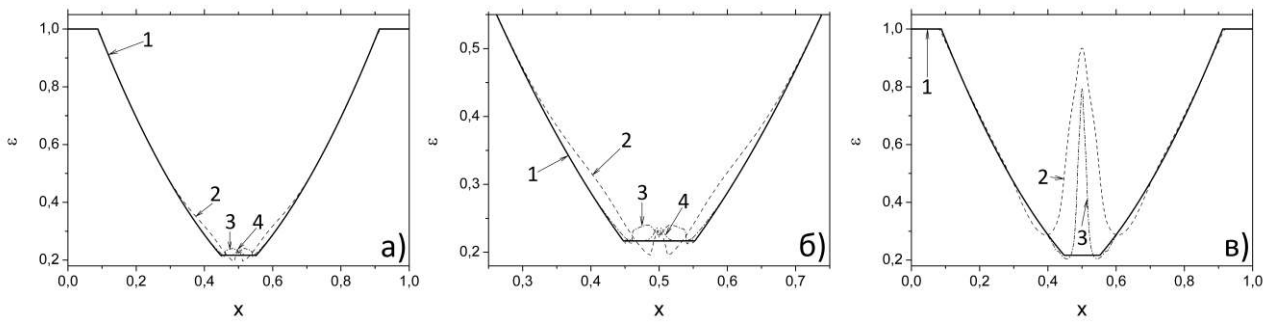


Рис. 4. Распределения удельной внутренней энергии в момент времени $t = 0.15$ ($\delta = 2$), полученные по энтропийно устойчивым версиям РМГ: а) и б) версия настоящей работы в переменных (15); в) по методу работы [13] в переменных (9) (1 – точное решение, 2 – 200 расчетных ячеек, 3 – 1000 расчетных ячеек, 4 – 5000 расчетных ячеек).

Несмотря на то что практически полного визуального совпадения приближенной и точной зависимостей внутренней энергии достичь не удалось, как это имело место в случае рис. 3 для примитивных переменных, тем не менее имеет место качественное различие между результатами обоих методов. На рис. 4б показан увеличенный фрагмент рис. 4а (расмариваемая в настоящей работе версия РМГ), относящийся к центральной части расчетной области, в которой погрешность приближенного решения максимальна. Отметим, что с увеличением числа расчетных ячеек точность аппроксимации внутренней энергии возрастает: область максимального отклонения приближенного решения от точного сужается, а амплитуда отклонения уменьшается. В целом численное решение намного лучше отображает истинное поведение внутренней энергии по сравнению с известными методами. Переходя к рис. 4в, где представлены результаты расчетов по методу работы [13], можно отметить наличие нефизического пика внутренней энергии в центре расчетной области. С увеличением числа расчетных ячеек ширина пика сужается, но его амплитуда все же остается значительной. Численный профиль внутренней энергии на рис. 4в сильно отличается от профиля точного решения и является типичным для методов расчета, использующих консервативные переменные.

Перейдем к рассмотрению зависимостей удельной энтропии и производства энтропии (имеется ввиду дискретный аналог P_s энтропийного неравенства (5), рассмотренный в работе [13]), изображенных на рис.5. Рис. 5а показывает существенно различное поведение удельной энтропии s для двух рассматриваемых наборов переменных $\mathbf{U} = (\rho, I, E)^T$ и $\mathbf{V} = (\rho, I, p)^T$. Обе энтропийно устойчивые версии РМГ характеризуются нефизическим поведением энтропии в центре расчетной области, причем в обоих случаях протяженность участка нефизического поведения примерно одинакова. Однако

отклонения численной энтропии от постоянного значения, отвечающего точному решению, сильно отличаются друг от друга.

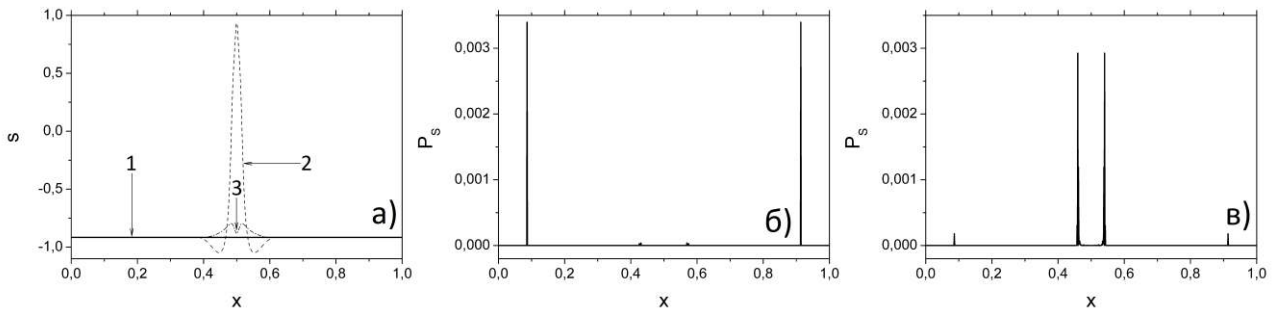


Рис. 5. Удельная энтропия и производство энтропии в момент времени $t = 0.15$ ($\delta = 2$, $N = 1000$ расчетных ячеек): а) распределения удельной энтропии: 1 – точное решение, 2 – энтропийно устойчивая версия РМГ работы [13], 3 – энтропийно устойчивая версия РМГ настоящей работы; б) производство энтропии по методу работы [13]; в) производство энтропии по методу настоящей работы.

Численное решение по методу настоящей работы имеет намного большую точность вычисления энтропии, чем в случае использования консервативных переменных. Что касается производства энтропии P_s (рис. 5б и 5в), то для точного решения оно равно нулю. Вместо этого обе энтропийно устойчивые версии РМГ обеспечивают неотрицательное производство энтропии вместо нулевого. Из представленных на рис. 5б и 5в зависимостей видно, что положительное численное производство энтропии имеет место лишь в отдельных точках. Негативный кумулятивный эффект избыточного численного производства энтропии выражается в численных погрешностях вычисления энтропии и внутренней энергии, но он существенно больше для случая консервативных переменных (ρ, I, E) , чем для переменных (ρ, I, p) .

6. Заключение

1. Впервые сформулирован вариационный принцип энтропийной регуляризации разрывного метода Галеркина для одномерных уравнений газовой динамики в нетрадиционных переменных: плотность, плотность импульса и давление.

2. Предложенный метод энтропийной регуляризации РМГ показал существенное улучшение качества численного решения задачи Эйнфельда: точность воспроизведения профилей удельных внутренней энергии и энтропии намного лучше по сравнению с другими методами, использующими консервативные переменные.

3. Основной причиной повышения точности численного решения задачи Эйнфельдта, на взгляд авторов, является именно использование новых переменных. Обратим внимание на то, что пара переменных *плотность* и *давление* полностью определяет термодинамическое состояние рассматриваемой частицы сплошной среды. В отличие от случая консервативных переменных, когда вместо давления используется полная энергия, выбранные переменные позволяют более точно аппроксимировать термодинамические свойства газа. При использовании полной энергии как переменной интегрирования сложно обеспечить правильный баланс между внутренней и кинетической энергиями, из которых складывается полная энергия.

Список литературы

1. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – Vol. 21. – P. 217–235.
2. Bouchut F., Bourdarias C., Perthame B. A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities // Math. Comput. – 1996. – Vol. 65. – P. 1439–1461.
3. Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems // Acta Numerica. – 2003. – P. 451–512.
4. Ismail F., Roe P. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: Entropy production at shocks // J. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 228. – P. 5410–5436.
5. Chandrashekar P. Kinetic energy preserving and entropy stable finite volume schemes for compressible Euler and Navier–Stokes equations // Commun. Comput. Phys. – 2013. – Vol. 14, no. 5. – P. 1252–1286.
6. Fjordholm U.S., Mishra S., Tadmor E. Arbitrarily high order accurate entropy stable essentially nonoscillatory schemes for systems of conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. – 2012. – Vol. 50, no. 2. – P. 544–573.
7. Cheng X., Nie Y. A third-order entropy stable scheme for hyperbolic conservation laws // J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2016. — Vol. 13, no. 1. — P. 129–145.
8. Tadmor E. Entropy stable schemes // Handbook of Numerical Analysis. – 2016. – Vol. 17. — P. 467–493.
9. Злотник А.А. Энтروпийно консервативная пространственная дискретизация многомерной квазигазодинамической системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2017. – Т. 57, № 4. – С. 710–729.
10. Gassner G.J., Winters A.R., Kopriva D.A. A well balanced and entropy conservative discontinuous Galerkin spectral element method for the shallow water equations // Appl. Math. Comput. – 2016. – Vol. 272. – P. 291–308.
11. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринты

- ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 100. 22 с. doi:10.20948/prepr-2018-100
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-100>
12. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 18. 25 с. doi:10.20948/prepr-2019-18
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-18>
 13. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 51. 22 с. doi:10.20948/prepr-2019-51 URL:<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-51>
 14. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики // Матем. моделирование. – 2019. – Т. 31, № 5. – С. 69–84.
 15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 736 с.
 16. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems // Lecture Notes in Mathematics, 1997, Vol. 1697. P. 150–268.
 17. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 89. 32 с. doi:10.20948/prepr-2017-89
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>
 18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование.– 2012. – Т. 24, № 12. – С. 124–128.
 19. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., Утиралов Д.И. Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 32. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-32>
 20. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 49. 10 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49>
 21. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 7. – С. 899–907.
 22. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук. – 2015. – Т. 461, № 4. – С. 390-393.
 23. Тишкин В.Ф., Жуков В.Т., Мышецкая Е.Е. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 2. – С. 86–96.

24. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogren B. On Godunov-type methods near low densities // *Journal of Computational Physics*. 1991. V. 92, no. 2. P. 273–295.
25. Robinson A. C. et. al. ALEGRA: An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Multimaterial, Multiphysics Code. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 7 - 10 January 2008, Reno, Nevada, AIAA 2008-1235, <https://doi.org/10.2514/6.2008-1235>.
26. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
27. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966, 228 с.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Постановка задачи.....	4
3. Разрывный метод Галеркина как основа для построения численного алгоритма.....	5
4. Вариационная энтропийная регуляризация РМГ	8
5. Численное тестирование алгоритма на примере задачи Эйнфельдта	10
6. Заключение.....	18
Список литературы.....	19